T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

[-1,1] ARALIĞINDA BERNSTEİN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Ayşegül ÇİLO

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2012

Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ'nin danışmanlığında, Ayşegül ÇİLO' nun hazırladığı " [-1,1] Aralığında Bernstein Polinomlarının Yaklaşım Özellikleri ve Yaklaşım Hızı" Konulu bu çalışma 18.07.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ

Üye: Doç. Dr. Seyit TEMİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mine Menekşe YILMAZ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Mehmet CİCİ

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Öz

Yüksek Lisans Tezi

[-1,1] ARALIĞINDA BERNSTEİN POLİNOMLARININ YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Ayşegül ÇİLO

Harran Ünivrsitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matemetik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ
Yıl:2012, Sayfa: 55

Bu çalışmada; polinomlar yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşılabileceği düşüncesi istikametinde geliştirilen çalışmalardan bahsedilmiş olup bu tür bir polinom olan ve S.N.Bernstein tarafından tanımlanan Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Bernstein polinomunun modifikasyonu ile elde ettiğimiz; $x \in [-1,1]$olmak üzere$C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)$ şeklinde tanımladığımız lineer pozitif operatörün yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiş; momentleri ve asimptotik yaklaşımı hesaplanmıştır. Bunlara ek olarak $C_n(f;x)$ operatörüne ait yaklaşım bir grafik yardımıyla gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatörler, Bernstein polinomları, Süreklilik modülü, Yaklaşım hızı, Korovkin teoremi

ABSTRACT

Master Thesis

IN [-1,1] RANGES BERNSTEIN POLYNOMIALS APPROACH PROPERTIES AND APPROACH SPEED

Ayşegül ÇİLO

Harran University
Institute of Science and Technology
Department of Mathematics

Supervisor: Assist Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2012, Page: 55

In this study; certain work developed by thinking of that it might be possible to approach to the continuous functions with the help of polynomials were stated. Approach properties of Bernstein polynomials defined by S.N. Bernstein, which is one of these kind of polynomials were examined. Additionally, approach properties and speed of linear pozitive operator defined as $x \in [-1,1]$ and $C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)$ which we obtained by a modification of Bernstein polynomial have been examined; moments and asymptotic approach have been calculated. An addition to these, approach to the $C_n(f;x)$ operatör was shown by graphical help.

KEY WORDS: Linear positive operators, Bernstein polynomials, modulus of continuity, Approximation rate, Korovkin theorem

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi aşamasında ve çalışmalarım boyunca fikir ve yönlendirmeleriyle maddi-manevi desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, sayın Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ' ye, eğitim hayatım boyunca maddi-manevi desteğini gördüğüm annem Sultan ÇİLO, babam Hasan ÇİLO, kardeşlerim Emine ÇOKGÜLER, Ruhi ve Rıfat ÇİLO, eğitim hayatımdaki vazgeçilemez yönlendirmelerinden ve desteklerinden dolayı amcalarıma (Ali, Ahmet, Faruk, Mahmut, Süleyman ve Rüstem ÇİLO), manevi desteklerinden dolayı arkadaşlarım Zeynep KASIRGA ve Serap EBABİL'e ve tez çalışmam boyunca bana gösterdikleri sonsuz anlayışlarından dolayı değerli mesai arkadaşlarım, Ebubekir ÇİFTÇİ, Deniz AYHAN, Bahri KILIÇ, Bünyamin AKŞAHİN, Remzi GÖZYUMAN, Mehmet KAYA'ya ve birim sorumlularım Dr. Murat YEŞİLBAŞ, Cevdet ÖZEN, Barbaros ERDAL, Abdurrahman DAĞDELEN, Mehmet Şahin TATAR, ve Op. Dr. İbrahim Ethem ÖZSOY'a teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

$C_n(f;x)$	n∈ N ve $x \in [-1,1]$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$B_n(f;x)$	Bernstein polinom dizisi.
$K_n(f;x)$	Kantoroviç polinom dizisi.
$C[a,b]$	Bir $[a,b]$aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı.
$C^2[a,b]$	$f, f', f'' \in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı.
$f_n(x)$	n∈ N olmak üzere bir fonksiyon dizisi.
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$\gamma_{n,k}(x)$	k-yıncı merkezi moment.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.

GİRİŞ

Yaklaşım teorisi; nitelikleri daha az bilinen (çalışılması zor olan) bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen (çalışılması daha kolay olan, örneğin polinomlar gibi) ve daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi ve bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir sorularına cevap arayan çalışmaları kapsamaktadır. Bu anlamda 19. yüzyıldan günümüze kadar bir çok matematikçi, fonksiyonlar teorisinde de geniş uygulama alanına sahip olan, bu teori üzerinde çalışmalar yapmıştır. İlk olarak Rus matematikçi P.L. Chebyshev, sürekli bir f fonksiyonunu n dereceli (n yeterince büyük) bir $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu ile temsil edibilir mi problemi üzerinde çalışmalar yapmıştır. Daha sonra 1885 yılında Alman matemaikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, cebirsel ve trigonometrik polinomlarla sürekli fonksiyonlara [a,b] gibi kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde yaklaşım sağlanacağını ifade ve ispat etmiştir (Pinkus, 2000).

1912 yılında Rus Matematikçi S.N.Bernstein, Weierstrass' ın teoreminin ispatı için $x \in [0,1]$ olmak üzere toplam biçiminde tanımladığı polinom aşağıdaki şekildedir.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Bernstein, tanımladığı ve kendi adıyla anılan bu polinomlarla [0,1] aralığında tanımlı ve sürekli f fonksiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır (Bernstein, 1912; Lorentz, 1953).

1932 yılında Voronowskaja; [0,1] aralığında sınırlı ve belli bir x noktasında 2. türeve sahip bir $f(x)$ fonksiyonunun asimptotik yaklaşımını hesaplamıştır (Lorentz, 1953).

1935 yılında T.Popoviciu tarafından, f fonksiyonunun süreklilik modülü hesaplanmıştır.

1953 yılında ise P.P.Korovkin, yaklaşım teorisinde kendi adıyla bilinen ve önemli bir yere sahip olan teoremi ifade ve ispat etmiştir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995). Bu aşamadan sonra, Korovkin teoremin şartlarını sağlayan Bernstein polinomları ile ilgili çalışmalar hız kazanmıştır.

Bu çalışmada,

$$C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right), \qquad -1 \le x \le 1$$

şeklinde [-1,1] simetrik aralığı üzerinde tanımlanan operatörün lineer pozitif olduğu, Korovkin Teoremi şartlarını sağladığı, [-1, 1] aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş ve momentleri, asimptotik yaklaşımı ve süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı, hesaplanmıştır. Daha sonra $C_n(f;x)$ operatörü ile f fonksiyonuna yaklaşım farklı iki fonksiyon için grafik yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak da seçilen bir fonksiyona yaklaşımın bazı n ve x değerleri için nümerik değerler çizelgesi hazırlanmıştır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde lineer pozitif operatörlerin tanımı yapılacak, sağladığı temel özelliklere değinilecektir ve bu çalışma sırasında kullanacağımız bazı tanımlar verilecektir. Ayrıca burada vereceğimiz tanımlar genel halde geçerli tanımlar olduğu için pek çoğunda kaynak belirtilmemiştir.

Tanım 1.1.1.

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere; $L : X \to Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere *operatör* adı verilir.

Tanım 1.1.2.

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere;

$$L : X \to Y$$

şeklindeki L operatörü $\forall f, g \in X \ ve \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, için$;

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliği sağlanıyorsa o takdirde L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 1.1.3.

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olsun ve kabul edelimki $X^+ = \{f \in X, f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y, g(x) \geq 0\}$ olsun. Eğer X ten Y ye tanımlanmış L operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki bir dönüştürüyor ise o takdirde L operatörüne *pozitif operatör* denir.

Hem lineerlik ve hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatöre *lineer pozitif operatör* denir.

Özellik 1.1.1.

Lineer pozitif operatör monoton artandır. Yani;

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow L\,(g(x);x) \geq L(f(x);x)$$

eşitsizliğini sağlanır.

İspat 1.1.1.

L lineer pozitif operatörü için $L(X^{+}) \subset Y^{+}$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur. O halde her x için,

$$f(x) \leq g(x)$$

olduğunda,

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

olur; L operatörü pozitif olduğundan;

$$L(g(x) - f(x);x) \geq 0$$

L operatörü lineer olduğundan;

$$L(g(x);x) - L(f(x);x) \geq 0 \;\Rightarrow\; L\,(g(x);x) \geq L(f(x);x)$$

sağlanır ve ispat tamamlanmış olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Özellik 1.1.2.

L bir lineer pozitif operatör olmak üzere; $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat 1.1.2.

Herhangi bir f fonksiyonu için;

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{1.1.1}$$

dir. L operatörü lineer olduğundan (Özellik 1.1.1)'den dolayı monoton artandır. O halde;

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazabiliriz. L lineer olduğundan ;

$$L(-|f|) = -L(|f|)$$

dir. Elde edilen bu eşitlik (1.1.1)'de yerine yazılırsa;

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \quad \Rightarrow \quad |L(f)| \leq L(|f|)$$

olur ki buda ispatı tamamlar (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.4.

$l = \{L: C[a,b] \to C[a,b] : L$ lineer pozitif operatör$\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ olsun. $L: \mathbb{N} \to l$ şeklinde tanımlı L fonksiyonuna lineer pozitif operatör dizisi adı verilir ve (L_n) şeklinde gösterilir. $L(\mathbb{N}) = (L_1, L_2, \dots)$ şeklindedir.

Tanım 1.1.5.

$X \subset R$ *ve* X üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$ olsun,

$$d: N \to F(X)$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir ve terimleri $f_1, f_2, f_{3,\dots}$ ile, dizi ise (f_n) ile gösterilir.

Tanım 1.1.6.

Kapalı bir [a,b] aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm gerçel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ *fonksiyon uzayı* denir.

Tanım 1.1.7.

$A \subset \mathbb{R}$, $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir (Mustafa BALCI, 1999).

Tanım 1.1.8.

$X \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun, eğer, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.9.

$f \in C[a, b]$ olmak üzere $C[a, b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = maks_{a \le x \le b}|f(x)|$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.10.

(f_n), $C[a, b]$ fonksiyon uzayında tanımlı bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere; (f_n) fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda *düzgün yakınsak* olması için tanım kümesindeki $\forall x \in A$ için;

$$lim_{n \to \infty}\|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

yada başka bir ifade ile;

$$lim_{n \to \infty} maks_{a \le x \le b}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliklerinin sağlanması demektir. Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.11.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $t,x \in (a,b)$ olmak üzere $lim_{t \to x} = \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = A(x)$ sonlu limiti var ise be $A(x)$ sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$, $Df(x)$ veya $\frac{df(x)}{dz}$ şekillerinde gösterilir. Bu durumda f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir denir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.12.

$n \geq 1$ olmak üzere P_n, n-inci dereceden bir polinom ve f ile g de $x = 0$ noktasında n-inci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$$lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

olmak üzere;

$$f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$$

yazılabiliyorsa P_n polinomuna $x = 0$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen *Taylor polinomu* denir.

Tanım 1.1.13.

f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen *Taylor serisi* denir.

Tanım 1.1.14.

$L : X^+ \to Y^+$ operatörü verilsin. Eğer;

$$\forall f \in X \text{ için } \|L(f;x)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

olacak şekilde $C \geq 0$ sayısı varsa L operatörüne *sınırlı operatör* denir.

Teorem 1.1.1.

$p > 1$ ve $q > 0$ reel sayıları

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

şartını sağlasın. Bu durumda $\forall\,(a_k) \in l_p$, $\forall\,(b_k) \in l_q$ dizileri için;

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine *Hölder eşitsizliği* denir. Burada $p = q = 2$ için bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinir.

19. yüzyıldan günümüze kadar bir çok matematikçi tarafından, çalışılması zor olan bir fonksiyona, çalışılması daha kolay olan (örneğin polinomlar gibi) ve daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi ve bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir sorularına cevap arayan çalışmalar yapılmıştır. Bu anlamda Alman matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, [a,b] gibi kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını iddia ve ispat etmiştir (Pinkus, 2000).

1912 yılında, Weierstrass'ın varlığını iddia ettiği bu polinomun özelliklerini sağlayan bir polinom; Rus Matematikçi S.N.Bernstein tarafından toplam şeklinde aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Lorentz, 1953).

$x \in [0,1]$ için;

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} \mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} x^k(1-x)^{n-k}$$

1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin, [0,1] aralığında sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsaklığını incelemiştir. Bu çalışmalar sonucunda H.Bohman aşağıdaki teoremi iddia etmiştir.

Teorem 1.1.2.

$x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{K=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x)\,, \quad P_{k,n}(x) \geq 0$$

Pozitif operatör dizisinin $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşulları üç tanedir. H.Bohman bunları;

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{1.1.2}$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{1.1.3}$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{1.1.4}$$

şeklinde ifade etmiştir.

Aşikardır ki Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun [0,1] aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P.P. Korovkin, Bohman'ın koşullarının genel halde de geçerli olduğunu görmüş ve genel bir teorem ispatlamıştır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995; Korovkin, 1953).

Teorem 1.1.3. (P.P.Korovkin Teoremi):

Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi [a,b] aralığında (1.1.2), (1.1.3) ve (1.1.4) koşullarını gerçekliyorsa o takdirde $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı her hangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)\,, \qquad a \leq x \leq b$$

olur. Yada bu ifadeye eşdeğer olarak aşağıdaki gösterimler de kullanabilir.

$$\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$lim_{n\to\infty} maks_{a\le x\le b}|L_n(f;x) - f(x)| = 0$$

İspat 1.1.3.

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir $M > 0$ sayısı bulunabilir ki, tüm x-ler için;

$$|f(x)| \le M \tag{1.1.5}$$

sağlanır. Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki, $t \in (-\infty, +\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için, $|t-x| < \delta$ olduğunda;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.1.6}$$

sağlanır.

(1.1.6) eşitsizliği; $x, t \in [a,b]$ olduğunda f fonksiyonu [a,b] de sürekli olduğu için, $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise f fonksiyonu a ve b noktalarında, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için sağlanır.

$\forall x \in [a,b]$; $|f(x)| \le M \quad M > 0$ vardır.

$|t-x| \ge \delta \Rightarrow \frac{|t-x|}{\delta} \ge 1 \Rightarrow 1 \le \frac{|t-x|}{\delta} \le \frac{|t-x|^2}{\delta^2}$

$|t-x| \ge \delta$ olduğunda ise (1.1.5) ve üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(t) - f(x)| \le |f(t)| + |f(x)| \le 2M \le 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

olur. O halde;

$$|t-x| < \delta \; için \; |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t-x| \ge \delta \; için \; |f(t) - f(x)| \le 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için,

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \tag{1.1.7}$$

dir. Şimdi (1.1.2), (1.1.3) ve (1.1.4) koşullarını gerçekleyen (L_n) lineer operatör dizisinin,

$$lim_{n\to\infty}\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığını gösterilmelidir.

(L_n) operatörünün lineerliğinden;

$$\begin{aligned}|L_n(f(t);x) - f(x)| &= |L_n(f(t);x) - f(x) + L_n(f(x);x) - L_n(f(x);x)|\\ &= |L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)|\\ &= |L_n(f(t) - f(x)\,;\,x) + f(x)(L_n(1;x) - 1)|\end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğini kullanarak;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \le |L_n(f(t) - f(x)\,;\,x)| + |f(x)||(L_n(1;x) - 1)| \tag{1.1.8}$$

elde ederiz. (Özellik 1.1.2.)'den;

$$|L_n(f(t) - f(x);x)| \le |L_n(|f(t) - f(x)|\,;\,x)|$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (Özellik 1.1.2.) ve (1.1.5)'den dolayı (1.1.8) eşitsizliği;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \le L_n(|f(t) - f(x)|\,;x) + M\,|(L_n(1;x) - 1)|$$

olarak yazılabilir. (L_n) monoton artan olduğundan (1.1.7)'den;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \le L_n\left(\left(\epsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right);x\right) + M\,|(L_n(1;x) - 1)| \tag{1.1.9}$$

elde edilir. Öte yandan L_n lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned}L_n\left(\left(\epsilon + 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right);x\right) &= L_n(\varepsilon;\,x) + L_n\left(2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2};\,x\right)\\ &= \varepsilon L_n(1;\,x) + 2\frac{M}{\delta^2}L_n(t^2 - 2xt + x^2;x)\\ &= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;\,x) + x^2L_n(1;\,x)\}\end{aligned}$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x) - x^2\}$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) - 2x(L_n(t;x) - x) + x^2(L_n(1;x) - 1)\}$$

elde edilir. Bu ifadenin (1.1.9)' da yerine yazılmasıyla;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \\ \leq \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) - 2x(L_n(t;x) - x) + x^2(L_n(1;x) - 1)\} \\ + M|L_n(1;x) - 1|$$

elde edilen bu ifade de (1.1.2), (1.1.3) ve (1.1.4) koşullarının kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon 2\frac{M}{\delta^2} = \varepsilon\left(1 + 2\frac{M}{\delta^2}\right)$$

elde edilen bu ifadeyi $\forall\, \varepsilon' > 0$ için

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon'$$

sağlanır. Yani;

$$lim_{n\to\infty}\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur (Korovkin, 1953; Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Özellik 1.1.3.

$x \in [0,1]$ için; $B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ olarak tanımlan Bernstein polinomları için,

$$B_n(1;x) = 1$$

$$B_n(t;x) = x$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

eşitlikleri sağlanır, bu durumda $(n \to \infty)$ için, $B_n(1;\, x) \rightrightarrows 1$, $B_n(t;\, x) \rightrightarrows x$ ve $B_n(t^2;\, x) \rightrightarrows x^2$ olacağından, Korovkin'in (1.1.2), (1.1.3) ve (1.1.4) şartlarını sağlar.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Yaklaşım teorisi alanındaki çalışmalar; ilk olarak Rus matematikçi P.L. Chebyshev' in ilgi alanı olan mekanizmaların yapıları kapsamında buhar makineleri ile ilgili incelemelerinde;

$n > 0$ ve bir [a,b] kapalı aralığında tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonu verilmek üzere; bu f fonksiyonunu herhangi bir noktasında maksimum n dereceli (n yeterince büyük) bir $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu ile temsil edebilir mi sorusunun cevabını aramasıyla başlamıştır.

1885 yılında Alman matemaikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, cebirsel ve trigonometrik polinomlarla sürekli fonksiyonlara yaklaşılanileceğini ifade ve ispat etmiştir. Yaklaşım teorisinin temel teoremini oluşturan bu ifade aşağıda belirtilmiştir.

$C[a,b]$ sınıfından verilen her f fonksiyonu için keyfi bir $\varepsilon > 0$ cebirsel sayısı ve $\forall x \in [a,b]$ için;

$$|p_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu vardır (Pinkus, 2000).

1912 yılında Rus Matematikçi S.N.Bernstein, Weierstrass'ın bu polinomunun $x \in [0,1]$ için,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

biçiminde olduğunu göstermiştir. Bernstein, tanımladığı ve kendi adıyla anılan bu polinomlarla [0,1] aralığında tanımlı ve sürekli f fonksiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995; Lorentz, 1953).

Sonraki yıllarda da Bernstein polinomları üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bernstein polinomlarının; sayısal analiz, fonksiyonlar teorisi, geometri, fizik, jeodezi, mühendislik, tıp (görüntüleme sistemleri ve protez) bilimleri gibi bir çok uygulama alanı mevcuttur.

1932 yılında Voronowskaja tarafından Bernstein polinomları için; $f(x)$ fonksiyonu [0,1] aralığında sınırlı ve belli bir x noktasında 2. türeve sahip ise;

$$lim_{n\to\infty} n[B_n\ (f;x) - f(x)] = \frac{-x(1-x)}{2} f''(x)$$

eşitliğinin sağlandığı (asimptotik yaklaşım) gösterilmiştir (Lorentz, 1953).

1935 yılında T.Popoviciu tarafından Bernstein polinomları için; $\omega(f;\delta)$ ile f fonksiyonunun süreklilik modülü gösterilmek üzere;

$$|f(x) - B_n\ (f;x)| \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olduğu gösterilmiştir.

1953 yılında Rus iktisatçı ve matematikçi Leonid Vitaliyeviç Kantoroviç, integrallenebilir fonksiyonlar için Bernstein polinomları üzerinde çalışmalar yapmış ve Bernstein polinomlarını integrallenebilir fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde tanımlamıştır;

$f \in L_1[0,1],\ \ p \geq 1\ \ ve\ \ \ x \in [0,1]$ için;

$$K_n: L_1([0,1]) \ \to\ C([0,1])$$

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

1953 yılında P.P.Korovkin, Weierstrass ve Bernstein teoremlerini lineer pozitif diziler için daha da geliştirerek, yaklaşım teorisinde kendi adıyla bilinen ve önemli bir yere sahip olan teoremi ifade ve ispat etmiştir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Bu çalışmada;

$$C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right), \qquad -1 \leq x \leq 1$$

şeklinde [-1,1] simetrik aralığı üzerinde tanımlanan operatörün lineer pozitif olduğu, Korovkin Teoremi şartlarını sağladığı, [-1, 1] aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğu gösterilmiş ve momentleri, asimptotik yaklaşımı ve süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Daha sonra $C_n(f;x)$ operatörü ile f fonksiyonuna yaklaşım farklı iki fonksiyon için grafik yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak da seçilen bir fonksiyona yaklaşımın bazı n ve x değerleri için nümerik değerler tablosu hazırlanmıştır.

$C_n(f;x)$ operatörüne benzer bir operatörü 2011 yılında Ashok Sahai, Bernstein polinomunun bir primal varyantı olarak aşağıdaki şekillerde ifade etmiştir;

$$B^P(f;x)[n] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k\left(\frac{1-x}{2}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Yine Bernstein polinomunun dual (-ağırlıklı) varyantını da aşağıdaki şekillerde tanımlamıştır (Sahai, 2011);

$$B^D(f;x)[n] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ancak; Ashok Sahai'nin Bernstein polinomunun farklı varyantlarından elde ettiği bu operatörlerle çalıştığı alan, bu çalışmada $C_n(f;x)$ olarak tanımlanan operatör ile çalışılan alandan tamamen farklı olduğu gibi, Ashok Sahai tarafından çalışılan operatörde, f içinde kullanılan düğüm noktaları k/n olup $k = 0,1,2,\dots,n$ için $[0,1]$ aralığında; $C_n(f;x)$ operatöründe ise düğüm noktaları $2(k/n)-1$ olup $k = 0,1,2,\dots,n$ için [-1, 1] aralığında olmaktadır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışma oluşturulurken konu ile alakalı belli başlı kaynak teşkil eden kitaplardan ve literatür taramasından elde edilen makalelerden istifade edilmiştir.

3.2. Yöntem

Bernstein polinomları ile ilgili daha önceden yapılmış olan bazı çalışmalar incelenmiş ve bu çalışmada ele alınan $C_n(f;x)$ operatörü ile benzer çalışmalar yapılmış. Yapılan çalışmalar, çalışmanın sonunda grafik ve nümerik değer tablosu ile desteklenmiştir.

Bu çalışmada bulunan grafikler, Mapple bilgisayar programı kullanılarak çizilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu böümde $C_n(f;x)$ operatörü tanımlanmış, bu operatörün lineer poizitif olduğu gösterilmiş ve Korovkin Teoremi şartlarını şağladığı gösterilmiştir. Daha sonra Voronowskaja'nın Bernstein polinomu için yaptığı asimptotik yaklaşım hesabı $C_n(f;x)$ operatörü için yapılmıştır.

Tanım 4.1.

Kabul edelim ki $x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ olsun,

$$C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $C_n(f;x)$ *operatörü* denir.

Öncelikle $C_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

Lineerlik;

$\forall f,g \in [-1,1]\, ve\ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\, için,$

$$\begin{aligned} C_n\left((\alpha f(t)+\beta g(t));x\right) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\alpha f\left(2\frac{k}{n}-1\right)+\beta g\left(2\frac{k}{n}-1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}(\alpha f)\left(2\frac{k}{n}-1\right) \\ &+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}(\beta g)\left(2\frac{k}{n}-1\right) \\ &= \alpha\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right) \\ &+\beta\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}g\left(2\frac{k}{n}-1\right) \\ &= \alpha C_n(f(t);x)+\beta C_n(g(t);x) \end{aligned}$$

olduğundan $C_n(f;x)$ lineer bir operatördür.

Pozitiflik; $k, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [-1,1]$ için $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $f \geq 0$ ise $C_n(f;x) \geq 0$ olur.

Sonuç olarak, $C_n(f;x)$ lineer pozitif bir operatördür.

Şimdi de;

$$C_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{4.1}$$

$$C_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{4.2}$$

$$C_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{4.3}$$

$$C_n(t^3;x) \rightrightarrows x^3 \tag{4.4}$$

$$C_n(t^4;x) \rightrightarrows x^4 \tag{4.5}$$

$C_n(f;x)$ operatörünün yukarıdaki ifadeleri sağladığı gösterilecektir.

$C_n(1;x) = 1$ olduğunu gösterelim;

$$C_n(1;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$

$$(1+x+1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$C_n(1;x) = \frac{1}{2^n}.2^n$$

$$C_n\ (1;x) = 1 \tag{4.6}$$

elde edilir. Yani $n \to \infty$ iken;

$$C_n(1;x) \rightrightarrows 1$$

olur ve (4.1)'in sağlandığı görülmüş olur.

$C_n(t;x) \rightrightarrows x$ olduğunu gösterelim;

$$C_n(t;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)$$
$$= 2.\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-\frac{1}{2^n}.2^n$$
$$= \frac{(1+x)}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}-1 = \frac{(1+x)}{2^{n-1}}.2^{n-1} = 1+x-1$$
$$= x$$

$$C_n(t;x) = x \tag{4.7}$$

elde edilir. Yani $n \to \infty$ iken;

$$C_n(t;x) \rightrightarrows x$$

olur ve (4.2)'nin sağlandığı görülmüş olur.

$C_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ olduğunu gösterelim;

$$C_n(t^2;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2$$
$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(4\frac{k^2}{n^2}-4\frac{k}{n}+1\right)$$

$$= \frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$
$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$

$$= \frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)+k}{n^2}-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+1$$

$$= \frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n^2} + \frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n^2}$$

$$-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+1$$

$$= \frac{4}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n^2}$$

$$+\frac{4}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n^2}$$

$$-\frac{4}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+1$$

$$= \frac{(n-1)4}{n2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^{k+2}(1-x)^{n-2-k}$$

$$+\frac{4}{n2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-1-k}$$

$$-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-1-k}+1$$

$$= \frac{(n-1)}{n}\frac{1}{2^{n-2}}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$+\frac{(1+x)}{n2^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$-\frac{(1+x)}{2^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}+1$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{(1+x)^2}{2^{n-2}}2^{n-2}+\frac{(1+x)}{n2^{n-2}}2^{n-1}-\frac{(1+x)}{2^{n-2}}2^{n-1}+1$$

$$= \left(\tfrac{n-1}{n}\right)(1+x)^2+\tfrac{2}{n}(1+x)-2(1+x)+1$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)(1+x)^2+2(1+x)\left(\frac{1}{n}-1\right)+1 = \left(\frac{n-1}{n}\right)(1+x)(1+x-2)+1$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)(1+x)(-1+x)+1 = \left(1-\frac{1}{n}\right)(x^2-1)+1 = x^2-1-\frac{x^2-1}{n}+1$$

$$= x^2+\frac{1-x^2}{n} = x^2+\frac{(1-x)(1+x)}{n}$$

$$C_n(t^2;x) = x^2+\frac{(1-x)(1+x)}{n} \tag{4.8}$$

elde edilir. Yani $n \to \infty$ iken;

$$C_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

olur ve (4.3)'ün sağlandığı görülmüş olur.

$C_n(t^3;x) \rightrightarrows x^3$ olduğunu gösterelim;

$$C_n(t^3;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)^3$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(8\frac{k^3}{n^3}-12\frac{k^2}{n^2}+6\frac{k}{n}-1\right)$$

$$= \frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^3}{n^3}-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}$$

$$+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$

$$= \frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)+3k^2-2k}{n^3}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$

$$= \frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}$$

$$+\frac{8}{2^n}3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^3}-\frac{8}{2^n}2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n^3}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-1$$

$$= \frac{8}{2^n}\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}(1+x)^k(1$$

$$-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}(x)\frac{k^2}{n^3}$$

$$-\frac{16}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n^3}-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}$$

$$+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}-1$$

$$=\frac{1}{2^{n-3}}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-3}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3-k)!\,k!}(1+x)^{k+3}(1-x)^{n-3-k}$$

$$+\frac{6}{n}\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}-\frac{8}{n^2}\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-3\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}+3\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-1$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2 2^{n-3}}(1+x)^3\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-3-k}\frac{6}{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)(1+x)^2\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n}(1+x)\right]-\frac{8}{n^2}(1+x)-3\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)(1+x)^2+\frac{2}{n}(1+x)\right]+3(1+x)-1$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2 2^{n-3}}(1+x)^3 2^{n-3}+\frac{6}{n^2}(n-1)(1+x)^2+\frac{12}{n^2}(1+x)-\frac{8}{n^2}(1+x)$$

$$-3\left(\frac{n-1}{n}\right)(1+x)^2-\frac{6}{n}(1+x)+3(1+x)-1$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1+x)^3+\frac{6}{n^2}(n-1)(1+x)^2+\frac{12}{n^2}(1+x)-\frac{8}{n^2}(1+x)$$

$$-3\left(\frac{n-1}{n}\right)(1+x)^2-\frac{6}{n}(1+x)+3(1+x)-1$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(x^3+3x^2+3x+1)+3\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}-1\right)(1+x)^2$$

$$+\frac{4}{n^2}(1+x)-\frac{6}{n}(1+x)+3x-2$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3+3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^2+3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}-\frac{3}{n^2}(n-1)(n-2)x^2-3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

$$-6\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x+\frac{2}{n}(1+x)\left(\frac{2}{n}-3\right)+(3x+2)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(x^3-3x-2)+\frac{2}{n}(1+x)\left(\frac{2-3n}{n}\right)+(3x+2)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(3x+2)+\frac{2}{n}\left(\frac{2-3n}{n}\right)(1+x)+(3x+2)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3-\left[\frac{n^2-3n+2}{n^2}-1\right](3x+2)+\frac{2}{n}\left(\frac{2-3n}{n}\right)(1+x)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3-\left[\frac{n^2-3n+2-n^2}{n^2}\right](3x+2)+\frac{2}{n^2}(1+x)(2-3n)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3-\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)(3x+2)+2\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)(1+x)$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3+\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)(-3x-2+2+2x)$$

$$=\frac{n^2-3n+2}{n^2}x^3+\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)(-x)=x^3+\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)x^3-\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)x$$

$$=x^3+\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)(x^3-x)=x^3+\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)x(x-1)(x+1)$$

$$C_n(t^3;x)=x^3+\left(\frac{3n-2}{n^2}\right)x(1-x)(1+x) \tag{4.9}$$

de edilir. Yani $n\to\infty$ iken;

$$C_n(t^3;x)\rightrightarrows x^3$$

olur ve (4.4)'ün sağlandığı görülmüş olur.

$C_n(t^4;x)\rightrightarrows x^4$ olduğunu gösterelim;

$$C_n(t^4;x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)^4$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[16\frac{k^4}{n^4}-32\frac{k^3}{n^3}+24\frac{k^2}{n^2}-8\frac{k}{n}+1\right]$$

$$=16\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^4}{n^4}-32\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^3}{n^3}$$

$$+24\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k^2}{n^2}-8\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$

$$=16\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)+6k^3-11k^2+6k}{n^4}$$

$$-32\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)+3k^2-2k}{n^3}$$

$$+24\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)+k}{n^2}$$

$$-8\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+1$$

$$=16\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{n^4}$$

$$+\frac{16.6}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)+3k^2-2k}{n^3}$$

$$-\frac{16.11}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)+k}{n^2}$$

$$=\frac{16}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{n}$$

$$+\frac{96}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n}$$

$$+\frac{288}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$+\frac{288}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-\frac{192}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+\frac{96}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{32}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n}$$

$$-\frac{32.3}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{32.3}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+\frac{32.2}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-8\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+1$$

$$=\frac{16}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=4}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}(1+x)^k(1$$

$$-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{n}$$

$$+\frac{96}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}(1+x)^k(1$$

$$-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n}$$

$$+\frac{288}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$+\frac{288}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{192}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{96}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{32}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n}$$

$$-\frac{96}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{96}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{64}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-8\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+1$$

$$=16\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}(1+x)^4\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-4}\binom{n-4}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-4-k}$$

$$+96\frac{(n-1)(n-2)}{n^3}(1+x)^3\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-3-k}$$

$$+288\frac{(n-1)}{n^3}(1+x)^2\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$+\frac{288}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-\frac{192}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+\frac{96}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{32}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n}$$

$$-\frac{32.3}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{32.3}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+\frac{32.2}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}-8\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+1$$

$$=\frac{16}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=4}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}(1+x)^k(1$$
$$-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{n}$$

$$+\frac{96}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}(1+x)^k(1$$
$$-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n}$$

$$+\frac{288}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$+\frac{288}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{192}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{176}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{96}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-\frac{32}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}(1+x)^k(1$$
$$-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{n}$$

$$-\frac{96}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$-\frac{96}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{64}{n^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{n}$$

$$+\frac{24}{n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}$$

$$-8\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}+1$$

$$=16\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}(1+x)^4\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-4}\binom{n-4}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-4-k}$$

$$+96\frac{(n-1)(n-2)}{n^3}(1+x)^3\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-3-k}$$

$$+288\frac{(n-1)}{n^3}(1+x)^2\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$+\frac{288}{n^3}(1+x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$-\frac{192}{n^3}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$-176\frac{(n-1)}{n^3}(1+x)^2\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2k}$$

$$-\frac{176}{n^3}(1+x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$+\frac{96}{n^3}(1+x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$-32\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1+x)^3\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-3-k}$$

$$-96\frac{(n-1)}{n^2}(1+x)^2\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$-\frac{96}{n^2}(1+x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$+\frac{64}{n^2}(1+x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$+24\frac{(n-1)}{n}(1+x)^2\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-2-k}$$

$$+\frac{24}{n}(1+x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-1-k}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}(1+x)^4\frac{1}{2^{n-4}}.2^{n-4}$$
$$+12\frac{(n-1)(n-2)}{n^3}(1+x)^3\frac{1}{2^{n-3}}.2^{n-3}+72\frac{(n-1)}{n^3}(1+x)^2\frac{1}{2^{n-2}}.2^{n-2}$$
$$+\frac{144}{n^3}(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}-\frac{96}{n^3}(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}$$
$$-44\frac{(n-1)}{n^3}(1+x)^2\frac{1}{2^{n-2}}.2^{n-2}-\frac{88}{n^3}(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}$$
$$+\frac{48}{n^3}(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}-4\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1+x)^3\frac{1}{2^{n-3}}.2^{n-3}$$
$$-24\frac{(n-1)}{n^2}(1+x)^2\frac{1}{2^{n-2}}.2^{n-2}-\frac{48}{n^2}(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}$$
$$+\frac{32}{n^2}(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}+6\frac{(n-1)}{n}(1+x)^2\frac{1}{2^{n-2}}.2^{n-2}+\frac{12}{n}(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}$$
$$-4(1+x)\frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1}+1$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}(1+x)^4+12\frac{(n-1)(n-2)}{n^3}(1+x)^3$$
$$+72\frac{(n-1)}{n^3}(1+x)^2+\frac{144}{n^3}(1+x)-\frac{96}{n^3}(1+x)-44\frac{(n-1)}{n^3}(1+x)^2$$
$$-\frac{88}{n^3}(1+x)+\frac{48}{n^3}(1+x)-4\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}(1+x)^3-24\frac{(n-1)}{n^2}(1+x)^2$$
$$-\frac{48}{n^2}(1+x)+\frac{32}{n^2}(1+x)+6\frac{(n-1)}{n}(1+x)^2+\frac{12}{n}(1+x)-4(1+x)+1$$

$$=x^4+\frac{6n^2x^2-6n^2x^4+11nx^4-14nx^2+3n-6x^4+8x^2-2}{n^3}$$

$$C_n(t^4;x)=x^4+\frac{6n^2x^2-6n^2x^4+11nx^4-14nx^2+3n-6x^4+8x^2-2}{n^3} \qquad (4.10)$$

elde edilir. Yani $n\to\infty$ iken;

$$C_n(t^4;x) \rightrightarrows x^4$$

olur ve (4.5)'in sağlandığı görülmüş olur.

Sonuç olarak, $C_n(f;x)$ operatörü (4.1), (4.2), (4.3) (Korovkin şartları),(4.4)ve (4.5) ifadelerini sağladığı görülmüş olur. Şimdi de; $C_n(f;x)$ operatörünün düzgün yakınsak olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.1.

$C_n(f;x)$ operatörü [-1,1] aralığında sürekli olan f fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır. Yani;

$$\|C_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

İspat 4.1.

$C_n(f;x)$ operatörün lineerliğinden faydalanarak;

$$\begin{aligned}
|C_n(f;x) - f(x)| &\\
&= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)\right.\\
&\quad \left. - f(x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(2\frac{k}{n}-1\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f(x)\right|\\
&= \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[f\left(2\frac{k}{n}-1\right) - f(x)\right]\right|; \quad x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

yazılabilir. $x \in [-1,1]$ olduğundan $\binom{n}{k}(1+x)^k \geq 0$ ve $(1-x)^{n-k} \geq 0$ dır. Üçgen eşitsizliğinden,

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(2\frac{k}{n}-1\right) - f(x)\right|\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right| \leq \delta} \left| f\left(2\frac{k}{n}-1\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$
$$+ \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right| > \delta} \left| f\left(2\frac{k}{n}-1\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

elde edilir. f sürekli olduğundan; her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left|\frac{2k-n}{n} - x\right| \leq \delta$$

iken,

$$\left| f\left(2\frac{k}{n}-1\right) - f(x) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Böylece;

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \mathcal{E} \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right| \leq \delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$
$$+ \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right| > \delta} \left| f\left(2\frac{k}{n}-1\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

olur. f sınırlı olduğundan $\forall\, x \in [-1,1]$ için öyle bir $M > 0$ vardır ki;

$$|f(x)| < M$$

olur. Öyleyse;

$$\left| f(x) - f\left(2\frac{k}{n}-1\right) \right| < |f(x)| + \left| f\left(2\frac{k}{n}-1\right) \right| < 2M$$

yazılabilir.

Böylece;

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \mathcal{E} \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right| \leq \delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right| > \delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

elde edilir. (4.6)'dan dolayı;

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \tag{4.11}$$

$$\left|\frac{2k-n}{n} - x\right| > \delta \implies \frac{\left(\frac{2k-n}{n} - x\right)^2}{\delta^2} \geq 1 \tag{4.12}$$

(4.12)'nin (4.11)'de kullanılmasıyla;

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{2k-n}{n}-x\right|>\delta} \frac{\left(\frac{2k-n}{n} - x\right)^2}{\delta^2} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{\left|x-\frac{2k-n}{n}\right|>\delta} \left(\frac{2k-n}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \varepsilon + \tfrac{2M}{\delta^2} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \left(\left(2\frac{k}{n} - 1\right) - x\right)^2 \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}$$

yazabiliriz. $\left(\left(2\frac{k}{n} - 1\right) - x\right)^2$ ifadesi açılarak, $C_n(f;x)$ operatörünün lineerliğinin ve (4.6), (4.7), (4.8) ifadelerinin kullanılmasıyla;

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{1}{n} - \frac{x^2}{n}\right] \leq \varepsilon + \frac{2M}{n\delta^2}[1 - x^2]$$

elde edilir. $x \in [-1,1]$ olduğundan;

$$maks\{1 - x^2\} = 1$$

o halde;

$$\|C_n(f;x)-f(x)\|_{C[-1,1]}\leq \varepsilon+\frac{2M}{n\delta^2}$$

yazılabilir. Yani;

$$lim_{n\to\infty}\|C_n(f)-f\|_{C[-1,1]}=0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$C_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentlerinin ilk beş tanesi aşağıda hesaplanmıştır.

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^0;x\right]=C_n(1;x)$$

olduğundan (4.6)'dan dolayı;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^0;x\right]=1$$

elde edilir.

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^1;x\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$=C_n(t;x)-xC_n(1;x)$$

yazılabilir (4.6) ve (4.7)'den dolayı;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^1;x\right]=x-x$$

olduğundan;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^1;x\right]=0 \tag{4.13}$$

elde edilir.

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^2$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2$$

$$-2x\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)+\frac{x^2}{2^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$=C_n(t^2;x)-2xx+x^2C_n(1;x)$$

yazılabilir (4.6), (4.7) ve (4.8)'den dolayı;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right]=x^2+\frac{(1-x)(1+x)}{n}-2x(x)+x^2=\frac{(1-x)(1+x)}{n}=\frac{1-x^2}{n}$$

olduğundan;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right]=\frac{1-x^2}{n}=\frac{1}{n}-\frac{x^2}{n} \tag{4.14}$$

elde edilir.

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^3;x\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right]^3$$

$$=\ \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)^3$$

$$-\ 3\,\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2x$$

$$+\ 3\,\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)x^2$$

$$-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}x^3$$

$$=C_n(t^3;x)-3xC_n(t^2;x)+3x^2C_n(t;x)+x^3C_n(1;x)$$

yazılabilir (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9)'dan dolayı;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^3;x\right]=x^3+\frac{2}{n^2}x^3-\frac{2}{n^2}x-\frac{3}{n}x^3+\frac{3}{n}x-3x\left(x^2+\frac{1}{n}-\frac{x^2}{n^2}\right)+3x^2x-x^3$$

$$=x^3+\frac{2}{n^2}x^3-\frac{2}{n^2}x-\frac{3}{n}x^3+\frac{3}{n}x-3x^3-\frac{3x}{n}+\frac{3}{n^2}x^3+3x^3-x^3$$

$$=\frac{5}{n^2}x^3-\frac{2}{n^2}x-\frac{3}{n}x^3=\frac{x(5x^2-2)}{n^2}-\frac{3}{n}x^3$$

olduğundan;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^3;x\right]=\frac{x(5x^2-2)}{n^2}-\frac{3}{n}x^3$$

elde edilir.

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^4;x\right]=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right]^4$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{k}{n}-1\right)^4-4\left(2\frac{k}{n}-1\right)^3x+6\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2x^2\right.$$
$$\left.-4\left(2\frac{k}{n}-1\right)x^3-x^4\right]$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)^4$$

$$-4x\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)^3+6x^2$$

$$+6x^2\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2$$
$$-4x^3\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{k}{n}-1\right)$$
$$+x^4\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$
$$=C_n(t^4;x)-4xC_n(t^3;x)+6x^2C_n(t^2;x)-4x^3C_n(t;x)+x^4C_n(1;x)$$

yazılabilir (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) ve (4.10)'dan dolayı;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^4;x\right]=x^4+\frac{6n^2x^2(1-x)(1+x)+n(11x-3)(x-1)-6x^4+8x^2-2}{n^3}$$
$$-4x\left[x^3+\left(\frac{2-3n}{n^2}\right)(x^3-x)\right]+6x^2\left[x^2+\frac{(1-x)(1+x)}{n}\right]-4x^3(x)+x^4$$
$$=6\frac{x^2}{n}+\frac{3}{n^2}-14\frac{x^2}{n^2}+x^4-6\frac{x^4}{n}+11\frac{x^4}{n^2}-\frac{2}{n^3}+8\frac{x^2}{n^3}-6\frac{x^4}{n^3}-4x^4-8\frac{x^4}{n^2}$$
$$+8\frac{x^2}{n^2}+12\frac{x^4}{n}-12\frac{x^2}{n}+6x^4+6\frac{x^2}{n}-6\frac{x^4}{n}-4x^4+x^4$$
$$=\frac{3x^4-6x^2+3}{n^2}+\frac{-6x^4+8x^2-2}{n^3}=\frac{3(x^2-1)^2}{n^2}+\frac{2(-3x^4+4x^2-1)}{n^3}$$

olduğundan;

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^4;x\right]=\frac{3(x^2-1)^2}{n^2}+\frac{2(-3x^4+4x^2-1)}{n^3} \qquad (4.15)$$

elde edilir. Böylece $C_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentlerinin ilk beşi hesaplanmış olur.

1932 yılında Voronowskaja, Bernstein operatörü için aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 4.2.

$f(x)$ fonksiyonu [0,1] aralığında sınırlı ve belli bir x noktasında 2. türeve sahip ise;

$$lim_{n\to\infty} n[B_n\,(f;x) - f(x)] = \frac{-x(1-x)}{2} f''(x)$$

eşitliği (asimptotik yaklaşım) sağlanmaktadır (Lorentz, 1953).

$C_n(f;x)$ operatörünün asimptotik yaklaşımını hesaplayalım.

Teorem 4.3.

f fonksiyonu [-1,1] aralığında sınırlı ve (-1, 1) aralığının bir x noktasında ikinci türevi mevcutsa;

$$lim_{n\to\infty} n[C_n(f;x) - f(x)] = \frac{(1-x^2)}{2} f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat 4.3.

Bir f fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımı;

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!} f''(x)(t-x)^2 + \mathcal{H}_n(t-x) \tag{4.16}$$

dir. Burada;

$$\mathcal{H}_n(t-x) = \frac{1}{3!} f'''(x)(t-x)^3 + \frac{1}{4!} f^4(x)(t-x)^4 + \cdots$$

olup buna *Kalan Terim* denir. (4.16)'te $t = 2\frac{v}{n} - 1$ olarak alınırsa;

$$f\left(2\frac{v}{n}-1\right) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right) - x\right] + \frac{1}{2!} f''(x)\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right) - x\right]^2 + \mathcal{H}_n\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right) - x\right] \tag{4.17}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\mathcal{H}_n\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]=\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$

yazılabilir. Burada $\mathcal{H}_n$ kalan terim ve $n\to\infty$ için limiti (-1)'dir. Dolayısıyla sınırlıdır. O halde her bir m sayısı için en az $M>0$vardır ki;

$$|\mu(m)|\leq M$$

yazılabilir. Bu durumda (4.17) eşitliği,

$$f\left(2\frac{v}{n}-1\right)=f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]+\frac{1}{2!}f''(x)\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2$$
$$+\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafı $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$ ile çarpıp $k=0$'dan $k=n$'ye kadar toplarsak;

$$C_n(f;x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f(x)$$
$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f'(x)\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f''(x)\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$

$$C_n(f;x)=f(x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$
$$+f'(x)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$
$$+\frac{f''(x)}{2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$

$$=f(x)C_n(1;x)+f'(x)\;C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^1;x\right]$$
$$+\frac{f''(x)}{2}\;C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right]$$
$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$

Burada (4.6), (4.13) ve (4.14)'ün kullanılmasıyla;

$$C_n(f;x)=f(x)+\frac{f''(x)}{2}\left(\frac{1-x^2}{n}\right)$$
$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right] \qquad (4.18)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin sağ tarafındaki üçüncü ifadeyi,

$$I=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$

şeklinde yazalım. Bu durumda;

$$I=\frac{1}{2^n}\sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|\le\delta}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]$$
$$+\frac{1}{2^n}\sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|>\delta}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right] \qquad (4.19)$$

olur. $\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|\le\delta$ iken $\left|\mu\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]\right|\le\varepsilon$olur. Bu ifade ve $|\mu(m)|\le M$ olduğu (4.19)'da kullanılırsa;

$$I \leq \varepsilon \frac{1}{2^n} \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2$$
$$+ M \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2 \qquad (4.20)$$

$$I \leq \varepsilon\ C_n \left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^2 ; x\right] + M \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2$$

(4.14) kullanılırsa;

$$I \leq \varepsilon \left(\frac{1-x^2}{n}\right) + M \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|^2$$

elde edilir;

$$J = \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2$$

diyelim,

$\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right| > \delta$ ise $\frac{\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2}{\delta^2} > 1$ olur.

$$J \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2 \frac{\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. Yani;

$$J \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{1}{2^n} \sum_{\left|\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right|>\delta} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^4$$

olur. Bulunan bu ifadeyi $\{v = 0\ dan\ n'ye\}$ genişletip (4.20)'de kullanırsak;

$$I \leq \varepsilon\left(\frac{1-x^2}{n}\right) + \frac{M}{\delta^2}\frac{1}{2^n}\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[\left(2\frac{v}{n}-1\right)-x\right]^4$$

$$I \leq \varepsilon\left(\frac{1-x^2}{n}\right) + \frac{M}{\delta^2}C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^4;x\right]$$

(4.15)'in kullanılmasıyla;

$$I \leq \varepsilon\left(\frac{1-x^2}{n}\right) + \frac{M}{\delta^2}\left[\frac{3(x^2-1)^2}{n^2} + \frac{-6x^4+8x^2-2}{n^3}\right]$$

bulunur.

$x \in [-1,1]$ olduğundan bu aralıktaki maksimum değerini $x = 0$'da alır.

$$I \leq \frac{\varepsilon}{n} + \frac{M}{\delta^2}\left[\frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right]$$

$$I \leq \frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{n^2}\frac{M}{\delta^2}\left[3 - \frac{2}{n}\right]$$

$$I \leq \frac{1}{n}\left\{\varepsilon + \frac{M}{\delta^2}\left[3 - \frac{2}{n}\right]\right\}$$

$maks\left\{\frac{M}{\delta^2}\left[3-\frac{2}{n}\right]\right\} = A$ olarak alalım;

$$I \leq \frac{1}{n}\left\{\varepsilon + \frac{A}{n}\right\}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\varepsilon_n = maks\left\{\varepsilon, \frac{1}{n}\right\}$$

$$I = \frac{1}{n}O(\varepsilon_n)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade (4.18)'te yerine yazılırsa;

$$C_n(f;x) = f(x) + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)}{n}f''(x) + \frac{1}{n}O(\varepsilon_n)$$

$$C_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)}{n}f''(x) + \frac{1}{n}O(\varepsilon_n)$$

$$n[C_n(f;x) - f(x)] = \frac{(1-x^2)}{2}f''(x) + O(\varepsilon_n)$$

bulunur ki ($n \longrightarrow \infty$) için $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olduğundan limit alınmasıyla;

$$lim_{n\rightarrow\infty} n[C_n(f;x) - f(x)] = \frac{(1-x^2)}{2}f''(x)$$

elde edilmiş olur ki buda ispatı tamamlar.

Şimdi de; $C_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızını hesaplanacaktır. Bunu için öncelikle süreklilik modülünün tanım ve özelliklerini verelim.

Tanım 4.2. (Süreklilik Modülü)

$f \in C[a,b]$ olmak üzere; $\forall\delta > 0$ için;

$$\omega\,(f;\ \delta) = sup_{\substack{x,t\,\in\,[a,b]\\ |t-x|\,\le\,\delta}}|f(t) - f(x)|$$

olarak tanımlanan $\omega\,(f;\ \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

Süreklilik Modülünün Özellikleri

1. $\omega\,(f;\ \delta) \geq 0$

2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega\,(f;\ \delta_1) \leq \omega\,(f;\ \delta_2)$

3. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega\,(f;\ m\delta) \leq m\omega\,(f;\ \delta)$

4. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega\,(f;\ \lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega\,(f;\ \delta)$

5. $lim_{\delta\rightarrow 0}\omega\,(f;\ \delta) = 0$

6. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$

7. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$ (Altomare ve Campiti, 1994)

Teorem 4.4.

$C_n(f; x)$ operatörün süreklilik modülü ile yaklaşım hızı;

$$|C_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

şeklindedir.

İspat 4.4.

$C_n(f; x)$ operatörü;

$$C_n(f; x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} f\left(2\frac{k}{n} - 1\right), \qquad -1 \leq x \leq 1$$

şeklinde idi,

$$C_n(1; x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k}.1 = 1$$

olduğundan lineerlikten;

$$|C_n(f; x) - f(x)|$$
$$= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} f\left(2\frac{k}{n} - 1\right) - f(x) \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \right|$$

elde edilir.

$\frac{1}{2^n} \geq 0$ ve $\binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ ifadelerini ve üçgen eşitsizliğini kullanarak;

$$|C_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(2\frac{k}{n}-1\right)-f(x)\right|\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \tag{4.21}$$

elde edilir. Süreklilik modülünün (7.) özelliğinde $t = 2\frac{k}{n}-1$ seçimiyle;

$$\left|f\left(2\frac{k}{n}-1\right)-f(x)\right| \leq \left[\frac{\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|}{\delta}+1\right]\omega(f;\delta)$$

yazılabilir. Elde edilen bu ifadenin (4.21)'de yerine yazılması ve lineer pozitif operatörlerinin monotonluğunun kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned}|C_n(f;x)-f(x)| &\leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|}{\delta}+1\right]\omega(f;\delta)\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|}{\delta}\omega(f;\delta)\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\\ &+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\omega(f;\delta)\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

bulunur, yani;

$$\begin{aligned}&|C_n(f;x)-f(x)|\\ &\leq \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right.\\ &\left.+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right\}\\ &= \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}+C_n(1;x)\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.6)'nın kullanılmasıyla;

$$|C_n(f;x)-f(x)| \leq \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}+1\right\} \tag{4.22}$$

bulunur, bulunan bu ifadede;

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

diyelim.

$$\mathcal{A}=\sum_{k=0}^{n}\left[\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilir. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden;

$$\mathcal{A}\leq\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|^2\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|^2\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}[C_n(1;x)]^{\frac{1}{2}}$$

olup (4.6)'nın kullanılmasıyla;

$$\mathcal{A}\leq\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|^2\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Öte taraftan;

$\left|\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right|^2=\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2-2x\left(2\frac{k}{n}-1\right)+x^2$ olduğundan;

$$\mathcal{A}=\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2-2x\left(2\frac{k}{n}-1\right)+x^2\right]\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(2\frac{k}{n}-1\right)^2\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}-2x\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(2\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right.$$

$$\left.+x^2\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [C_n(t^2;x) - 2xC_n(t;x) + x^2 C_n(1;x)]^{\frac{1}{2}}$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte (4.6), (4.7) ve (4.8)'in kullanılmasıyla;

$$\mathcal{A} = \left[x^2 + \frac{(1-x)(1+x)}{n} - 2x.x + x^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(1-x)(1+x)}{n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadenin (4.22)'de yerine yazılmasıyla;

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\delta)\left\{\left[\frac{(1-x)(1+x)}{n}\right]^{\frac{1}{2}} + 1\right\}$$

bulunur. $x \in [-1,1]$ olduğundan;

$$maks\left\{[(1-x)(1+x)]^{\frac{1}{2}}\right\} = 1$$

olur. Bu durumda;

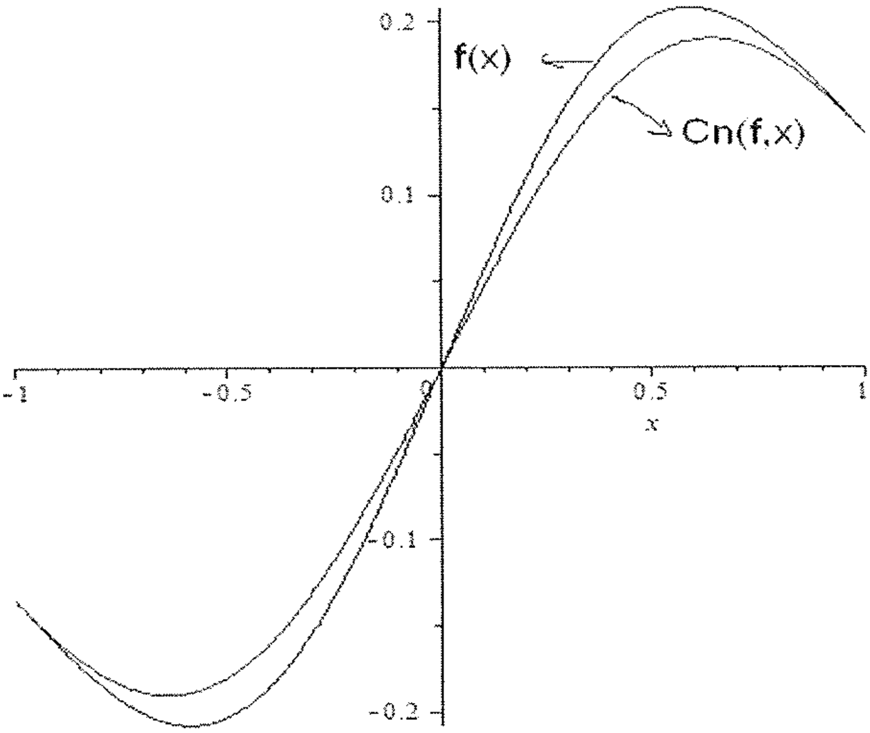
$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right\}$$

yazabiliriz. $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olarak seçilirse;

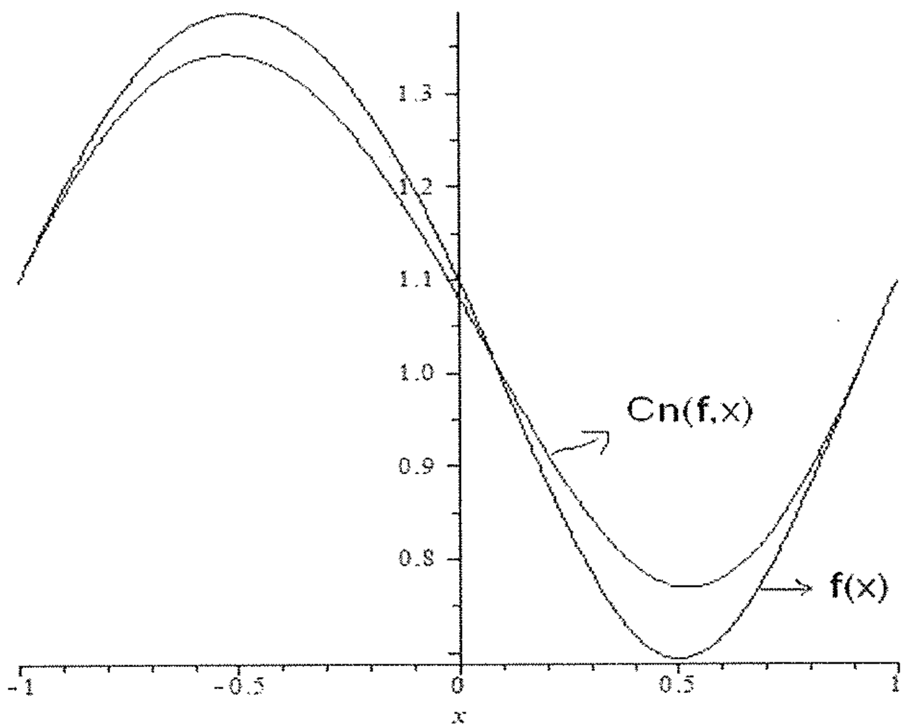
$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de üzerinde çalıştığımız $C_n(f;x)$ operatörünün; $f(x) = \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)e^{-1-x^2}$ ve $f(x) = \ln(3 - sin(\pi x))$ fonksiyonlarına ait yaklaşımını gösteren grafikleri ve birinci fonksiyon için hesaplanan nümerik değerleri tablo halinde gösterelim.



Şekil 4.1. $f(x) = \sin(\frac{x\pi}{2})e^{-1-x^2}$ fonksiyonuna $C_n(f;x)$ ile $n = 20$ için yaklaşım grafiği.



Şekil 4.2. $f(x) = \ln(3 - sin(\pi x))$ fonksiyonuna $C_n(f;x)$ $n = 20$ için yaklaşım grafiği.

Şekil 4.1'de verilen fonksiyon için n ve x-in bazı değerleri için $C_n(f;x)$ ile $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik değerler çizelge 4.1.'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. $f(x) = \sin(\frac{x\pi}{2})e^{-1-x^2}$ fonksiyonunun bazı n ve x değerleri için $C_n(f;x)$ ile $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik değerler tablosu.

x \ n	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
10	0,13533	0,00494	0,01382	0,02463	0,03492	0,04223	0,04460	0,04095	0,031357	0,016997	0
100	0,13533	0,00034	0,00120	0,00244	0,00380	0,00493	0,00549	0,00525	0,00413	0,002276	0
990	0,135335	0,00003	0,00011	0,00024	0,00038	0,00050	0,00056	0,00054	0,00043	0,000238	0

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

[-1,1] simetrik aralığı üzerinde tanımlanan $C_n(f;x)$ operatörünün, lineer pozitif operatör olduğu ve Korovkin şartlarını sağladığı görülmüştür. Ayrıca;

$$lim_{n\to\infty}\|C_n(f)-f\|_{C[-1,1]}=0$$

eşitliğini sağladığı görüldüğünden düzgün yakınsaklığı ispat edilmiştir.

Daha sonra merkezi momentleri hesaplanmış ve aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir.

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^0;x\right]=1$$

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^1;x\right]=0$$

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right]=\frac{1-x^2}{n}=\frac{1}{n}-\frac{x^2}{n}$$

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^3;x\right]=\frac{x(5x^2-2)}{n^2}-\frac{3}{n}x^3$$

$$C_n\left[\left(\left(2\frac{k}{n}-1\right)-x\right)^4;x\right]=\frac{3(x^2-1)^2}{n^2}+\frac{2(-3x^4+4x^2-1)}{n^3}$$

Hesaplanan bu merkezi monentlerin kullanılmasıyla $C_n(f;x)$operatörünün asimptotik yaklaşımı hesaplanmış ve aşağıdaki eşitliği sağladığı görülmüştür.

$$lim_{n\to\infty}n[C_n(f;x)-f(x)]=\frac{(1-x^2)}{2}f''(x)$$

Daha sonra süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmış ve aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir.

$$|C_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Son olarak; $C(f;x)$operatörünün;$f(x) = \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)e^{-1-x^2}$ve $f(x) = \ln(3 - sin(\pi x))$ fonksiyonlarına ait yaklaşımını gösteren grafikleri ve birinci fonksiyon için hesaplanan nümerik değerler, tablo halinde gösterilmiştir.

5.2. Öneriler

Bernstein polinomları ile ilgi yapılan çalışmalar hep pozitif yarı eksenin [0, 1] alt aralığı üzerindedir. Bernstein polinomları için, simetrik bir aralık üzerinde yapılan bir çalışmaya şu ana kadar rastlanmamıştır. Ele alınacak olan fonksiyonlar hep pozitif yarı eksenin alt kümesi üzerinde tanımlı değildir. Tüm reel eksenin simetrik bir alt aralığı üzerinde çalışılmak istenildiğinde ele aldığımız operatörün kullanılması uygun olacaktır.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F. ve CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theoryan its Applications.

BERNSTEIN, S.N., 1912. Démonstration du théoréme de Weierstrtass, fondée sur le calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Kharkow, (2):13.

BALCI, M., 1999. Analiz, Cilt 2. Ankara.

HACISALİHOĞLU, H. ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. Ankara.

LORENTZ, G.G., 1953. Bernstein Polynomials. Math. Expo., vol. 8, Univ. Of Toronto Press, Toronto.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N. ve EKİNCİOĞLU, İ. 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1. Ankara.

PINKUS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J.Approx Theory, 107:1-66

P. P. KOROVKİN, 1953. Convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl Akad Nauk SSSR, 90:961-4.

SAHAI, A., 2011. An iterative reduced-biasalogarithm for a dual –fusion S. Variant of Bernstein operators. Inter.J. of Math. Arch. 2(3): 331-334.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşegül ÇİLO, ilkokul, ortaokul ve lise öğrenimimi memleketim Kahramanmaraş Pazarcık ilçesinde, lisans öğrenimimi Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde, yüksek lisans öğrenimimi ise Harran Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında tamamladım.

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde; gerekli tanımlar yapılmış, teoremler verilmiştir.

İkinci bölümünde; çalışmamıza konu olan lineer pozitif operatörler ve özellikle Bernstein polinomları ile daha önceden yapılmış çalışmalardan söz edilmiştir.

Üçüncü bölümünde bu çalışmada izlenecek yöntemler hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümünde de Bernstein operatörlerinin bir modifikasyonu olarak tanımladığımız $C_n(f;x)$ operatörünün düzgün yakınsaklığı, yaklaşım hızı incelenmiş; momentleri ve asimptotik yaklaşımı hesaplanmıştır. Daha sonra $C_n(f;x)$ operatörü ile f fonksiyonuna yaklaşım farklı iki fonksiyon için grafik yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak seçilen bir fonksiyona yaklaşımın bazı n ve x değerleri için nümerik değerler tablosu hazırlanmıştır.

Sonuç olarak da; Bernstein operatörlerinin bir modifikasyonu olarak tanımladığımız $C_n(f;x)$ operatörünün [-1, 1] simetrik aralığındaki yaklaşım özellikleri incelenmiş oldu.

SUMMARY

In the first part of this study, the necessary definitions and theorems were given.

In the second part, linear positive operators that are subject to the study particularly, Bernstein polynomials and previously done studies have were mentioned.

In the third section, information about the methods to be followed was given in this study.

In the fourth section, uniform convergence of $C_n(f;x)$ operator which we defined as a modification of the Bernstein operators and the approach speed were examined, and its moments and asymptotic approach were calculated. Then, approach to the function f with the $C_n(f;x)$ operator was shown by a graphical help for two different functions. Finally, a numerical table was prepared for some n and x values of the approach to a chosen function.

As a result, approach properties in a symmetric range [-1, 1] of $C_n(f;x)$ operator which we defined as a modification of the Bernstein operators have been investigated.