T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL UZAYDA ÇEMBERLERİN STUDY DÖNÜŞÜMLERİ

Selahattin NAZLI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

DUAL UZAYDA ÇEMBERLERİN STUDY DÖNÜŞÜMLERİ

Selahattin NAZLI

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM

Yıl:2012, Sayfa: 53

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde dual uzay tanıtılmış olup bu uzay ile ilgili daha önceki çalışmalarda yer alan tanım ve teoremlere yer verilştir. Diğer iki bölüm çalışmanın orjinal kısımlarıdır. Üçüncü bölümde tez ile ilgili materyal ve yöntemler verilmiştir. Dördüncü bölümde bir çemberin Study dönüşümü gösterilmiş ve bu dönüşümün matris karşılıkları elde edilmiştir. Bununla birlikte D-modüldeki dual birim küre üzerindeki bir çemberin Study dönüşümü gösterilmiştir. Son olarak bazı özel durumlar ve bu durumların herbirinin geometrik sonuçları elde edilmiştir.Yine bu bölümde Lorentz uzayı ve dual Lorentz uzayı tanıtılmış olup dual Lorentz uzayındaki Study dönüşümünün matris karşılıkları elde edilmiştir. Bununla birlikte bu uzaydaki dual Hiperbolik ve dual Lorentzyen birim küreler üzerindeki çemberlerin Study dönüşümleri gösterilmiştir. Son bölümde ise tez ile ilgili sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Dual uzay, dual uzayda çemberler, dual lorentz uzayı, dual lorentz uzayında çemberler, Study dönüşümü.

ABSTRACT

Master Thesis

THE STUDY MAPS OF A CIRCLES ON DUAL SPACES

Selahattin NAZLI

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Abdullah YILDIRIM

Year:2012, Page: 53

This thesis consist of five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In chapter second introduced that the dual spaces and deals with the concepts and definitions on dual spaces. Other two chapters are the original part of the study. In chapter third shown that material and method in connection with thesis. In chapter forth we have introduced that the dual spaces and we have obtained the matrix equations of Study mapping. Furthermore, we have showed the Study map of a circle which lie on the dual unite sphere in D-module. Finally we have obtained some special cases each of which is a geometrical result. Again in this chapter we have introduced that Lorentz space, dual Lorentz space and we have obtained the matrix equations of Study mapping. Furthermore, we have showed the Study maps of circles which lie on the dual Hyperbolic and dual Lorentzian unite spheres at the dual Lorentzian space. In the last chapter we have shown results and recommendations in connection with thesis.

KEY WORDS: Dual space, circles in dual space, dual lorentz space, circles in dual lorentz space, study mapping.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her aşamasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, teknik destek konusunda yardımlarını benden esirgemeyen, sayın Öğr. Gör. Ekrem UÇAR'a teşekkürü borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimini tamamlayabilmem adına meslek hayatımda fazlasıyla yardımlarını ve desteklerini gördüğüm saygıdeğer amirim Kom. Yrd. Uğur YEŞİL'e ve saygıdeğer grup şeflerim Cengiz ASLANERGÜN ve Atilla KARTAL'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm hayatım boyunca güven, anlayış ve desteklerini daima hissettiğim, babam Salih NAZLI'ya, annem Hanife NAZLI'ya ve kardeşlerim Zehra NAZLI ve İsa NAZLI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

ϕ	: Dual Açı
ε	: Dual Birim
H_0^2	: Dual Hiperbolik Birim Küre
S_1^2	: Dual Lorentz Birim Küre
D	: Dual Sayılar
H_0^{2+}	: Future-Pointing Dual Hiperbolik Birim Küre
H_0^2	: Hiperbolik Birim Küre
$<,>$	: İç Çarpım
$\mathbb{C}$	: Kompleks Vektör Uzayı
S_1^2	: Lorentz Birim Küresi
$\Vert,\Vert$	: Norm
H_0^{2-}	: Past-Pointing Dual Hiperbolik Birim Küre
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
V	: Reel Vektör Uzayı
$\wedge$	: Vektörel Çarpım

1 GİRİŞ

Dual sayılar ilk defa W. K. Clifford (1845-1879) tarafından geometrik araştırmalarında bir araç olarak kullanılmıştır. Daha sonra E. Study çizgi geometrisi ve kinematik araştırmalarında dual sayılar ve dual vektörleri kullanmıştır (Study,1903). Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir (Veldkamp,1976).
E. Study, 3-boyutlu Öklid uzayının yönlü doğrularının $\mathbb{D}^3$ dual uzayının S^2 dual birim küresinin noktalarına birebir karşılık geldiğini göstermiştir (Study,1903).
S^2 dual birim küresi üzerine çizilmiş bir çemberin çizgiler uzayındaki karşılığı H. H. Hacısalihoğlu tarafından gösterilmiştir.
3-boyutlu Öklid uzayı yerine $\mathbb{R}^3_1$ Lorentz uzayını göz önüne alarak, bu uzaydaki yönlü space-like (time-like) doğruların, $\mathbb{D}^3_1$ dual Lorentz uzayının $\tilde{S}{}^2_1(\tilde{H}{}^2_0)$ dual Lorentz (Hiperbolik) birim küresinin noktaları ile birebir eşlenebileceği Y. Yaylı tarafından gösterilmiştir.
Bu tezde ilk olarak dual uzayın tanımı bu uzaydaki bir vektörün normu, iki vektör arasındaki açı gibi genel tanımlar verilmiş olup ilk bölümlerde 3-boyutlu Öklid uzayında bir çemberin Study dönüşümü detaylı olarak incelenmiştir. Daha sonraki bölümlerde 3-boyutlu Öklid uzayı yerine Lorentz uzayını ele aldığımızda elde edilen dual Hiperbolik ve dual Lorentz çemberlerinin Study dönüşümü yine geniş olarak incelenmiştir.

1.1 Ana Kavramlar

Tanım 1.1.1. Boş olmayan bir G cümlesi ile aşağıdaki üç aksiyoma uyan bir

$$T:(x,y)\in G\times G\rightarrow xTy\in G$$

iç işleminden oluşan (G,T) ikilisine bir grup denir.

1. T birleşimlidir; $\forall x,y,z\in G$ elemanları için

$$(xTy)\,Tz=xT\,(yTz)$$

2. T için G de birtek e birim elemanı vardır;

$$\forall x\in G \text{ için } \ eTx=xTe=x$$

3. $\forall x\in G$ elemanının T için G de bir x' inversi vardır;

$$xTx'=x'Tx=e$$

T işlemine de, grup işlemi denir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.2. Eğer (G, T) grubunda T grup işlemi değişimli ise, yani

$$xTy = yTx$$

ise (G, T) grubuna değişimli grup veya abel grubu denir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.3. Boş olmayan bir H cümlesi ile bu cümledeki iki $T, \perp$ iç işlemlerinden oluşan $(H, T, \perp)$ üçlüsünü ele alalım. Eğer (H, T) bir abel grubu iken ikinci iç işlem olan $\perp, H$ da birleşimli ise ve birinci işlem üzerinde dağılımlı ise $(H, T, \perp)$ üçlüsüne bir halka denir. Bu tanımda geçen halka aksiyomlarını şöyle sıralayabiliriz;

1. $T : (x, y) \in H \times H \to xTy \in H, \ \forall x, y \in H$ (kapalılık aksiyomu),
2. $(xTy)\,Tz = xT\,(yTz), \ \forall x, y, z \in H$ (birleşim aksiyomu),
3. $xTe = eTx = x, \ \forall x \in H$ (birim elemanın varlığı aksiyomu),
4. $xTx' = x'Tx = e, \ x' \in H$ (ters elemanın varlığı aksiyomu),
5. $xTy = yTx,$ (değişim aksiyomu).
   Bu aksiyomlarla (H, T) bir değişimli grup olur. İkinci işlem $\perp$ nin sağlaması gereken aksiyomlar;
6. $\perp: (x, y) \in H \times H \to x \perp y \in H,$ (kapalılık aksiyomu),
7. $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$ (birleşim aksiyomu),
8. $\left.\begin{array}{r} (xTy) \perp z = (x \perp z)\,T\,(y \perp z) \\ (x \perp y)\,Tz = (xTz) \perp (yTz) \end{array}\right\}$ (dağılım aksiyomu)(Hacısalihoğlu, 2010).

   Tanım 1.1.4. Bir $(H, T, \perp)$ halkasında ikinci işlem $\perp$ değişimli ise halkaya değişimli halka denir (Hacısalihoğlu, 2010).

   Tanım 1.1.5. Bir $(H, T, \perp)$ halkasında ikinci işlem $\perp$ ye göre H ın bir ε birim elemanı varsa halkaya birimli halka denir (Hacısalihoğlu, 2010).

   Tanım 1.1.6. $(C, T, \perp)$ bir halka olsun ve (C, T) abel grubunun birim elemanı e olmak üzere $C^* = C - \{e\}$ olsun. Eğer $(C^*, \perp)$ bir grup ise $(C, T, \perp)$ üçlüsüne bir aykırı cisimdir denir. Cismi temsil etmek üzere $(C, T, \perp)$ yerine sadece C cismi de denir.
   Bu tanıma göre C^* ın ikinci işlem $(\perp)$ e göre bir ε birim elemanı vardır. Bu tanımdan cisim aksiyomlarını şu şekilde sıralayabiliriz.

T İşlemi Üzerindeki Aksiyomlar;

1. $(xTy)\,Tz = xT\,(yTz)\,,\ \ \forall x,y,z \in C$ için (birleşim aksiyomu)
2. $xTe = eTx = x,\ \ \forall x \in C$ için, $e \in C$ (birim elemanın varlığı aksiyomu)
3. $xTx' = x'Tx = e,\ \ \forall x \in C$ için $x' \in C$ (ters elemanın varlığı aksiyomu)
4. $xTy = yTx,$ (değişim aksiyomu)
   $\perp$ İşlemi Üzerindeki Aksiyomlar;
5. $(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)\,,\ \ \forall x,y,z \in C$ için (birleşim aksiyomu)
6. $x \perp \varepsilon = \varepsilon \perp x = x,\ \ \forall x \in C^*$ için (birim elemanın varlığı aksiyomu)
7. $xTx' = x'Tx = \varepsilon,\ \ \forall x \in C^*$ için (ters elemanın varlığı aksiyomu)
   $\perp$ ve T İşlemleri Üzerindeki Aksiyomlar;
8. $(xTy) \perp z = (x \perp z)\,T\,(y \perp z)$ ve $(x \perp y)\,Tz = (xTz) \perp (yTz)$
   (Hacısalihoğlu, 2010).
   Tanım 1.1.7. Bir iç işleme göre V bir abel grubu ve H da iki işlemi sırasıyla, $(+)$ toplama (bir abel grup işlemi) ve $(\cdot)$ çarpma (H üzerinde bir abel grup işlemi) olan bir cisim olsun. V üzerinde bir dış işlem olarak tanımlanan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir

$$H \times V \to V$$

dönüşümü var olsun. Bu halde V cümlesine H cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

1. $H \times V \to V$ dönüşümü $V \times V \to V$ iç işlemi üzerinde dağılabilirdir;
2. $H \times V \to V$ dönüşümü H daki $+ : H \times H \to H$ iç (toplama) işlemi üzerinde dağılabilirdir;
3. $H \times V \to V$ dönüşümü H daki $\cdot : H \times H \to H$ iç (çarpma) işlemi ile birleşebilirdir;
4. $H \times V \to V$ dönüşümünün birim elemanı H üzerindeki $\cdot : H \times H \to H$ iç (çarpma) işleminin birim elemanıdır.

O halde vektör uzayı aksiyomları aşağıdaki gibi sıralanabilirler.
V Üzerindeki İç İşleme Ait Aksiyomlar;

1. $(xTy)\,Tz = xT\,(yTz)\,,\ \ x,y,z \in V$
2. $xT\theta = \theta Tx = x,\ \ (\theta :$ birim eleman$)$

3. $xTx' = \theta$, $(x' = x$ in tersi$)$
4. $xTy = yTx$
Dış İşleme Ait Aksiyomlar;
5. $a\,(xTy) = axTay$, $a \in H$
6. $(a+b)\,x = axTbx$, $b \in H$
7. $a\,(bx) = (a.b)\,x$
8. $\varepsilon x = x$, $(\varepsilon : H$ daki çarpma işleminin birim elemanı) (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.8. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir iç çarpım diye aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan bir

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümüne denir ve değeri, $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir.

i Simetri Aksiyomu;

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle\,, \quad \forall u, v \in V$$

ii Bilineerlik Aksiyomu;

$$\begin{aligned}
&\langle cu, v \rangle = c\,\langle u, v \rangle = \langle u, cv \rangle\,, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in V; \\
&\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle\,, \quad \forall v \in V; \\
&\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle\,, \quad \forall u \in V;
\end{aligned}$$

Bu aksiyomu kısaca

$$\begin{aligned}
\langle au_1 + bu_2, v \rangle &= a\,\langle u_1, v \rangle + b\,\langle u_2, v \rangle \\
\langle u, av_1 + bv_2 \rangle &= a\,\langle u, v_1 \rangle + b\,\langle u, v_2 \rangle
\end{aligned}$$

şeklinde de yazabiliriz.

iii Pozitif Tanımlılık Aksiyomu;

$$\langle u, v\rangle \geq 0, \quad \forall u \in V$$
$$\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = \overrightarrow{0}$$

(Hacısalihoğlu, 2005).
Tanım 1.1.9. Bir

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için

$$X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n); \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanıyorsa f fonfsiyonu $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Öklid anlamındaki iç çarpım veya $\mathbb{R}^n$ deki standart iç çarpım denir (Hacısalihoğlu, 2005).

Tanım 1.1.10. $\mathbb{C}$ kompleks vektör uzayı olmak üzere bir

$$g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

fonksiyonu $\forall X, Y \in \mathbb{C}^n$ için

$$X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n); \quad x_i, y_i \in \mathbb{C}$$

olmak üzere

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y_i}$$

$\left(\bar{y_i} : \text{kompleks eşlenik}\right)$ şeklinde tanımlanıyorsa g fonfsiyonu $\mathbb{C}^n$ de bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma Hermit anlamındaki iç çarpım veya $\mathbb{C}^n$ deki standart iç çarpım denir (Hacısalihoğlu, 2005).

Tanım 1.1.11. Bir

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için

$$X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n); \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

ve c ışık hızı olmak üzere

$$L(X,Y)=\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - c^2 x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan L fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım dır. Bu iç çarpıma Lorentz iç çarpımı denir (Hacısalihoğlu, 2005).

Tanım 1.1.12. V bir vektör uzayı olmak üzere V nin elemanlarının bir $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ cümlesi için

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i = 0, \quad (1 \leq i \leq k) \Longrightarrow \forall c_i = 0$$

ise bu cümleye lineer bağımsızdır, aksi halde lineer bağımlıdır denir (Hacısalihoğlu, 2005).

Tanım 1.1.13. Üç boyutlu bir reel vektör uzayı V olsun. V de bir

$$\begin{array}{rccc} \wedge : & V \times V & \rightarrow & V \\ & (\alpha, \beta) & \rightarrow & \alpha \wedge \beta \end{array}$$

işlemi determinant fonksiyonu yardımıyla

$$\alpha = a_1 \overrightarrow{e}_1 + a_2 \overrightarrow{e}_2 + a_3 \overrightarrow{e}_3, \beta = b_1 \overrightarrow{e}_1 + b_2 \overrightarrow{e}_2 + b_3 \overrightarrow{e}_3$$

olmak üzere,

$$\alpha \wedge \beta = \det(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

veya birinci satıre göre Laplace açılımı ile

$$\alpha \wedge \beta = (a_1 b_2 - b_1 a_2) \overrightarrow{e}_1 + (a_3 b_1 - b_3 a_1) \overrightarrow{e}_2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \overrightarrow{e}_3$$

olarak tanımlanmış olsun. Burada

$$\left\{ \overrightarrow{e}_1 = (1,0,0),\ \overrightarrow{e}_2 = (0,1,0),\ \overrightarrow{e}_3 = (0,0,1) \right\}$$

V nin standart bazını göstermektedir.

$$\overrightarrow{e}_1 \wedge \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{e}_3,\ \overrightarrow{e}_2 \wedge \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_1,\ \overrightarrow{e}_3 \wedge \overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{e}_2$$

dir. Bu durum

$$1 \leq i, j, k \leq 3 \text{ ve } \sigma = (i, j, k)$$

dairesel permütasyonu yardımı ile

$$\overrightarrow{e}_i \wedge \overrightarrow{e}_j = \overrightarrow{e}_k$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde tanımlanan $\wedge$ iç işlemine V de vektörel çarpım veya V de dış çarpım işlemi denir (Hacısalihoğlu, 2005).

Tanım 1.1.14. Üç boyutlu bir reel vektör uzayı V olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} V \times V \times V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta, \gamma) & \rightarrow & \det(\alpha, \beta, \gamma) \end{array}$$

biçiminde tanımlanan işleme V üzerinde karma çarpım işlemi denir. Bu kavramın bu çarpma işlemine verilmesinin bir nedeni olarak

$$\det(\alpha, \beta, \gamma) = \langle \alpha, \beta \wedge \gamma \rangle$$

şeklinde yazılabilmesindendir (Hacısalihoğlu, 2005).

Tanım 1.1.15. Üç boyutlu bir reel vektör uzayı V ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ herhangi dört vektör olsun. $\langle (\alpha \wedge \beta), (\gamma \wedge \delta) \rangle$ iç çarpımını hesaplayalım.

$\alpha \wedge \beta = v$ diyelim. Öyleyse

$$\langle v, (\gamma \wedge \delta) \rangle = \langle v \wedge \gamma, \delta \rangle$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \langle v \wedge \gamma, \delta \rangle &= \langle (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma, \delta \rangle \\ \langle v \wedge \gamma, \delta \rangle &= \langle [\langle \alpha, \gamma \rangle \beta - \langle \beta, \gamma \rangle \alpha], \beta \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\langle \alpha \wedge \beta, \gamma \wedge \delta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle \langle \beta, \gamma \rangle - \langle \alpha, \delta \rangle \langle \beta, \gamma \rangle$$

bulunur. Bu eşitlik $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$ için doğrudur. Bu nedenle bir özdeşliktir ve Lagrange özdeşliği olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 2005).

Tanım 1.1.16. Lagrange özdeşliğinde $\gamma = \alpha$ ve $\delta = \beta$ alırsak $\alpha \wedge \beta$ nın boyu;

$$\begin{aligned} \langle \alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta \rangle &= \| \alpha \wedge \beta \|^2 \\ & \| \alpha \|^2 \| \beta \|^2 - (\langle \alpha, \beta \rangle)^2 \\ & \| \alpha \|^2 \| \beta \|^2 - (\| \alpha \|^2 \| \beta \|^2 \cos^2 \theta) \\ & \| \alpha \|^2 \| \beta \|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ & \| \alpha \|^2 \| \beta \|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

veya

$$\| \alpha \wedge \beta \| = \| \alpha \| \| \beta \| \sin\theta$$

elde edilir (Hacısalihoğlu, 2005).

2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tanım 2.1. $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = (a, a^*)$ ikilisine sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlansın;

Tanım 2.2. $A = (a, a^*), B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere, toplama işlemi

$$\begin{array}{rcccl} \oplus : & \mathbb{D} \times \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} & \\ & (A, B) & \longrightarrow & A \oplus B = & (a + b, a^* + b^*) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.3. $A = (a, a^*), B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere, çarpma işlemi

$$\begin{array}{rcccl} \odot : & \mathbb{D} \times \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} & \\ & (A, B) & \longrightarrow & A \odot B = & (ab, ab^* + a^*b) \end{array}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4. $A = (a, a^*), B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için, $a = b$, $a^* = b^*$ ise A ile B eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.5. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri belirtilen şekilde tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine dual sayılar sistemi ve $\forall(a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına bir dual sayı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.6. Bir $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında "a" reel sayısına A nın reel kısmı, "a^*" reel sayısına da A nın dual kısmı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.7. $(1, 0) = 1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir ve $\varepsilon = (0, 1)$ dual sayısı da dual birim olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.8. Bu durumda $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı

$$\begin{aligned} A &= (a, a^*) \\ &= (a, 0) + (0, a^*) \\ &= a(1, 0) + a^*(0, 1) \\ &= a.1 + \varepsilon a^* \\ &= a + \varepsilon a^* \end{aligned}$$

şeklinde de gösterilebilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.9. $\mathbb{D}^3 = \{\breve{a} = (A_1, A_2, A_3) \mid A_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3\}$ $\mathbb{D}-$modül veya dual uzay olarak adlandırılır. $\mathbb{D}^3$ ün elemanları dual vektörler olarak belirtilir. Böylece $\mathbb{R}^3$ deki $\vec{a}$ ve $\vec{a}^*$ reel vektörleri $\breve{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ olmak üzere $\breve{a}$ dual vektörü olarak yazılabilir (Yaylı ve ark., 2002).

Tanım 2.10. $\breve{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* = \left(\vec{a}, \vec{a}^*\right)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{D}$ skaleri ile çarpımı

$$\lambda \breve{a} = \left(\lambda \vec{a}, \lambda \vec{a}^*\right)$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.11. $\breve{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \breve{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}-$modül dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle , \rangle : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f\left(\breve{a}, \breve{b}\right) = \left\langle \breve{a}, \breve{b} \right\rangle &= \left\langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \varepsilon \left\{ \left\langle \vec{a}, \vec{b}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*, \vec{b} \right\rangle \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.12. Bir $\tilde{a}$ dual vektörünün normu

$$\begin{aligned} \| \tilde{a} \| &= \left\langle \tilde{a}, \tilde{a} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \\ \left\langle \tilde{a}, \tilde{a} \right\rangle &= \left\langle \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle + 2\varepsilon \left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle \\ &= \| \vec{a} \|^2 + 2\varepsilon \left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle \\ &= \left(\| \vec{a} \| + \frac{\varepsilon \left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle}{\| \vec{a} \|} \right)^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\| \widetilde{a} \| = \| \vec{a} \| + \frac{\varepsilon \left\langle \vec{a}, \vec{a}^{*} \right\rangle}{\| \vec{a} \|}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca eğer biz

$$a = \| \vec{a} \| \text{ ve } a^{*} = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^{*} \right\rangle}{\| \vec{a} \|}$$

şeklinde alırsak

$$\| \widetilde{a} \| = a + \varepsilon a^{*}$$

dual sayısı olarak yazılır (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.13. Normu $(1, 0)$ reel birimine karşılık gelen dual vektöre birim dual vektör denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Teorem 2.1. $\breve{a} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^{*}}$ birim dual vektör ise

$$\| \vec{a} \| = 1, \left\langle \vec{a}, \overrightarrow{a^{*}} \right\rangle = 0$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: Bir $\breve{a}$ dual vektörünün normu tanımı gereğince

$$\left(\| \vec{a} \|, \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^{*} \right\rangle}{\| \vec{a} \|} \right) = (1, 0)$$

yazabiliriz. Ayrıca Tanım 2.4. den de

$$\| \vec{a} \| = 1 \text{ ve } \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^{*} \right\rangle}{\| \vec{a} \|} = 0$$

dır. Bu ifadeden ise

$$\| \vec{a} \| = 1 \text{ ve } \left\langle \vec{a}, \vec{a}^{*} \right\rangle = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.2. $\widetilde{a} \neq \left(\vec{0}, \vec{a} \right) \in \mathbb{D}-$modül olmak üzere

$$\widetilde{u} = \frac{\widetilde{a}}{\| \widetilde{a} \|}$$

bir birim dual vektördür (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: $\{e_1, e_2, e_3\}$ sistemi $\mathbb{R}^3$de standart baz olsun.

$$\begin{aligned} \widetilde{a} &= \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 + \varepsilon \left(a_1^* \vec{e}_1 + a_2^* \vec{e}_2 + a_3^* \vec{e}_3 \right) \\ &= \left(a_1 + \varepsilon a_1^*\right) \vec{e}_1 + \left(a_2 + \varepsilon a_2^*\right) \vec{e}_2 + \left(a_3 + \varepsilon a_3^*\right) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

ve

$$\| \widetilde{a} \| = a + \varepsilon a^*$$

olduğundan

$$\widetilde{u} = \frac{\widetilde{a}}{\| \widetilde{a} \|} = \frac{a_1 + \varepsilon a_1^*}{a + \varepsilon a^*} \vec{e}_1 + \frac{a_2 + \varepsilon a_2^*}{a + \varepsilon a *} \vec{e}_2 + \frac{a_3 + \varepsilon a_3^*}{a + \varepsilon a^*} \vec{e}_3$$

elde edilir. Burada her terim için bölme işlemi yapılırsa ve neticede

$$a = \| \vec{a} \| \quad \text{ve } a^* = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle}{\| \vec{a} \|}$$

konulursa

$$\widetilde{u} = \frac{\vec{a}}{\| \vec{a} \|} + \varepsilon \left(\frac{\vec{a}^*}{\| \vec{a} \|} - \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle}{\| \vec{a} \|^2} . \frac{\vec{a}}{\| \vec{a} \|} \right)$$

bulunur.

$$k = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle}{\| \vec{a} \|^2}$$

denilirse

$$\widetilde{u} = \vec{u} + \varepsilon \vec{u^*} = \frac{\vec{a}}{\| \vec{a} \|} + \varepsilon \frac{\vec{a^*} - k \vec{a}}{\| \vec{a} \|}$$

olur. $\widetilde{u} = \vec{u} + \varepsilon \vec{u^*}$ dual vektöründe

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\| \vec{a} \|} \text{ ve } \vec{u^*} = \frac{\vec{a^*} - k\vec{a}}{\| \vec{a} \|}$$

dır.

$$\left\langle \vec{u}, \vec{u} \right\rangle = 1 \text{ ve } \left\langle \vec{u}, \vec{u^*} \right\rangle = 0$$

olduklarından $\tilde{u}$ bir birim dual vektördür.

Tanım 2.14. $\left\{ \tilde{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \mid \| \tilde{a} \| = (1,0) ; \quad \vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ cümlesine

$\mathbb{D}-$modülde birim dual küre denir (Hacısalihoğlu, 1983 .

Teorem 2.3. $\tilde{x} \neq \left(\vec{0}, \vec{x} \right) \in \mathbb{D}-$modül olmak üzere $\mathbb{D}-$modülde denklemi

$$\| \tilde{a} \| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: $\mathbb{R}^3$ deki bir doğru, bir O başlangıç noktasına göre, üzerindeki bir M noktası ve doğrunun yönünü belirten bir $\vec{u}$ vektörü tarafından tamamen belirlenir. Böyle bir doğrunun denklemi

$$\left(\vec{a} - \vec{m} \right) \wedge \vec{u} = 0$$

dır. Bu denklemde $\vec{u}$ yerine $\lambda\vec{u}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, alınırsa yine aynı doğru belirtilmiş olacağından $\vec{u}$ birim vektör olarak alınabilir.

$$\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u} = \vec{u_o^*}$$

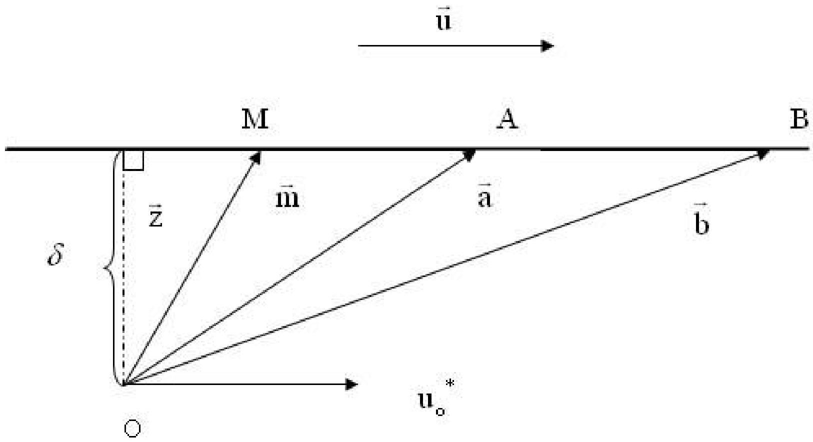
denirse, $\vec{u_o^*}$ vektörüne $\vec{u}$ birim dual vektörünün O noktasına göre vektörel momenti olarak bakılabilir. $\vec{u_o^*}$, A noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsızdır. Eğer doğru üzerinde A dan başka bir B noktası alınırsa

$$\left(\vec{b} - \vec{m} \right) \wedge \vec{u} = 0$$

dır. Buradan

$$\vec{b} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{u}_o^*$$

olduğu görülür. $\vec{u}_o^*$ vektörünün boyu O noktasının doğruya olan dik uzaklığına



Şekil 2.1. Vektörel moment

eşittir. Bu ise şu şekilde gösterilebilir;

O noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı Z olsun. $\overrightarrow{u}_o^*$ vektörü, A noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsız olduğundan

$$\overrightarrow{u}_o^* = \overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{u}$$

dur. $\overrightarrow{u}_o^*$ vektörünün boyu

$$\| \overrightarrow{u}_o^* \| = \| \overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{u} \| = \| \overrightarrow{z} \| \| \overrightarrow{u} \| \sin\varphi$$
$$\| \overrightarrow{u}_o^* \| = \| \overrightarrow{z} \| = \delta$$

dır. Bu son ifadeden de görüldüğü gibi $\overrightarrow{u}_o^*$, başlangış noktasının seçilişine bağlıdır. Eğer $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_o^*\right)$ vektör çifti verilmiş ise $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğru tek anlamlı olarak tamamen bellidir.

$$\overrightarrow{u}_o^* = \mu \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$$

olduğundan $\overrightarrow{u}_o^* \perp \overrightarrow{a}$ ve $\overrightarrow{u}_o^* \perp \overrightarrow{u}$ dür. O dan geçen ve $\overrightarrow{u}_o^*$ vektörüne dik olan düzlem içinde, O merkezli δ yarıçaplı çember çizilirse O dan $\overrightarrow{u}$ vektörüne çizilen dik doğru çemberi iki noktada keser. Bu noktalardan çembere çizilen teğetler $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_o^*\right)$ ve $\left(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}_o^*\right)$ vektör çiftlerine karşılık gelen doğrulardır. Momentin pozitif olduğu, yani $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_o^*\right)$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü doğru göz önüne alınırsa bu da bir tanedir. Böylece $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrularla $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_o^*\right)$ vektör çiftleri birebir karşılık gelmektedir. $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}^*_o\right)$ vektör çifti;

koşullarını sağlamaktadır. $\mathbb{R}^3$ de standart baza göre

$$\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e}_1 + u_2\overrightarrow{e}_2 + u_3\overrightarrow{e}_3 \text{ ve } \overrightarrow{u}^*_o = u^*_{o1}\overrightarrow{e}_1 + u^*_{o2}\overrightarrow{e}_2 + u^*_{o3}\overrightarrow{e}_3 \tag{2.1}$$

dür. $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}^*_o\right)$ vektör çiftinin

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}^*_o\right) = (u_1, u_2, u_3; u^*_{o1}, u^*_{o2}, u^*_{o3})$$

altı bileşeni normlanmış Plücker doğru koordinatlarıdır. Eğer $\rho > 0$ olmak üzere $\overrightarrow{u}$ yerine $\overrightarrow{v} = \rho\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{u}^*_o$ yerine de $\overrightarrow{v}^*_o = \rho\overrightarrow{u}^*_o$ alınırsa (2.1) eşitliğinden dolayı $\left\langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}^*_o\right\rangle = 0$ koşulu gerçekleşir. Burada yine

$$\overrightarrow{v}^*_o = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{v}$$

dir. $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}^*_o\right)$ vektör çiftinin

$$\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}^*_o\right) = (\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3; \rho u^*_{o1}, \rho u^*_{o2}, \rho u^*_{o3})$$

altı bileşeni normlanmamış Plücker doğru koordinatlarıdır. Şimdi ispatı tamamlayalım. $\widetilde{x} = \overrightarrow{x} + \varepsilon\overrightarrow{x^*} \in \mathbb{D}-$modül birim dual vektör olsun. Teorem 2.1. den

$$\left\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\right\rangle = 1 \text{ ve } \left\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^*\right\rangle = 0$$

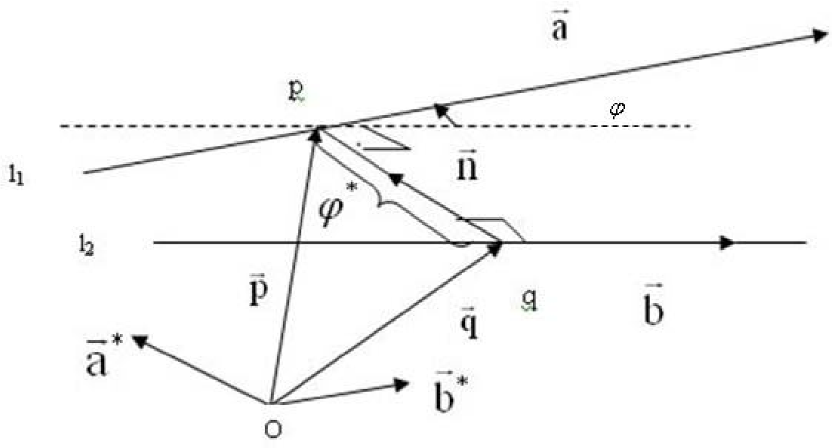
olduğu bilinmektedir. Bu ise teoremin ifadesinden başka birşey değildir. Demek ki $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{u}$ vektörüne ve $\overrightarrow{x}^*$ vektörü de $\overrightarrow{u}^*_o$ vektörüne karşılık gelmektedir. Yani $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}^*_o\right)$ vektör çiftine $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^*\right)$ vektör çifti karşılık gelmektedir. O halde $\widetilde{x} = \overrightarrow{x} + \varepsilon\overrightarrow{x^*}$ birim dual vektörü verildiğinde $\mathbb{R}^3$ deki bir tek yönlü doğru tamamen belirlidir. $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara $\mathbb{D}-$modülün birim dual vektörleri birebir karşılık gelirler.

Tanım 2.15. $\widetilde{a}$ ve $\breve{b}$ iki birim dual vektör olsunlar. $\widetilde{a}$ ile $\breve{b}$ nın

$$\left\langle\breve{a}, \breve{b}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right\rangle + \varepsilon\left\{\left\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b}\right\rangle\right\}$$

şeklinde verilen iç çarpımını inceleyelim. Teorem 2.3. gereğince $\widetilde{a}$ ve $\breve{b}$ birim dual vektörleri $\mathbb{R}^3$ de iki yönlü doğru belirtirler. Bu doğrular sırası ile l_1 ve l_2 olsun. l_1 in yönü $\overrightarrow{a}$, yeri $\overrightarrow{a}^*$ ve l_2 nin yönü $\overrightarrow{b}$, yeri $\overrightarrow{b}^*$ ile belli olduklarından $\overrightarrow{a}$ ile $\overrightarrow{b}$ arasındaki açı φ ise

$$\left\langle\breve{a}, \breve{b}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right\rangle + \varepsilon\left\{\left\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b}\right\rangle\right\}$$



Şekil 2.2. Dual açı

iç çarpımının reel kısmı

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \varphi \in \mathbb{R},$$

dir.Yine $\left\langle \widehat{a}, \widehat{b} \right\rangle$ iç çarpımının dual kısmı olan $\left\langle \vec{a}, \vec{b^*} \right\rangle + \left\langle \vec{a^*}, \vec{b} \right\rangle$ ifadesinin geometrik anlamı şudur;

$\vec{a^*}$ ve $\vec{b^*}$, sırası ile l_1 ve l_2 yönlü doğruları üzerindeki p ve q noktalarının seçilişinden bağımsız olduklarından p ve q noktaları, l_1 ve l_2 doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak düşünülebilir. Bu ortak dikme yönündeki birim vektör

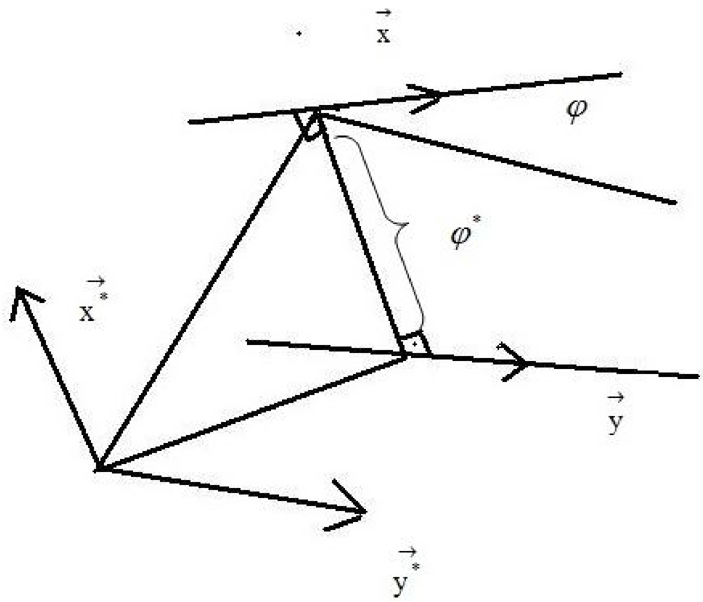
$$\vec{n} = \mp \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\| \vec{a} \wedge \vec{b} \|}$$

dir. Eğer l_1 ve l_2 arasındaki en kısa uzaklık φ^* ile gösterilirse;

$$\vec{p} - \vec{q} = \mp \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\| \vec{a} \wedge \vec{b} \|} \varphi^*$$

dır. $\vec{a^*} = \vec{p} \wedge \vec{a}$ ve $\vec{b^*} = \vec{q} \wedge \vec{b}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{a}, \vec{b^*} \right\rangle &= \left\langle \vec{a}, \vec{q} \wedge \vec{b} \right\rangle = -\left\langle \vec{q}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle \\ \left\langle \vec{a^*}, \vec{b} \right\rangle &= \left\langle \vec{p} \wedge \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{p}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle \end{aligned}$$



Şekil 2.3. Dual uzaklık

dir. Son iki eşitliği toplarsak;

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{a}, \vec{b}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*, \vec{b} \right\rangle &= \left\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle \\
&= \mp \left\langle \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\| \vec{a} \wedge \vec{b} \|} \varphi^*, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle \\
&= \mp \frac{\varphi^*}{\| \vec{a} \wedge \vec{b} \|} \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle \\
&= \mp \varphi^* \| \vec{a} \wedge \vec{b} \| \\
&= \mp \varphi^* \sin \varphi
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak;

$$\left\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \right\rangle = \cos \varphi \mp \varepsilon \varphi^* \sin \varphi$$

elde edilir. Bu son ifadede $(-)$ işareti göz önüne alınırsa

$$\begin{gathered}
\left\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \right\rangle = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi \\
\cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = \cos (\varphi + \varepsilon \varphi^*)
\end{gathered}$$

bulunur. $\widetilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ bir dual sayı olmak üzere Taylor formülü gereği;

$$\begin{aligned} f(\varphi + \varepsilon\varphi^*) &= f(\varphi) + \varepsilon\varphi^* f'(\varphi) + \varepsilon^2 \tfrac{\varphi^{*2}}{2} f''(\varphi) + ... \\ \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) &= \cos\varphi + \varepsilon\varphi^*(-\sin\varphi) \\ &= \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi \\ &= \cos\widetilde{\varphi} \end{aligned}$$

dir. $\widetilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual sayısına $\widetilde{a}$ ve $\widetilde{b}$ birim vektörleri arasındaki dual açı denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.16. $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathbb{D}-$modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$

şeklinde bir işlemdir ve

$$\widetilde{a} \wedge \widetilde{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon\left(\vec{a} \wedge \vec{b^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{b}\right)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.4. $\widetilde{a} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \widetilde{b} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*} \in \mathbb{D}-$modül için

$$\widetilde{a} \wedge \widetilde{b} = \| \widetilde{a} \| \| \widetilde{b} \| . \sin\widetilde{\varphi}\vec{N}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

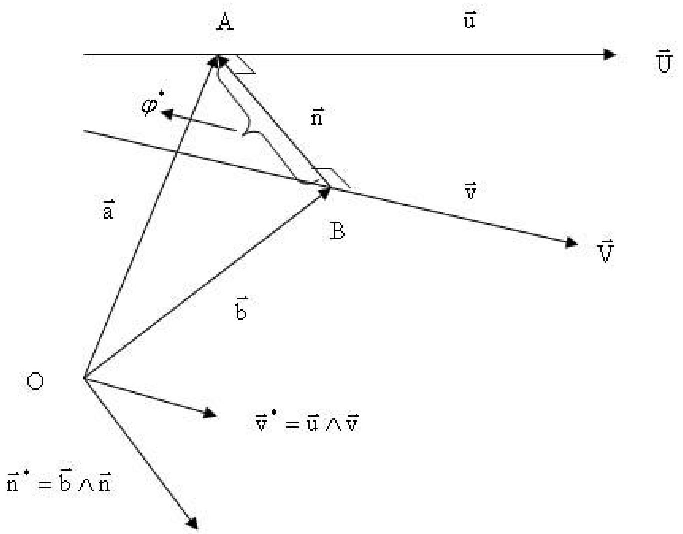
İspat: $\widetilde{a}$ dual vektörün birim dual vektörü $\widetilde{u}$, $\widetilde{b}$ dual vektörün birim dual vektörü $\widetilde{v}$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{a} \wedge \widetilde{b} = \left(\| \widetilde{a} \| \widetilde{u}\right) \wedge \left(\| \widetilde{b} \| \widetilde{v}\right) \\ = \| \widetilde{a} \| \| \widetilde{b} \| \left(\widetilde{u} \wedge \widetilde{v}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

olduğunu biliyoruz. Dual vektörlerin dış çarpımının tanımından

$$\begin{aligned} \widetilde{u} \wedge \widetilde{v} &= \left(\vec{u} + \varepsilon\vec{u^*}\right) \wedge \left(\vec{v} + \varepsilon\vec{v^*}\right) \\ &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \varepsilon\left(\vec{u} \wedge \vec{v^*} + \vec{u^*} \wedge \vec{v}\right). \end{aligned}$$

Ayrıca $\vec{u^*} = \vec{x} \wedge \vec{u}, \ \vec{v^*} = \vec{y} \wedge \vec{v}$ şeklinde alırsak



Şekil 2.4. İki dual vektörü dik kesen vektör

$$\begin{aligned}
\widetilde{u} \wedge \widetilde{v} &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \varepsilon \left(\vec{u} \wedge \vec{v^*} + \vec{u^*} \wedge \vec{v} \right) \\
&= \vec{u} \wedge \vec{v} + \varepsilon \left[\vec{u} \wedge \left(\vec{y} \wedge \vec{v} \right) + \left(\vec{x} \wedge \vec{u} \right) \wedge \vec{v} \right] \\
&= n \sin\varphi + \varepsilon \left[\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{y} - \langle u, \vec{y} \rangle \vec{v} + \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle \vec{u} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{x} \right] \\
&= n \sin\varphi + \varepsilon \left[\cos\varphi \left(\vec{y} - \vec{x} \right) + \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle \vec{u} - \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle \vec{v} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
n^* &= \vec{x} \wedge \vec{n}, \\
&= \frac{\vec{x} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right)}{\| \vec{u} \wedge \vec{v} \|}, \\
&= \frac{\vec{x} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v} \right)}{\sin\varphi},
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden.

$$
\begin{aligned}
n^* \sin\varphi &= \vec{x} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right), \\
&= -\vec{x} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right), \\
&= -\langle \vec{x}, \vec{u}\rangle \vec{v} + \langle \vec{x}, \vec{v}\rangle \vec{u}, \\
&= -\langle \vec{y} + \varphi^* \vec{n}, \vec{u}\rangle \vec{v} + \langle \vec{x}, \vec{v}\rangle \vec{u}, \\
&= -\langle \vec{y}, \vec{u}\rangle \vec{v} - \varphi^* \langle \vec{n}, \vec{u}\rangle \vec{v} + \langle \vec{x}, \vec{v}\rangle \vec{u}, \\
&= -\langle \vec{y}, \vec{u}\rangle \vec{v} + \langle \vec{x}, \vec{v}\rangle \vec{u}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise aşağıdaki eşitliği verir

$$
\left.
\begin{aligned}
\widetilde{u} \wedge \widetilde{v} &= \vec{n} \sin\varphi + \varepsilon\varphi^* \vec{n} \cos\varphi + \varepsilon n^* \sin\varphi + \varepsilon^2 n^* \varphi^* \cos\varphi, \\
&= \left(\vec{n} + \varepsilon \vec{n}^*\right) \left(\sin\varphi + \varepsilon\varphi^* \cos\varphi\right), \\
&= \vec{N} \sin\widetilde{\varphi}
\end{aligned}
\right\} \tag{2.3}
$$

(2.3) denklemini (2.2) denkleminde yerine yazarsak

$$
\widetilde{a} \wedge \widetilde{b} = \parallel \widetilde{a} \parallel \parallel \widetilde{b} \parallel . \sin\widetilde{\varphi} \vec{N} \tag{2.4}
$$

sonucuna ulaşılır.

3 MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Materyal

Bu çalışmada incelediğimiz kaynaklar; internet üzerinden veya kütüphanelerden ulaştığımız makaleler ve kitaplardan elde edilmiştir.

3.2 Yöntem

Elde edilen çalışmalardaki uzaylar ve dönüşümler incelenmiş ve bu uzaylardaki Study dönüşümünün matris karşılıkları elde edilmiştir. Daha sonra ise buradaki tüm çalışmalar eşliğinde dual Hiperbolik ve dual Lorentzyen birim küreler üzerindeki çemberlerin Study dönüşümleri gösterilmiştir. Bu çalışmadaki matris gösterimleri ve sayısal değerlerin yazılımında Scientific Workplace bilgisayar programından yararlanılmıştır.

4 ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1 Bir Çemberin Study Dönüşümü

Teorem 4.1.1. Study dönüşümü, $\mathbb{D}-$modüldeki dual birim kürenin dual noktaları ile $\mathbb{R}^3$ ün yönlendirilmiş doğruları arasında birebir bir dönüşümdür (Hacısalihoğlu, 1977).

İspat: K, O ve $\left\{O; \widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\right\}$ sırasıyla, dual birim küreyi, K küresinin merkezini ve dual ortonormal sistemi göstersin. Biz

$$\widetilde{e}_i = \overrightarrow{e}_i + \varepsilon \overrightarrow{e}_i^* \quad ; \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{4.1.1}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer $\{1, 2, 3\}$ kümesinin tüm permütasyonlarının grubunu

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3$$

$\mathcal{S}_3$ ile gösterilirse

$$\widetilde{e}_{\sigma(1)} = sgn(\sigma)\, \widetilde{e}_{\sigma(2)} \wedge \widetilde{e}_{\sigma(3)},$$

olarak yazabiliriz, öyleki $sgn(\sigma) = \mp 1$. Buradan

$$\left.\begin{array}{rcl} \widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{e}_2 & = & \widetilde{e}_3, \\ \widetilde{e}_2 \wedge \widetilde{e}_3 & = & \widetilde{e}_1, \\ \widetilde{e}_3 \wedge \widetilde{e}_1 & = & \widetilde{e}_2, \end{array}\right\} \tag{4.1.2}$$

bulunur. Ayrıca

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1 \right\rangle = 1, \\ \left\langle \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_2 \right\rangle = 1, \\ \left\langle \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_3 \right\rangle = 1, \end{array}\right\} \tag{4.1.3}$$

dir. Bu durumda $\left\{O, \widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\right\}$ ortogonal sistemi $\mathbb{R}^3$ uzayının bir ortogonal sistemidir ve $\overrightarrow{e}_i^*$ moment vektörü

$$\overrightarrow{e}_i^* = \overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{e}_i, \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{4.1.4}$$

olarak yazılabilir. Bu moment vektörleri $\mathbb{R}^3$ uzayının moment vektörleri olduğundan

$$\overrightarrow{e}_i^* = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} \overrightarrow{e}_j, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 3 \tag{4.1.5}$$

olarak yazılabilir.(4.1.5) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{\,*} &= \lambda_{11}\vec{e}_1 + \lambda_{12}\vec{e}_2 + \lambda_{13}\vec{e}_3,\\ \vec{e}_2^{\,*} &= \lambda_{21}\vec{e}_1 + \lambda_{22}\vec{e}_2 + \lambda_{23}\vec{e}_3,\\ \vec{e}_3^{\,*} &= \lambda_{31}\vec{e}_1 + \lambda_{32}\vec{e}_2 + \lambda_{33}\vec{e}_3,\end{aligned}$$

yazarsak

$$\left\langle \vec{e}_i^{\,*}, \vec{e}_i \right\rangle = \left\langle \lambda_{i1}\vec{e}_1 + \lambda_{i2}\vec{e}_2 + \lambda_{i3}\vec{e}_3, \vec{e}_i \right\rangle = 0,\ 1 \leq i \leq 3$$

olacağından $\lambda_{ii} = 0$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2^{\,*} \right\rangle &= \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3^{\,*} \right\rangle,\\ &= \left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_3, \vec{e}_1^{\,*} \right\rangle,\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\left\langle \lambda_{11}\vec{e}_1 + \lambda_{12}\vec{e}_2 + \lambda_{13}\vec{e}_3, \vec{e}_2 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_1, \lambda_{21}\vec{e}_1 + \lambda_{22}\vec{e}_2 + \lambda_{23}\vec{e}_3 \right\rangle = 0$$

eşitliğinde

$$\lambda_{12} + \lambda_{21} = 0$$

olduğunda

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21}$$

bulunur. Ohalde;

$$\begin{aligned}&\left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle = \lambda_{11}, \quad \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle = \lambda_{22}, \quad \left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle = \lambda_{33},\\ &\left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle = \lambda_{12}, \quad \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle = \lambda_{21}, \quad \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle = \lambda_{23},\\ &\left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle = \lambda_{32}, \quad \left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle = \lambda_{31}, \quad \left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle = \lambda_{13}\end{aligned}$$

olur. Buradan ise

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0,\\ \lambda_{12} &= -\lambda_{21} = \lambda_1,\\ \lambda_{23} &= -\lambda_{32} = \lambda_2,\\ \lambda_{31} &= -\lambda_{13} = \lambda_3,\end{aligned}$$

kabul edersek

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{\,*} &= \lambda_1\vec{e}_2 - \lambda_3\vec{e}_3,\\ \vec{e}_2^{\,*} &= -\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_3,\\ \vec{e}_3^{\,*} &= \lambda_3\vec{e}_1 - \lambda_2\vec{e}_2,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{\,*}\\ \vec{e}_2^{\,*}\\ \vec{e}_3^{\,*}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \lambda_1 & -\lambda_3\\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2\\ \lambda_3 & -\lambda_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{bmatrix} \tag{4.1.6}$$

eşitliğine dönüşür. Böylece Study dönüşümü

$$K \;\rightarrow\; \mathbb{R}^3$$

K da dual ortonormal sistemden $\mathbb{R}^3$ de reel ortonormal sisteme bir dönüşüm olarak verilebilir. (4.1.1) ve (4.1.6) eşitliklerini kullanarak Study dönüşümünün matris formu şu şekilde verilebilir;

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_1 &= \vec{e}_1 + \varepsilon\vec{e}_1^{\,*}\\ &= \vec{e}_1 + \varepsilon\left[\lambda_1\vec{e}_2 - \lambda_3\vec{e}_3\right]\\ &= \vec{e}_1 + \varepsilon\lambda_1\vec{e}_2 - \varepsilon\lambda_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_2 &= \vec{e}_2 + \varepsilon\vec{e}_2^{\,*}\\ &= \vec{e}_2 + \varepsilon\left[-\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_3\right]\\ &= \vec{e}_2 - \varepsilon\lambda_1\vec{e}_1 + \varepsilon\lambda_2\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_3 &= \vec{e}_3 + \varepsilon\vec{e}_3^{\,*}\\ &= \vec{e}_3 + \varepsilon\left[\lambda_3\vec{e}_1 - \lambda_2\vec{e}_2\right]\\ &= \vec{e}_3 + \varepsilon\lambda_3\vec{e}_1 - \varepsilon\lambda_2\vec{e}_2\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix}\widetilde{e}_1\\ \widetilde{e}_2\\ \widetilde{e}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \lambda_1\varepsilon & -\lambda_3\varepsilon\\ -\lambda_1\varepsilon & 1 & \lambda_2\varepsilon\\ \lambda_3\varepsilon & -\lambda_2\varepsilon & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{bmatrix} \tag{4.1.7}$$

bulunur. Böylece dual ortogonal matrisi tanımlamış olduk.

Teorem 4.1.2. Study dönüşümü bir lineer izomorfizmdir (Hacısalihoğlu, 1977).

İspat: $\mathbb{R}^3$ de Öklidyen hareketlerde iki doğru arasındaki uzaklık ve açı değişmediğin-

den, $\mathbb{D}-$modülde buna karşılık iç çarpım değişmez.
Bu dual katsayılar ile ortogonal bir matrisin hareketidir. K dual birim kürenin merkezi $\mathbb{D}-$modülde dönüşüm grubunda sabit kalması gerektiğinden herhangi bir dönüşüm içermez. Bu yüzden $\mathbb{D}-$modülde Öklidyen hareketleri göstermek için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında Öklidyen hareketler dual ortogonal matrislere birebir karşılık gelırler. K birim dual küresinde diferansiyellenebilir bir eğri

$$t \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad \vec{x}\,(t) \in K$$

t reel parametresine bağlıdır ve $\mathbb{R}^3$ ün doğrusunun diferansiyellenebilir ailesi (Regle yüzeyler) ile gösterilebilir. $\vec{x}\,(t)$ doğruları yüzey üretir. x, y noktaları K nın iki farklı noktasını göstersin ve $\widetilde{\varphi}$ ise $\vec{x}$ ile $\vec{y}$ arasındaki dual açıyı göstersin. $\widetilde{\varphi}$ dual açısı $\varphi + \varepsilon\varphi^*$ şeklinde dual sayı değerine sahiptir, φ ve φ^* sırasıyla $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ arasındaki açı ve en kısa uzaklğı gösterir. Öyleyse aşağıdaki teoremi verebiliriz (Hacısalihoğlu, 1977).

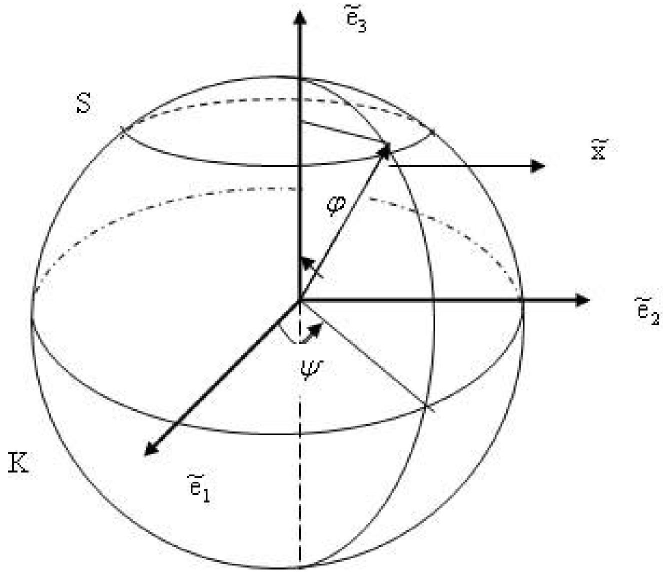
Teorem 4.1.4. $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \cos\widetilde{\varphi}, \ \ \forall\vec{x}, \vec{y} \in K$. Burada $\cos\widetilde{\varphi} = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi$ dir.

Bu teoremin özel durumları şunlardır;

- $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = 0 \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* = 0$ olması durumunda, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ doğruları bir dik açı ile kesişirler.
- $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = sadece\ dual \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* \neq 0$ olması durumunda, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ ortogonal doğrulardır.
- $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = sadece\ reel \Longrightarrow \varphi \neq \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* = 0$ olması durumunda, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ biribiri ile kesişir.
- $\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \mp 1 \Longrightarrow \varphi = 0$ ve $\varphi^* = 0, (veya\ \varphi = \pi)$ olması durumunda, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ çakışıktır.

$\widetilde{e}_3$ birim dual vektörüne karşılık gelen doğru l olsun. Eğer l de bir p noktası seçersek $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olur ve böylece (4.1.7) matrisini

$$\begin{bmatrix} \overset{\frown}{e}_1 \\ \overset{\frown}{e}_2 \\ \overset{\frown}{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1\varepsilon & 0 \\ -\lambda_1\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.1.8}$$



Şekil 4.1. Birim dual çember

matrisine dönüştürürüz. Bu dönüşümün inversi;

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_1 \\ \overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1\varepsilon & 0 \\ \lambda_1\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{e}_1 \\ \breve{e}_2 \\ \breve{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.1.9}$$

olur. Öyleyse;

$$\left\langle \tilde{x}, \tilde{e}_3 \right\rangle = \| \tilde{x} \| \,.\, \| \tilde{e}_3 \| \,.\cos\tilde{\varphi}$$

bulunur. S, K birim dual küresinin üzerinde bir çember olmak üzere

$$S = \left\{ \tilde{x} \in K \mid \left\langle \tilde{x}, \tilde{e}_3 \right\rangle = \cos\tilde{\varphi} = sabit \right\}$$

olsun. Biz $\tilde{x}$ dual vektörünü

$$\tilde{x} = m_1\tilde{e}_1 + m_2\tilde{e}_2 + m_3\tilde{e}_3$$

şeklinde alırsak

$$\begin{array}{lll} \mid OP \mid = 1 & & \\ \mid m_3 P \mid = \mid OP' \mid = \sin\widetilde{\varphi} & & \\ \cos\widetilde{\psi} = \frac{m_1}{\sin\widetilde{\varphi}} & \Longrightarrow & m_1 = \sin\widetilde{\varphi}\cos\widetilde{\psi} \\ \sin\widetilde{\psi} = \frac{m_2}{\sin\widetilde{\varphi}} & \Longrightarrow & m_2 = \sin\widetilde{\varphi}\sin\widetilde{\psi} \\ & & m_3 = \cos\widetilde{\varphi} \end{array}$$

bulunur. Ohalde

$$\widetilde{x} = \sin\widetilde{\varphi}\cos\widetilde{\psi}\widetilde{e}_1 + \sin\widetilde{\varphi}\sin\widetilde{\psi}\widetilde{e}_2 + \cos\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_3 \tag{4.1.10}$$

yazabiliriz. Burada $\widetilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve $\widetilde{\psi} = \psi + \varepsilon\psi^*$ dual açıları göstermek üzere Şekil (2.3) de gösterilmiştir. Ayrıca Taylor formülünden yararlanarak

$$\begin{array}{lcl} \sin\widetilde{\varphi} = \sin\varphi + \varepsilon\varphi^*\cos\varphi & , & \cos\widetilde{\varphi} = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^*\sin\varphi \\ \sin\widetilde{\psi} = \sin\psi + \varepsilon\psi^*\cos\psi & , & \cos\widetilde{\psi} = \cos\psi - \varepsilon\psi^*\sin\psi \end{array} \tag{4.1.11}$$

buluruz. Şimdi (4.1.11) eşitliğindeki değerleri (4.1.10) eşitliğinde yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= (\sin\varphi + \varepsilon\varphi^*\cos\varphi)(\cos\psi - \varepsilon\psi^*\sin\psi)\left(\vec{e}_1 + \varepsilon\lambda_1\vec{e}_2\right) \\ &\quad + (\sin\varphi + \varepsilon\varphi^*\cos\varphi)(\sin\psi + \varepsilon\psi^*\cos\psi)\left(\vec{e}_2 - \varepsilon\lambda_1\vec{e}_1\right) \\ &\quad + (\cos\varphi - \varepsilon\varphi^*\sin\varphi)\,\vec{e}_3 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu işlemleri tek tek yaparsak

$$\begin{aligned} \widetilde{x} = {} & \sin\varphi\cos\psi\vec{e}_1 + \sin\varphi\sin\psi\vec{e}_2 + \cos\varphi\vec{e}_3 \\ & + \varepsilon\varphi^*\cos\varphi\cos\psi\vec{e}_1 - \varepsilon\psi^*\sin\varphi\sin\psi\vec{e}_1 - \varepsilon\lambda_1\sin\varphi\sin\varphi\vec{e}_1 \\ & + \varepsilon\psi^*\sin\varphi\cos\psi\vec{e}_2 + \varepsilon\varphi^*\cos\varphi\sin\psi\vec{e}_2 + \varepsilon\lambda_1\sin\varphi\cos\psi\vec{e}_2 \\ & - \varepsilon\varphi^*\sin\varphi\vec{e}_3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ilişki $\widetilde{x} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*$ olduğundan $\vec{x}$ ve $\vec{x}^*$ vektörlerinin matris formu;

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \\ \vec{x}^* &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^*\cos\varphi\cos\psi - (\psi^* + \lambda_1)\sin\varphi\sin\psi \\ \varphi^*\cos\varphi\sin\psi + (\psi^* + \lambda_1)\sin\varphi\cos\psi \\ -\varphi^*\sin\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

şeklinde bulunur.

Diğer taraftan $\widetilde{x}$ noktası, merkezi $\widetilde{e}_3$ ekseni üzerinde olan çemberin üzerinde olan bir noktadır. Bunu

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = \cos \widetilde{\varphi} = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = sabit \tag{4.1.13}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun anlamı

$$\varphi = c_1 \, (sbt) \;\text{ ve }\; \varphi^* = c_2 \, (sbt)$$

dir. Aynı zamanda

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = \cos \widetilde{\varphi}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle &= \langle \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*, \vec{e}_3 + \varepsilon \vec{e}_3^{\,*} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{e}_3 \rangle + \varepsilon \langle \vec{x}, \vec{e}_3^{\,*} \rangle + \varepsilon \langle \vec{x}^*, \vec{e}_3 \rangle \\ &= \cos \varphi + \varepsilon \left(\langle \vec{x}, \vec{e}_3^{\,*} \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{e}_3 \rangle \right) \end{aligned}$$

ve (4.1.4) eşitliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{e}_3^{\,*} \rangle + \langle \vec{x}^*, \vec{e}_3 \rangle &= \left\langle \vec{x}, \overrightarrow{OM} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{ON} \wedge \vec{x}, \vec{e}_3 \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{x}, \vec{a} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle + \left\langle \vec{b} \wedge \vec{x}, \vec{e}_3 \right\rangle \\ &= -\left\langle \vec{a}, \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle + \left\langle \vec{x} \wedge \vec{e}_3, \vec{b} \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{b}, \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle - \left\langle \vec{a}, \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle \\ &= \left\langle -\varphi^* \frac{\vec{x} \wedge \vec{e}_3}{\| \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \|}, \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle \\ &= -\varphi^* \left\langle \frac{\vec{x} \wedge \vec{e}_3}{\| \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \|}, \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \right\rangle \\ &= -\varphi^* \| \vec{x} \wedge \vec{e}_3 \| \\ &= -\varphi^* \| \vec{x} \| \| \vec{e}_3 \| \sin \varphi \\ &= -\varphi^* \sin \varphi \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.1.12) ve (4.1.13) eşitlikleri aşağıdaki ilişkileri yazmamıza olanak sağlar

$$\left.\begin{array}{rcl} \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle & = & 1, \\ \left\langle \vec{x}, \vec{x}^{*} \right\rangle & = & 0, \\ \left\langle \vec{x}, \vec{e}_3 \right\rangle - \cos\varphi & = & 0, \\ \left\langle \vec{x}, \vec{e}_3^{\,*} \right\rangle + \left\langle \vec{x}^{*}, \vec{e}_3 \right\rangle + \varphi^{*}\sin\varphi & = & 0 \end{array}\right\} \tag{4.1.14}$$

(4.1.14) eşitliklerinin ψ ve ψ^{*} şeklinde sadece iki parametresi vardır. Böylece (4.1.14) eşitlikleri $\mathbb{R}^3$ de bir kongruans doğru belirtir.

Teorem 4.1.5. (4.1.14) kongruansının denklemleri

$$\vec{y}(t,v) = \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^{*}(t) + v\vec{x}(t) \tag{4.1.15}$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: Dayanak eğrisi $\vec{a} = \vec{a}(t)$ denklemi ile belli olan bir eğri ve ana doğruları $\vec{x} = \overrightarrow{x(t)}$ birim vektörü olan regle yüzeyin denklemi

$$\vec{y}(t,u) = \vec{a}(t) + u\vec{x}(t)$$

dir.

$$\vec{x}^{*} = \vec{a} \wedge \vec{x}$$

ve

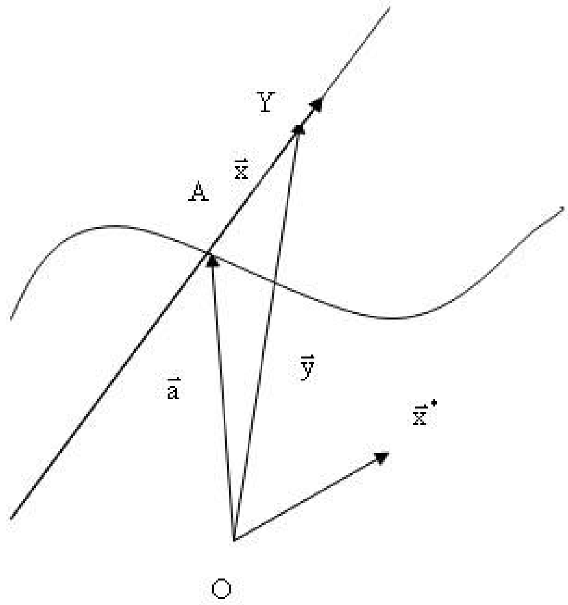
$$\begin{aligned} \vec{x} \wedge \vec{x}^{*} &= \vec{x} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{x}\right) \\ &= \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle \vec{a} - \left\langle \vec{x}, \vec{a} \right\rangle \vec{x} \\ &= \vec{a} - \left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle \vec{x} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\vec{a} = \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^{*}(t) + \left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle \vec{x}(t)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \vec{y}(t,u) &= \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^{*}(t) + \left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle \vec{x}(t) + u\vec{x}(t) \\ &= \vec{x}(t) \wedge \vec{x}^{*}(t) + \vec{x}(t)\left(\left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle + u\right) \end{aligned}$$



Şekil 4.2. Regle yüzey

olur ki $\left(\left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle + u\right) = v$ dersek

$$\vec{y}\,(t,v) = \vec{x}\,(t) \wedge \vec{x}^*\,(t) + v\vec{x}\,(t)$$

bulunur.

Eğer (4.15) eşitliğinde iki parametreyi (ψ, ψ^*)şeklinde alırsak

$$\vec{y}\,(\psi,\psi^*) = \vec{x}\,(\psi,\psi^*) \wedge \vec{x}^*\,(\psi,\psi^*) + v\vec{x}\,(\psi,\psi^*)$$

denklemini elde ederiz. Burada $\vec{y}$ nin koordinatları (y_1, y_2, y_3) ise (4.1.15) eşitliği

$$\left.\begin{array}{lll} y_1 & = & -\varphi^* \sin\psi - (\psi^* + \lambda_1)\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi + v\sin\varphi\cos\psi \\ y_2 & = & \varphi^*\cos\psi - (\psi^* + \lambda_1)\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi + v\sin\varphi\sin\psi \\ y_3 & = & (\psi^* + \lambda_1)\sin^2\varphi + v\cos\varphi \end{array}\right\} \tag{4.1.16}$$

denklemini verir. $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ olması durumunda (4.1.16) eşitliği

$$\frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{[y_3 - (\psi^* + \lambda_1)]^2}{[c_2 \cot gc_1]^2} = 1 \tag{4.1.17}$$

eşitliğini verir. Buradaki iki parametre ψ^* ve λ_1 dir. Böylece bir kongruans doğrusu ikinci derece ile gösterilir. Bu kongruans öyle konumlanmıştır ki;

- l doğrusu ve bu doğruların arasındaki en kısa uzaklık $\varphi^* = c_2$,
- l doğrusu ve bu doğruların arasındaki açı $\varphi = c_1$ dir.

Böylece bu kongruansın doğrularının kesişimi bir silindir oluşturur ve bu silindirin yarıçapının $\varphi^* = sabit$ ve ekseninin l olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 4.1.1. Eğer bir kongruans doğrusunun tüm doğruları sabit açı ile tanımlanan doğrularsa bu kongruans eğik kongruans olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu, 1977).

Bu tanıma göre (4.17) bir eğik kongruans temsil eder. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.6. S, K birim dual küresi üzerinde iki parametreli bir çember olsun. S nin Study dönüşümü ikinci dereceden bir eğim kongruansıdır. Diğer taraftan silindirin g ekseni ve kongruans doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın c_2 olduğunu biliyoruz. Bu yüzden bu silindir, kongruansın doğrularının örtüsüdür (Hacısalihoğlu, 1977).

O zaman aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.7. K birim dual küre ve

$$S = \left\{ \vec{X} \mid \left\langle \vec{X}, \vec{G} \right\rangle = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = sabit, \vec{X} \in K, \vec{G} \in K \right\}$$

K da bir çember olsun. φ ve g sırasıyla S ve G nin Study dönüşümü olsun $\psi^* = -\lambda_1, \varphi \neq 0$ ve $\varphi^* \neq 0$ olması durumunda (4.1.17) denklemi (4.1.18) denklemine indirgenir.

$$\frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{y_3^2}{k^2} = 1, k = c_2 \cot g c_1 = sbt, c_1 = \varphi, c_2 = \varphi^* \tag{4.1.18}$$

Bu ise bir hiperboloid verir. ψ^* ve λ_1 iki bağımsız parametre olduğundan, S nin Study dönüşümünün genelde hiperboloidin iki parametreli bir ailesi olduğunu söyleyebiliriz (Hacısalihoğlu, 1977).

Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.8. K birim dual küresinin bir çemberi S olsun. Ozaman S nin Study dönüşümü iki parametreli hiperboloid ailesinin bir örtüsü olur (Hacısalihoğlu, 1977).

4.1.1 ÖZEL DURUMLAR

$\varphi^* \neq 0$ **ve** $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **Olması Durumu;** Bu durumda (4.1.17) deki kongruansın doğrularının ortogonal kesişimi, ekseni l olan ve yarıçapı φ^* olan silindir oluşturur. Bu durumda (4.1.16) denklemi

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 &=& -\varphi^* \sin\psi + v\cos\psi \\ y_2 &=& \varphi^* \cos\psi + v\sin\psi \\ y_3 &=& \psi^* + \lambda_1 \end{array}\right\} \quad (4.1.19)$$

olur ki, buradan (4.1.15) denklemi

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2 + y_2^2 &=& c_2^2 + v^2 \\ y_3 &=& \psi^* + \lambda_1 \end{array}\right\} \quad (4.1.20)$$

şekline indirgenir (Hacısalihoğlu, 1977).

$\varphi^* \neq 0$ **ve** $\varphi = 0$ (**veya** $\varphi = \pi$) **Olması Durumu;** Bu durumda φ kongruansının doğruları ile silindir birbirleriyle çakışır. Bunun anlamı S nin Study dönüşümü silindire indirgenir ve (4.1.16) eşitliğindenden

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2 + y_2^2 &=& c_2^2 \\ y_3 &=& v \end{array}\right\} \quad (4.1.21)$$

bulunur (Hacısalihoğlu, 1977).

$\varphi^* = 0$ **ve** $\varphi = 0$ (**veya** $\varphi = \pi$) **Olması Durumu;** Bu durumda φ kongruansının tüm doğruları ile l doğrusu çakışır. Buradan (4.1.16) denklemi

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2 + y_2^2 &=& 0 \\ y_3 &=& v \end{array}\right\} \quad (4.1.22)$$

denklemine indirgenir (Hacısalihoğlu, 1977).

$\varphi^* = 0$ **ve** $\varphi \neq 0$ **Olması Durumu;** Bu durumda φ kongruansının bütün doğruları sabit φ açısı altında l ekseni ile kesişir. Buradan şunu söyleyebiliriz, φ kongruansının doğruları iki lineer doğru kompleksinin ortak doğrularıdır. (4.1.16) eşitliğinden

$$y_1^2 + y_2^2 - \left[\frac{y_3 - (\psi^* + \lambda_1)}{\cot lc_1}\right]^2 = 0 \quad (4.1.23)$$

bulunur (Hacısalihoğlu, 1977).

$\varphi^* = 0$ **ve** $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **Olması Durumu;** Bu durumda S, K üzerinde muazzam bir çember olur. Dolayısıyla φ nin bütün doğrularının ortogonal kesişimi l ekseni üzerindedir. Bunun anlamı eğim kongruansı ekseni l olan bir lineer kompleks doğruya indirgenir. Buradan (4.1.16) eşitliği

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1 & = & v\cos\psi \\ y_2 & = & v\sin\psi \\ y_3 & = & \lambda_1 \end{array}\right\} \tag{4.1.24}$$

olur veya

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2+y_2^2 & = & v^2 \\ y_3 & = & \lambda_1 \end{array}\right\} \tag{4.1.25}$$

şekline dönüşür (Hacısalihoğlu, 1977).

4.2 Dual Lorentz Uzayı

Tanım 4.2.1. $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} \bullet: & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & \left(\vec{a},\vec{b}\right) & \longrightarrow & \langle\vec{a}.\vec{b}\rangle = & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \end{array}$$

Öklid iç çarpımı alınırsa, $\mathbb{R}^3$ afin uzayına, *Öklidyen* $3-$ *uzay* denir ve E^3 ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan, 1997).

Tanım 4.2.2. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı üzerinde, Öklid iç çarpımı yerine $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} \langle,\rangle: & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & \left(\vec{a},\vec{b}\right) & \longrightarrow & \langle\vec{a}.\vec{b}\rangle = & a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3 \end{array}$$

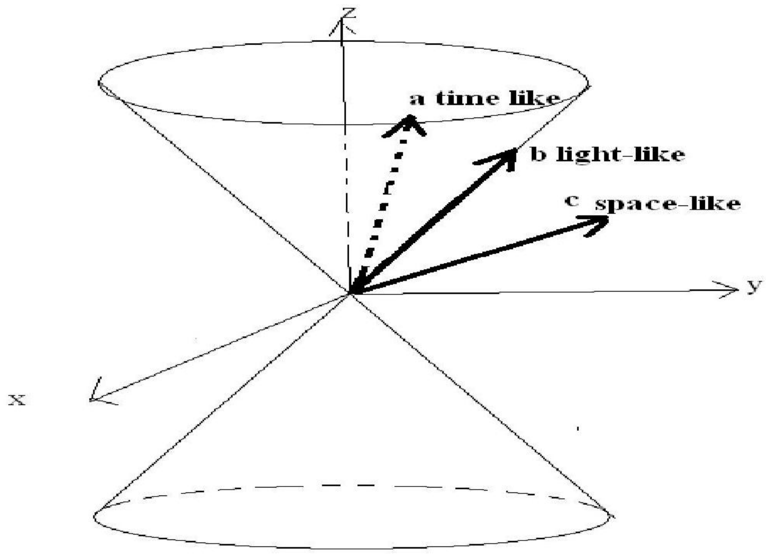
biçiminde tanımlı Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{R}^3$ afin uzayı, *Minkowski* $3-$ *uzayı* olarak isimlendirilir ve $\mathbb{R}^3_1$ ile gösterilir (Uğurlu ve Çalışkan, 1997).

Tanım 4.2.3. Lorentz iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığından, Lorentz uzayındaki vektörler aşağıdaki biçimde sınıflara ayrılırlar. $\mathbb{R}^3_1$ uzayında herhengi bir vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ olmak üzere;

$$\left\langle\vec{a},\vec{a}\right\rangle<0 \quad \text{ise } \vec{a} \text{ vektörüne time-like vektör}$$

$$\left\langle\vec{a},\vec{a}\right\rangle>0 \quad \text{ise } \vec{a} \text{ vektörüne space-like vektör}$$

$$\left\langle\vec{a},\vec{a}\right\rangle=0 \quad \text{ise } \vec{a} \text{ vektörüne light-like(null) vektör}$$



Şekil 4.3. Işık konisi

denir. Buradan şunu söyleyebiliriz; Time-like vektörler ışık konisinin içinde, light-like vektörler ışık konisinin üzerinde ve space-like vektörlerde ışık konisinin dışında bulunurlar (Uğurlu ve Çalışkan, 1997).

Tanım 4.2.4. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki vektör $\overrightarrow{a}$ ve $\overrightarrow{b}$ olsun.

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = 0$$

ise $\overrightarrow{a}$ ve $\overrightarrow{b}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Uğurlu ve Çalışkan, 1997).

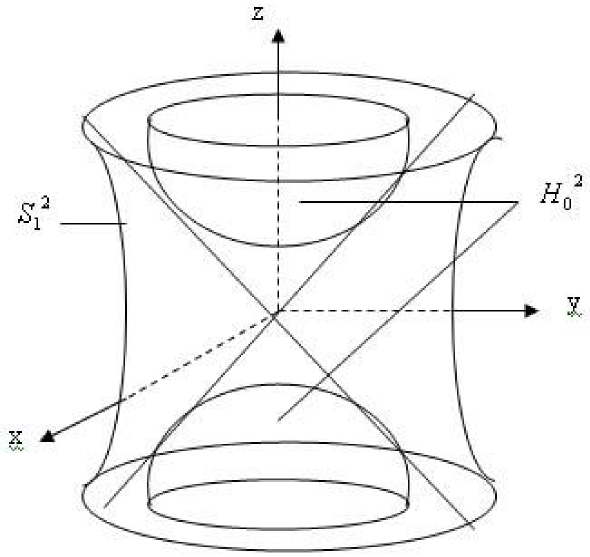
Tanım 4.2.5. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında Lorentzyen birim küre

$$S_1^2 = \left\{ \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle = 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Benzer olarak Hiperbolik birim küre

$$H_0^2 = \left\{ \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle = -1 \right\}$$

biçiminde tanımlıdır.



Şekil 4.4. Lorentzyen ve hiperbolik birim küreler

Tanım 4.2.6. $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^3$ time-like vektör olsun. $\vec{e} = (0, 1)$ olmak üzere;

$$\begin{array}{lll} \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle < 0 & \text{ise} & a \text{ ya } future - pointing\ time - like\ vektör \\ \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle > 0 & \text{ise} & a \text{ ya } past - pointing\ time - like\ vektör \end{array}$$

denir.

Tanım 4.2.7. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin Lorentzyen vektörel çarpımı;

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, & \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_1, & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, & \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_1, & \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_2, \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \wedge (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= a_1b_1\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 + a_1b_2\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + a_1b_3\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 + \\ &\quad a_2b_1\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 + a_2b_3\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + \\ &\quad a_3b_1\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + a_3b_2\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 + a_3b_3\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_3b_2 - a_2b_3, a_1b_3 - a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 4.2.8. $\widehat{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ve $\widehat{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^{\,*} \in \mathbb{D}^3$olsun. $\mathbb{D}^3$ uzayı üzerinde,

$$\left\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle + \varepsilon (\left\langle \vec{a}, \vec{b^*} \right\rangle + \left\langle \vec{a}^{\,*}, \vec{b} \right\rangle)$$

biçiminde dual Lorentz iç çarpımı tanımlanırsa $(\mathbb{D}^3 \langle , \rangle)$ ikilisine dual Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{D}^3_1$ şeklinde gösterilir.

Yukarıda verilen eşitliğin sağındaki iç çarpımlar, $\mathbb{R}^3_1$ uzayındaki Lorentz iç çarpımıdır. Böylece

$$\mathbb{D}^3_1 = \left\{ \widehat{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \mid \vec{a}, \vec{a}^{\,*} \in \mathbb{R}^3_1 \right\}$$

dür (Yaylı ve ark., 2002).

Tanım 4.2.9. $\widehat{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in \mathbb{D}^3_1$ olmak üzere

i. $\vec{a}$ space-like vektör ise $\widehat{a}$ dual vektörüne bir dual space-like vektör

ii. $\vec{a}$ time-like vektör ise $\widehat{a}$ dual vektörüne bir dual time-like vektör,

iii. $\vec{a}$ light-like(null) vektör ise $\widehat{a}$ dual vektörüne bir dual light-like(null) vektör,

denir.

Tanım 4.2.10. $\widehat{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in \mathbb{D}^3_1$ vektörünün normu

$$\| \widetilde{a} \| = \| \vec{a} \| + \frac{\varepsilon \left\langle \vec{a}, \vec{a}^{\,*} \right\rangle}{\| \vec{a} \|}$$

olarak tanımlanan bir dual sayıdır (Yaylı ve ark., 2002).

Tanım 4.2.11. $\widehat{a} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ve $\widehat{b} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^{\,*} \in \mathbb{D}^3_1$ olmak üzere $\widehat{a}$ ve $\widehat{b}$ dual vektörlerinin dual Lorentz anlamındaki vektörel çarpımı

$$\wedge : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$

şeklinde bir işlemdir ve

$$\widetilde{a} \wedge \widetilde{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon \left(\vec{a} \wedge \vec{b^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{b} \right)$$

olarak tanımlanır (Yaylı ve ark., 2002).

Yukarıda verilen eşitliğin sağındaki vektörel çarpımlar, $\mathbb{R}^3_1$ uzayındaki vektörel çarpımlardır.

Tanım 4.2.12. $\widehat{a} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}^3_1$olmak üzere, sırasıyla

$$\begin{aligned} \widetilde{H^2_o} &= \{\widetilde{a} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a}^* \mid \| \widetilde{a} \| = (1,0)\,;\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}^* \in \mathbb{R}^3_1 \ ve \ \overrightarrow{a} \ time-like \ vekt\ddot{o}r\} \\ \widetilde{S^2_1} &= \{\widetilde{a} = a + \varepsilon a^* \mid \| \widetilde{a} \| = (1,0)\,;\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}^* \in \mathbb{R}^3_1 \ ve \ \overrightarrow{a} \ space-like \ vekt\ddot{o}r\} \end{aligned}$$

cümlelerine, dual Hiperbolik birim küre ve dual Lorentz birim küre denir. H^2_o nin iki bileşeni vardır. H^2_o nin bileşenleri $(0,0,1)$ ve $(0,0,-1)$ den geçen future-pointing dual Hiperbolik birim küre ve past-pointing dual Hiperbolik birim küre olarak adlandırılabilir ve sırasıyla $\widetilde{H^{2+}_o}$ ve $\widetilde{H^{2-}_0}$ ile gösterilir (Yaylı ve ark., 2002).

$$\begin{aligned} \widetilde{H^{2+}_o} &= \{\widetilde{a} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*} \in H^2_o \mid \widetilde{a} \ bir \ future-pointing \ time-like \ vekt\ddot{o}r\ddot{u}\}, \\ \widetilde{H^{2-}_0} &= \{\widetilde{a} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*} \in H^2_o \mid \widetilde{a} \ bir \ past-pointing \ time-like \ vekt\ddot{o}r\ddot{u}\} \end{aligned}$$

Teorem 4.2.1. $\mathbb{R}^3_1$ ün time-like (space-like) doğruları ve $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}^*)$ sıralı ikilisi arasında $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \right\rangle = -1, (\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \right\rangle = 1)$ ve $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}^* \right\rangle = 0$ şeklinde birebir uyum vardır (Yaylı ve ark., 2002).

İspat: $\mathbb{R}^3_1$ de time-like doğrusu p ve q gibi iki nokta ile verilebilir. $\lambda \neq 0$ olmak üzere bu doğrunun parametrik denklemi

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + \lambda\overrightarrow{x}$$

olarak verilebilir. Bu takdirde bu vektör;

$$\overrightarrow{x}^* = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{q} \wedge \overrightarrow{x}$$

ile verilebilir ve $\overrightarrow{x}$ vektörünün momenti olarak adlandırılır (orjine göre). Bunun anlamı, time-like doğrusunun $\overrightarrow{x}$ doğrultman vektörü ve onun moment vektörü olan $\overrightarrow{x}^*$, doğru üzerindeki $p, q, r, ...$ noktalarının seçilişinden bağımsızdır. $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{x}^*$ birbirinden bağımsız değildir. Bu durum

$$\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x} \right\rangle = 1, \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}^* \right\rangle = 0$$

denklemini doğrular.

Teorem 4.2.2. $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{x}^*$ ın x_i ve x^*_i $(i = 1,2,3)$ altı bileşeni l_1 time-like doğrusunun *Plücker homojen koordinatları* olarak adlandırılır. $\widetilde{H^2_o}$ dual Hiperbolik birim küre olmak üzere O ve $\left\{O; \widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3} \text{ timelike}\right\}$ sırasıyla H^2_0 nin merkezini ve dual ortonormal sistemi göstersin.

$$\widetilde{e_i} = \vec{e}_i + \varepsilon \vec{e}_i^{\,*}, 1 \leq i \leq 3 \tag{4.2.1}$$

ve

$$\left.\begin{array}{rcl} \widetilde{e_1} \wedge \widetilde{e_2} & = & \widetilde{e_3}, \\ \widetilde{e_2} \wedge \widetilde{e_3} & = & -\widetilde{e_1}, \\ \widetilde{e_3} \wedge \widetilde{e_1} & = & -\widetilde{e_2}, \end{array}\right\} \tag{4.2.2}$$

dir. Ayrıca

$$\left.\begin{array}{r} \left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \right\rangle = 1 \\ \left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \right\rangle = 1 \\ \left\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \right\rangle = -1 \end{array}\right\} \tag{4.2.3}$$

dir. Bu durumda $\{O, \widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3}\}$, $\mathbb{R}^3_1$ uzayının ortonormal sistemidir. $\vec{e}_i^{\,*}$ moment vektörü

$$\vec{e}_i^{\,*} = MO \wedge \vec{e}_i, 1 \leq i \leq 3 \tag{4.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu moment vektörleri $\mathbb{R}^3_1$ ün vektörleri olduğundan;

$$\vec{e}_i^{\,*} = \sum_{J=1}^{3} \lambda_{ij} \vec{e}_j, \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3 \tag{4.2.5}$$

yazabiliriz. (4.2.5) eşitliğinden

$$\begin{array}{rcl} \vec{e}_1^{\,*} & = & \lambda_{11} \vec{e}_1 + \lambda_{12} \vec{e}_2 + \lambda_{13} \vec{e}_3, \\ \vec{e}_2^{\,*} & = & \lambda_{21} \vec{e}_1 + \lambda_{22} \vec{e}_2 + \lambda_{23} \vec{e}_3, \\ \vec{e}_3^{\,*} & = & \lambda_{31} \vec{e}_1 + \lambda_{32} \vec{e}_2 + \lambda_{33} \vec{e}_3, \end{array}$$

yazarsak

$$\left\langle \vec{e}_i^{\,*}, \vec{e}_i \right\rangle = \left\langle \lambda_{i1} \vec{e}_1 + \lambda_{i2} \vec{e}_2 + \lambda_{i3} \vec{e}_3, \vec{e}_i \right\rangle = 0 \ , \ 1 \leq i \leq 3$$

olacağından $\lambda_{ii} = 0$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2^{\,*} \right\rangle & = & \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3^{\,*} \right\rangle, \\ & = & \left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_3, \vec{e}_1^{\,*} \right\rangle, \\ & = & 0 \end{array}$$

ve

$$\left\langle \lambda_{11}\vec{e}_1 + \lambda_{12}\vec{e}_2 + \lambda_{13}\vec{e}_3, \vec{e}_2 \right\rangle + \left\langle \vec{e}_1, \lambda_{21}\vec{e}_1 + \lambda_{22}\vec{e}_2 + \lambda_{23}\vec{\vec{e}}_3 \right\rangle = 0$$

eşitliğinde

$$\lambda_{12} + \lambda_{21} = 0$$

olduğunda

$$\lambda_{12} = -\lambda_{21}$$

bulunur. Ohalde;

$$\left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle = \lambda_{11}, \qquad \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle = \lambda_{22}, \qquad \left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle = -\lambda_{33},$$

$$\left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle = \lambda_{12}, \qquad \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle = \lambda_{21}, \qquad \left\langle \vec{e}_2^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle = -\lambda_{23},$$

$$\left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_2 \right\rangle = \lambda_{32}, \qquad \left\langle \vec{e}_3^{\,*}, \vec{e}_1 \right\rangle = \lambda_{31}, \qquad \left\langle \vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_3 \right\rangle = -\lambda_{13}$$

olur. Buradan ise

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \lambda_{22} = \lambda_{33} = 0, \\ \lambda_{12} &= -\lambda_{21} = \lambda_1, \\ \lambda_{23} &= \lambda_{32} = \lambda_2, \\ \lambda_{31} &= \lambda_{13} = \lambda_3, \end{aligned}$$

kabul edersek

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^{\,*} &= \lambda_1\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2^{\,*} &= -\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3^{\,*} &= \lambda_3\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1^{\,*} \\ \vec{e}_2^{\,*} \\ \vec{e}_3^{\,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.2.6}$$

bulunur. Böylece Study dönüşümü $\widetilde{H}_0^2$ de dual Lorentzyen ortogonal sistemden $\mathbb{R}_1^3$ de reel Lorentzyen ortogonal sisteme bir dönüşüm olarak verilebilir. (4.2.1) ve

(4.2.6) ilişkisi bize Study dönüşümünün matris formu olarak şu şekilde verilebilir;

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_1 &= \vec{e}_1 + \varepsilon \vec{e}_1^{\,*} \\
&= \vec{e}_1 + \varepsilon \left[\lambda_1 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3\right] \\
&= \vec{e}_1 + \varepsilon\lambda_1 \vec{e}_2 + \varepsilon\lambda_3 \vec{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_2 &= \vec{e}_2 + \varepsilon \vec{e}_2^{\,*} \\
&= \vec{e}_2 + \varepsilon \left[-\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_3\right] \\
&= \vec{e}_2 - \varepsilon\lambda_1 \vec{e}_1 + \varepsilon\lambda_2 \vec{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_3 &= \vec{e}_3 + \varepsilon \vec{e}_3^{\,*} \\
&= \vec{e}_3 + \varepsilon \left[\lambda_3 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2\right] \\
&= \vec{e}_3 + \varepsilon\lambda_3 \vec{e}_1 + \varepsilon\lambda_2 \vec{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{e}_1 \\ \widetilde{e}_2 \\ \widetilde{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1\varepsilon & \lambda_3\varepsilon \\ -\lambda_1\varepsilon & 1 & \lambda_2\varepsilon \\ \lambda_3\varepsilon & \lambda_2\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.2.7}$$

Böylece dual Lorentzyen ortogonal matrisi tanımlamış olduk.

Teorem 4.2.3. $\mathbb{R}_1^3$ de Lorentzyen hareketler dual Lorentzyen ortogonal matrislere birebir karşılık gelir (Yaylı ve ark., 2002).

Tanım 4.2.13. Eğer bir yüzeyin normali her noktada space-like ise yüzey time-like yüzey olarak adlandırılır ve eğer yüzeyin normali her noktada time-like ise yüzey space-like yüzey olarak adlandırılır. Bir diferansiyellenebilir eğri;

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow (t) \in \widetilde{H}_0^2$$

olmak üzere $\mathbb{R}_1^3$ ün diferansiyellenebilir vektörlerinin ailesi t parametresine bağlıdır ve $\widetilde{x}(t)$ ler time-like yüzey oluşturur. $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$, $\widetilde{H}_o^2$ de iki vektör belirtsin φ, $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ vektörlerinin temsil ettikleri yönlü doğrular arasındaki hiperbolik açı ve φ^*bu iki vektör arasındaki en kısa mesafe olsun.

$$\widetilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$$

dual sayısına $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ arasındaki dual açı denir.

Teorem 4.2.4. $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{H}_o^{2+}$ olsun. Öyleyse

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle = -\cosh \widetilde{\varphi}$$

ve

$$-\cosh \widetilde{\varphi} = -\cosh \varphi - \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi$$

dir.

İspat: Öncelikle şunu söyleyelim dual vektörlerin Lorentzyen iç çarpımının tanımından;

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle = \left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle + \varepsilon(\left\langle \vec{x}, \vec{y}^* \right\rangle + \left\langle \vec{x}^*, \vec{y} \right\rangle)$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$\left\langle \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = -\cosh \varphi$$

dir. $\vec{x}^*$ ve $\vec{y}^*$ sırası ile l_1 ve l_2 time-like doğrularının üzerindeki p ve q noktalarının seçilişinden bağımsız olduklarından p ve q noktaları l_1 ve l_2 doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak düşünülebilir. Bu ortak dikme yönündeki birim vektör;

$$n = \mp \frac{\vec{x} \wedge \vec{y}}{\| \vec{x} \wedge \vec{y} \|}$$

dir. Eğer l_1 ve l_2 arasındaki en kısa uzaklık φ^* ile gösterilirse;

$$\vec{p} - \vec{q} = \mp \frac{\vec{x} \wedge \vec{y}}{\| \vec{x} \wedge \vec{y} \|} \varphi^*$$

$\vec{x}^* = \vec{p} \wedge \vec{x}$ ve $\vec{y}^* = \vec{q} \wedge \vec{y}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{x}, \vec{y}^* \right\rangle &= \left\langle \vec{x}, \vec{q} \wedge \vec{y} \right\rangle = -\left\langle \vec{q}, \vec{x} \wedge \vec{y} \right\rangle \\ \left\langle \vec{x}^*, \vec{y} \right\rangle &= \left\langle \vec{p} \wedge \vec{x}, \vec{y} \right\rangle = \left\langle \vec{p}, \vec{x} \wedge \vec{y} \right\rangle \end{aligned}$$

dir. Son iki eşitliği toplarsak;

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{x}, \vec{y}^* \right\rangle + \left\langle \vec{x}^*, \vec{y} \right\rangle &= \left\langle \vec{p} - \vec{q}, \vec{x} \wedge \vec{y} \right\rangle \\ &= \mp \left\langle \tfrac{\vec{x} \wedge \vec{y}}{\| \vec{x} \wedge \vec{y} \|} \varphi^*, \vec{x} \wedge \vec{y} \right\rangle \\ &= \mp \tfrac{\varphi^*}{\| \vec{x} \wedge \vec{y} \|} \left\langle \vec{x} \wedge \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y} \right\rangle \\ &= \mp \varphi^* \| \vec{x} \wedge \vec{y} \| \\ &= \mp \varphi^* \sinh \varphi \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak;

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle = -\cosh\varphi \mp \varepsilon\varphi^* \sinh\varphi$$

elde edilir. Bu son ifadede $(-)$ işareti göz önüne alınırsa

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle = -\cosh\varphi - \varepsilon\varphi^* \sinh\varphi$$

bulunur. $\widetilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$bir dual sayı olmak üzere Taylor formülü gereği;

$$\begin{aligned} f(\varphi + \varepsilon\varphi^*) &= f(\varphi) + \varepsilon\varphi^* f'(\varphi) + \varepsilon^2 \tfrac{\varphi^{*2}}{2} f''(\varphi) + ... \\ -\cosh(\varphi + \varepsilon\varphi^*) &= -\cosh\varphi - \varepsilon\varphi^* (\sinh\varphi) \\ &= -\cosh\varphi - \varepsilon\varphi^* \sinh\varphi \\ &= -\cosh\widetilde{\varphi} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi teoremin özel durumlarını verelim;

- $\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle \neq 0$. Bunun anlamı $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ doğruları ortogonal olmayabilir.
- $\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle$ =sadece reel ise $\varphi^* = 0$. O zaman $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ doğruları birbiriyle kesişir.
- $\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle = (1, 0) \Longrightarrow \varphi = 0$ ise $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ doğruları paralel ve aynı yönlüdür. Eğer $\varphi^* = 0$ ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.
- $\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{y} \right\rangle = (-1, 0) \Longrightarrow \varphi = \pi$ ise $\widetilde{x}$ ve $\widetilde{y}$ doğruları paralel ve zıt yönlüdür. Eğer $\varphi^* = 0$ ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

4.3 H_0^2 Çemberi Üzerinde Study Dönüşümü

Dual time-like birim vektörü $\widetilde{e}_3$ e karşılık gelen doğru l olsun. Eğer biz l de bir p noktasını seçersek o zaman

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

olur ve böylece (4.2.7) matrisini

$$\begin{bmatrix} \widetilde{e}_1 \\ \widetilde{e}_2 \\ \widetilde{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1\varepsilon & 0 \\ -\lambda_1\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

matrisine dönüştürürüz. Bu dönüşümün inversi;

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1\varepsilon & 0 \\ \lambda_1\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{e}_1 \\ \breve{e}_2 \\ \breve{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.3.2}$$

olur. O zaman;

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = - \parallel \widetilde{x} \parallel . \parallel \widetilde{e}_3 \parallel . \cosh \widetilde{\varphi} = -\cosh \widetilde{\varphi}$$

bulunur. Öyleyse

$$S_0^1 = \left\{ \widetilde{x} \in H_0^{2^+} \mid \left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = -\cosh \widetilde{\varphi} = sabit \right\}$$

olur. Biz $\widetilde{x}$ dual vektörünü

$$\widetilde{x} = m_1 \widetilde{e}_1 + m_2 \widetilde{e}_2 + m_3 \widetilde{e}_3$$

şeklinde alırsak

$$\begin{aligned} &\mid OP \mid = 1 \\ &\mid m_3 P \mid = \mid OP' \mid = \sinh \widetilde{\varphi} \\ &\cos \widetilde{\psi} = \frac{m_1}{\sinh \widetilde{\varphi}} && \Longrightarrow \quad m_1 = \sinh \widetilde{\varphi} \cos \widetilde{\psi} \\ &\sin \widetilde{\psi} = \frac{m_2}{\sinh \widetilde{\varphi}} && \Longrightarrow \quad m_2 = \sinh \widetilde{\varphi} \sin \widetilde{\psi} \\ & && \quad m_3 = \cosh \widetilde{\varphi} \end{aligned}$$

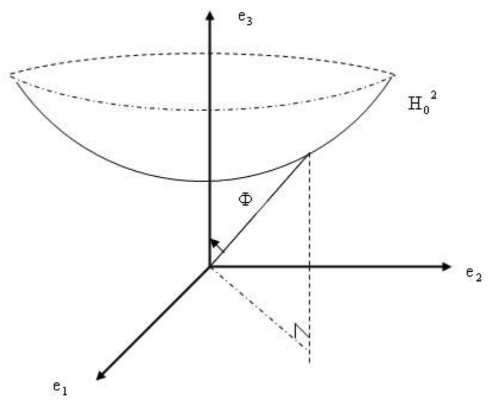
bulunur. Ohalde

$$\widetilde{x} = \sinh \widetilde{\varphi} \cos \widetilde{\psi} \widetilde{e}_1 + \sinh \widetilde{\varphi} \sin \widetilde{\psi} \widetilde{e}_2 + \cosh \widetilde{\varphi} \widetilde{e}_3 \tag{4.3.3}$$

Şekil 4.3.1. Hiperbolik birim küre üzerinde birim çemberolarak yazılabilir. Burada $\widetilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve $\widetilde{\psi} = \psi + \varepsilon\psi^*$ sırasıyla dual Hiperbolik açı ve dual açıdır. Ayrıca Taylor formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned} \sinh \widetilde{\varphi} &= \sinh \varphi + \varepsilon\varphi^* \cosh \varphi \quad , \quad \sin \widetilde{\psi} = \sin \psi + \varepsilon\psi^* \cos \psi \\ \cosh \widetilde{\varphi} &= \cosh \varphi + \varepsilon\varphi^* \sinh \varphi \quad , \quad \cos \widetilde{\psi} = \cos \psi - \varepsilon\psi^* \sin \psi \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

bulunur. Şimdi (4.3.4) eşitliğindeki değerleri (4.3.3) denklemindeki yerlerine yazarsak;



Şekil 4.5. Hiperbolik birim küre üzerinde birim çember

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x} &= (\sinh\varphi + \varepsilon\varphi^* \cosh\varphi)(\cos\psi - \varepsilon\psi^* \sin\psi)\left(\overrightarrow{e}_1 + \varepsilon\lambda_1 \overrightarrow{e}_2\right) \\
&\quad + (\sinh\varphi + \varepsilon\varphi^* \cosh\varphi)(\sin\psi + \varepsilon\psi^* \cos\psi)\left(\overrightarrow{e}_2 - \varepsilon\lambda_1 \overrightarrow{e}_1\right) \\
&\quad + (\cosh\varphi + \varepsilon\varphi^* \sinh\varphi)\overrightarrow{e}_3
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu işlemleri tek tek yaparsak

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x} &= \sinh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_1 + \sinh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_2 + \cosh\varphi\overrightarrow{e}_3 \\
&\quad +\varepsilon\varphi^*\cosh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_1 - \varepsilon\psi^*\sinh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_1 - \varepsilon\lambda_1\sinh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_1 \\
&\quad +\varepsilon\varphi^*\cosh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_2 + \varepsilon\psi^*\sinh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_2 + \varepsilon\lambda_1\sinh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_2 \\
&\quad +\varepsilon\varphi^*\sinh\varphi\overrightarrow{e}
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ilişki $\widetilde{x} = \overrightarrow{x} + \varepsilon\overrightarrow{x}^*$ olduğundan $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{x}^*$ vektörlerinin matris formu;

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &= \begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sinh\varphi\cos\psi \\ \sinh\varphi\sin\psi \\ \cosh\varphi \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{x}^* &= \begin{bmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^*\cosh\varphi\cos\psi - (\psi^* + \lambda_1)\sinh\varphi\sin\psi \\ \varphi^*\cosh\varphi\sin\psi + (\psi^* + \lambda_1)\sinh\varphi\cos\psi \\ \varphi^*\sinh\varphi \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3.5}
$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan $\widetilde{x}$ noktası, merkezi $\widetilde{e}_3$ ekseni üzerinde olan çemberin, üzerinde olan bir noktadır. Bunu

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = -\cosh \widetilde{\varphi} = -\cosh \varphi - \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi = sabit \tag{4.3.6}$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun anlamı;

$$\varphi = c_1 \,(sabit) \text{ ve } \varphi^* = c_2 \,(sabit)$$

Aynı zamanda

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = \langle \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*, \widetilde{e}_3 \rangle = \langle \vec{x}, \widetilde{e}_3 \rangle + \varepsilon \langle \vec{x}^*, \widetilde{e}_3 \rangle$$

olduğundan

$$\langle \vec{x}, \widetilde{e}_3 \rangle + \varepsilon \langle \vec{x}^*, \widetilde{e}_3 \rangle = -\cosh \varphi - \varepsilon \varphi^* \sinh \varphi$$

bulunur. (4.3.5) ve (4.3.6) eşitlikleri aşağıdaki ilişkileri yazmamıza olanak sağlar;

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle &= -1 \\ \left\langle \vec{x}, \vec{x}^* \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \vec{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle + \cosh \varphi &= 0 \\ \left\langle \vec{x}, \vec{e}_3^* \right\rangle + \left\langle \vec{x}^*, \vec{e}_3 \right\rangle + \varphi^* \sinh \varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.3.7}$$

(4.3.3) eşitliğinin iki parametresi vardır bunlar φ ve φ^* dır. Böylece (4.3.7) eşitliği $\mathbb{R}_1^3$ de time-like kongruanslarını gösterir. Şimdi biz *Plüc*ker *koordinatlarındaki* bu kongruansı hesaplayalım. y kongruansın herhangi bir noktasını belirtsin. O zaman Teorem 4.1.5. den

$$\vec{y} = \vec{x}\,(\psi, \psi^*) \wedge \vec{x}^*\,(\psi, \psi^*) + v\vec{x}\,(\psi, \psi^*) \tag{4.3.8}$$

bulunur. Eğer $\vec{y}$ nin koordinatları $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ise bu bize aşağıdaki eşitlikleri verir.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -\varphi^* \sin \psi - (\psi^* + \lambda_1) \cosh \varphi \sinh \varphi \cos \psi + v \sinh \varphi \cos \psi \\ y_2 &= -\varphi^* \cos \psi - (\psi^* + \lambda_1) \sinh \varphi \cosh \varphi \sin \psi + v \sinh \varphi \sin \psi \\ y_3 &= -(\psi^* + \lambda_1) \sinh^2 \varphi + v \cosh \varphi \end{aligned}\right\} \tag{4.3.9}$$

Bu durum bize;

$$\frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{\left[y_3 - (\psi^* + \lambda_1)\right]^2}{(c_2 \cot gh\varphi)^2} = 1 \tag{4.3.10}$$

eşitliğini verir. Burada iki parametre ψ^* ve λ_1 dir. Böylece bunlar time-like doğrusunun ikinci dereceden bir kongruansını gösterir. Bu kongruansın doğruları öyle konumlanmıştır ki;

- l ve bu doğruların en kısa Lorentzyen uzaklığı $\varphi^* = c_2$ dir.
- l ve bu doğruların Hiperbolik açısı $\varphi = c_1$ dir.
  Tanım 4.3.1. Eğer time-like kongruanslarının tüm doğruları sabit hiperbolik açı ile tanımlanan doğrularsa bu kongruans time-like eğim kongruansı olarak adlandırılır. Bu tanıma göre (6.9) bir time-like eğim kongruansı temsil eder (Yaylı ve ark., 2002).
  Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.
  Teorem 4.3.1. S_0^1, $\widetilde{H}_0^2$ dual hiperbolik birim küresi üzerinde iki parametreli bir çember olsun. S_0^1 in Study dönüşümü ikinci dereceden bir time-like eğim kongruansıdır (Yaylı ve ark., 2002).

4.3.1 ÖZEL DURUMLAR

$\varphi^* \neq 0$ ve $\varphi = 0$ Olması Durumu; Bu durumda time-like kongruansının doğruları time-like silindirinin ana noktası ile çakışır. Bunun anlamı şudur; S_0^1 in Study dönüşümü (4.3.9) eşitliğinden

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2 + y_2^2 & = & c_2^2 \\ y_3 & = & v \end{array}\right\} \tag{4.3.11}$$

time-like silindirine indirgenir (Yaylı ve ark., 2002).

$\varphi^* = 0$ ve $\varphi = 0$ Olması Durumu; Bu durumda kongruans üzerindeki doğruların tümü l doğrusu ile çakışır. Gerçekten (4.3.9) eşitliği l time-like doğrusuna indirgenirse

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2 + y_2^2 & = & 0 \\ y_3 & = & v \end{array}\right\} \tag{4.3.12}$$

olur (Yaylı ve ark., 2002).

$\varphi^* = 0$ ve $\varphi \neq 0$ Olması Durumu; Bu durumda l ekseni üzerindeki doğruların tümünün kesişiminin sabit açısı φ dir. Buradan şunu söyleyebiliriz doğruların kongruansının iki lineer kompleks doğrusu time-like doğrusu ile ortaktır. (4.3.9) eşitliğinden

$$y_1^2 + y_2^2 - \frac{[y_3 - (\psi^* + \varphi)]^2}{\cot gh^2\varphi} = 0 \tag{4.3.13}$$

bulunur (Yaylı ve ark., 2002).

4.4 S_1^2 Çemberi Üzerinde Study Dönüşümü

Dual space-like birim vektörü $\widetilde{e}_3$ e karşılık gelen doğru l olsun. Eğer biz l de bir q noktasını seçersek ozaman

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

olur. Böylece (4.2.7) matrisini

$$\begin{bmatrix} \overset{\frown}{e}_1 \\ \overset{\frown}{e}_2 \\ \overset{\frown}{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1\varepsilon & 0 \\ -\lambda_1\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.4.1}$$

matrisine dönüştürürüz. Bu dönüşümün inversi;

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_1\varepsilon & 0 \\ \lambda_1\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\frown}{e}_1 \\ \overset{\frown}{e}_2 \\ \overset{\frown}{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4.4.2}$$

olur. Biz $\widetilde{x}$ dual vektörünü

$$\widetilde{x} = m_1\widetilde{e}_1 + m_2\widetilde{e}_2 + m_3\widetilde{e}_3$$

şeklinde alırsak

$$\begin{aligned} &| OP |= 1 \\ &| m_3P |=| OP' |= \cosh\widetilde{\varphi} \\ &\cos\widetilde{\psi} = \frac{m_1}{\cosh\widetilde{\varphi}} && \Longrightarrow \quad m_1 = \cosh\widetilde{\varphi}\cos\widetilde{\psi} \\ &\sin\widetilde{\psi} = \frac{m_2}{\cosh\widetilde{\varphi}} && \Longrightarrow \quad m_2 = \cosh\widetilde{\varphi}\sin\widetilde{\psi} \\ & && \quad\quad\; m_3 = \sinh\widetilde{\varphi} \end{aligned}$$

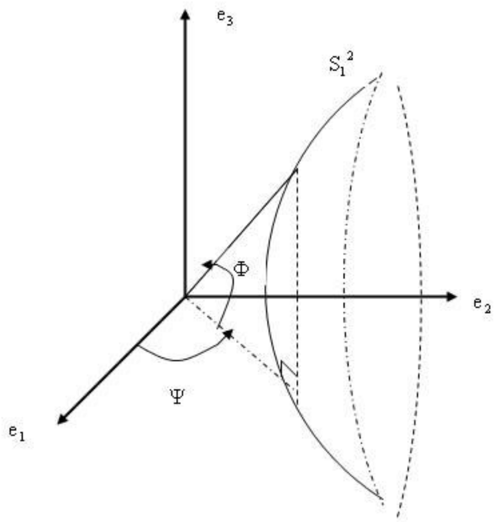
bulunur.

$$S_1^1 = \left\{\widetilde{x} \in S_1^2 \mid \left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = -\sinh\widetilde{\varphi} = sabit\right\}$$

dönüşümü S_1^2 üzerinde bir dönüşüm ve $\widetilde{x}$ da S_1^1 de bir vektör olsun. Böylece $\widetilde{x}$ dual vektörü

$$\widetilde{x} = \cosh\widetilde{\varphi}\cos\widetilde{\psi}\widetilde{e}_1 + \cosh\widetilde{\varphi}\sin\widetilde{\psi}\widetilde{e}_2 + \sinh\widetilde{\varphi}\widetilde{e}_3 \tag{4.4.3}$$

olarak gösterilebilir. Burada $\widetilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve $\widetilde{\psi} = \psi + \varepsilon\psi^*$ sırasıyla dual Hiperbolik açı ve dual açıdır. Ayrıca Taylor formülünden yararlanarak



Şekil 4.6. Lorentz birim küresi üzerinde birim çember

$$
\begin{aligned}
\sinh\widetilde{\varphi} &= \sinh\varphi + \varepsilon\varphi^*\cosh\varphi \quad , \quad \sin\widetilde{\psi} = \sin\psi + \varepsilon\psi^*\cos\psi \\
\cosh\widetilde{\varphi} &= \cosh\varphi + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi \quad , \quad \cos\widetilde{\psi} = \cos\psi - \varepsilon\psi^*\sin\psi
\end{aligned}
\tag{4.4.4}
$$

elde ederiz. (4.4.4) eşitliğindeki değerleri (4.4.3) eşitliğinde yerlerine yazarsak;

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x} &= (\cosh\varphi + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi)(\cos\psi - \varepsilon\psi^*\sin\psi)\left(\overrightarrow{e}_1 + \varepsilon\lambda_1\overrightarrow{e}_3\right) \\
&\quad + (\cosh\varphi + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi)(\sin\psi + \varepsilon\psi^*\cos\psi)\overrightarrow{e}_2 \\
&\quad + (\sinh\varphi + \varepsilon\varphi^*\cosh\varphi)\left(\overrightarrow{e}_3 + \varepsilon\lambda_3\overrightarrow{e}_1\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu işlemleri tek tek yaparsak

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x} &= \cosh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_1 + \cosh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_2 + \sinh\varphi\overrightarrow{e}_3 \\
&\quad + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_1 - \varepsilon\psi^*\cosh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_1 - \varepsilon\lambda_1\cosh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_1 \\
&\quad + \varepsilon\varphi^*\sinh\varphi\sin\psi\overrightarrow{e}_2 + \varepsilon\psi^*\cosh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_2 + \varepsilon\lambda_1\cosh\varphi\cos\psi\overrightarrow{e}_2 \\
&\quad + \varepsilon\varphi^*\cosh\varphi\overrightarrow{e}_3
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\overrightarrow{x}$ ile $\overrightarrow{x}^*$ vektörlerinin matris formu aşağıdaki şekilde verilebilir;

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh\varphi\cos\psi \\ \cosh\varphi\sin\psi \\ \sinh\varphi \end{bmatrix} \\
\vec{x}^{\,*} &= \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^*\sinh\varphi\cos\psi - (\psi^*+\lambda_1)\cosh\varphi\sin\psi \\ \varphi^*\sinh\varphi\sin\psi + (\psi^*+\lambda_1)\cosh\varphi\cos\psi \\ \varphi^*\cosh\varphi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Diğer taraftan $\widetilde{x}$ vektörü $\widetilde{e}_3$ ekseni etrafında döndürülürse

$$\left\langle \widetilde{x}, \widetilde{e}_3 \right\rangle = -\sinh\widetilde{\varphi} = -\sinh\varphi - \varepsilon\varphi^*\cosh\varphi = sabit \tag{4.4.6}$$

yazabiliriz. Bunun anlamı $\varphi = c_1\,(sabit)$ ve $\varphi^* = c_2\,(sabit)$ dir. (4.4.5) ve (4.4.6) eşitliklerinden aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\left.\begin{aligned}
\left\langle \vec{x}, \vec{x} \right\rangle &= -1 \\
\left\langle \vec{x}, \vec{x}^{\,*} \right\rangle &= 0 \\
\langle x, e_3\rangle + \sinh\varphi &= 0 \\
\langle x, e_3^*\rangle + \langle x^*, e_3\rangle + \varphi^*\cosh\varphi &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.7}$$

(4.4.7) eşitliğinde iki parametre ψ ve ψ^* dır. (4.4.7) $\mathbb{R}_1^3$ de space-like uyumu temsil eder. Şimdi biz *Plücker koordinatlarında* bu kongruansın eşitliklerini hesaplayalım. $\vec{y}$ bu kongruans üzerinde bir nokta belirtsin. O zaman Teorem 4.1.5. den

$$\vec{y} = \vec{x}\,(\psi,\psi^*) \wedge \vec{x}^{\,*}\,(\psi,\psi^*) + v\vec{x}\,(\psi,\psi^*) \tag{4.4.8}$$

olur. $\wedge$ Lorentzyen dış çarpımdır. Eğer $\vec{y}$ nin koordinatları (y_1, y_2, y_3) ise bu bize aşağıdaki eşitlikleri verir.

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= -\varphi^*\sin\psi + (\psi^*+\lambda_1)\cosh\varphi\sinh\varphi\cos\psi + v\cosh\varphi\cos\psi \\
y_2 &= \varphi^*\cos\psi + (\psi^*+\lambda_1)\sinh\varphi\cosh\varphi\sin\psi + v\cosh\varphi\sin\psi \\
y_3 &= (\psi^*+\lambda_1)\cosh^2\varphi + v\sinh\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{4.4.9}$$

Bu durumda (4.4.9) eşitliklerinden aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$\frac{y_1^2}{c_2^2} + \frac{y_2^2}{c_2^2} - \frac{[y_3 - (\psi^*+\lambda_1)]^2}{(ctgh\varphi)^2} = 1 \tag{4.4.10}$$

Burada iki parametre ψ^* ve $\lambda_1$dir. Böylece bir space-like doğrusunun kongruansı ikinci derece ile temsil edilebilir. Buradan şu sonuçlar çıkarılır;

- l doğrusu ve bu doğrular arasındaki en kısa Lorentzyen uzaklık

$$\varphi^* = c_2$$

dir.

- $\left(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2\right)$ space-like düzlemi ve bu doğruların merkez açısı

$$\varphi = c_1$$

dir.

Tanım 4.4.1. Eğer tüm space-like doğruları space-like düzlemi ile sabit açıya sahipse bu kongruans space-like eğim kongruansı olarak adlandırılır (Yaylı ve ark., 2002).
Bu tanıma göre (4.4.9) eşitliği space-like eğim kongruansı temsil eder. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.4.1. S_1^1 dönüşümü, S_1^2 dual Lorentzyen birim küre üzerinde iki parametreli bir dönüşüm olsun. S_1^1 in Study dönüşümü ikinci dereceden space-like eğim kongruansıdır (Yaylı ve ark., 2002).

4.4.1 ÖZEL DURUMLAR

$\varphi^* \neq 0$ **ve** $\varphi = 0$ **Olması Durumu;** Bu durumda space-like kongruansının ortogonal kesişimleri time-like silindirini oluşturur ki ekseni l ve yarıçapı φ^* dır. Böylece (4.4.9) eşitliği (4.4.11) e indirgenir (Yaylı ve ark., 2002).

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2 + y_2^2 & = & \varphi^{*2} + v^2 \\ y_3 & = & \psi^* + \lambda_1 \end{array}\right\} \tag{4.4.11}$$

$\varphi^* = 0$ **ve** $\varphi = 0$ **Olması Durumu;** Bu durumda tüm doğruların ortogonal kesişimi l eksenidir. Bunun anlamı tüm kompeks lineer doğrular l eksenine indirgenir. (4.4.9) eşitliği bize

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1^2 + y_2^2 & = & v^2 \\ y_3 & = & \psi^* + \lambda_1 \end{array}\right\} \tag{4.4.12}$$

eşitliğini verir (Yaylı ve ark., 2002).

$\varphi^* = 0$ **ve** $\varphi \neq 0$ **Olması Durumu;** Bu durumda tüm doğrular φ sabit merkez açısı ile l ekseni üzerinde kesişirler. (4.4.9) eşitliğinden

$$y_1^2 + y_2^2 - \frac{\left[y_3 - (\psi^* + \varphi_1)\right]^2}{tgh^2\varphi} = 0 \tag{4.4.13}$$

bulunur (Yaylı ve ark., 2002).

5 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Dual sayılar ilk defa W. K. Clifford (1845-1879) tarafından geometrik araştırmalarında bir araç olarak kullanıldı. Daha sonra E. Study çizgi geometrisi ve kinematik araştırmalarında dual sayılar ve dual vektörleri kullanmıştır[11]. Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir[13]. E. Study, 3-boyutlu Öklid uzayının yönlü doğrularının $\mathbb{D}^3$ dual uzayının S^2 dual birim küresinin noktalarına birebir karşılık geldiğini göstermiştir[11]. S^2 dual birim küresi üzerine çizilmiş bir çemberin çizgiler uzayındaki karşılığı H. H. Hacısalihoğlu tarafından gösterilmiştir[6]. 3-boyutlu Öklid uzayı yerine $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayını göz önüne alarak, bu uzaydaki yönlü space-like (time-like) doğruların, $\mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz uzayının $S_1^2(H_0^2)$ dual Lorentz (Hiperbolik) birim küresinin noktaları ile birebir eşlenebileceği Y. Yaylı tarafından gösterilmiştir[14]. Bu tezde ilk olarak dual uzay tanıtılarak bu uzaydaki bir vektörün normu, iki vektör arasındaki açı gibi genel tanımlar verildi. Daha sonra dual uzay üzerinde Study dönüşümünün matris karşılıkları elde edildi. Bununla birlikte D-modüldeki dual birim küre üzerindeki bir çemberin Study dönüşümü gösterildi. Tezin sonraki kısımlarında Lorentz uzayı ve dual Lorentz uzayı tanıtıldı. Sonrasında dual Lorentz uzayındaki Study dönüşümünün matris karşılıkları elde edildi. Son olarak bu uzaydaki dual Hiperbolik ve dual Lorentzyen birim küreler üzerindeki çemberlerin Study dönüşümleri gösterildi.

KAYNAKLAR

AKUTAGAWA, K., and NISHIKAWA, S., 1990. The Gauss Map and Space-like Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-space. Tohoku Mathematical Journal, 42: 67-82.

BEEM, J.K., and EHRLICH, P.E., 1984. Global Lorentzian Geometry. Am., Math. Mont., 91(9): 543-549.

BIRMAN, G.S., and NOMIZU K., 1984. Trigonometry in Lorentzien Geometry. American Mathematical Monthly, 91(9): 9-543.

CLIFFORD, W.K., 1873. Preliminary sketch of bi-quaternions. Proceedings of London Mathematical Society, 4, London, ENGLAND, 361-395.

GÜNGÖR, M.A., 2006. Lorentz Uzayında Bir Parametreli Dual Hareketler. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Sakarya, 20s.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1977. Study Map of a Circle. Journal of the Faculity of Science of Karadeniz Technical University, Ankara, 1(7) : 69-80.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math. No.2, 55s.

HACISALİHOĞLU, H.H., 2010. Lineer Cebir Cilt 1 Ders Kitabı. Hacısalihoğlu Yayınları, 69-583.

HACISALİHOĞLU, H.H., 2005. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri Ders Kitabı. Hacısalihoğlu Yayınları, 69s.

O'NEILL, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London, ENGLAND, 460p.

STUDY, E., 1903. Geometrie der Dynamen, Leipzig. Verlag Teubner.

UĞURLU, H.H., and ÇALIŞKAN, A. , 1997. The Study Mapping for Directed Space-like and Time-like Lines in Minkowski 3-space. Mathematical and Computational Applications 1(2): 8-142.

VELDKAMP, G.R.,1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous. Spatial Kinematics, Mech Math Theory, 11: 141-156.

YAGLOM, I.M., 1979. A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 332p.

YAYLI, Y., ÇALIŞKAN, A., and UĞURLU, H.H., 2002. The E.Study Maps of Circles on Dual Hyperbolic and Lorentzian Unit Spheres H_0^2 and S_1^2. Proc. R. Ir. Acad., 102A (1): 37-47.

ÖZGEÇMİŞ

08.08.1984 tarihinde Adana'nın Yüreğir ilçesinde doğdu. İlköğrenimine Adana'nın Mimar Sinan İlköğretim Okulunda başladı ve Adana Anadolu İmam-Hatip Lisesinde tamamladı. Ortaöğrenimine İçel 75. Yıl Anadolu Öğretmen Lisesinde başladı ve Adana Abdülkadir Paksoy Lisesinde tamamladı. 2003 yılında Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı lisans eğitimini 2008 yılında tamamladı. 2010 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen Harran Üniversitesi'nde öğrenimine devam etmektedir.

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde dual uzay tanıtılmış olup bu uzay ile ilgili daha önceki çalışmalarda yer alan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Diğer iki bölüm çalışmanın orijinal kısımlarıdır. Üçüncü bölümde tez ile ilgili materyal ve yöntemler verilmiştir. Dördüncü bölümde bir çemberin Study dönüşümü verilmiş ve bu dönüşümün matris karşılıkları elde edilmiştir. Bununla birlikte D-modüldeki dual bir küre üzerindeki bir çemberin Study dönüşümüde gösterilmiştir. Son olarak bazı özel durumlar ve bu durumların herbirinin geometrik sonuçları elde edilmiştir. Yine bu bölümde Lorentz uzayı ve dual Lorentz uzayı tanıtılmış olup dual Lorentz uzayında Study dönüşümünün matris karşılıkları elde edilmiştir. Bununla birlikte bu uzaydaki dual Hiperbolik ve dual Lorentzyen birim küreler üzerindeki çemberlerin Study dönüşümleri gösterilmiştir. Son bölümde ise tez ile ilgili sonuçler ve öneriler gösterilmiştir.

SUMMARY

This thesis consist of five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In chapter second introduced that the dual spaces and deals with the concepts and definitions on dual spaces. Other two chapters are the original part of the study. In chapter third shown that material and method in connection with thesis. In chapter forth we have introduced that the dual spaces and we have obtained the matrix equations of Study mapping. Furthermore, we have showed the Study map of a circle which lie on the dual unite sphere in D-module. Finally we have obtained some special cases each of which is a geometrical result. Again in this chapter we have introduced that Lorentz space, dual Lorentz space and we have obtained the matrix equations of Study mapping. Furthermore, we have showed the Study maps of circles which lie on the dual Hyperbolic and dual Lorentzian unite spheres at the dual Lorentzian space. In the last chapter we have shown results and recommendations in connection with thesis.