T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

JENSEN EŞİTSİZLİĞİ ve UYGULAMALARI

Dilek GÜNEŞ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

ŞANLIURFA
2013

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Dilek GÜNEŞ'in hazırladığı "Jensen Eşitsizliği ve Uygulamaları" konulu bu çalışma 22/02/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Üye: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Üye: Prof. Dr. Seyit TEMİR

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Seyit TEMİR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

JENSEN EŞİTSİZİĞİ ve UYGULAMALARI

Dilek GÜNEŞ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2013, Sayfa: 72

Bu tezde konvekslik, çok bilinen Jensen eşitsizliği ve Jensen eşitsizliği ile ilgili daha önce çalışılmış konular sistematik bir disiplinle taranarak derlendi.

ANAHTAR KELİMELER : Konveks fonksiyonlar, eşitsizlikler, Jensen eşitsizliği, global üst sınır, en iyi üst sınır

ABSTRACT

MSc Thesis

JENSEN'S INEQUALITY and APPLICATIONS

Dilek GÜNEŞ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Year: 2013, Page: 72

In this thesis, convexity, the well known Jensen's inequality and related known results are reviewed from the literature with a systematic way.

KEY WORDS : Convex functions, inequalities, Jensen's inequality, global upper bound, best upper bound

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tezde literatürde bilinen Jensen eşitsizliği ve uygulamaları ele alınmıştır. Jensen eşitsizliği kullanılarak klasik eşitsizlerden Young, Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, Hölder, Minkowski eşitsizliği gibi klasik eşitsizlikler elde edildi.

Ayrıca, Jensen eşitsizliğinin integral versiyonu, Jensen eşitsizliğinin bir versiyonu, Jensen eşitsizliğinin tersi üzerine, Jensen eşitsizliği için en iyi üst sınır ve global üst sınır, Jensen eşitsizliği ve yeni entropy sınırları, olasılıkta Jensen eşitsizliği, zaman skalasında Jensen eşitsizliği, Jensen eşitsizliğinin yeni bir versiyonu ve sonuçlar, Hemite-Hadamard eşitsizliği, Hardy ve Polya-Knopp eşitsizlikleri, Wright konveks fonksiyonlarda Jensen eşitsizliği gibi Jensen eşitsizliğinin çeşitli uygulama alanları ele alınmıştır.

Yaptığım bu tez çalışmasının her aşamasında yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye (Harran Üniversitesi), tez jürimde bulunduklarından dolayı Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR (Atatürk Üniversitesi) ve Prof. Dr. Seyit TEMİR'e (Harran Üniversitesi) teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman yanımda olan desteklerini benden esirgemeyen aileme ve sevgili arkadaşım Necla AKSU' ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Matematik ve matematiğin alt branşlarında kullanılan en temel enstrümanlarından bir konuda eşitsizlikler teorisidir. Bu alt branşlardan bazıları; fonksiyonel analiz, integral ve diferansiyel denklemler teorisi, interpolasyon teorisi, harmonik analiz, istatistik, olasılık teorisi, optimizasyon ve benzerleri. Aynı zamanda, eşitsizlikler mekanik, fizik ve diğer bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir.

Bu tez çalışmasında, biz daha çok daha önce çalışılmış Jensen eşitsizliğini ve bu eşitsizliğin sonucu olarak elde edilen diğer eşitsizlikleri ve uygulamalarını çalışacağız. Bu eşitsizlik, kısacası dışbükey veya içbükey fonksiyonlarda, 'fonksiyonun beklenti değerinin', 'beklenti değerinin fonksiyonuna' genelde eşit olmadığını ifade eder. Diğer bir değişle, eğer verilerinin ortalamasını alıp fonksiyonu uygularsanız, her bir veriye fonksiyonu ayrı uygulayıp ortalamayı aldığınız zamandan daha farklı bir sonuç elde edersiniz. Burada fonksiyonun eğrilik özelliği ana faktörlerden biridir. Jensen eşitsizliği özellikle dışbükey dağılım fonksiyonlarının çok kullanıldığı istatistik ve olasılık teorisi gibi alanlarda büyük önem arz etmektedir.

Uygulamalı ve pür matematikte çok önemli bir role sahip olan konvekslik basit ve doğal bir kavramdır. Konvekslik kavramı Jensen çalışmalarıyla ün kazanmıştır. Konveks fonksiyonlarının doğal tanım kümesi konveks kümelerdir. Konveksliğin temel kavramını anlamak için ilk olarak, bilinen bir kümenin konvekslik kavramı ilgili temel özellikler anlaşılabilir bir şekilde anlatılacaktır.

Sonra, bir fonksiyonunun konvekslik kavramı ve ilgili temel özellikleri ifade edilecektir. Konveks bir fonksiyon maksimum değerini tanım kümesinin sınırında alır ve kesin olarak konveks bir fonksiyon en çok bir minimuma sahiptir. Konveks fonksiyon, bu iki özelliğiyle uygulamalı ve teorik matematikte yaygın bir kullanıma sahiptir. Bunu takiben Jensen eşitsizliği ve uygulamaları ve diğer eşitsizliklerle olan bağlantısına yer verilecektir.

Matematikte, bildiğimiz ve yaygın kullanıma sahip olan eşitsizliklerin çoğu aslında Jensen eşitsizliğinden elde edilir. Yani, bilinen diğer eşitsizlikler Jensen eşitsizliğinin değişik konveks fonksiyonlarla kullanılmasından elde edilir. Bu durum, konvekslik kavramının ne kadar temel bir kavram olduğuna işaret eder. Örneğin, Aritmetik-Geometrik Ortalama, the Ky-Fan eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği vb. Jensen eşitsizliğinden elde edilebilir. Aynı zamanda, bu Jensen eşitsizliğinin uygulamalarına bilgi (information) teorisinde rastlamak mümkündür.

Son yıllarda, eşitsizlik teorisi sistematik olarak çok çalışılmakta ve hali hazırda hızlı bir gelişim göstermektedir. Konuya ilgi gittikçe artmaktadır. Bilinen eşitsizliklerin değişik varyasyonları ve ispatları ve genelleştirilmiş varyasyonları birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu konuda, yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır. Simetriğe sahip eşitsizlikler analiz ve kısmi diferansiyel denklemlerde oldukça önemli ve ilginçtirler. Özellikle, eşitsizlik teorisinde konveks fonksiyonlarla bağlantılı eşitsizlikler oldukça önemlidir. Çok bilinen bu eşitsizliklerden bir tanesi de Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Jensen eşitsizliği ve bu eşitsizliğin sonucu olarak elde edilen diğer birçok önemli eşitsizlikler ifade edilerek ispatlarıyla (varsa değişik ispatlarıyla) ve uygulamalarıyla verilecektir. Literatürde bu konuda yazılmış kitap ve yayımlanmış makalelerden istifade yoluna gidilecektir. Ayrıca, söz konusu eşitsizliklerin diskrit (ayrık) ve integral varyasyonları da ele alınacaktır. Temel eşitsizlik teorisine, çok bilinen ve literatürde sıkça kullanılan diskrit (ayrık) ve integral eşitsizliklerini tanıtmak ve uygulamalarına yer vermek esas amaçtır**.** Bunun yanında detaylı olarak çalışılmamış eşitsizliklerle ilgili mevcut kaynak sıkıntısına yardımcı olacak şekilde kataloğ oluşturmaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Konveks Kümeler ve Konveks Fonksiyonlar

2.1.1. Konveks kümeler

Bu bölümdeki temel kavramlar, lemmalar ve teoremler (Boyd and Vandenberghe, 2004; Niculescu and Persson, 2006; Roberts and Varberg, 1973; Murota, 2003) kaynaklarından derlenmiştir.

Sezgisel olarak, kümenin herhangi iki noktasını birleştiren bir doğru parçasının tüm noktalarını içeren bir kümeye **konveks küme** denir.

2.1.1.1. Tanım. V bir vektör uzayı ve $u, v \in V$ olsun. Bu halde u, v nin tüm konveks kombinasyonlarının kümesi

$$\{w_\lambda \in V : w_\lambda = (1-\lambda)u + \lambda v,\ 0 \le \lambda \le 1\} \qquad (2.1)$$

ile ifade edilir.

2.1.1.2. Tanım. $K \subset V, u, v \in K$ olsun. (2.1) denklemi sağlanıyorsa (yani, (2.1) K nın bir alt kümesi ise), K kümesine **konveks küme** denir.

2.1.1.1. Örnek. $I = [a,b] \subset R$ ise I konvekstir.

Çözüm. $c, d \in R, c < d$ ve $0 \le \lambda \le 1$ olsun. Bu halde,

$$a < c = (1-\lambda)c + \lambda c < (1-\lambda)c + \lambda d < (1-\lambda)d + \lambda d = d < b.$$

2.1.1.2. Örnek. $(0,0)$ merkezli c yarıçaplı disk R^2 de konvekstir.

Çözüm. Her $x, y \in R^2, 0 \le \lambda \le 1$ olsun. $\|x\| = c, \|y\| = c$ dir. Bu halde,

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \le \|(1-\lambda)x\| + \|\lambda y\| = |1-\lambda|\|x\| + |\lambda|\|y\| = (1-\lambda)c + \lambda c.$$

Tanımlanan diskin konveks olduğu görülür.

2.1.1.3.Örnek. $H = \{x \in R^n : a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c\}$ kümesinin bir konveks küme olduğunu görelim.

Çözüm. $x, y \in H$ ve $0 \le \lambda \le 1$ olsun. Bu halde, $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in H$ olduğunu görelim. $z = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i y_i = (1-\lambda)c + \lambda c = c$ olduğundan H konvekstir.

2.1.1.1. Sonuç. R^3 de $ax + by + cz = d$ düzlemi konvekstir.

2.1.1.4. Örnek. $A_{m\times n}$ tipinde bir matris $b \in R^m$ ve $S = \{x \in R^n : Ax = b\}$ (Yani, S kümesi $Ax = b$ sisteminin çözüm kümesidir). S nin konveksliğini görelim.

Çözüm. $A[(1-\lambda)x + \lambda y] = (1-\lambda)Ax + \lambda\, Ay = (1-\lambda)b + \lambda b = b$ olduğundan S konvekstir.

2.1.1.5. Örnek. $B = \{x \in R^n : \|x\| \le 1\}$ kümesi konvekstir.

Çözüm. Her $x, y \in B$ için $\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \le (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \le (1-\lambda) + \lambda = 1$

olduğundan B konvekstir. Özel olarak, $\overset{\circ}{B} = \{x \in R^n : \|x\| < 1\}$ ise B yine konvekstir.

2.1.1.6. Örnek. R^n nin kendisi de konvekstir.

2.1.1.1. Lemma. $C \subset R^n$ konveks ise C nin kapanışı ($cl(C)$ veya $\overline{C}$) da konvekstir.

İspat. $x, y \in \overline{C}$ olsun. Bu halde $n \to \infty$ için $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olacak şekilde C içinde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri vardır. $0 \le \lambda \le 1$ için $z_n = (1-\lambda)x_n + \lambda\, y_n$ olsun. C nin konveksliğinden $z_n \in C$ dir. Üstelik, $n \to \infty$ için $z_n \to (1-\lambda)x + \lambda y$. Yani, $z_n \in \overline{C}$ dir. Diğer bir değişle $\overline{C}$ konvekstir.

Sayı doğrusu üzerinde $[0,1]$ ve $[2,3]$ kapalı aralıklarının birleşiminin konveks olması gerekmez.

2.1.1.2. Lemma. Keyfi sayıdaki konveks kümelerin kesişimi de konvekstir.

İspat. $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ konveks kümelerin bir ailesi ve $X = \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ olsun. $x, y \in X$ ise kesişimin tanımından dolayı $\alpha \in A$ için $x, y \in K_\alpha$. Bu K_α ların konveks olduğu önceden bilinmektedir. Dolayısıyla herhangi bir $\alpha \in A$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in K_\alpha$.

2.1.1.3. Lemma. C, C_1 ve C_2, R^n nin konveks alt kümeleri ve $\beta \in R$ ise

a) $\beta C = \{z \in R^n : z = \beta x, x \in C\}$ konvekstir.

b) $C_1 + C_2 = \{z \in R^n : z = x_1 + x_2, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ konvekstir.

İspat. (a) nın ispatı aşikârdır.

b) $z_1, z_2 \in C_1 + C_2$ ve $0 \le \lambda \le 1$ olsun. $z_1 = x_1 + x_2, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$ ve benzer olarak $z_2 = y_1 + y_2, y_1 \in C_1, y_2 \in C_2$ dir.

$(1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 = (1-\lambda)(x_1 + x_2) + \lambda(y_1 + y_2) = [(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1] + [(1-\lambda)x_2 + \lambda y_2]$.

Burada, $[(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1] + [(1-\lambda)x_2 + \lambda y_2] \in C_1 + C_2$ dir.

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$, ifadesi A ve B kümelerinin kartezyen çarpımını ifade eder. Burada sıra önemlidir. Yani, $A \times B \ne B \times A$ dır.

2.1.1.7. Örnek. $A = [-1,1]$ ve $B = [-1,1]$ ise $A \times B = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ ifadesi karedir.

2.1.1.8. Örnek. $R^2 = R \times R$ dir.

2.1.1.9. Örnek. $C \subset R^2$ konveks ve $S = R^+ \times C$ olsun. S bir dik silindir ve $S = \{(z,x) \in R^3 : z > 0, x \in C\}$ ile ifade edilir. Eğer özellikle $C = \{(u,v) \in R^2 : u^2 + v^2 \le 1\}$ şeklinde alınırsa bu halde S, x, y düzleminin yukarısında yatan dik dairesel silindir belirtir (Altı olmayan bir silindir).

2.1.1.10. Örnek. Genel olarak A ve B boştan farklı V vektör uzayında iki konveks küme olsun. Bu halde $A \times B$ konvekstir.

Çözüm. $A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$ ve $x_1, x_2 \in A, y_1, y_2 \in B$ olsun. O zaman $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ dir. $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere

$$(1-\lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) = [((1-\lambda)x_1, (1-\lambda)y_1) + (\lambda x_2 + \lambda y_2)]$$
$$= [((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2), ((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)]$$

olur. Burada A ve B nin konveksliğinden $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \in A$ ve $((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in B$ olduğundan $((1-\lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)) \in A \times B$ dir.

2.1.1.4. Lemma. K konveks bir küme ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \ge 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olsun. Eğer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ ise $\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \in K$ dır.

İspat. İspatı tümevarım ile yapalım. $n=1$ için durum aşikardır. $n=2$ için de konvekslik tanımı gereğince durum aşikardır. $n=r$ için $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i \in K$ olsun. $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_{r+1}x_{r+1}$ konveks kombinasyonunu göz önüne alalım. $\alpha=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i$ olsun. Bu halde,

$$1-\alpha=\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_i-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i=\lambda_{r+1},\ \left(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i x_i\right)+\lambda_{r+1}x_{r+1}=\alpha\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i}{\alpha}x_i\right)+(1-\alpha)x_{r+1}$$

$\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i}{\alpha}=1$ ve tümevarım hipotezinden $\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i}{\alpha}x_i\in K$ olduğunu biliyoruz. $x_{r+1}\in K$ olduğundan sağ taraf K daki iki noktanın konveks kombinasyonudur. Yani, $\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_I x_i\in K$ dır. $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in K$ ifadesi $x_1,\ldots,x_n$ lerin kombinasyonu veya n tane nokta olan $x_1,\ldots,x_n$ ların kombinasyonu olarak bilinir.

2.1.2. Konveks fonksiyonlar

2.1.2.1. Tanım. $f:R^n\to R$ bir fonksiyon olsun. $0\le\lambda\le1$ olmak üzere

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{2.2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna konvekstir denir. Burada, $x_1\neq x_2$ dir.

2.1.2.1. Sonuç. (2.2) ifadesinde $\le$ yerine $<$ yazılırsa f ye kesin olarak konvekstir denir.

2.1.2.2. Sonuç. f fonksiyonu konveks ise $-f$ fonksiyonu konkavdır.

Geometrik olarak bir f fonksiyonunun grafiği, $Gr=\{(x,y)\in R^{n+1}:y=f(x)\}$ ile tanımlanır. Bu halde (2.2) ifadesinin geometrik yorumu, $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğru parçası üzerindeki herhangi bir nokta daima $f(x)$ değerlerinden büyüktür veya eşittir. $\widetilde{f}(\lambda)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ şeklinde tanımlanan $\widetilde{f}:R\to R,\lambda$ değişkenine bağlı konveks bir fonksiyondur. f fonksiyonunun tanım kümesi bir boyutlu olsun. Bu halde, (2.2) ifadesi $x_1<x_2$ olmak üzere,

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \tag{2.3}$$

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ise (2.3) ifadesi

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \equiv l(x) \tag{2.4}$$

olduğu kolayca görülür. Ve $l(x)$ lineer bir fonksiyondur. (2.4) ifadesi

$$(x_2 - x)f(x_1) - (x_2 - x_1)f(x) + (x - x_1)f(x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_2 \\ f(x_1) & f(x) & f(x_2) \end{vmatrix} \ge 0.$$

Bu son determinant köşeleri $A_1 = (x_1, f(x_1)), A = (x, f(x)), A_2 = (x_2, f(x_2))$ olan üçgenin alanının iki katıdır. Köşeleri birleştiren yön saat ibresinin tersi yönüdür. $A_1 \to A \to A_2 \to A_1$ olur. (2.4) ifadesinin sol tarafı olan $f(x)$, $1 = \dfrac{(x_2 - x) + (x - x_1)}{x_2 - x_1}$ ile çarpılırsa

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{2.5}$$

elde edilir.

2.1.2.1. Teorem. $f : R \to R$ konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \ge 0$.

İspat. (2.5) denkleminden kolayca görülür. $x \to x_1^+$ durumunda $f'(x_1) \le \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ elde edilir. Benzer olarak $x \to x_2^-$ iken $f'(x_2) \ge \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ olup $f'(x_2) \ge f'(x_1)$ olmasını gerektirir. $f'(x_2) \ge f'(x_1)$ bu ise $f'(x)$ fonksiyonunun x in azalmayan bir fonksiyonu olduğunu ve dolayısıyla ikinci türev mevcut ve $f''(x) \ge 0$ dır.

Tersine f nin türevlenebilirliği ve x in azalmayan bir fonksiyonu olduğu koşulu göz önüne alınırsa bununla birlikte $x_1 < x < x_2$ ile türevler için Ortalama Değer Teoremini kullanarak, $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$, $\dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$ olacak şekilde $c_1 \in (x_1, x), c_2 \in (x, x_2)$ vardır. (2.5) eşitsizliğinden $f'(c_2) \ge f'(c_1)$ elde edilir. Bu durum, f nin konveksliğine vurgu yapar.

2.1.2.1. Not. (a,b) açık aralığında, $\{x_i\}_{i\geq 0}$ dizisi kesin olarak artan bir dizi olsun. Bu halde $i \geq 2$ için ve herhangi $\varepsilon > 0$ için tüm $x_i < b-\varepsilon$ olmak üzere $\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ oranları yukarıdan sınırlıdır. Böylece her $x \in (a,\, b)$, $f'_-(x) = \lim\limits_{h\to 0_+} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h} < \infty$ dır. Bu halde, $\lim\limits_{x\to b_-} f'_-(x) = \infty$ olasılığı mümkündür.

2.1.2.1. Örnek. $[-1,1]$ kapalı aralığı üzerinde $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ alınırsa bu durum gözlenir.

Aynı muhakeme ile herhangi $x \in (a,b)$ aralığı için,

$f'_+(x) = \lim\limits_{h\to 0_-} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} > -\infty$ yazılır. Dolayısıyla (2.5) ifadesinden $f'_+(x) \geq f'_-(x)$.

$[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve (a,b) açık aralığı içinde sürekli olan herhangi bir f konveks fonksiyonu için $f'_+(x)$ sonludur.

2.1.2.2. Örnek. Yukarıdaki durum uç noktalar için geçerli olmayabilir.

$$x \in (-1,1),\ f(x) = -\sqrt{1-x^2},\ f(-1) = f(1) = 0,\ f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, x = -1 \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in (-1,1) \end{cases}$$

$f'_-(x) < f'_+(x)$ şartı için (a,b) açık aralığındaki bu tip süreksizlik noktalarının sayısı sayılabilir sayıdadır.

$[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde diferansiyellenebilen bir $f(x)$ fonksiyonu azalmayan (artan) bir türeve sahip ise $f(x)$, (kesin olarak) konvekstir. Eğer $f(x), (a,b)$ açık aralığının her yerinde negatif olmayan ikinci türeve sahipse $f(x)$ bu açık aralık üzerinde (kesin olarak) konvekstir.

2.1.3. Konveks fonksiyonların özellikleri

2.1.3.1. Teorem. a) f konveks ve c sabit ise $c\,f$ konvekstir.

b) f, g konveks iki fonksiyon ise $f+g$ konvekstir.

c) f konveks, artan ise ve u konveks ise $f(u(x))$ konvekstir.

İspat. a) $c\,f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le c(\lambda\, f(x)+(1-\lambda)f(y))$

$$=c\lambda\, f(x)+c(1-\lambda)f(y)$$

$$=\lambda c\, f(x)+(1-\lambda)c\, f(y).$$

b) $(f+g)(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(\lambda x+(1-\lambda)y)+g(\lambda x+(1-\lambda)y)$

$$\le\lambda\, f(x)+(1-\lambda)f(y)+\lambda\, g(x)+(1-\lambda)g(y)$$

$$=\lambda(f+g)(x)+(1-\lambda)(f+g)(y).$$

c) $f(u(\lambda x+(1-\lambda)y))\le f(\lambda u(x)+(1-\lambda)u(y))\le\lambda\, f(u(x))+(1-\lambda)f(u(y)).$

d) f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sabit olmayan konveks bir fonksiyon ise f, (a,b) açık aralığının içinde lokal maximuma sahip olamaz.

İspat. $x_0\in(a,b)$ açık aralığında lokal bir maximum olsun. Bu halde $x_1,x_2\in(a,b)$ vardır öyle ki $x_1<x_0$, $x_2>x_0$ ve $x_0=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ yazılabilir. Üstelik, $f(x_1)\le f(x_0)$, $f(x_2)\le f(x_0)$ dir. Bu eşitsizliklerden en az bir tanesi kesin olarak eşitsizliktir. İlk eşitsizlik λ ile ikinci eşitsizlik $(1-\lambda)$ ile çarpılır ve bu iki ifade toplanırsa $f(x_0)\ge\lambda\, f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ elde edilir. Bu ise f nin konveksliği ile çelişki teşkil etmektedir.

e) $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde $f(x)$ konveks ve $x_2>x_1$ olacak şekilde sabitlenmiş $x_1,\ x_2\in[a,b]$ olsun. Bu halde tüm $x\in(x_1,x_2)$ açık aralığı için konvekslik tanımındaki eşitsizlik ya daima eşitliktir ya da daima kesin olarak eşitsizliktir.

İspat. $x\in[x_1,x_2]$ için $g(x)=f(x)-l(x)=f(x)+(-l(x))$

olsun. Burada, $l(x)=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$. Bu halde, $g(x)$ konveks iki fonksiyonun toplamıdır ve $g(x_1)=g(x_2)=0$ dır. Dolayısıyla $x\in(x_1,x_2)$ açık aralığı için $g(x)$ ya sabittir ya da lokal bir minimuma sahip değildir. Bu durum ise (d) şıkkının ispatında ifade edilen eşitsizlik ya eşitliğe ya da kesin olarak eşitsizliğe tekabül eder.

2.1.4. Çok değişkenli fonksiyonlar

$F_c = \{x \in R^n : f(x) \leq c, c \in R\}$ ifadesine alt seviye (sublevel) kümesi veya seviye kümesi denir.

2.1.4.1. Not. Seviye kümesi $Epi(f)$ veya *Epigraph* olarak da bilinir.

2.1.4.1. Teorem. $C \subset R^n$ konveks ve $f : C \to R^*$ bu halde aşağıdakiler denktir.

a) $Epi(f)$ konvekstir. Yani, F_c konvekstir.

b) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, x_i \in C$ ve $i = 1,...,n$ için $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

c) Herhangi $x, y \in C,\ \lambda \in [0,1]$ için $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b) olduğunu görelim. Tüm $i = 1,...,n, (f(x_i), x_i) \in epi(f)$ olsun.

Epigraph'ın konveksliğinden $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f(x_i), x_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \in Epi(f)$.

Bu ise sırasıyla $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. (b) ifadesi (c) ifadesini gerektirir.

Şimdi (c) nin (a) ifadesini gerektirdiğini görelim. $(c_1, x_1), (c_2, x_2) \in epi(f)$ olsun. Yani,
$epi(f) = \{(c_1, x_1) \in R^* \times C : c_1 \geq f(x_1)\}$, $\quad epi(f) = \{(c_2, x_2) \in R^* \times C : c_2 \geq f(x_2)\}$.
$0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $(1-\lambda)(c_1, x_1) + \lambda(c_2, x_2) = ((1-\lambda)c_1 + \lambda c_2, (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)$,
$f(x_1) \leq c_1$ ve $f(x_2) \leq c_2$ olduğundan $(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq (1-\lambda)c_1 + \lambda c_2$. Bu ise (c) nin konveksliğinden $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 = \theta$ olmak üzere

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq (1-\lambda)c_1 + \lambda c_2$$

olup $\theta \in epi(f)$ tir.

Bu ispatı daha farklı ve öz bir şekilde ifade edelim. f fonksiyonu konveks olsun. F_c nin konveks olduğunu görelim.

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq \lambda c + (1-\lambda)c = c.$$

Tersine F_c konveks olsun, f nin konveks olduğunu görelim. x_1, x_2, f nin tanım kümesinden alınan iki eleman olsun. $f(x_1) = f(x_2) = c$ olduğunu kabul edelim. Bu halde F_c konveks olduğundan $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in F_c$ yazılır. F_c nin tanımından

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq c = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

2.1.4.2. Not. $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise $g(x) = f(x) - l(x)$ alınır ve $f(x_1) = l(x_1)$, $f(x_2) = l(x_2)$ olduğundan $g(x_1) = g(x_2)$ olup yukarıdaki argüman takip edilir.

2.1.4.1. Lemma. Lineer fonksiyonlar konvekstir.

İspat. $f((1-\lambda)x + \lambda y) = \langle a, (1-\lambda)x + \lambda y \rangle + b = (1-\lambda)\langle a, x \rangle + \lambda \langle a, y \rangle + (1-\lambda)b + \lambda b$

$$= (1-\lambda)(\langle a, x \rangle + b) + \lambda(\langle a, y \rangle + b) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

dolayısıyla f konvekstir. Burada eşitsizlik (zayıf eşitsizlik) eşitlik olmuştur.

2.1.4.2. Lemma. $f(x) = \langle a, x \rangle$ ve $\varphi : x \to [f(x)]^2$ olarak tanımlanan φ konvekstir.

İspat. $(1-\lambda)\varphi(x) + \lambda \varphi(y) - \varphi((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)\alpha^2 + \lambda \beta^2 - ((1-\lambda)\alpha + \lambda \beta)^2$

$$= (1-\lambda)\lambda(\alpha - \beta)^2 \geq 0.$$

Burada, $\alpha = f(x), \beta = f(y)$. Özel olarak $f : R \to R, f(x) = x$ alınırsa $\varphi(x) = x^2$ olur.

2.1.4.3. Lemma. C konveks ve $f : C \to R$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu halde tüm $\alpha \in R$ için $\{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$ ve $\{x \in C : f(x) < \alpha\}$ seviye kümeleri konvekstir.

2.1.4.4. Lemma. f fonksiyonu konveks olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) f lokal minimuma sahiptir.

b) f global minimuma sahiptir.

2.1.4.3. Not. Kısaca f nin lokal minimuma sahip olması için gerek ve yeter şart global minimuma sahip olmasıdır.

İspat. x konveks f fonksiyonunun lokal minimumu olsun. Bu halde x in bir U komşuluğun da herhangi bir z için $f(x) \leq f(z)$ dir. $0 < \lambda < 1$, λ yeterince küçük seçilirse herhangi bir $y, z = \lambda x + (1-\lambda) y$,

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(z) \geq f(x).$$

Yani, $f(y) \geq f(x)$ tir.

2.1.4.5. Lemma. C konveks $f : C \to R$ kesin olarak konveks fonksiyon olsun. Bu halde, f minimumunu en fazla bir noktada alır.

İspat. M boştan farklı minimal noktaların kümesi ve $x \neq y$ noktalarını içersin. $0 < \lambda < 1$ için M konveks olduğundan $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$ dır. Fakat f kesin olarak konveks olduğundan $m = f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) = m.$ Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla, $x = y$ dır.

2.1.4.4. Not. Eğer f türevlenebilir ise elementer işlemler kullanılır.

2.1.4.2. Teorem. $f : I \subset R \to R$ reel değerli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu halde eğer f, I üzerinde azalmayan bir fonksiyon ise f fonksiyonu konvekstir.

İspat. $x, y \in I$ ve $x < y$ olsun. Herhangi bir $0 \le \lambda \le 1$ için $z_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y$

Ortalama Değer Teoremi gereğince

$$f(y) = f(z_\lambda) + (y - z_\lambda)f'(u) \text{ ve } f(z_\lambda) = f(x) + (z_\lambda - x)f'(v)$$

olacak şekilde $x \le v \le z_\lambda \le u \le y,\ u, v \in R$ vardır.

$$y - z_\lambda = y - (1-\lambda)x - \lambda y = (1-\lambda)(y-x), z_\lambda - x = (1-\lambda)x + \lambda y - x = \lambda(y-x),$$

$$f(y) = f(z_\lambda) + (1-\lambda)(y-x)f'(u), z_\lambda = f(x) + \lambda(y-x)f'(v)$$

$v < u$ ve ayrıca f' ifadesi azalmayan olduğundan son denklemden, $f(z_\lambda) \le f(x) + \lambda(y-x)f'(u)$ yazılır. Bu son eşitsizlik $(1-\lambda)$ ile ve $f(y)$ de $-\lambda$ ile çarpılıp toplanırsa,

$$(1-\lambda)f(z_\lambda) - \lambda f(y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda(1-\lambda)(y-x)f'(u) - \lambda f(z_\lambda) - \lambda(1-\lambda)(y-x)f'(u)$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(1-\lambda)f(z_\lambda) + \lambda f(z_\lambda) = f(z_\lambda) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

2.1.4.3. Teorem. $C \subset R^n$ açık konveks ve f, C üzerinde sürekli türevlenebilir olsun. Aşağıdakiler denktir.

a) Tüm $x, y \in C$ için $E(x,y) = f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle \ge 0$

b) C içinde $\nabla f(x)$ monotondur.

c) C üzerinde f konvekstir.

İspat. (a) nın doğru olduğunu kabul edelim. Yani $C \times C$ üzerinde $E(x,y) \ge 0$ olsun.

$$f(y) - f(x) \ge \langle \nabla f(x), y - x \rangle,\ \ f(x) - f(y) \ge \langle \nabla f(y), (x - y) \rangle = -\langle \nabla f(y), y - x \rangle$$

ikinci eşitsizlikten $f(y) - f(x) = \langle \nabla f(y), x - y \rangle$ ve böylece,

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle = \langle \nabla f(y), y - x \rangle - \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

$$\ge (f(y) - f(x)) - (f(y) - f(x)) \ge 0$$

olur. Bu halde, $x \to \nabla f(x), C$ içinde monotondur.

$x \to \nabla f(x), C$ de monoton ve $x, y \in C$ olsun. $\varphi : [0,1] \to R, \varphi(t) = f(x + t(y - x))$ şeklinde tanımlansın. Eğer $\varphi, [0,1]$ kapalı aralığında konveks ise f de C üzerinde konvekstir. Bunun için $u, v \in [0,1]$ olsun

$$\varphi((1-\lambda)u + \lambda v) = f(x + [(1-\lambda)u + \lambda v](y - x))$$
$$= f((1 - [(1-\lambda)u + \lambda v])x + [(1-\lambda)u + \lambda v]y).$$

Diğer taraftan,

$$\varphi((1-\lambda)u + \lambda v) \le (1-\lambda) f(x + u(y - x)) + \lambda f(x + v(y - x)).$$

Yukarıdaki ifadelerde $u = 0, v = 1$ alınırsa $f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$

α, β yı $0 \le \alpha < \beta \le 1$ olacak şekilde seçelim. Bu halde,

$$\varphi'(\beta) - \varphi'(\alpha) = \langle (\nabla f(x + \beta(y - x)) - \nabla f(x + \alpha(y - x))), y - x \rangle$$

ve $u = x + \alpha(y - x)$ ve $v = x + \beta(y - x)$ şeklinde seçilirse $v - u = (\beta - \alpha)(y - x)$ olur.

$$\varphi'(\beta) - \varphi'(\alpha) = \langle \nabla f(v) - \nabla f(u), v - u \rangle \ge 0.$$

Yani, φ' azalmayan bir fonksiyondur. Böylece, φ konvekstir.

Son olarak eğer φ, C üzerinde konveks ise sabitlenmiş $x, y \in C$ için

$$h(\lambda) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x + \lambda y).$$

Bu halde, $\lambda \to h(\lambda)$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyondur. $[0,1]$ kapalı aralığında diferansiyellenebilir ve minimum değerini de $\lambda = 0$ da alır. Burada, $0 \le h'(0) = E(x, y).$

2.1.4.1. Sonuç. C konveks bir küme, f, C üzerinde sürekli türevlenebilir konveks bir fonksiyon olsun. Tüm $y \in C$ için $\langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle \ge 0$ olacak şekilde bir $x^* \in C$ varsa x^* a f nin C üzerindeki mutlak minimum noktası denir.

İspat. Bir önceki teoremden dolayı f fonksiyonunun konveksliği $f(y) - f(x^*) \ge \langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle$ olmasını gerektirir. Hipotezden dolayı, $f(y) \ge f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), y - x^* \rangle \ge f(x^*).$

$D \subset R^n$ açık olsun, $f : D \to R, D$ içinde sürekli ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun. Bu halde, $n \times n$ tipindeki ikinci merteben kısmi türevleri içeren f nin Hessian matrisi $\nabla^2 f(x)$ veya $F(x), \nabla^2 f(x) = \left| \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|$ ve $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ olduğundan Hessian matrisi simetrik matristir.

$f : D \to R$ ye sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu halde, D içinde x_1, x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası

$$f(x_2) = f(x_1) + \langle \nabla f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2), x_2 - x_1 \rangle$$

olacak şekilde bir $0 \leq \lambda \leq 1$ varlığını garanti eder. Bu ifade Taylor teoremi veya Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremleri olarak da bilinir.

Eğer f ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$f(x_2) = f(x_1) + \langle \nabla f(x_1), x_2 - x_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle x_2 - x_1, \nabla^2 f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)(x_2 - x_1) \rangle$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1]$ vardır.

Hessian matrisi simetrik olduğundan simetrik matris ile ilgili birkaç şey söylemekte fayda vardır.

2.1.4.1. Tanım. $A, n \times n$ tipinde simetrik bir matris olsun. Tüm $x \in R^n$, için $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ $(x^t Ax \geq 0)$ oluyorsa, A matrisine yarı pozitif tanımlı matris denir. $x \neq 0$ tüm $x \in R^n$ için $\langle x, Ax \rangle > 0$ $(x^t Ax > 0)$ oluyorsa A matrisine pozitif tanımlıdır denir. Pozitif tanımlı bir matrisin eigen (öz) değerleri pozitiftir.

2.1.4.6. Lemma. $D \subset R^n$ açık ve konveks bir küme, $f : D \to R$ ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyon olsun. Bu halde f nin konveks olması için gerek ve yeter şart f nin D boyunca yarı pozitif tanımlı olmasıdır.

İspat. Taylor teoreminden bazı $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle y - x, \nabla^2 f(x + \lambda(y - x))(y - x) \rangle$$

yazılır. Eğer yarı pozitif tanımlı bir matris ise $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$ bu da $E(x, y)$ nin tanımıdır. $E(x, y)$ nin konveks olmasını gerektirir.

Tersine Hessian matrisi yarı pozitif tanımlı matris olmasın. Bu halde, Hessian matrisinin sürekliliğinden $\lambda \in [0,1]$ için bir $y \in D$ vardır. Öyle ki,

$$\left\langle y - x, \nabla^2 f(x + \lambda(y - x))(y - x)\right\rangle < 0.$$

Taylor açılımı gereğince, $E(x, y) < 0$ çıkar. Bu durum f nin konveks olmadığını garanti eder.

Young eşitsizliğinin analitik bir ispatı için (Diaz ve Metcalf, 1970), daha genel teoremler için (Hardy ve ark., 1952), farklı varsayımlar altındaki ispatı için (Mitrinovic, 1973) ve konveks analizdeki kullanımları için (Niculescu ve ark., 2006; Robert ve Varberg, 1973) bakılabilir. Jensen eşitsizliğinin integral versiyonunun ifade ve ispatı için (Polya ve ark., 1952) bakılabilir. Jensen eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir versiyonu ve konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin tersi için (Dragomir, 2001) bakılabilir.

f, I kapalı aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon olmak üzere ağırlıklı Jensen diskrit (ayrık) eşitsizliği için en iyi üst sınır elde edilmiştir (Cirtoaje, 2011).

Çok bilinen diskrit Jensen eşitsizliği için (Mitrinovic, 1970; Mitrinovic ve ark., 1993) bakınız. Bir f fonksiyonu üzerine sınırlamalar konmaksızın Jensen eşitsizliği için bir global üst sınır ve Jensen eşitsizliği ve yeni entropi sınırları (Simic, 2008; Simic, 2009) tarafından verilmiştir. Olasılıkta Jensen eşitsizliği ve tanımlamalar için (Ross, 1994; Devore, 1995) bakınız. Zaman skalası üzerinde Jensen eşitsizliğinin ispatı klasik Jensen eşitsizliğiyle benzerdir. $T = R$ ise zaman skalasındaki Jensen eşitsizliği klasik Jensen eşitsizliğiyle aynıdır. Eğer $T = Z$ ise Jensen eşitsizliği çok bilinen aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğine indirgenir (Agarwal ve ark., 1998).

Jensen eşitsizliğinin yeni bir versiyonu ve ilgili sonuçları, iki değişkenli fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği ve aynı zamanda düzlemde sınırlı bir alan üzerindeki konveks bir fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir alt sınırı elde edilecektir (Zabandan ve Kılıçman, 2012). Hermite-Hadamard eşitsizliği için

(Mitrinovic ve ark., 1985; Zabandan, 2009). Hardy-Polya-Knopp eşitsizlikleri ve Hardy eşitsizliğinin bir limiti olarak Polya-Knopp eşitsizliği (Hussain, 2005-2008) tarafından verilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Jensen Eşitsizliği

3.1.1. Genelleştirilmiş konvekslik tanımı

Aşağıdaki tanımlamalar ve çıkarsamaların bir kısmı için (Boyd ve Vandenberghe, 2004; Niculescu ve Persson, 2006; Roberts ve Varberg, 1973) çalışmalarına bakılabilir.

$f : R^n \to R, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \ (i = 1,...,n)$ olsun.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \tag{3.1}$$

oluyorsa f fonksiyonuna konvekstir denir.

$n = 2$ ise durum açıktır. Yani, geleneksel konvekslik tanımı elde edilir. $n-1 \geq 2$ için (3.1) ifadesi doğru olsun. Eğer $\lambda_n < 1$ ($\lambda_n = 1$ ise aşikardır) ise konvekslik tanımı gereğince

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) &= f\left(\lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) \\ &\leq \lambda_n f(x_n) + (1-\lambda_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} x_i\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n) \end{aligned}$$

olur. Burada dikkat edilmesi gereken husus, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} = \frac{1}{1-\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_n} = 1$ olmasıdır.

3.1.1.1. Not. (3.1) ifadesinde $\lambda_i = \frac{p_i}{\sum p_i}$ olsun. Bu halde $\sum \lambda_i = 1$ olduğu görülür. Ayrıca (3.1) ifadesi

$$f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \le \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i} \qquad (3.2)$$

şeklinde olur. Bu ifade de zaman zaman **Jensen Eşitsizliği** olarak yazılır.

Konveks (konkav) fonksiyon söz konusu olduğunda klasik eşitsizliklerin ispatı için çok bilinen Jensen eşitsizliğinden istifade edilir. Örneğin, $f(x)$, x in çift kuvvetleri, üstel ve logaritmik olarak verilebilir. Bu halde, $[a,b]$ kapalı aralığında bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca, $x_1 = a,\ x_n = b$ ve $[a,b]$ kapalı aralığı içerisinde $i = 1,...,n$ için $x_{i+1} > x_i$ olacak şekilde $p_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ olsun, $\sum p_i = \sum \Delta x_i = b - a$ olsun. $n \to \infty$ halinde (3. 2) denklemindeki sağ tarafın payı $\int_a^b f(x)dx$ ve sol tarafta $f\left(\frac{\sum x_i \Delta x_i}{b-a}\right)$ olur. Böylece, $\sum x_i \Delta x_i \to \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ ve dolayısıyla $f\left(\frac{b+a}{2}\right) \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ elde edilir.

Benzer bir muhakeme ile $g(x)$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. (3.2) denkleminde $p_i = \Delta x_i$ ve x_i yerine de $g(x_i)$ alınırsa (3.2) denklemi

$$f\left(\frac{\int_a^b g(x)dx}{b-a}\right) \le \frac{\int_a^b f(g(x))dx}{b-a}.$$

Özel olarak, burada $f(x) = \ln x$ olsun. Bu halde, Jensen eşitsizliğinden

$$\ln\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \ge \frac{\sum p_i \ln x_i}{\sum p_i}, \qquad \ln\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \ge \frac{\ln\left(\prod x_i^{p_i}\right)}{\sum p_i} = \ln\left(\prod x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum p_i}}$$

yazılıp kolaylıkla tüm $x_i > 0$ için

$$\left(\prod x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum p_i}} \le \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \qquad (3.3)$$

Young eşitsizliği elde edilir. Özel olarak, tüm $p_i = 1$ ise

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}. \tag{3.4}$$

Bu ise aritmetik-geometrik ortalama arasındaki bağıntıdır. (3.4) denkleminde x_i yerine $\frac{1}{x_i}$ yazılırsa $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$ harmonik ve geometrik ortalama arasındaki bağıntı elde edilir. $f(x) = x^k$, $x > 0$ ve $k > 1$ olması halinde Jensen eşitsizliğinden

$$\left(\frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{\sum p_i}\right)^k \leq \frac{p_1}{\sum p_i} x_1^{\,k} + \ldots + \frac{p_n}{\sum p_i} x_n^{\,k} = \left(p_1 x_1^{\,k} + \ldots + p_n x_n^{\,k}\right)\left(\sum p_i\right)^{-1}$$

olur. Buradan,

$$\left(\sum p_i x_i\right)^k \leq \left(\sum p_i x_i^{\,k}\right)\left(\sum p_i\right)^{k-1} \tag{3.5}$$

elde edilir. $k = 2, p_i = y_i^{\,2}$ ve $x_i = \frac{x_i}{y_i}$ alınırsa

$$\sum x_i y_i \leq \sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}$$

çok bilinen Cauchy-Buniakowsky-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

k', k nin eşleniği olsun. Yani, $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ dir. Bu halde (3.5) eşitsizliğinde $p_i = y_i^{\,k'}, x_i = \frac{x_i}{y_i^{\,k'-1}}$ alınırsa (Bazı x_i, y_i sayıları için) (3.5) denkleminden Hölder eşitsizliği

$$\sum x_i y_i \leq \left(\sum x_i^{\,k}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum y_i^{\,k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

elde edilir. Özel olarak $k = p, k' = q$ alınırsa (notasyonel anlamda) bilinen klasik formül elde edilir.

Cauchy-Buniakowsky-Schwarz eşitsizliği çok bilinen Hölder eşitsizliğinin $n = 2$ halidir. Özel olarak Cauchy-Buniakowsky-Schwarz halinde $y_i = 1$ alınırsa

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}.$$

3.1.1.2. Not. Hölder eşitsizliğ genellikle iki sayılı Young eşitsizliğinden elde edilir. $y_1 = y, y_2 = 1 - y$ ve $\alpha = x_1^{\;y}, \beta = x_2^{\;1-y}$ alınırsa

$$\alpha\beta \le y\alpha^{\frac{1}{y}} + y'\beta^{\frac{1}{y'}}$$

$\frac{1}{y} + \frac{1}{y'} = 1$. Yani $k = \frac{1}{y}$ ise $k' = \frac{1}{y'}$ dir. Diğer bir değişle eşleniktirler. Netice itibariyle iki sayı için Hölder eşitsizliği

$$\alpha\beta \le \frac{1}{k}\alpha^k + \frac{1}{k'}\beta^{k'}$$

olur. Eğer $x_i, y_i, (i = 1,2,...,n)$ ise son eşitsizlikte $\alpha_i = \frac{x_i}{\left(\sum x_i^{\;k}\right)^{\frac{1}{k}}}, \beta_i = \frac{y_i}{\left(\sum y_i^{\;k'}\right)^{\frac{1}{k'}}}$

alınırsa ($\alpha = \sum \alpha_i = \frac{\sum x_i}{\left(\sum x_i^{\;k}\right)^{\frac{1}{k}}}$ ve benzer olarak $\beta = \sum \beta_i$ tanımlanırsa)

$$\frac{\sum x_i y_i}{\left(\sum x_i^{\;k}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum y_i^{\;k'}\right)^{\frac{1}{k'}}} \le \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$$

bulunur.

Hölder eşitsizliğinden yine çok önemli bir eşitsizlik olan Minkowski eşitsizliği elde edilir. $x \in R^n$ olsun. $\|x\|_k = \left(\sum x_i^{\;k}\right)^{\frac{1}{k}}$ $(k > 1)$ normu tanımlansın. Özel olarak, $k = 2$ ise bu norm Euclidean normu olur. $\|.\|_k$ için Minkowski eşitsizliği

$$\|x+y\|_k \le \|x\|_k + \|y\|_k \text{ veya } \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^k\right)^{\frac{1}{k}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;k}\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\;k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

olur. Gerçekten,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^k = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{k-1}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{k-1}$$

olur. Hölder eşitsizliği x_i ve $(x_i + y_i)^{k-1}$ terimlerine uygulanırsa

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{k-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;k}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^k\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

elde edilir. Aynı muhakeme ile y_i ve $(x_i + y_i)^{k-1}$ için uygulanırsa

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i + y_i)^{k-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,k} \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^k \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

toplamının neticesinde her taraf $\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^k \right)^{\frac{k-1}{k}}$ bölünürse

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^k \right)^{\frac{1}{k}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,k} \right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,k} \right)^{\frac{1}{k}}$$

elde edilir. Yani,

$$\|x+y\|_k \le \|x\|_k + \|y\|_k .$$

3.1.2. Young eşitsizliği

3.1.2.1. Teorem. (Witkowski, 2006) Eğer $f:[0,A]\to R$ sürekli, kesin olarak artan ve $f(0)=0$ ise her $0<a\le A, 0<b\le f(A)$ için

$$ab \le \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt$$

dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $b = f(a)$ olmalıdır. İspatı vermeden önce aşağıdaki lemmayı verelim.

3.1.2.1. Lemma. (Witkowski, 2006) f yukarıdaki teoremin şartlarını sağlasın. Bu halde, $\int_0^a f(t)dt + \int_0^{f(a)} f(t)^{-1} dt = af(a)$.

İspat. (Witkowski, 2006) $[0,a]$ kapalı aralığını $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = a$ alt aralıklara bölelim. $y_i = f(x_i)$ ve $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olsun, f fonksiyonu için

$$\underline{S}(f,x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i , \quad \overline{S}(f,x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Rieman alt ve üst toplamlarını ele alalım. $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\Delta y_i < \varepsilon/a$ olacak şekilde x seçelim. Bu halde,

$$\overline{S}(f,x) - \underline{S}(f,x) = \overline{S}(f^{-1},y) - \underline{S}(f^{-1},y) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_i < \varepsilon.$$

$$a\, f(a)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\sum_{j=1}^{n}\Delta y_j=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\left(\sum_{j=1}^{i}\Delta y_j+\sum_{j=i+1}^{n}\Delta y_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\sum_{j=i+1}^{n}\Delta y_j$$

$$=\overline{S}(f,x)+\sum_{j=2}^{n}\Delta y_j\sum_{i=1}^{j-1}\Delta x_i$$

$$=\overline{S}(f,x)+\underline{S}(f^{-1},y),$$

$$\left|a\, f(a)-\int_0^a f(t)dt-\int_0^{f(a)} f^{-1}(t)dt\right|=\left|\overline{S}(f,x)-\int_0^a f(t)dt+\underline{S}(f^{-1},y)-\int_0^{f(a)} f^{-1}(t)dt\right|$$

$$\leq\overline{S}(f,x)-\underline{S}(f,x)+\overline{S}(f^{-1},y)-\underline{S}(f^{-1},y)<2\varepsilon.$$

Şimdi de Young eşitsizliğini veren yukarıdaki teoremi ispat edelim.

İspat. 1. yol. f artan olduğundan anti türevi de kesin olarak konvekstir. Her $0<c\neq a<A$ için $\int_0^a f(t)dt>\int_0^c f(t)dt+f(c)(a-c)$ dır. Özel olarak, $c=f^{-1}(b)$ olsun. $\int_0^a f(t)dt>\int_0^{f^{-1}(b)} f(t)dt+ab-bf^{-1}(b)$ olur. f^{-1} fonksiyonuna yukarıdaki lemma uygulanırsa son eşitsizliğin sağ tarafı, $ab-\int_0^b f^{-1}(t)dt$ ifadesine eşittir.

2. yol. (Ortalama Değer Teoremini kullanarak ispatı yapalım)

f artan olduğundan eğer $a<f^{-1}(b)$ ise

$$f(a)<\frac{\int_0^{f^{-1}(b)} f(t)dt-\int_0^a f(t)dt}{f^{-1}(b)-a}<f\left(f^{-1}(b)\right)=b$$

yazılabilir. Eğer, $a>f^{-1}(b)$ ise eşitsizlik yön değiştirir.

$\int_0^{f^{-1}(b)} f(t)dt$ yerine $bf^{-1}(b)-\int_0^b f^{-1}(t)dt$ yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa her iki durumda da

$$ab<\int_0^a f(t)dt+\int_0^b f^{-1}(t)dt<af(a)+f^{-1}(b)(b-f(a)).$$

Şimdi de Ters Young Eşitsizliğini (Young Eşitsizliğinin Tersini) verelim.

3.1.2.2. Teorem: (Witkowski, 2006) Yukarıdaki teoremin şartları altında

$$\min\left\{1, \frac{b}{f(a)}\right\}\int_0^a f(t)dt + \min\left\{1, \frac{a}{f^{-1}(b)}\right\}\int_0^b f^{-1}(t)dt \le ab$$

dir. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $b = f(a)$ olmasıdır.

İspat. (Witkowski, 2006) $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ kesin olarak artan ve eğer $a < f^{-1}(b)$ ise

$$F(a) < \frac{a}{f^{-1}(b)} F\left(f^{-1}(b)\right) = \frac{a}{f^{-1}(b)}\left[bf^{-1}(b) - \int_0^b f^{-1}(t)dt\right] = ab - \frac{a}{f^{-1}(b)}\int_0^b f^{-1}(t)dt$$

bu halde,

$$\int_0^a f(t)dt + \frac{a}{f^{-1}(b)}\int_0^b f^{-1}(t)dt < ab\,.$$

Eğer, $a > f^{-1}(b)$ ise $G(x) = \int_0^x f^{-1}(t)dt$ olmak üzere benzer muhakemeyle

$$\frac{b}{f(a)}\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt < ab$$

elde edilir.

Ayrıca, Young eşitsizliğinin analitik bir ispatı için (Diaz ve Metcalf, 1970), daha genel teoremler için (Hardy ve ark., 1952), farklı varsayımlar altındaki ispatı için (Mitrinovic, 1973) ve konveks analizdeki kullanımları için (Niculescu ve ark., 2006; Robert ve Varberg, 1973) bakılabilir.

3.2. Jensen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu

Konveks fonksiyonlar için Jensen integral eşitsizliğinin basit bir versiyonu ifade ve ispat edilecektir (Polya ve ark., 1952). Jensen eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir versiyonu ve konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin tersi için (Dragomir, 2001) bakılabilir.

3.2.1. Teorem. (Morrow, 2013) φ, $[c,d]$ kapalı aralığı üzerinde diferensiyellenebilir konveks bir fonksiyon olsun. $p(x)\geq 0$ fonksiyonu $\int_a^b p(x)=1$ (olasılık yoğunluğu) olacak şekilde $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. $c\leq f(x)\leq d$ ve $\bar{f}=\int_a^b p(x)f(x)dx$, f nin ortalaması olmak üzere f, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu halde,

$$\varphi(\bar{f})\leq \int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx \tag{3.6}$$

$(\varphi(f\ nin\, ortalaması))\leq((\varphi\circ f)nin\, ortalaması)$

İspat. (Morrow, 2013) $y_0=\bar{f}, c\leq y_0\leq d$ olur.

$$y_0=\frac{1}{y_1-y_2}[(y_1-y_0)y_2+(y_0-y_2)y_1]=\left(\frac{y_1-y_0}{y_1-y_2}\right)y_2+\left(\frac{y_0-y_2}{y_1-y_2}\right)y_1.$$

Böylece, $y_0=p_2y_2+p_1y_1$ olsun. Bu halde, $p_2=\dfrac{y_1-y_0}{y_1-y_2}$, $p_1=\dfrac{y_0-y_2}{y_1-y_2}$, $p_1\geq 0$, $p_2\geq 0$ ve $p_1+p_2=1$. Bu halde, φ konveks olduğundan

$$\varphi(y_0)\leq\frac{1}{y_1-y_2}[(y_1-y_0)\varphi(y_2)+(y_0-y_2)\varphi(y_1)],$$

$$\varphi(y_0)(y_1-y_0+y_0-y_2)\leq(y_1-y_0)\varphi(y_2)+(y_0-y_2)\varphi(y_1)$$

$$(\varphi(y_0)-\varphi(y_2))(y_1-y_0)\leq(\varphi(y_1)-\varphi(y_0))(y_0-y_2)$$

veya

$$\frac{\varphi(y_0)-\varphi(y_2)}{y_0-y_2}\leq\frac{\varphi(y_1)-\varphi(y_0)}{y_1-y_0}$$

elde edilir. Benzer bir muhakemeyle, eğer $y_2<y_2'<y_0<y_1'<y_1$ ise

$$\frac{\varphi(y_0)-\varphi(y_2)}{y_0-y_2}\leq\frac{\varphi(y_0)-\varphi(y_2')}{y_0-y_2'}\leq\frac{\varphi(y_1')-\varphi(y_0)}{y_1'-y_0}\leq\frac{\varphi(y_1)-\varphi(y_0)}{y_1-y_0}$$

elde edilir. Böylece sağ taraftaki oran azalarak $\varphi'(y_0)$ ve sol taraftaki oran ise artarak $\varphi'(y_0)$ olur. Yani,

$$\frac{\varphi(y_0)-\varphi(y_2)}{y_0-y_2} \le \varphi'(y_0) \le \frac{\varphi(y_1)-\varphi(y_0)}{y_1-y_0}.$$

Nihayet, eğer $y_1 > y_0$ ise $\varphi(y_1) \ge \varphi'(y_0)(y_1-y_0)+\varphi(y_0)$ yazılır ve $y_2 < y_0$ ise $\varphi(y_2) \ge \varphi'(y_0)(y_2-y_0)+\varphi(y_0)$ elde edilir. Bu ise $z=\varphi(y)$,

$$z=\varphi'(y_0)(y-y_0)+\varphi(y_0)$$

teğet doğrusundan daima büyük olmasını gerektirir. Böylece,

$$\varphi(y) \ge \varphi'(y_0)(y-y_0)+\varphi(y_0)$$

$\varphi(y)$ konveks olduğundan kendisine teğet olan doğrudan daima büyük ya da eşittir gerçeği göz önüne alınırsa $y=f(x)$ ise

$$\varphi(f(x)) \ge \varphi'(y_0)(f(x)-y_0)+\varphi(y_0)$$

elde edilir. Bu son denklem $p(x) \ge 0$ ile çarpılarak integre edilirse

$$\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx \ge \varphi'(y_0)\int_a^b p(x)f(x)dx - \varphi'(y_0)y_0\int_a^b p(x)dx + \varphi(y_0)\int_a^b p(x)dx.$$

Burada, $p=1$ ve $y_0=\int_a^b p(x)f(x)dx$ değerleri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx \ge \varphi'(y_0)y_0 - \varphi'(y_0)y_0 + \varphi(y_0)$$

elde edilir. İstenilen (3.6) denklemi elde edilir.

3.3. Jensen Eşitsizliğinin Bir Versiyonu

f konveks bir fonksiyon ise aşağıda verilen klasik Jensen eşitsizliğinin bir varyasyonu ispat edilecektir.

$$f\left(x_1+x_n-\sum w_k x_k\right) \le f(x_1)+f(x_n)-\sum w_k f(x_k)$$

$0 < x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, $(1 \le k \le n)$ olmak üzere w_k, x_k ifadelerine karşılık gelen ve $\sum w_k = 1$ olan pozitif ağırlıklar ise aşağıdaki teorem bilinmektedir (Mitrinovic ve ark., 1993).

3.3.1. Teorem. $x_k \in I$ ve f, I aralığı üzerinde konveks ise

$$f\left(\sum w_k x_k\right) \leq \sum w_k f(x_k). \tag{3.7}$$

Burada esas amacımız aşağıdaki teoremi ispat etmektir.

3.3.2. Teorem. (Mercer, 2003) $x_k \in I$ ve f, I aralığı üzerinde konveks ise

$$f\left(x_1 + x_n - \sum w_k x_k\right) \leq f(x_1) + f(x_n) - \sum w_k f(x_k).$$

Teoremi ispat edebilmek için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç duyulacaktır.

3.3.1. Lemma. (Mercer, 2003) f konveks ise

$$f(x_1 + x_n - x_k) \leq f(x_1) + f(x_n) - f(x_k), \qquad (1 \leq k \leq n). \tag{3.8}$$

İspat. (Mercer, 2003) $y_k = x_1 + x_n - x_k$ olsun. Bu halde, $x_1 + x_n = x_k + y_k$ olur. Böylece, x_1, x_n çiftleri ve x_k, y_k aynı ortak noktaya sahip olur. Bu durum söz konusu olduğundan $1 \leq k \leq n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$x_k = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_n,$$
$$y_k = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_n,$$

ifadesini sağlayan λ değeri vardır. (3.7) iki kez kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f(y_k) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_n) = f(x_1) + f(x_n) - [\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_n)] \\ \leq f(x_1) + f(x_n) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_n) \\ = f(x_1) + f(x_n) - f(x_k) \end{aligned}$$

elde edilir. $y_k = x_1 + x_n - x_k$ olduğundan ispat biter.

3.3.2. Teoreminin ispatı. (Mercer, 2003) Burada,

$$\begin{aligned} f\left(x_1 + x_n - \sum w_k x_k\right) &= f\left(\sum w_k (x_1 + x_n - x_k)\right) \\ &\leq \sum w_k f(x_1 + x_n - x_k) \\ &\leq \sum w_k [f(x_1) + f(x_n) - f(x_k)] \\ &= f(x_1) + f(x_n) - \sum w_k f(x_k) \end{aligned}$$

olduğundan ispat biter.

3.3.1. Örnek. A, G sırasıyla x_k ların aritmetik ve geometrik ortalaması ve

$\widetilde{A} = x_1 + x_n - A,\ x_k \in I$ ve $\widetilde{G} = \dfrac{x_1 x_2}{G}$ olsun.

a) $f(x)=-\log x$ ise $f(x)$ konveks olur. 3.3.2. Teoreminden $\widetilde{A}\geq\widetilde{G}$ elde edilir (Mercer, 2002).

b) $0<x\leq\frac{1}{2}$ için $f(x)=\log\frac{1-x}{x}$ fonksiyonu konveks olur. Bu halde tüm

$k, x_k \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ için 3.3.2. Teoreminden $\frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{A}(1-x)}\geq\frac{\widetilde{G}(x)}{\widetilde{G}(1-x)}$ elde edildi (Mitrinovic ve ark., 1993). Bu örnek, Ky-Fan's eşitsizliğinin bir analoğudur.

3.4. Jensen Eşitsizliğinin Tersi Üzerine

$f: I\subseteq R\to R, I$ içinde diferansiyellenebilir konveks fonksiyon ve $\overset{\circ}{I}, I$ aralığının içi olmak üzere $x_i\in\overset{\circ}{I}, p_i>0, (i=1,...,n)$ için $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ olsun. Konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin tersi

$$0\leq\sum_{i=1}^{n}p_i f(x_i)-f\left(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}p_i x_i f(x_i)-\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\sum_{i=1}^{n}p_i f'(x_i) \tag{3.9}$$

ile verilir (Dragomir ve Ionescu, 1994) ve uygulamaları için (Dragomir ve Goh, 1996; Dragomir ve ark., 1997). Eğer $\overset{\circ}{I}$ üzerinde f kesin olarak konveks ise (3.9) ifadesinde eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $x_1=...=x_n$ dir. Şimdi (3.9) ifadesinin düzeltilmiş (geliştirilmiş) bir versiyonunu verelim.

3.4.1. Lemma. (Dragomir, 2001) $x_i\in\overset{\circ}{I}, p_i>0$ ve $\sum p_i=1$ olmak üzere $f: I\subseteq R\to R, \overset{\circ}{I}$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\sum_{i=1}^{n}p_i f(x_i)\leq\sum_{i=1}^{n}p_i x_i f'(x_i)+\inf_{x\in\overset{\circ}{I}}\left(f(x)-x\sum_{i=1}^{n}p_i f'(x_i)\right) \tag{3.10}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. (Dragomir, 2001) $f, \overset{\circ}{I}$ üzerinde diferansiyellenebilir konveks fonksiyon olduğundan tüm $x,y\in\overset{\circ}{I}$ için

$$f(x)-f(y)\geq f'(y)(x-y) \tag{3.11}$$

yazılabilir. (3.11) ifadesi $y = x_i, \ (i = 1,...,n)$ ve $p_i > 0$ çarpılıp $i = 1$ den n e toplamı alınırsa

$$f(x) - \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geq x \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i)$$

elde edilir. Bu ise tüm $x \in \overset{\circ}{I}$ için

$$f(x) - x \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \tag{3.12}$$

ifadesine denktir. $x \in \overset{\circ}{I}$ üzerinde $\inf$ alınırsa (3.10) elde edilir.

3.4.1. Teorem. (Dragomir, 2001) 3.4.1. Lemmasındaki varsayımlar geçerli olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \\ &\leq \inf_{x \in \overset{\circ}{I}} \left(f(x) - x \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \right) + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i). \end{aligned} \tag{3.13}$$

İspat. (Dragomir, 2001) (3.13) ifadesindeki ikinci eşitsizlik (3.10) ifadesindeki birinci eşitsizlikten elde edilir.

$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in \overset{\circ}{I}$ olmak üzere,

$$\inf_{x \in \overset{\circ}{I}} \left(f(x) - x \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \right) \leq f(\bar{x}) - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)$$

olduğu açıktır.

3.4.2. Lemma. (Dragomir, 2001) $f : I \subseteq R \to R, \overset{\circ}{I}$ üzerinde diferansiyellenebilir kesin olarak konveks bir fonksiyon ve $x_i \in \overset{\circ}{I}, p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i) + f\left((f')^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \right) \right) \\ - (f')^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \right) \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada, $(f')^{-1}$, f' nin tersidir. (3.14) ifadesindeki eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $x_1 = ... = x_n$ olmasıdır.

İspat. (Dragomir, 2001) $g : \overset{\circ}{I} \to R$ ve $g(x) = f(x) - x\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)$ olsun. Açıkça, g, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferansiyellenebilir olduğundan

$$g'(x) = f'(x) - \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \tag{3.15}$$

elde edilir. Çünkü, $\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \in f'\left(\overset{\circ}{I}\right)$, f' bire bir ve $\overset{\circ}{I}$ üzerinde kesin olarak artan olduğundan $x \in \overset{\circ}{I}$ ve $g'(x) = 0$ olması

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) \tag{3.16}$$

gerektirir. Buradan da (3.16) ifadesindeki denklem bir tek

$$x_0 := (f')^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\right) \in \overset{\circ}{I} \tag{3.17}$$

ile verilen $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ çözümü vardır. $x < x_0$ ve $x \in \overset{\circ}{I}$ ise $g'(x) < 0$ ve $x > x_0$ ise $g'(x) > 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\inf_{x \in \overset{\circ}{I}} g(x) = g(x_0) = f\left((f')^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\right)\right) - (f')^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\right)\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)$$

elde edilir. (3.9) kullanılarak (3.14) bulunur.

Şimdi de, (3.9) ifadesinin geliştirilmiş bir versiyonunu aşağıdaki teorem ile verelim.

3.4.2. Teorem. (Dragomir, 2001) f, x_i ve p_i, 3.4.2. Lemmasındaki gibi olsun. Bu halde,

$$0 \le \sum p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum p_i x_i f'(x_i) + f\left((f')^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\right)\right)$$

$$-(f')^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\right)\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $x_1 = \ldots = x_n$.

İspat. 3.4.1. Teoremindeki ve 3.4.2. Lemmasından elde edilir.

3.4.1. Not. 3.4.2. Lemmasından

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} p_i x_i f'(x_i) + f\left(\left(f'\right)^{-1}\left(\sum p_i f'(x_i)\right)\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\left(f'\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\right) \qquad (3.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $x_1 = \ldots = x_n$.

g diferansiyellenebilir ve kesin olarak konkav ise

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} p_i x_i g'(x_i) + g\left(-\left(g'\right)^{-1}\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i g'(x_i)\right)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} p_i g'(x_i)\left(g'\right)^{-1}\left(-\sum_{i=1}^{n} p_i g'(x_i)\right) \qquad (3.19)$$

elde edilir. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $x_1 = \ldots = x_n$. (3.19) in ispatı (3.18) denkleminde $f = -g$ alınarak elde edilir.

3.5. Jensen Eşitsizliği İçin En İyi Üst Sınır

Bu kısımda, f, I kapalı aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon olmak üzere ağırlıklı Jensen diskrit (ayrık) eşitsizliği için en iyi üst sınır elde edilecektir.

$a < b$ olmak üzere $I = [a,b]$ kapalı aralığında $\widetilde{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ reel sayı dizisini ele alalım. $\sum p_i = 1$ şartını sağlayan $\widetilde{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $\widetilde{x}$ ile ilişkilendirilmiş pozitif ağırlıklar dizisi olsun. I aralığı üzerinde f konveks ise çok bilinen diskrit Jensen eşitsizliği

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \qquad (3.20)$$

ile verildiği bilinmektedir (Mitrinovic ve ark., 1993). I aralığına ve f fonksiyonuna bağlı olmak şartıyla Jensen eşitsizliği için

$$\Delta\left(f,\tilde{p},\tilde{x}\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i f\left(x_i\right)-f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \tag{3.21}$$

global üst sınır aşağıda Dragomir verilmiştir.

3.5.1. Teorem. (Dragomir, 1999-2000) f, I aralığı üzerinde türevli bir konveks fonksiyon ise

$$\Delta\left(f,\tilde{p},\tilde{x}\right)\leq\frac{1}{4}(b-a)\left(f'(b)-f'(a)\right):=D_f\left(a,b\right). \tag{3.22}$$

3.5.2. Teorem. (Simic, 2009) $0<p<1$ olmak üzere f, I üzerinde konveks bir fonksiyon ise

$$\Delta\left(f,\tilde{p},\tilde{x}\right)\leq\max_{p}\left[pf(a)+(1-p)f(b)-f\left(pa+(1-p)b\right)\right]:=T_f\left(a,b\right). \tag{3.23}$$

Yukarıdaki teorem f üzerinde türevlenebilirlik şartı olmaksızın bir global üst sınırı ifade etmektedir.

3.5.2. Teoremi kullanarak,

$$\Delta\left(f,\tilde{p},\tilde{x}\right)\leq f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right):=S_f\left(a,b\right) \tag{3.24}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Tüm $p\in(0,1)$ için

$$pf(a)+(1-p)f(b)-f\left(pa+(1-p)b\right)\leq f(a)+f(b)-2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

doğru ise (3.24) doğrudur.

$$(1-p)f(a)+pf(b)+f\left(pa+(1-p)b\right)\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ifadesi Jensen eşitsizliğine denktir. Burada, $\Delta\left(f,\tilde{p},\tilde{x}\right)$ için en iyi üst sınır olan $C_{\tilde{p},f}\left(a,b\right)$ üst sınırı tesis edilecektir.

3.5.1. Ana sonuçlar

3.5.1.1. Teorem. (Cirtoaje, 2011) $\tilde{p}$ ve $\tilde{x}$ yukarıda ifade edildiği gibi olsun. $k=1,2,...,n-1$, $1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n$ ve $P=\left\{p_{i_1}+p_{i_2}+...+p_{i_k}\right\}$ olmak üzere f, $I=[a,b]$ kapalı aralığında konveks ise

$$\Delta(f,\tilde{p},\tilde{x}) \le \max_{p\in P}[pf(a)+(1-p)f(b)-f(pa+(1-p)b)] := C_{\tilde{p},f}(a,b). \qquad (3.25)$$

Burada eşitlik x_i lerin bazıları a ya ve diğerleri de b ye eşit alınarak oluşur.

3.5.1.2. Teorem. (Cirtoaje, 2011) $T_f(a,b)$ (f ye ve I ya bağlı) Jensen eşitsizliğinde $\Delta(f,\tilde{p},\tilde{x})$ farkı için en iyi global üst sınırdır. $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ için, P kümesi $k = 1, 2,..., n-1$ olmak üzere $\frac{k}{n}$ farklı elemanları içerir.

$$P_0 = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\right\} \qquad (3.26)$$

olacak şekilde tanımlansın. Aşağıdaki 3.5.1.1. Teoreminin bir sonucudur.

3.5.1.1. Sonuç. (Cirtoaje, 2011) $I = [a,b]$ kapalı aralığı üzerinde f bir konveks fonksiyon ve $x_1, x_2,..., x_n \in I$ ise

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} - f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$$

$$\le \max_{p\in P_0}[pf(a)+(1-p)f(b)-f(pa+(1-p)b)]. \qquad (3.27)$$

Şimdi de $x > 0$ için $f(x) = -\ln(x)$ ise 3.5.1.1. Teoremi uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.5.1.2. Sonuç. (Cirtoaje, 2011) $0 < a < b$ olmak üzere $I = [a,b]$, $\tilde{p}, \tilde{x}$ ve P, yukarıda ifade edildiği gibi olsun. Bu halde,

$$\frac{A(\tilde{p},\tilde{x})}{G(\tilde{p},\tilde{x})} \le \max_{p\in P} \frac{p+(1-p)u}{u^{1-p}}.$$

Burada, $A(\tilde{p},\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, $G(\tilde{p},\tilde{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}$ ve $u = \frac{b}{a}$.

Bu son sonuçtan,

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}} \le \max_{p\in P_0} \frac{p+(1-p)u}{u^{1-p}} := C_n(u) \qquad (3.28)$$

elde edilir. Ayrıca $b = 2a$ için (3.28) ifadesinden

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}} \le \max_{p\in P_0} g(p) := C_n(2) \qquad (3.29)$$

elde edilir. Burada,

$$g(p)=\frac{2-p}{2^{1-p}}. \tag{3.30}$$

Benzer olarak, $x>0$ için $f(x)=-\ln(x)$ fonksiyonuna 3.5.2. Teoremi uygulanırsa

$$\frac{A(\tilde{p},\tilde{x})}{G(\tilde{p},\tilde{x})}\le\frac{(u-1)u^{\frac{1}{u-1}}}{e\ln u} \tag{3.31}$$

elde edilir (Simic, 2009). (3.31) ifadesinde $b=2a$ alınırsa

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}\le\frac{2}{e\ln 2}\approx 1.06147 \tag{3.32}$$

elde edilir. Mantıksal olarak, $n\ge 2$ olmak üzere $C_n(2)\le\frac{2}{e\ln 2}$.

3.5.1.3. Teorem. (Cirtoaje, 2011) $\tilde{p},\tilde{x}$ yukarıda tanımlandığı gibi olsun. $I=[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde f konveks bir fonksiyon ise

$$\Delta(f,\tilde{p},\tilde{x})\le[1-\min\{p_1,p_2,...,p_n\}]\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$:=V_{\tilde{p},f}(a,b)\le S_f(a,b) \tag{3.33}$$

Özel olarak, $p_1=p_2=...=p_n=\frac{1}{n}$ ise 3.5.1.3. Teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.5.1.3. Sonuç. (Cirtoaje, 2011) $I=[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde f konveks bir fonksiyon ve $x_1,x_2,...,x_n\in I$ ise

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}-f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$$

$$\le\left(1-\frac{1}{n}\right)\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]. \tag{3.34}$$

(Cirtoaje ve ark., 2009) çalışmasında $f(x)=\frac{1}{x}$ ve $f(x)=-\ln(x)$ fonksiyonlarına ve (Cirtoaje, 2006) çalışmasında $f(x)=e^x$ fonksiyona bu son sonuca uygulanırsa aşağıdaki önerme elde edildi.

3.5.1.1. Önerme. (Cirtoaje, 2011) Eğer $0 < a < b$ ve $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ ise

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} - \frac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n} \leq \frac{(n-1)(b-a)^2}{ab(a+b)}, \tag{3.35}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}} \leq \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2} \right)^{2-\frac{2}{n}}, \tag{3.36}$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n - n\sqrt[n]{x_1 x_2 .... x_n} \leq (n-1)\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2. \tag{3.37}$$

Ayrıca aşağıdaki önerme doğrudur.

3.5.1.2. Önerme. (Cirtoaje, 2011) Eğer $0 < a < b$ ve $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ ise

$$x_1 + x_2 + ... + x_n - n\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{(n-1)(b-a)^2}{b + k_n a}, \tag{3.38}$$

burada, $k_n = \begin{cases} 7 - \dfrac{8}{n+1}, & n \text{ tekise} \\ 7 - \dfrac{8}{n}, & n \text{ çiftise} \end{cases}$ olabilecek en iyi sabittir.

3.5.1.1. Not. Tek n ler için $\frac{b}{a} \leq \left(3 - \frac{4}{n+1}\right)^2$ ve çift n ler için $\frac{b}{a} \leq \left(3 - \frac{4}{n}\right)^2$ ise (3.38) eşitsizliği (3.37) eşitsizliğinden daha keskindir.

3.5.1.1. Teoreminin ispatı. (Cirtoaje, 2011) Verilen f ve $\tilde{p}$ için $F(\tilde{x}) = \Delta(f, \tilde{p}, \tilde{x})$ olsun. Her $x_i \in (a,b)$ açık aralığı için (x ya a ya da b olabilir.) $F(\tilde{x})$ nin artan olduğunu göstermek yeterlidir. Kolaylık olsun diye $i = 1$ olsun. $x_2, ..., x_n$ değerleri için $s = \frac{p_2 x_2 + p_3 x_3 + ... + p_n x_n}{1 - p_1}$ ve

$$f_1(y) = p_1 f(y) + p_2 f(x_2) + ... + p_n f(x_n) - f(p_1 y + (1 - p_1)s).$$

Eğer $[a,s]$ aralığı üzerinde f_1 fonksiyonunun azalan ve $[s,b]$ aralığı üzerinde artan olduğunu gösterirsek ispat biter. $a \leq y_1 < y_2 \leq s$ ve $s \leq y_2 < y_1 \leq b$ için $f_1(y_1) \geq f_1(y_2)$ olduğunu göstermemiz gerekir. $f_1(y_1) \geq f_1(y_2)$ için

$$p_1 f(y_1) + f(p_1 y_2 + (1 - p_1)s) \geq p_1 f(y_2) + f(p_1 y_1 + (1 - p_1)s)$$

yazalır. Jensen eşitsizliği kullanılarak

$$(p_1-\alpha)f(y_1)+\alpha\, f(p_1y_2+(1-p_1)s)\geq p_1 f(y_2)$$

ve

$$\alpha\, f(y_1)+(1-\alpha)f(py_2+(1-p_1)s)\geq f(p_1y_1+(1-p_1)s)$$

elde edilir. Burada, $\alpha=\dfrac{p_1(y_1-y_2)}{y_1-p_1y_2-(1-p_1)s}$.

Burada, $a\leq y_1<y_2\leq s$ için $y_1-p_1y_2-(1-p_1)s<0$ ve $s\leq y_2<y_1\leq b$ için $y_1-p_1y_2-(1-p_1)s>0$. Bu halde, $\alpha>0$ dır. Buna ilaveten,

$$p_1-\alpha=\frac{p_1(1-p_1)(y_2-s)}{y_1-p_1y_2-(1-p_1)s}\geq 0,\ 1-\alpha=\frac{(1-p_1)(y_1-s)}{y_1-p_1y_2-(1-p_1)s}>0,$$

$$(p_1-\alpha)y_1+\alpha(p_1y_2+(1-p_1)s)=p_1y_2,$$

$$\alpha\, y_1+(1-\alpha)(py_2+(1-p_1)s)=p_1y_1+(1-p_1)s.$$

3.5.1.2. Teoreminin ispatı. (Cirtoaje, 2011) Sabitlenmiş (fixed) a ve b değerleri için

$$g(p):=pf(a)+(1-p)f(b)-f(pa+(1-p)b)$$

olsun. g, $[0,1]$ aralığı üzerinde konkav ve $g(0)=g(1)=0$ olduğundan böylece $p_0\in(0,1)$ için maksimum değeri $T_f(a,b)$ dir. İspatı tamamlamak için $\Delta(f,\tilde{p},\tilde{x})=T_f(a,b)$ olacak şekilde sonlu bir $\tilde{x}$ ve bununla beraber $\tilde{p}$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten $n=2$ için $\tilde{x}=\{a,b\}$ ve $\tilde{p}=\{p_0,1-p_0\}$ olduğunda bu şart gerçekleşir.

3.5.1.3. Teoreminin ispatı. (Cirtoaje, 2011) $p_0=\min\{p_1,p_2,...,p_n\}$ olsun. Triviyal (aşikar) olmayan $n\geq 2$ olduğunda, herhangi $p\in P$ için $p\geq p_0$, $p+p_0\leq 1$ ve 3.5.1.1. Teoremini kullanarak herhangi bir $p\in P$ için

$$(1-p_0)\left[f(a)+f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\geq pf(a)+(1-p)f(b)-f(pa+(1-p)b)$$

eşitsizliğinin doğruluğunu göstermek yeterlidir. Gerçekten bu eşitsizlik

$$(1-p-p_0)f(a)+(p-p_0)f(b)+f(pa+(1-p)b)\geq 2(1-p_0)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Jensen eşitsizliğine denktir.

3.5.1.2. Önermesinin ispatı. (Cirtoaje, 2011) $x > 0,\ p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $f(x) = -\ln(x)$ için 3.5.1.1. Teoremini kullanarak tüm $k = 1,2,...,n-1$ için

$$ka + (n-k)b - n\sqrt[n]{a^k b^{n-k}} \leq \frac{(n-1)(b-a)^2}{b + k_n a}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu göstermek yeterlidir. Homojenlikten dolayı $b = 1$ ve $0 < a < 1$ olsun. Böylece, $g(a) \geq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada,

$$g(a) = (n-1)(a-1)^2 - (k_n a + 1)\left(ka + n - k - na^{\frac{k}{n}}\right).$$

Buradan aşağıdakilerini görmek oldukça kolaydır.

$$g'(a) = 2(n-1)(a-1) - k_n\left(ka + n - k - na^{\frac{k}{n}}\right) - k(k_n a + 1)\left(1 - a^{\frac{k}{n}-1}\right)$$

$$g''(a) = 2(n-1) - 2kk_n\left(1 - a^{\frac{k}{n}-1}\right) - \frac{k(n-k)}{n}(k_n a + 1)a^{\frac{k}{n}-2},$$

$$g''(1) = 2n - 2 - \frac{k(n-k)(k_n+1)}{n}$$

ve

$$g'''(a) = \frac{k(n-k)}{n^2}a^{\frac{k}{n}-2}h(a)$$

yazılır. Burada, $h(a) = 2n - k - k_n(n+k)a.$

n çift için $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$ ve n tek için $k(n-k) \leq \frac{n^2-1}{4}$ olduğundan $g''(1) \geq 0.$ $h(0) = 2n - k > 0$ ve $h(1) = 2n - k - k_n(n+k) \leq 2n - k - 3(n+k) < 0$ olduğundan bir $a_1 \in (0,1)$ vardır öyle ki $a \in (0, a_1)$ aralığındaki herhangi bir a_1 için $g'''(a) > 0$ ve $a \in (a_1, 1]$ aralığı için $g'''(a) < 0$ dır. Bu nedenle, $(0, a_1]$ aralığı üzerinde ve $[a_1, 1]$ aralığı üzerinde sırasıyla $g''(a)$ kesin olarak artan ve kesin olarak azalandır. $\lim_{a\to 0} g''(a) = -\infty$ ve $g''(1) \geq 0$ olduğundan $a \in (0, a_2)$ aralığı için $g''(a) < 0$ ve $a \in (a_2, 1)$ için $g''(a) > 0$ olacak şekilde bir $a_2 \in (0,1)$ vardır. Sonuç olarak, $g'(a), (0, a_2]$ aralığı üzerinde kesin olarak azalan ve $[a_2, 1]$ aralığı üzerinde kesin olarak artandır. $\lim_{a\to 0} g'(a) = \infty$ ve $g'(1) = 0$ olduğundan $a \in (0, a_3)$ aralığı için

$g'(a) > 0$ ve $a \in (a_3, 1)$ aralığı için $g'(a) < 0$ olacak şekilde bir $a_3 \in (0,1)$ vardır. Bu halde, $[0, a_3]$ aralığı üzerinde $g(a)$ kesin olarak artan ve $[a_3, 1]$ aralığı üzerinde kesin olarak azalandır. $g(0) = k - 1 \geq 0$ ve $g(1) = 0$ için $g(a) \geq 0$ dır.

k_n orjinal değerinin olabilecek en iyi değer olduğunu görebilmek için eğer n çift ise $k = \frac{n}{2}$ ve n tek ise $k = \frac{n-1}{2}$ alarak $g''(1) = 0$ dır. Bu nedenle, k nin bu değeri ve k_n nin herhangi diğer değerleri orijinal değerden büyüktür. Böylece, $g''(1) < 0$. Bu halde, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $a \in (1-\varepsilon, 1]$ için $g''(a) < 0$. Sonuç olarak, $(1-\varepsilon, 1]$ aralığı üzerinde $g'(a)$ kesin olarak azalan ve $g'(1) = 0$ olduğundan $a \in (1-\varepsilon, 1)$ için $(1-\varepsilon, 1]$ aralığı üzerinde $g(a)$ kesin olarak artan ve $g(1) = 0$ olduğundan $a \in (1-\varepsilon, 1)$ için $g(a) < 0$. Bu sonuçtan hareketle istenen sonuç elde edilir.

3.6. Jensen Eşitsizliği İçin Global Üst Sınır

Bu kısımda, konveks bir f fonksiyonu üzerine sınırlamalar konmaksızın Jensen eşitsizliği için bir global üst sınır vermeye çalışacağız.

$a < b$ ve $I = [a,b]$ kapalı aralığı verilsin. $\tilde{x} = \{x_i\}$, I kapalı aralığında tanımlı reel sayıların ve $\tilde{p} = \{p_i\}, \sum p_i = 1$ olmak üzere $\tilde{x}$ ile ilişkili pozitif ağılıkların birer dizisi olsun. f, I aralığı üzerinde konveks bir fonksiyon ise çok bilinen Jensen eşitsizliği $0 \leq \sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right)$ yazılır (Mitrinovic, 1970). Buradan alt sınırın sıfır olduğu ve $\tilde{p}, \tilde{x}$ ya bağlı olmadığı açıktır fakat f konveks fonksiyonuna ve I aralığına bağlıdır.

Yalnız f ve I ya bağlı Jensen eşitsizliği için bir global üst sınırın Dragomir (1999-2000) tarafından verildiği bilgilerimizin dahilindedir .

3.6.1. Teorem. (Dragomir, 1999-2000) f, I aralığı üzerinde diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ise

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \le \frac{1}{4}(b-a)\left(f'(b) - f'(a)\right) := D_f(a,b).$$

Şimdi de f konveks fonksiyonu üzerinde diferansiyellenebilme şartı olmaksızın bir global üst sınır elde edilecektir. Bu halde, f, I aralığı üzerinde konveks olmak üzere

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \le f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) := S_f(a,b)$$

ifadesinin doğruluğu kolaylıkla görülür.

Üstelik, birçok durumda $S_f(a,b), D_f(a,b)$ den daha iyi bir üst sınırdır. Örneğin, $I \subset R^+$ olmak üzere $f = \begin{cases} -x^s, & 0 < s < 1 \\ x^s, & s > 1 \end{cases}$ olarak tanımlansın. Bu halde, her $s \in (0,1) \cup (1,2] \cup [3,\infty)$ için $S_f(a,b) \le D_f(a,b)$.

Jensen eşitsizliği için global üst sınırı $S_f(a,b)$ sınırına göre $c(f)$ karakteristiğini tanımlamak üzere geliştirilebilir. Yani, mutlak sabit f ye bağlı olmak şartıyla

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \le c(f) S_f(a,b).$$

Aşağıdaki bazı konveks fonksiyonlar için $c(f)$ karakteristiği irdelenecektir. Örneğin, $c(x^2) = \frac{1}{2}$, $c(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$, $c(x \log x) = (e \log 2)^{-1}$ ve $c(e^x) = 1$.

3.6.1. Ana sonuçlar

3.6.1.1. Teorem. (Simic, 2008) $\tilde{p}, \tilde{x}$ ve I yukarıda tanımlandığı gibi olsun. f, I aralığı üzerinde konveks ise

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \le f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) := S_f(a,b). \qquad (3.39)$$

3.6.1.1. Tanım. $I \subset D$ ve $D_f \subset R$ sürekli konveks f fonksiyonun tanım kümesi olsun. Bu halde, $\widetilde{p}, \widetilde{x} \in [a,b]$ ve $a,b \in D_f$ olmak üzere

$$c(f) = \sup \frac{\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right)}{S_f(a,b)}.$$

Bu taktirde,

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \le c(f) S_f(a,b). \tag{3.40}$$

(Mitrinovic, 1970), pre-Grüss eşitsizliğinin ayrık (diskrit) varyasyonu aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

3.6.1.1. Lemma. (Simic, 2008) $x_i \in [a,b], i = 1,2,..,n$ için eğer, $p_i > 0, \sum p_i = 1$ ise

$$\sum_1^n p_i x_i^{\,2} - \left(\sum_1^n p_i x_i\right)^2 \le \frac{1}{4}(b-a)^2.$$

Burada, $\frac{1}{4}$ olabilecek en iyi sabittir. Formül kullanılarak, $S_{x^2}(a,b) = \frac{1}{2}(b-a)^2$ den $c(x^2) = \frac{1}{2}$ bulunur.

3.6.1.2. Teorem. (Simic, 2008) f konveks bir fonksiyon ise $\frac{1}{2} \le c(f) \le 1$.

f konveks bir fonksiyon ise f nin karakteristiği aşağıdaki teoremle verilir.

3.6.1.3. Teorem. (Simic, 2008) $a < b,\ a,b \in D_f$ olmak üzere $p > 0, q < 1$ için $p + q = 1$ olmak üzere f konveks bir fonksiyon ise

$$c(f) = \sup_{p,a,b} \left[\frac{pf(a) + qf(b) - f(pa + qb)}{f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \right].$$

Şimdi de konveks fonksiyonlar sınıfından $c(f)$ karakteristiğini elde edelim.

3.6.1.4. Teorem. (Simic, 2008) (a) $r \in R, D_f = (r, \infty)$ ve f fonksiyonu da herhangi konveks bir fonksiyon olsun.

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = d,\ |d| < \infty$ veya

(ii) f hızlı büyüyen (eksponansiyel) bir fonksiyon ise $c(f) = 1$ (Bingham, 1989).

(b) Eğer $0 < s < 1$ olmak üzere $f(x) = -x^s$

$$c(f)=\frac{(1-s)s^{\frac{s}{1-s}}}{2^{1-s}-1}.$$

(c) $s>1, s\neq 4,6,8,...$ ve $f(x)=x^s$ ise

$$c(f)=\frac{(s-1)2^s s^{\frac{-s}{s-1}}}{2^s-2}.$$

3.6.1.2. Lemma. (Simic, 2008) $x,y\in D_f, 0\leq p,q\leq 1, p+q=1$ ve f konveks bir fonksiyon ise

$$\min(p,q)S_f(x,y)\leq pf(x)+qf(y)-f(px+qy)\leq \max(p,q)S_f(x,y). \qquad (3.41)$$

İspat. (Simic, 2008) $p=q=\frac{1}{2}$ ise (3.41) eşitsizliği elde edilir. Aynı şekilde, $p=0, q=1$ veya $p=1$ ve $q=0$ ise (3.41) eşitsizliği yine doğrudur. $0<p<q<1$ olsun. Bu halde, (3.41) denkleminin sağ tarafı

$$(q-p)f(x)+f(px+qy)\geq 2q\, f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

elde edilir. Yani,

$$\frac{q-p}{2q}f(x)+\frac{1}{2q}f(px+qy)\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Bu ifade doğrudur. Çünkü $\frac{q-p}{2q}+\frac{1}{2q}=1$ olduğundan

$$\frac{q-p}{2q}f(x)+\frac{1}{2q}f(px+qy)\geq f\left(\frac{q-p}{2q}x+\frac{1}{2q}(px+qy)\right)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

elde edilir. (3.41) eşitsizliğinin sol tarafı içinde aynı şeyler yapılır.

3.6.1.1. Teoreminin ispatı. (Simic, 2008) $x_i\in[a,b]$ olsun. Bazı $\lambda_i\in[0,1]$ için $x_i=\lambda_i a+(1-\lambda_i)b$ yazılır. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}\sum p_i f(x_i)-f\left(\sum p_i x_i\right)&=\sum p_i f(\lambda_i a+(1-\lambda_i)b)-f\left(\sum p_i(\lambda_i a+(1-\lambda_i)b)\right)\\&\leq \sum p_i(\lambda_i f(a)+(1-\lambda_i)f(b))-f\left(a\sum p_i\lambda_i+b\sum p_i(1-\lambda_i)\right)\\&=f(a)\sum p_i\lambda_i+f(b)\left(1-\sum p_i\lambda_i\right)-f\left(a\sum p_i\lambda_i+b\left(1-\sum p_i\lambda_i\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum p_i\lambda_i=p, 1-\sum p_i\lambda_i=q$ olsun. Bu halde, $0\leq p,q\leq 1, p+q=1$. Buradan,

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \leq pf(a) + qf(b) - f(pa + qb) \tag{3.42}$$

yazılır. 3.6.1.2. Lemmasından

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \leq \max(p,q) S_f(a,b) \leq S_f(a,b). \tag{3.43}$$

3.6.1.2. Teoreminin ispatı. (Simic, 2008) (3.43) denkleminden hareketle $c(f) \leq \sup[\max(p,q)] = 1$ yazılır. $p_1, p_2 > 0,\ p_1 + p_2 = 1$, 3.6.1.2. Lemmasından

$$c(f) = \sup_{\tilde{p},\tilde{x}} \left[\frac{\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right)}{S_f(a,b)} \right] \geq \sup \left[\frac{p_1 f(a) + p_2 f(b) - f(p_1 a + p_2 b)}{S_f(a,b)} \right]$$

$$\geq \sup[\min(p_1, p_2)] = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

3.6.1.3. Teoreminin ispatı. (Simic, 2008) (3.42) uygulanırsa

$$\frac{\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right)}{S_f(a,b)} \leq \frac{pf(a) + qf(b) - f(pa + qb)}{S_f(a,b)}$$

$$\leq \sup_{p,a,b} \left[\frac{pf(a) + qf(b) - f(pa + qb)}{S_f(a,b)} \right]$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$c(f) = \sup \left[\frac{\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right)}{S_f(a,b)} \right] = \sup_{p,a,b} \left[\frac{pf(a) + qf(b) - f(pa + qb)}{S_f(a,b)} \right].$$

3.6.1.4. Teoreminin ispatı. (Simic, 2008) (a) nın (i) şıkkı için,

$$\lim_{b \to \infty} \left[\frac{pf(a) + qf(b) - f(pa + qb)}{S_f(a,b)} \right] = \frac{pf(a) + (q-1)d}{f(a) - d} = p.$$

Buradan, $c(f) = \max(p) = 1$ elde edilir.

Örneğin, $s > 0$ için $c\left(x^{-s}\right) = 1$ dir.

(a) (ii) (Bingham, 1989) $0 < t < 1$ için exponansiyel büyümenin tanımından

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = 0 \tag{3.44}$$

yazılır. (Heiberg, 1971) den (3.44), t ye göre düzgün olarak geçerlidir. Bu nedenle, a sabit tutularak

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{pf(a)+qf(b)-f(pa+qb)}{S_f(a,b)}\right]=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{p\dfrac{f(a)}{f(b)}+q-\dfrac{f(pa+qb)}{f(b)}}{\dfrac{f(a)}{f(b)}+1-2\dfrac{f\left(a+b/2\right)}{f(b)}}\right]=q$$

elde edilir. Buradan, $c(f)=\max(q)=1$ bulunur. Kolaylıkla (b) ve (c) ispat edilir. Yukarıda verilen teoremleri izah edebilmek için $f(x)=x^3$ olsun. Bu halde

$D_f=[0,\infty)$. $D_f(a,b)=S_f(a,b)=\frac{3}{4}(b-a)^2(a+b)$ yazılır. Fakat

$c(x^3)=\frac{8\sqrt{3}}{27}\approx 0.5132$ dir ve buradan keyfi $\tilde{p},\tilde{x}\in[a,b]$, $0\le a<b<\infty$ için

$$0\le\sum p_i x_i^3-\left(\sum p_i x_i\right)^3\le\frac{2\sqrt{3}}{9}(b-a)^2(a+b)$$

yazılır.

3.6.1.1. Not. 3.6.1.2. Lemması, (Dragomir, 2006) çalışmasında $n=2$ alınarak

$$n\left(\min_{1\le i\le n}p_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)-f\left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right)\right)\le\sum_1^n p_i f(x_i)-f\left(\sum_1^n p_i x_i\right)$$

$$\le n\left(\max_{1\le i\le n}p_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)-f\left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right)\right):=D_f \tag{3.45}$$

elde edilir. (3.40) ve (3.45) denklemlerini karşılaştırmak ilginçtir. Örneğin, bazı $r,\ 0<2r<n$ için $x_1=...=x_r=a,\ x_{r+1}=...=x_{2r}=b,\ x_{2r+1}=...=x_n=\frac{a+b}{2}$ varsa $D_f=r\left(\max_{1\le i\le n}p_i\right)S_f(a,b)$ yazılır. Bu halde, eğer $r\left(\max_{1\le i\le n}p_i\right)>c(f)$ ise $c(f)S_f(a,b)<D_f$, $r\left(\max_{1\le i\le n}p_i\right)<c(f)$ ise tam tersi olur. Genel olarak bu düşünce aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

3.6.1.5. Teorem. (Simic, 2008) $a=\min_{1\le i\le n}x_i$, $b=\max_{1\le i\le n}x_i$ eğer $f,[a,b]$ kapalı aralığında konveks, $c(f)<1$ ve $\max_{1\le i\le n}x_i\ge c(f)$ ise $c(f)S_f(a,b)\le D_f$ yazılır. Yani, (3.40) deki üst sınır (3.45) dekinden daha iyidir.

İspat. (Simic, 2008) $\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)-f\left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right)\ge\frac{1}{n}S_f(a,b)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yukarıdaki örnekten $r=1$ için eşitlik oluşur. Bu ise Jensen eşitsizliğinin ortalamalarıyla yapılabilir. Gerçekten,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{x_i\in\tilde{x}} x_i\right)=f\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{x_i\in\tilde{x}/\{a,b\}} x_i+\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\right)\right)\le\frac{1}{n}\left(\sum_{x_i\in\tilde{x}/\{a,b\}} f(x_i)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{x_i\in\tilde{x}} f(x_i)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)-f(b)\right)$$

yazılır. Buradan,

$$D_f=n\left(\max_{1\le i\le n} p_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)-f\left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_i\right)\right)\ge\left(\max_{1\le i\le n} p_i\right)S_f(a,b)\ge c(f)S_f(a,b).$$

3.7. Jensen Eşitsizliği ve Yeni Entropy Sınırları

Bu kısımda diskrit (ayrık) Jensen eşitsizliği için yeni alt ve üst sınırlar elde edilecektir. Bulunan sonuçlar bilgi teorisine uygulanarak Shonnon entropy' si için yeni ve daha keskin sınırlar elde edilecektir. $\tilde{p}=\{p_i\}_1^n,\ \sum_1^n p_i=1$ olmak üzere pozitif ağırlıklı dizi ve $x_i\in[a,b]$ için $\tilde{x}=\{x_i\}_1^n$ dizisi verilsin.

3.7.1. Teorem: (Simic, 2009) f, I aralığı üzerinde konveks ise

$$0\le\max_{1\le\mu<\nu\le n}\left[p_\mu f(x_\mu)+p_\nu f(x_\nu)-(p_\mu+p_\nu)f\left(\frac{p_\mu x_\mu+p_\nu x_\nu}{p_\mu+p_\nu}\right)\right]$$

$$\le\sum_1^n p_i f(x_i)-f\left(\sum_1^n p_i x_i\right)\qquad(3.46)$$

yazılır ve bu üst sınır keskin bir üst sınırdır.

f, I aralığı üzerinde diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon ise

$$0\le\sum_1^n p_i f(x_i)-f\left(\sum_1^n p_i x_i\right)\le\frac{1}{4}(b-a)(f'(b)-f'(a))=D_f(a,b)\qquad(3.47)$$

vardır (Dragomir, 1999-2000). Bilgi teorisinde bu üst sınır oldukça önemli uygulamalara sahiptir. Netice itibariyle f nin üzerinde diferansiyellenebilirlik şartı olmaksızın Jensen eşitsizliğinin tersini verelim.

3.7.2. Teorem: (Simic, 2009) $\tilde{p},\tilde{x}\in[a,b]$ olmak üzere

$$\sum_{1}^{n} p_i f(x_i) - f\left(\sum_{1}^{n} p_i x_i\right) \leq f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = S_f(a,b). \qquad (3.48)$$

Birçok durumda $S_f(a,b)$ üst sınırı $D_f(a,b)$ sınırından daha ideal bir üst sınırdır.

Örneğin, $I \subset R^+$ olmak üzere $0 < s < 1$ için $f(x) = -x^s$ ve $s > 1$ için $f(x) = x^s$ olsun $s \in (0,1) \cup (1,2) \cup (3,\infty)$ için $S_f(a,b) \leq D_f(a,b)$ dir. Bu iddiaların bir sonucu aşağıdaki gibi ifade edilir.

3.7.3. Teorem. (Simic, 2009) $\mu = \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i, \nu = \max\limits_{1\leq i\leq n} x_i$ ve $[\mu,\nu] \subseteq I$ olmak üzere f, I aralığı üzerinde konveks ise

$$\frac{1}{n}\left(f(\mu) + f(\nu) - 2f\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f(x_i) - f\left(\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}\right)$$

$$\leq f(\mu) + f(\nu) - 2f\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right). \qquad (3.49)$$

Bilgi teorisinde yukarıda ifade edilen sonuçların uygulaması için $H(X)$ Shannon entropy'si için yeni sınırlar verilebilir.

3.7.1. Tanım. Eğer F nin olasılık dağılımı $P(X = i) = p_i, p_i > 0, i = 1,2,\ldots,r$, $\sum_{1}^{r} p_i = 1$ ile verilirse $H(X) = \sum_{1}^{r} p_i \log\frac{1}{p_i}$.

3.7.1. Önerme. $\mu = \min\limits_{1\leq i\leq r}(p_i), \nu = \max\limits_{1\leq i\leq r}(p_i)$ ise

$$(0 \leq) m(\mu,\nu) = \mu\log\left(\frac{2\mu}{\mu+\nu}\right) + \nu\log\left(\frac{2\nu}{\mu+\nu}\right) \leq \log r - H(X)$$

$$\leq \log\left(\frac{(\mu+\nu)^2}{4\mu\nu}\right) = M(\mu,\nu). \qquad (3.50)$$

3.7.1. Not. (Budimir ve ark., 2001) ifadelerinde Dragomirin elde ettiği sonuç $i = 1,\ldots,r$ olmak üzere $x_i = \frac{1}{p_i}$, $f(x) = -\log x$ uygulanırsa

$$0 \le \log r - H(X) \le \frac{(\nu - \mu)^2}{4\mu\nu} = D(\mu, \nu). \tag{3.51}$$

$x > 0$ için $\log(1 + x) < x$ bilinmektedir. $x = \dfrac{(\nu - \mu)^2}{4\nu\mu}$ alınırsa $M(\mu,\nu) < D(\mu,\nu)$ dır.

Yani, (3.50) ifadesi (3.51) ifadesinden daha iyi bir üst sınırdır.

3.7.2. Not. (Dragomir, 1997) çalışması komplike bir argümanla aşağıdaki ifade elde edilir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\nu/\mu \le \phi_1(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \sqrt{\varepsilon(2 + \varepsilon)}$ için $0 \le \log r - H(X) \le \varepsilon$ elde edilir. (3.50) ifadesinin sağ tarafında elementer işlemler ile aşağıdaki önerme yazılır.

3.7.2. Önerme. (Simic, 2009) Bazı $\varepsilon > 0$ için $\nu/\mu \le \phi_2(\varepsilon) = 1 + 2(e^{\varepsilon} - 1) + 2\sqrt{e^{2\varepsilon} - e^{\varepsilon}}$ ise $0 \le \log r - H(X) \le \varepsilon$ elde edilir.

$\phi_2(\varepsilon) >> \phi_1(\varepsilon)$ olduğundan yukarıdaki önermede çalışılan aralık genişletilebilir.

3.7.3. Teoremi kullanılarak (3.50) ifadesinin sağ tarafı geliştirilebilir.

3.7.3. Önerme. 3.7.1 Önermesinde ifade edilen notasyonlardan (Simic, 2009)

$$m(\mu,\nu) \le \log r - H(X) \le \min\{M(\mu,\nu), rm(\mu,\nu)\}. \tag{3.52}$$

3.7.3. Not. $A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}, G(a,b) = \sqrt{ab}, J(a,b) = \left(a^a b^b\right)^{\frac{1}{a+b}}$ olmak üzere

$$m(\mu,\nu) = 2A(\mu,\nu)\log\frac{J(\mu,\nu)}{A(\mu,\nu)}, \quad M(\mu,\nu) = 2\log\frac{A(\mu,\nu)}{G(\mu,\nu)}$$

yazılır. Buradan,

$$m(\mu,\nu) = (\mu,\nu)\sum_1^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}\left(\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\right)^{2n}, \quad M(\mu,\nu) = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\nu-\mu}{\nu+\mu}\right)$$

seri açılımları yazılabilir (Sandor, 1997).

3.7.1. Teoreminin ispatı. (Simic, 2009) $1 \le r < s \le n$ olmak üzere keyfi $x_r, x_s \in \tilde{x}$ ya karşılık gelen ağırlıklar sırasıyla $p_r, p_s \in \tilde{p}$ olsun. Eğer $x_r, x_s \in I$ ise $\dfrac{p_r x_r + p_s x_s}{p_r + p_s} \in I$ olur. Jensen eşitsizliğinden

$$f\left(\sum_1^n p_i x_i\right) = f\left(\sum_{i \ne r,s} p_i x_i + (p_r + p_s)\left(\frac{p_r x_r + p_s x_s}{p_r + p_s}\right)\right)$$

$$\le \sum_{i\neq r,s} p_i f(x_i) + (p_r + p_s) f\left(\frac{p_r x_r + p_s x_s}{p_r + p_s}\right)$$

elde edilir ve buradan,

$$\sum_1^n p_i f(x_i) - f\left(\sum_1^n p_i x_i\right) \ge p_r f(x_r) + p_s f(x_s) - (p_r + p_s) f\left(\frac{p_r x_r + p_s x_s}{p_r + p_s}\right) \quad (3.53)$$

yazılır. $x_r, x_s \in \widetilde{x}$ keyfi olduğundan ispat biter.

3.7.4. Not. $n = 2$ olması halinde (3.53) denkleminde eşitlik vardır. Aynı durum $n > 2$ ve keyfi sabitlenmiş r, s değerleri içinde sağlanır. Bunun için $i \neq r, s$ için $x_i = \dfrac{p_r x_r + p_s x_s}{p_r + p_s}$ alınırsa istenen elde edilir. Bu sebeple (3.46) ifadesindeki alt sınır daha kuvvetlidir.

3.7.2. Teoreminin ispatı. (Simic, 2009) $x_i \in [a,b]$ olduğundan $\lambda_i \in [0,1]$ olmak üzere $\{\lambda_i\}$ dizisi vardır öyle ki $x_i = \lambda_i a + (1-\lambda_i)b$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) &= \sum p_i f(\lambda_i a + (1-\lambda_i)b) - f\left(\sum p_i (\lambda_i a + (1-\lambda_i)b)\right) \\
&\le \sum p_i (\lambda_i f(a) + (1-\lambda_i) f(b)) - f\left(a\sum p_i \lambda_i + b\sum p_i (1-\lambda_i)\right) \\
&= f(a)\left(\sum p_i \lambda_i\right) + f(b)\left(1 - \sum p_i \lambda_i\right) - f\left(a\left(\sum p_i \lambda_i\right) + b\left(1 - \sum p_i \lambda_i\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum p_i \lambda_i = p, 1 - \sum p_i \lambda_i = q$, $p \ge 0$, $q \le 1$ ve $p + q = 1$ ise buradan,

$$\sum p_i f(x_i) - f\left(\sum p_i x_i\right) \le pf(a) + qf(b) - f(pa + qb) \quad (3.54)$$

fakat

$$\begin{aligned}
pf(a) + qf(b) - f(pa+qb) &= f(a) + f(b) - (qf(a) + pf(b)) - f(pa+qb) \\
&\le f(a) + f(b) - (f(qa+pb) + f(pa+qb)) \\
&\le f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{1}{2}(qa+pb) + \frac{1}{2}(pa+qb)\right) \\
&= f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

buradan da (3.54) sonucu elde edilir.

3.7.3. Teoreminin ispatı. (Simic, 2009) Keyfi x_r, x_s ye karşılık gelen ağırlıklar p_r, p_s olsun. $i = 1,\ldots,n$ olmak üzere $p_i = 1/n$, $x_r = \mu = a$, $x_s = \nu = b$ olduğu düşünülürse ve (3.53) ifadesinin doğruluğu göz önüne alınırsa sonuç 3.7.1. ve 3.7.2. Teoreminden elde edilir.

3.7.1. Önermesinin ispatı. (Simic, 2009) $i=1,\dots,r$, $x_i = {}^{1}\!/_{p_i}$ ve $f(x) = -\log x$, ayrıca $p_r = \mu = a,\ p_s = \nu = b$ alınarak 3.7.1. ve 3.7.2. Teoremi uygulanırsa bazı hesaplamalardan sonra istenen iddia elde edilir.

3.7.3. Önermesinin ispatı. (Simic, 2009) $i=1,\dots,r$ olmak üzere $x_i = p_i$ alınırsa ve $f(x) = x\log x$ ile 3.7.3. Teoremi kullanılırsa

$$\frac{1}{r}\left(\mu\log\mu+\nu\log\nu-(\mu+\nu)\log\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\right)\le\frac{1}{r}\left(\sum_{1}^{r}p_i\log p_i\right)-\frac{1}{r}\log\frac{1}{r}$$

$$\le\mu\log\mu+\nu\log\nu-(\mu+\nu)\log\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)$$

elde edilir. Bu ifade ise $m(\mu,\nu)\le\log r-H(X)\le rm(\mu,\nu)$ ifadesine denktir. Bu sonuçlar (3.50) ifadesiyle birleştirilirse 3.7.3. Önermesi ispat edilmiş olur.

3.8. Olasılıkta Jensen Eşitsizliği

3.8.1. Ayrık gelişigüzel değişkenlerin beklenen değerleri

X, D üzerinde ayrık ve gelişigüzel değişkenlerin bir kümesi olsun. Bunlara karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonu (kütle olasılığı) $p(x)$ olsun. Bu halde, beklenen değer $E(X)=\sum_{x\in D}xp(x)$ veya $\sum_{x_i\in D}x_i\,p(x_i)$.

3.8.1.1. Teorem. (Ross, 1994; Devore, 1995) $a,b\in R$ olmak üzere $E(aX+b)=aE(X)+b.$

İspat. (Ross, 1994; Devore, 1995)

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+b=aE(X)+b.$$

Özel olarak $b=0$ ise $E(aX)=aE(X), a=1$ ise $E(X+b)=E(X)+b$ dir.

Gelişigüzel sürekli bir değişkenin beklenen değeri (ortalama değeri) $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$

3.8.1.1. Örnek. $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2), & x\in[0,1]\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases}$ ise

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\frac{3}{2}(1-x^2)dx=\frac{3}{8}.$$

3.8.1.2. Teorem. (Ross, 1994; Devore, 1995) g konveks bir fonksiyon ise $E(g(X))\geq g(E(X))$ tir. Eğer g konkav ise eşitsizlik yön değiştirecektir.

İspat. (Ross, 1994; Devore, 1995) $E(X)$ noktasında $g(x)$ fonksiyonuna teğet olan $L(x)=a+bx$ olsun. g konveks olduğundan g nin grafiği $L(x)$ doğrusunun üzerindedir. Bu halde,

$$E(g(X))\geq E(L(X))=E(a+bX)=a+bE(X)=L(E(X))=g(E(X)).$$

2. yol. $\mu=E(X)$ olsun. Bir $f(x)$ fonksiyonunun $\mu(x)$ civarındaki Taylor açılımı

$$f(x)=f(\mu)+f'(\mu)(x-\mu)+\frac{f''(\xi)(x-\xi)^2}{2},\quad \xi\in(x,\mu).$$

$f''(\xi)\geq 0$ olduğundan $f(x)\geq f(\mu)+f'(\mu)(x-\mu),$ $f(X)\geq f(\mu)+f'(\mu)(X-\mu)$ her iki yanın beklenen değeri alınırsa $E[f(X)]\geq f(\mu)+f'(\mu)E[X-\mu]=f(\mu).$

3.8.1.2. Örnek. $g_1(x)=x^2$ ve $g_2(x)=-\log x$ olsun. Bu halde, $E(X^2)\geq\mu^2$ olur ve $-E[\log X]\geq-\log\mu.$ (Ross, 1994; Devore, 1995) den yukarıdaki ifadeler alındı.

3.8.1.3. Teorem. $I\subset R$ bir aralık olsun f, I üzerinde tanımlı konveks bir fonksiyon, $x_1,x_2,\ldots,x_n\in I$, $X\in\{x_i:1,2,\ldots,N\}$, $p(x_i)$ olasılıklarına sahip gelişi güzel (raslantısal) bir değişken olsun. $\sum_{i=1}^N p(x_i)=1$ ise

$$f(E(X))\leq E(f(X)) \text{ veya } f\left(\sum_{i=1}^N x_i p(x_i)\right)\leq\sum_{i=1}^N f(x_i)p(x_i).$$

İspat. İspat tümevarım ile yapılacaktır. $N=1$ ise durum aşikardır. $N=2$ için f fonksiyonunun konveks olduğu göz önüne alınırsa

$$f(x_1p(x_1)+x_2p(x_2))\leq f(x_1)p(x_1)+f(x_2)p(x_2)$$

elde edilir. $N=k-1$ için doğru olsun. Bunun yanında $i=1,2,...,k-1$ için $p'(x_i)=p(x_i)/(1-p(x_k))$ olsun.

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i)p(x_i)=(1-p(x_k))\sum_{i=1}^{k-1} f(x_i)p'(x_i)+f(x_k)p(x_k)$$

$$\geq (1-p(x_k))f\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i p'(x_i)\right)+f(x_k)p(x_k) \quad \text{(Kabulden)}$$

$$\geq f\left((1-p(x_k))\sum_{i=1}^{k-1} x_i p'(x_i)+x_k p(x_k)\right) \quad (N=2)$$

$$=f\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i p(x_i)+x_k p(x_k)\right)=f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i)\right).$$

3.8.1.3. Örnek. $\ln(x)$ konkav olduğundan Jensen eşitsizliğinden

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i)\right)\geq \sum_{i=1}^{N} \ln(x_i)p(x_i)$$

yazılır.

3.9. Zaman Skalası Üzerinde Jensen Eşitsizliği

Zaman skalası üzerinde Jensen eşitsizliğinin ispatı klasik Jensen eşitsizliğiyle benzerdir. $T=R$ ise zaman skalasındaki Jensen eşitsizliği klasik Jensen eşitsizliğiyle aynıdır. Eğer $T=Z$ ise Jensen eşitsizliği çok bilinen aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğine indirgenir.

Zaman skalası gerçel sayıların boş olmayan kapalı bir alt aralığı olarak tanımlansın. Bu kümelerin seçimi tamamen keyfidir. Sürekli sistemler $(T=R)$, h adımlı ayrık sistemler $t_k \in R, \mathrm{t}_\mathrm{k} < t_{k+1}$ ve her $k \in Z$ için $T=\{t_k : k \in Z\}$ olmak üzere zaman skalasına örnekler verilebilir.

3.9.1. Tanım (İleri ve Geri Operatörleri)**.** $\sigma, \rho : T \to T$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın

$$\sigma(t) \triangleq \inf\{s \in T : s > t\}, \qquad \rho(t) \triangleq \sup\{s \in T : s < t\}.$$

3.9.2. Tanım. Bir $t \in T$ noktası için

(i) $\sigma(t)=t$ ise sağda yoğun (right-dense) dır denir.

(ii) $\sigma(t)>t$ ise sağda seyrek (right-scattered) dır denir.

(iii) $\rho(t)=t$ ise solda yoğun (left-dense) dır denir.

(iv) $\rho(t) < t$ ise solda seyrek (left-scattered) dır denir.

3.9.3. Tanım (rd-süreklilik)**.** T üzerinde tanımlanmış bir f fonksiyonu tüm sağda yoğun noktalarda sürekli ve tüm solda yoğun noktalarda soldan limiti varsa f ye rd-süreklidir denir.

3.9.1. Teorem. (Agarwal ve ark., 1998) $a, b \in T$ ve $c, d \in R$ olsun. $g : [a,b] \to (c,d)$ rd-sürekli ve $F : (c,d) \to R$ konveks olsun. Bu halde, $F\left(\dfrac{\int_a^b g(t)\Delta t}{b-a}\right) \le \dfrac{\int_a^b F(g(t))\Delta t}{b-a}$.

İspat. (Agarwal ve ark., 1998) $x_0 \in (c,d)$ olsun. Bu halde,

$$F(x) - F(x_0) \ge \beta(x - x_0) \tag{3.55}$$

olacak şekilde $\beta \in R$ vardır. g rd-sürekli olduğundan $x_0 = \dfrac{\int_a^b g(\tau)\Delta\tau}{b-a}$.

$F \circ g$ ifadesi iyi tanımlı olur. $F \circ g$ de rd-sürekli olduğundan (3.55) ifadesinde $x = g(t)$ alınır ve a dan b ye integral alınırsa

$$\int_a^b F(g(t))\Delta t - (b-a)F\left(\frac{\int_a^b g(\tau)\Delta\tau}{b-a}\right) = \int_a^b F(g(t))\Delta t - (b-a)F(x_0)$$

$$= \int_a^b [F(g(t)) - F(x_0)]\Delta t \ge \beta\int_a^b [g(t) - x_0]\Delta t = \beta\left[\int_a^b g(t)\Delta t - x_0(b-a)\right] = 0.$$

Bu ise ispat edilmek istenendir.

3.9.1. Örnek. $T = R$ olsun. $F = -\log x$ fonksiyonu $(0,\infty)$ açık aralığı üzerinde konveks ve sürekli $a = 0, b = 1$ alınarak zaman skalası üzerindeki Jensen eşitsizliği kullanılırsa $\log\int_0^1 g(t)dt \ge \int_0^1 \log g(t)dt$ ve buradan da eğer $g : [0,1] \to (0,1)$ sürekli ise

$\int_0^1 g(t)dt \ge \exp\left[\int_0^1 \log g(t)dt\right]$ elde edilir.

3.9.2. Örnek. $T = Z$ ve $N \in \mathrm{N}$ (pozitif tamsayı olsun). $a = 1, b = N+1$ ve $g:\{1,2,...,N+1\} \to (0,\infty)$ olarak alınır ve zaman skalası için Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\log\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} g(t)\right\} = \log\left\{\frac{1}{N}\int_{1}^{N+1} g(t)\Delta t\right\} \geq \frac{1}{N}\int_{1}^{N+1}\log g(t)\Delta t$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\log g(t) = \log\left\{\prod_{t=1}^{N} g(t)\right\}^{1/N}$$

ve $\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} g(t) \geq \left\{\prod_{t=1}^{N} g(t)\right\}^{1/N}$ elde edilir. Bu ise aritmetik-geometrik ortalamadır.

3.9.3. Örnek. $T = 2^{N_0}, N$ pozitif doğalsayıdır. $a = 1, b = 2^N$ ve $g:\{2^k : 0 \leq k \leq N\} \to (0,\infty)$ olsun. Buradan,

$$\log\left\{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k g(2^k)}{2^N - 1}\right\} = \log\left\{\frac{\int_{1}^{2^N} g(t)\Delta t}{2^N - 1}\right\} \geq \frac{\int_{1}^{2^N}\log g(t)\Delta t}{2^N - 1} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k \log g(2^k)}{2^N - 1}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N-1}\log\left(g(2^k)\right)^{2^k}}{2^N - 1} = \frac{\log\left\{\prod_{k=0}^{N-1}\left(g(2^k)\right)^{2^k}\right\}}{2^N - 1} = \log\left\{\prod_{k=0}^{N-1}\left(g(2^k)\right)^{2^k}\right\}^{1/(2^N - 1)}$$

ve buradan da

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k g(2^k)}{2^N - 1} \geq \left\{\prod_{k=0}^{N-1}\left(g(2^k)\right)^{2^k}\right\}^{1/(2^N - 1)}.$$

3.10. Jensen Eşitsizliğinin Yeni Bir Versiyonu ve Sonuçları

Bu kısımda özetle iki değişkenli fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği yazılacaktır. Ve aynı zamanda düzlemde sınırlı bir alan üzerindeki konveks bir fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir alt sınırı elde edilecektir (Zabandan ve Kılıçman, 2012).

$\mu(X)=1$ olacak şekilde μ, X üzerinde pozitif bir ölçüm olsun. Eğer $f \in L^1(\mu)$ reel değerli bir fonksiyon, tüm $x \in X$ için $a < f(x) < b$ ve $\varphi,(a,b)$ açık aralığında konveks bir fonksiyon ise

$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f)d\mu \tag{3.56}$$

yazılır. (3.56) eşitsizliği Jensen eşitsizliği olarak yazılır (Rudin, 1974). $\Delta=[a,b]\times[c,d]$, tüm $(x,y),(z,w)\in\Delta$ ve $\lambda\in[0,1]$ için eğer

$$F(\lambda x+(1-\lambda)z, \lambda y+(1-\lambda)w) \leq \lambda F(x,y)+(1-\lambda)F(z,w)$$

şartı varsa $F:\Delta\to R, \Delta$ üzerinde konvekstir denir.

Tüm $x\in[a,b]$ ve $y\in[c,d]$ kapalı aralığı için $F_y(u)=F(u,y)$, $F_x:[c,d]\to R$ ve $F_x(v)=F(x,v)$ konveks ise $F:\Delta\to R, \Delta$ üzerinde co-ordinated konvekstir denir.

Her $F:\Delta\to R$ konveks fonksiyon aynı zamanda co-ordinated konveks fonksiyondur. Fakat tersi genellikle doğru değildir (Dragomir, 2000). F, R^2 üzerinde konveks, $D_g = D_h = R$ olacak şekilde g,h reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu halde $f(t)=F(g(t),h(t)), R$ üzerinde konveks olmayabilir.

3.10.1. Teorem. (Zabandan ve Kılıçman, 2012) $\int_a^b p(x)dx > 0$ olacak şekilde $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde p negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $g, h, [a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm $x\in[a,b]$ kapalı aralığı için $m_1 \leq g(x) \leq M_1$, $m_2 \leq h(x) \leq M_2$ ve F,
$\Delta=[m_1,M_1]\times[m_2,M_2]$ üzerinde konveks ise

$$F\left(\frac{\int_a^b g(t)p(t)dt}{\int_a^b p(t)dt}, \frac{\int_a^b h(t)p(t)dt}{\int_a^b p(t)dt}\right) \leq \frac{\int_a^b F(g(t),h(t))p(t)dt}{\int_a^b p(t)dt} \tag{3.57}$$

ve $p(t)=1$ ise

$$F\left(\frac{\int_a^b g(t)dt}{b-a},\frac{\int_a^b h(t)dt}{b-a}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b F(g(t),h(t))dt \tag{3.58}$$

yazılır. Eğer f,Δ üzerinde konkav ise eşitsizlik yön değiştirir.

İspat. (Zabandan ve Kılıçman, 2012) $\alpha(x)=\dfrac{\int_a^x g(t)p(t)dt}{\int_a^x p(t)dt}$ ve $\beta(x)=\dfrac{\int_a^x h(t)p(t)dt}{\int_a^x p(t)dt}$.

L'Hospital kuralından $\lim_{x\to a}\alpha(x)=g(a)$ ve $\lim_{x\to a}\beta(x)=h(a)$ olur. Böylece $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde α,β süreklidir.

$$H(x)=F(\alpha(x),\beta(x))-\frac{\int_a^x F(g(t),h(t))p(t)dt}{\int_a^x p(t)dt}.$$

$H(b)\leq 0$ olduğunu gösterelim. Kolaylıkla

$$H'(x)=\frac{\partial F(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\alpha}\alpha'(x)+\frac{\partial F(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\beta}\beta'(x)-\frac{F(g(x),h(x))p(x)}{\int_a^x p(t)dt}$$

$$+\,p(x)\frac{\int_a^x F(g(t),h(t))p(t)dt}{\left(\int_a^x p(t)dt\right)^2}$$

yazılır. F nin konveksliğinden

$$F(g(x),h(x))-F(\alpha(x),\beta(x))\geq\frac{\partial F(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\alpha}(g(x)-\alpha(x))$$

$$+\frac{\partial(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\beta}(h(x)-\beta(x))$$

elde edilir. Buradan,

$$H'(x)\leq\frac{\partial(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\alpha}\alpha'(x)+\frac{\partial(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\beta}\beta'(x)$$

$$-\frac{p(x)}{\int_a^x p(t)dt}\left[F(\alpha(x),\beta(x))+\frac{\partial(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\alpha}(g(x)-\alpha(x))\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\beta}(h(x)-\beta(x))\right]+p(x)\frac{\int_a^x F(g(t),h(t))p(t)dt}{\left(\int_a^x p(t)dt\right)^2}$$

ve dolayısıyla

$$H'(x)\le\frac{\partial(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\alpha}\left[\alpha'(x)-\frac{p(x)}{\int_a^x p(t)dt}(g(x)-\alpha(x))\right]$$

$$+\frac{\partial(\alpha(x),\beta(x))}{\partial\beta}\left[\beta'-\frac{p(x)}{\int_a^x p(t)dt}(h(x)-\beta(x))\right]$$

$$-\frac{p(x)F(\alpha(x),\beta(x))}{\int_a^x p(t)dt}+p(x)\frac{\int_a^x F(g(t),h(t))g(t)dt}{\left(\int_a^x p(t)dt\right)^2}$$

elde edilir. Basit bir hesaplamayla

$$\alpha'(x)-\frac{p(x)}{\int_a^x p(t)dt}(g(x)-\alpha(x))=\beta'(x)-\frac{p(x)}{\int_a^x p(t)dt}(h(x)-\beta(x))=0.$$

Bu nedenle,

$$H'(x)\le-\frac{p(x)}{\int_a^x p(t)dt}\left[F(\alpha(x),\beta(x))-\frac{\int_a^x F(g(t),h(t))dt}{\int_a^x p(t)dt}\right]=-\frac{p(x)}{\int_a^x p(t)dt}H(x)$$

yazılır. Buradan,

$$\left(\int_a^x p(t)dt\right)H'(x)+p(x)H(x)\le 0 \text{ ise } \left[\left(\int_a^x p(t)dt\right)H(x)\right]'\le 0$$

ve $\left(\int_a^x p(t)dt\right)H(b)\le 0$ ise $H(b)\le 0$ elde edilir.

(3.58) ün ispatı için $p=1$ alınır. (3.57) ve (3.58) eşitsizlikleri oldukça kuvvetlidirler. Çünkü $F(x,y)=1$ dir.

3.10.1. Sonuç. (Zabandan ve Kılıçman, 2012) g,h reel değerli sürekli fonksiyonlar olsun. Bu halde,

(i) $p,q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\int_a^b |g(t)||h(t)|dt \le \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |h(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$ Hölder eşitsizliği

(ii) $p\ge 1$ için

$$\left(\int_a^b |g(t)+h(t)|^{\frac{1}{p}}dt\right)^p \ge \left(\int_a^b |g(t)|^{\frac{1}{p}}dt+\int_a^b |h(t)|^{\frac{1}{p}}\right)^p$$ Ters Minkowski eşitsizliği

(iii) $p\le 1$ için

$$\left(\int_a^b |g(t)+h(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |h(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$ Minkowski eşitsizliği

(iv) $$\ln\left(e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt}+e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)dt}\right)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\left(e^{g(t)}+e^{h(t)}\right)dt$$

İspat. (Zabandan ve Kılıçman, 2012)

(i) $F(x,y)=|x|^{\frac{1}{p}}|y|^{\frac{1}{q}},\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ fonksiyonu konkavdır. (3.58) eşitsizliğinden

$$\frac{\left(\int_a^b |g(t)|dt\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}\times\frac{\left(\int_a^b |h(t)|dt\right)^{\frac{1}{q}}}{(b-a)^{\frac{1}{q}}}\ge\frac{\left(\int_a^b |g(t)|^{\frac{1}{p}}|h(t)|^{\frac{1}{q}}dt\right)}{b-a}$$

yazılır. Buradan,

$$\left(\int_a^b |g(t)|^{\frac{1}{p}}|h(t)|^{\frac{1}{q}}dt\right)\le\left(\int_a^b |g(t)|dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |h(t)|dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $|g(t)| \to |g(t)|^p$ ve $|h(t)| \to |h(t)|^q$ yazılırsa

$$\int_a^b |g(t)||h(t)|dt \le \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |h(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

(ii) $p \ge 1$ için $F(x,y) = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonu konveks ve $p < 1$ için konkav olduğundan (3.58) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\left[\frac{\left(\int_a^b |g(t)|dt\right)^p}{(b-a)^p} + \frac{\left(\int_a^b |h(t)|dt\right)^p}{(b-a)^p}\right]^{\frac{1}{p}} \le \frac{\int_a^b \left(|g(t)|^p + |h(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} dt}{b-a}.$$

Böylece,

$$\int_a^b \left(|g(t)|^p + |h(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} dt \ge \left[\left(\int_a^b |g(t)|dt\right)^p + \left(\int_a^b |h(t)|dt\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. $|g(t)| \to |g(t)|^{\frac{1}{p}}, |h(t)| \to |h(t)|^{\frac{1}{p}}$ alınırsa

$$\int_a^b \left(|g(t)| + |h(t)|\right)^{\frac{1}{p}} dt \ge \left[\left(\int_a^b |g(t)|^{\frac{1}{p}} dt\right)^p + \left(\int_a^b |h(t)|^{\frac{1}{p}}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$\left(\int_a^b \left(|g(t)| + |h(t)|\right)^{\frac{1}{p}} dt\right)^p \ge \left(\int_a^b |g(t)|^{\frac{1}{p}} dt\right)^p + \left(\int_a^b |h(t)|^{\frac{1}{p}} dt\right)^p$$

yazılır.

(iii), (ii) ile benzerdir.

(iv) $F(x,y) = \ln\left(e^x + e^y\right)$, R üzerinde konvekstir. (3.58) eşitsizliği uygulanarak kolaylıkla elde edilir.

3.10.1. Not. Aynı varsayımlar altında 3.10.1. Teoremi R^n üzerinde n değişkenli f konveks fonksiyonları için de genişletilebilir.

$$F\left(\frac{\int_a^b g_1(t)dt}{b-a},\dots,\frac{\int_a^b g_n(t)dt}{b-a}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b F(g_1(t),\dots,g_n(t))dt.$$

Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri içinde benzer eşitsizlik elde edilir. Örneğin,

$$F(t_1,\dots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}|t_i|^{\frac{1}{p_i}}\quad\left(\sum_1^n\frac{1}{p_i}=1\right)$$

ifadesinin konkavlığından

$$\int_a^b\left(\prod_{i=1}^{n}|g_i|\right)dt\le\prod_{i=1}^{n}\left(\int_a^b|g_i|^{p_i}dt\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.10.1. Hermite-Hadamard eşitsizliği

$f:[a,b]\to R$ konveks bir fonksiyon olsun.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}\tag{3.59}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir (Mitrinovic ve ark., 1985; Zabandan, 2009).

İspat: (Dragomir ve Pearce, 2000) (a,b) açık aralığı üzerinde konveks bir fonksiyonun, (a,b) açık aralığında sürekli ve $x\in(a,b)$ için $f^{+}(x), f^{-}(x)$ sağ ve sol türevlerine sahip olduğu bilinmektedir. Bu sebepten dolayı f iki defa türevlenebilir olmak şartıyla $f(x)$ fonksiyonunun x_0 civarındaki Taylor açılımı

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2}$$

şeklindedir. Konveks bir f fonksiyonu için $f''(x)>0$ olduğundan

$$r(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

ise $f(x)\ge r(x)$ olur. Yani konveks bir fonksiyon tanjant eğrisinden büyük ve ya eşittir. Eğer $r(x)$ bu şekilde değilse $r(x)=f(x_0)+c(x-x_0)$ burada,

$c \in \left[f^{-}(x_0), f^{+}(x_0) \right]$, $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ ise $r(x) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + c\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$ olur. Dolayısıyla $f(x) \geq r(x)$ tir. Diğer taraftan konveksliğin tanımından

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

ifadesi $(a, f(a)), (b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. Dolayısıyla $f(x) \leq s(x)$ tir. Netice itibariyle $r(x) \leq f(x) \leq s(x)$ tir. Bu eşitsizlik a dan b ye integre edilirse

$$\int_a^b r(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \int_a^b s(x)dx$$

$$\int_a^b r(x)dx = \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + c\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),$$

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

ve böylece $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ yazılır.

R^2 de konveks fonksiyonlar için benzer bir eşitsizlik aşağıdaki teoremle ifade edildi (Dragomir, 2001).

3.10.1.1. Teorem. (Zabandan ve Kılıçman, 2012) Δ nın co-ordinatları üzerinde $f : \Delta = [a,b] \times [c,d] \to R$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu halde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \leq \frac{f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)}{4}.$$

Yine disk üzerinde Hermite-Hadamard eşitsizliği araştırdı (Dragomir, 2000). (Matejicka, 2010) çalışmasında ise belli (spesifik) konveks kompakt kümeler üzerinde Hermite-Hadamart eşitsizliklerinin çok değişkenli varyasyonları ispat etti.

3.10.1.2. Teorem. (Zabandan ve Kılıçman, 2012) Δ, h konveks fonksiyonu tarafından sınırlı bir alan olsun. Herhangi bir $x \in [a,b]$ için $g(x) \geq h(x)$ olacak şekilde g konkav bir fonksiyon olsun. Bu halde, F, Δ üzerinde iki değişkenli konveks bir fonksiyon ise

$$F\left(\frac{\int_a^b x(g(x)-h(x))dx}{\int_a^b (g(x)-h(x))dx}, \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(g^2(x)-h^2(x)\right)dx}{\int_a^b (g(x)-h(x))dx} \right) \leq \frac{\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} F(x,y)dxdy}{\int_a^b (g(x)-h(x))dx}.$$

İspat. (Zabandan ve Kılıçman, 2012) F, Δ üzerinde konveks olduğundan F, Δ üzerinde co-ordinated olarak konvekstir. Tüm $x \in [a,b]$ için $F:[h(x), g(x)] \to R, F_x(y) = F(x,y)$ fonksiyonu $[h(x), \mathrm{g}(x)]$ üzerinde konvekstir. (3.59) Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafından

$$(g(x)-h(x))F\left(x, \frac{g(x)+h(x)}{2} \right) \leq \int_{h(x)}^{g(x)} F(x,y)dy$$

yazılır. $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde integre edilirse

$$\int_a^b (g(x)-h(x))F\left(x, \frac{g(x)+h(x)}{2} \right)dx \leq \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} F(x,y)dydx$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{\int_a^b (g(x)-h(x))F\left(x, \frac{g(x)+h(x)}{2} \right)dx}{\int_a^b (g(x)-h(x))dx} \leq \frac{1}{\int_a^b (g(x)-h(x))dx} \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} F(x,y)dydx$$

bulunur. $p(x) = g(x) - h(x)$ yazılırsa (3.57) eşitsizliğinden

$$F\left(\frac{\int_a^b x(g(x)-h(x))dx}{\int_a^b (g(x)-h(x))dx}, \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(g^2(x)-h^2(x)\right)dx}{\int (g(x)-h(x))dx} \right) \leq \frac{\int_a^b (g(x)-h(x))F\left(x, \frac{g(x)+h(x)}{2} \right)dx}{\int_a^b (g(x)-h(x))dx}$$

yazlır. Bu ise ispat edilmek istenendir.

3.10.1. Tanım. (Jensen Anlamında Konveks Fonksiyon (J-konveks fonksiyon))

$f: I \subseteq R \to R,$ tüm $x_1, x_2 \in I$ için

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

oluyorsa f ye Jensen anlamında konvekstir ve ya f ye J-konvekstir denir (Hussain, 2005-2008).

3.10.2. Tanım. (Wright Konveks Fonksiyon (W-konveks fonksiyon))

Her $x\le y,\ z\ge 0$ ve $x, y+z\in I$ için,

$$f(x+z)-f(x)\le f(y+z)-f(y)$$

oluyorsa f fonksiyonuna Wright konvekstir denir (Hussain, 2005-2008).

3.10.3. Tanım. (Logaritmik Olarak Konveks Fonksiyon)

$f: I\subseteq R\to R$ bir fonksiyon $\alpha,\beta>0, \alpha+\beta=1$ ve her $x,y\in I$ için $f>0$ fonksiyonu

$$f(\alpha x+\beta y)\le f^{\alpha}(x)f^{\beta}(y)$$

oluyorsa f ye logaritmik olarak konveks fonksiyon denir. Yani diğer bir değişle eğer f pozitif ve $\log f$, I üzerinde konveks ise f ye logaritmik olarak konvekstir denir (Hussain, 2005-2008).

3.10.4. Tanım. (J-Log Konveks Fonksiyon)

Pozitif f fonksiyonu Jensen anlamında logaritmik olarak konveks bir fonksiyon ise f ye J-Log konveks fonksiyon denir. Yani her $s,t\in I$ için $f(s)f(t)\ge f^2\left(\frac{s+t}{2}\right)$ ise f ye Jensen anlamında logaritmik konveks fonksiyon denir. Bu son denklem yerine her $u,w\in R$ ve $s,t\in I$ için

$$u^2 f(s)+2uwf\left(\frac{s+t}{2}\right)+w^2 f(t)\ge 0$$

alınabilir (Hussain, 2005-2008).

Kapalı aralıkta konveks f fonksiyonu sınırlıdır. $M=\max\{f(a), f(b)\}$ olmak üzere herhangi bir $\lambda\in[0,1]$ için $w=\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$ ise

$$f(w)\le\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\le\lambda M+(1-\lambda)M=M$$

olup f üstten sınırlıdır. Aynı şekilde konveks f fonksiyonunun alttan sınırlı olduğunu gösterelim.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)$$

ya da

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) \ge 2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}-t\right).$$

$f \le M$ ise $-f \ge -M$ dir. Bu halde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) \ge 2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m.$$

3.10.1.1. Not. Konveks fonksiyon uç noktalarda sürekli olmayabilir. Fakat iç noktalarda bu geçerli değildir. İç noktalarda sürekliliğin ötesinde Lipschitz olma şartını sağlar.

f konveks ise Lipschitz şartını sağlar. Diğer bir değişle herhangi $x, y \in [a,b]$ için $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Lipschitz'tır denir. Sonuç olarak konveks bir f fonksiyonu $[a, \mathrm{b}]$ kapalı aralığı üzerinde mutlak değerce sürekli fakat (a,b) açık aralığı içinde süreklidir (Hussain, 2005-2008).

3.11. Hardy ve Polya-Knopp Eşitsizlikleri

$p > 1, k \ne 1$ olmak üzere F fonksiyonu $(0,\infty) = R_+$ üzerinde tanımlı

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt, & k > 1 \\ \int_x^\infty f(t)dt, & k < 1 \end{cases}$$

olsun. Bu halde, $x^{1-\frac{k}{p}} f \in L^P(R_+)$ olmak üzere tüm negatif olmayan f fonksiyonları için

$$\int_0^\infty x^{-k} F^p(x)dx \le \left(\frac{p}{|k-1|}\right)^p \int_0^\infty x^{p-k} f^p(x)dx \tag{3.60}$$

Hardy eşitsizliği vardır. $0 < p < 1$ olması halinde (3.60) eşitsizliği yön değiştirir. Diğer önemli bir eşitsizlik ise tüm pozitif $f \in L^1(R_+)$ için

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right)dx < e\int_0^\infty f(x)dx \tag{3.61}$$

Polya-Knopp eşitsizliği elde edilir. Polya-Knopp eşitsizliği için (3.60) ifadesinde f yerine $f^{1/p}$ yazılıp ve $p \to \infty$ gönderilirse (3.61) eşitsizliği elde edilir. Diğer bir değişle Polya-Knopp eşitsizliği Hardy eşitsizliğinin limit halidir (Hussain, 2005-2008). (Boas, 1970) (3.60) ve (3.61) eşitsizliğinden daha genel olan

$$\int_0^\infty \phi\left(\frac{1}{M}\int_0^\infty f(tx)dm(t)\right)\frac{dx}{x} \le \int_0^\infty \phi(f(x))\frac{dx}{x} \tag{3.62}$$

eşitsizliğini elde etti. Burada, $\phi : [0,\infty) \to R$ sürekli ve konveks fonksiyon, f negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon, $m : [0,\infty) \to R$ azalmayan ve sınırlı bir fonksiyon ve $M = m(\infty) - m(0) > 0$. (3.62) ifadesindeki iç integral m ye göre Lebesgues-Stieltjies integralidir.

(3.62) ün daha genel şekli için Hardy-Knopp eşitsizliği

$$\int_0^\infty \phi\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)\frac{dx}{x} \le \int_0^\infty \phi(f(x))\frac{dx}{x} \tag{3.63}$$

yazılır. Burada f negatif olmayan bir fonksiyon ve $\phi : R^+ \to R$ üzerinde bir konveks fonksiyondur. Burada, $\phi(x) = x^p$ ve $\phi(x) = e^x$ alınırsa (3.60) ve (3.61) eşitsizliklerinin yeni bir ispatı verilmiş olur.

3.12. Wright Konveks Fonksiyonlarda Jensen Eşitsizliği

3.12.1. Teorem. (Hussain, 2005-2008) $f : [a,b] \to R, \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ kapalı aralığı üzerinde Wright konveks bir fonksiyon ve $f(x) = -f(a+b-x)$ olsun. Eğer, $i = 1,2,\ldots,n$ için $x_i \in [a,b]$ ve $\frac{x_i + x_{n-i+1}}{2} \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ise $p_i = 1$ için $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$ olmak üzere

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \tag{3.64}$$

Ayrıca tüm x_i, p_i skalerleri farklı ve f kesin olarak konveks ise yukarıdaki eşitsizlik kesin olarak eşitsizliktir. x_i, p_i ler üzerinde bazı varsayımlar kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik Jensen-Stenffensen eşitsizliğini verir. Eğer $x_1 \le \ldots \le x_n$, $0 \le P_k \le P_n$, $P_n > 0$ ve $P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$ ise (3.64) eşitsizliğinden yazılır.

Yani, f konveks bir fonksiyon ve $x_i, (i = 1, \ldots, n)$ ve $(r = 1, \ldots, \mathrm{n})$ olmak üzere hiçbir zaman azalmayan ve $0 \le \sum_{i=r}^{n} p_i \le \sum_{i=1}^{n} p_i$ $(r = 1, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$ ise

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \le \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}.$$

3.12.2. Teorem. (Hussain, 2005-2008) $\left(a, \frac{a+b}{2}\right]$ aralığı üzerinde $f : (a,b) \to R$ konveks bir fonksiyon ve tüm $x \in (a,b)$ için $f(x) = -f(a+b-x)$ olsun. $i = 1,..,n$ için eğer $x_i \in (a,b)$, $p_i > 0$, $\frac{x_i + x_{n-i+1}}{2} \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right]$ ve

$\frac{p_i x_i + p_{n-i+1} x_{n-i+1}}{p_i + p_{n-i+1}} \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right]$ olup (3.64) eşitsizliği geçerlidir (Hussain, 2005-2008).

İspat. (Hussain, 2005-2008) Genelliği bozmadan $(a,b) = (-1,1)$ olsun. Dolayısıyla f fonksiyonu tektir. $n = 2$ olması halini ele alalım. Eğer $x_1, x_2 \in (-1, 0]$ ise konveks fonksiyonlar için çok bilinen Jensen eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle $x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 \in (0, 1)$ olsun. Eşitlik ise doğru üzerinde, $(x_1, f(x_1))$, $(0,0)$ noktasından geçen doğru denklemi

$y = \frac{f(x_1)}{x_1} x$ dir. f, $(-1, 0]$ üzerinde konveks ve $x_1 < \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} \le 0$ olduğundan

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}\right) \le \frac{f(x_1)}{x_1}\, \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2}$$

elde edilir.

$$\frac{f(x_1)}{x_1}\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}\leq\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)}{p_1+p_2}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bu aşağıdaki eşitsizliğe denktir.

$$\frac{f(x_1)}{x_1}\leq\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{f(-x_2)}{-x_2}. \tag{3.65}$$

f, $(-1,0]$ üzerinde konveks bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olduğu için Galvani teoreminden fonksiyon $x\rightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$, $(-1,0)$ açık aralığı üzerinde artandır. Bu nedenle, $\frac{x_1+x_2}{2}\leq 0$ ve $x_2>0$ dan $x_1\leq -x_2<0$ olur. Böylece (3.64) geçerli olur. Şimdi keyfi n doğal sayısı için,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[p_if(x_i)+p_{n-i+1}f(x_{n-i+1})\right]\\
&\geq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(p_i+p_{n-i+1})f\left(\frac{p_ix_i+p_{n-i+1}x_{n-i+1}}{p_i+p_{n-i+1}}\right)\\
&=P_n\frac{1}{2P_n}\sum_{i=1}^{n}(p_i+p_{n-i+1})f\left(\frac{p_ix_i+p_{n-i+1}x_{n-i+1}}{p_i+p_{n-i+1}}\right)\\
&\geq P_nf\left(\frac{1}{2P_n}\sum(p_i+p_{n-i+1})\frac{p_ix_i+p_{n-i+1}x_{n-i+1}}{p_i+p_{n-i+1}}\right)\\
&=P_nf\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)
\end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Son yıllarda, eşitsizlik teorisi sistematik olarak çok çalışılmakta ve hali hazırda hızlı bir gelişim göstermektedir. Konuya ilgi gittikçe artmaktadır. Bilinen eşitsizliklerin değişik varyasyonları, ispatları ve genelleştirilmiş varyasyonları birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu konuda, yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır.

Simetriğe sahip eşitsizlikler analiz ve kısmi diferansiyel denklemlerde oldukça önemli ve ilginçtirler. Özellikle, eşitsizlik teorisinde konveks fonksiyonlarla bağlantılı eşitsizlikler oldukça önemlidir. Çok bilinen bu eşitsizliklerden bir tanesi de Hermite-Hadamard eşitsizliğidir.

Bu çalışmada, çok bilinen ve literatürde sıkça kullanılan Jensen eşitsizliğinin diskrit (ayrık), integral ve zaman skalasındaki varyasyonları Jensen eşitsizliği ile ilgili literatüre ışık tutabilecek şekilde bir derleme ve verilen konular detaylı irdelenerek verilmiştir. Ayrıca, değişik disiplinlerdeki varyasyonları ele alınmıştır.

Mevcut çalışma, Jensen eşitsizliğini çalışmak isteyenler için iyi bir bilgi kaynağı teşkil edeceğini umuyoruz.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Temel eşitsizlik teorisine, çok bilinen ve literatürde sıkça kullanılan diskrit (ayrık) ve integral eşitsizliklerini tanıtmak ve uygulamalarına yer vermek esas amaçtır**.**

Bunun yanında detaylı olarak çalışılmamış eşitsizliklerle ilgili mevcut kaynak sıkıntısına yardımcı olacak şekilde Jensen eşitsizliği ile ilgili bir kataloğ oluşturmaktır.

KAYNAKLAR

AGARWAL, R., BOHNER, M., and PETERSON, A., 1998. Inequalities on Time Scales: A Survey, Math. Inequal. Appl. 4(4):675-692.

AGARWAL, R., BOHNER, M., O'REGAN, D., and PETERSON, A., 2002. Dynamic Equation on Time Scales: A survey, Journal of Computational and Applied Mathematics, 141:1-26.

BULLEN, P.S., MITRINOVIC, D.S., and VASIC, P.M., 1988. Means and their Inequalities. Kluwer Academic Publishers, 459p.

BINGHAM, N.H., GOLDIE, C.M., and TEUGELS, J.I., 1989. Regular Variation. Cambridge University Press, Cambridge, 516p.

BOHNER, M., and PETERSON, A. 2001. Dynamic Equation on Time Scales: An Introduction With Application, BirkHauser, 358p.

BUDIMIR, D., DRAGOMIR, S.S., and PECARİC, J., 2001. Further reverse results for Jensen's discrete inequality and applications in information theory. J. Inequal. Pure Appl. Math. 2 (1), Art. 5.

BOYD, S., and VANDENBERGHE, L. 2004. Convex Optimization. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 760p.

CIRTOAJE, V., 1990. Asupra unor inegalitati cu restrictii. Revista Matematica din Timisoara, Nr. 1:3-7.

CIRTOAJE, V., 2006. Algebraic Inequalities-Old and New Methods. GIL Publishing House, Romania.

CIRTOAJE, V., CAN, V.Q.B., and ANH, T.Q., 2009. Inequalities with Beautiful Solutions. GIL Publishing House.

CIRTOAJE, V., 2011. The best upper bound for Jensen's inequality. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7(2): Article 22: 1-7.

DIAZ, J.B., and METCALF, F.T., 1970. An analytic proof of Young's inequality. Amer. Math. Monthly, 77: 603-609.

DRAGOMIR, S.S., and IONESCU, N.M., 1994. Some converse of Jensen's Inequality and Applications. Anal. Num. Theor. Approx., 23: 71-78.

DEVORE, J.L., 1995. Probability and Statistics for Engineering and the Sciences. Wadsworth Publishing Company, Belmont, 743p.

DRAGOMIR, S.S., and GOH, C.J., 1996. A counterpart of Jensen's discrete inequality for differantiable convex mappings and applications in information theory. Math. Comput. Modeilling, 24(2): 1-11.

DRAGOMIR, S.S., and GOH, C.J., 1997. A counterpart of Hölders inequlity. Mitt. Math. Ges. Hamburg, 16: 99-106.

DRAGOMIR, S.S., and GOH, C.J., 1997. Some bounds on entropy meansures in Information Theory. Appl. Math. Lett. 10 (3): 23-28.

DRAGOMIR, S.S., 1999-2000. A converse result for Jensen's discrete inequality via Gruss inequality and applications in Information Theory. An. Univ. Oradea, Fasc. Math., 7: 178-189.

DRAGOMIR, S.S., and PEARCE, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA Monographs, Victoria University.

DRAGOMIR, S.S., 2000. On Hadamard's inequality for the convex mappings defined on a ball in the spaca and application. Math. Inequal. Appl., (3):177-187.
DRAGOMIR, S.S., 2000. On Hadamard's inequality on a disk. J. Inequal. Pure Appl. Math., Article 2.
DRAGOMIR, S.S., 2001. On a converse of Jensen's inequality. Ser. Mat. 12: 48-51.
DRAGOMIR, S.S., 2001. On the Hadamard's Inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. Taiwanese J. Math., 5:775-788.
DRAGOMIR, S.S., 2006. Bounds for the normalized Jensen functional, Bull. Austral. Math. Soc.74(3):471-476.
FOLLAND, G., 1999. Real Analysis Modern Techniques and Their Applications. John Wiley and Sons, Inc. New York, Second edition, 386p.
HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E. and POLYA, G., 1952. Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 324p.
HARDY, G.H., LITTLEWOOD, J.E. and POLYA, G., 1978. Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 324p.
HEIBERG, C., 1971. Functions with asymptotically infinite differences. Publ. Inst. Math. Belgrade,12 (26): 45-49.
HUSSAIN, S., 2005-2008. On Jensen's And Related Inequalities. Abdus Salam School of Mathematical Sciences GC University Lahore, Pakistan.
MERCER, A.McD., 2002. A monotonicity property of power means. J. Ineq. Pure and Appl. Math., 3(3) , Article 40.
MERCER, A.McD., 2003. A Variant of Jensen's Inequality. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4 (4): Article73:1-6.
MITRINOVIC, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer, New York, 400p.
MITRINOVIC, D.S., 1973. Elementarne nierownosci. PWN, Warszawa.
MITRINOVIC, D.S., and LACKORIC, J.B., 1985. Hermite and Convexity. A equations Math., 28: 229-232.
MITRINOVIC, D.S., PECARIC, J.E., and FINK, A.M. 1991. Inequalities Involving Functions and their Integrals and Derivatives. Springer Verlag, 587p.
MITRINONIC, D.S., PECARIC, J.E., and FINK, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
MATEJICKA, L., 2010. Elementary Proof of the left Multidimensional Hermite-Hadamard inequality on certain convex sets. J. Math.Ineq. 4(2): 259-270.
MORROW, J., 2013. Jensen's Integral Inequality.http://www.math.washington.edu/~morrow
NICULESCU, C.P., and PERSSON, L.E., 2006. Convex Functions and their Applications. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathematiques de la SMC, 23, Springer, New York, 255p.
ROBERTS, A.W., and VARBERG, D.E., 1973. Convex Functions, Academic Press, New York- London.
RUDIN, W., 1974. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York.
ROSS, S., 1994. A First Course in Probability, Macmillan College Publishing Company, New York, 473p.
SANDOR, J., and RASA, I., 1997. Inequalities for certain means in two arguments. Nieuw Arch. Wiscunde, 15, 51-55.

SIMIC, S., 2008. On a global upper bound for Jensen's inequality. J. Math. Anal. Appl. 343: 414-419.

SIMIC, S., 2009. On an upper bound for Jensen's inequality. J. Inequal. Pure Appl. Math., 10(2), Art.60. http://www.emis.de/journals/JIPAM/article1116.

SIMIC, S., 2009. Jensen's inequality and new entropy bounds. Applied Mathematics Letters, Applied Math. Letterrs 22: 1262-1265.

WITKOWSKI, A., 2006. On Young's Inequality. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 7 (5): Article 164: 1-3.

ZABANDAN, G., 2009. A new refinement of the Hermite- Hadamard inequality for convex functions. J. Ineq. Pure and Appl. Math., 10(2), Art.45.

ZABANDAN, G., and KILIÇMAN, A., 2012. A New Version of Jensen's Inequality and Related Result. Journal of Inequalities and Applications, 0:238. http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/0/1/238

ÖZGEÇMİŞ

1988'de Diyarbakır'da doğdu. 2002 yılında ilköğretimi Yunus Emre İlköğretim Okulu'nda, orta öğretimi 2005 yılında Atatürk Lisesi'nde tamamladı. 2006 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne yerleşti, 2010 yılında mezun oldu. Şuanda yine Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak yüksek lisans yapmaktadır.

ÖZET

Konveks fonksiyonlarda, diskrit (ayrık) Jensen eşitsizliği, genelleştirilmiş versiyonu, Jensen eşitsizliğinden yaygın olarak kullanılan klasik eşitsizlikler elde edilmekle beraber ve Jensen eşitsizliğinin integral analoğu ifade edilerek ispatlarıyla verildi. Jensen eşitsizliğinin tersi ifade edilerek geliştirilmiş bir versiyonu ifade edildi.

Konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği için en iyi üst sınır, global üst sınır ve Jensen eşitsizliği ve yeni entropi sınırları çalışıldı. Jensen eşitsizliğinin olasılık teorisindeki ve zaman skalası üzerindeki karşılıkları verildi.

İki değişkenli fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği ifade edilerek düzlemde sınırlı bir alan üzerindeki konveks bir fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir alt sınırı elde edildi.

Negatif olmayan ölçülebilir konveks fonksiyonlar için Hardy-Polya-Knopp eşitsizlikleri ve Wright konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizlğine vurgu yapıldı.

Kısaca, bu tezde çok bilinen Jensen eşitsizliği ile ilgili derleme sistematik bir disiplinle ele alındı.

SUMMARY

Jensen’s discrite inequality and its generalization for convex functions are stated and proved. The well known inequalities arithmetic-geometric-mean inequality, Young inequality, Cauchy-Buniakowsky-Schwarz inequality, Hölder inequality and Minkowski inequality are derived from one dimensional Jensen’s discrite inequality. Converse of Jensen’s inequality and its refinement are reviewed as in the literature.

A simple version of Jensen’s integral inequality is stated and proved as in the literature.

The best upper bound and global upper bound for the weighted Jensen’s discrite inequality are stated and proved. Also their applications in information theory are mentioned as studied in the literature as before.

The proof of Jensen’s inequality on time scales and probability is given and proved.

Jensen’s inequality for two variables convex functions and the lower bound of the Hermite-Hadamard inequality for convex function on the bounded area from the plane are reviewed as in the literature.

Jensen’s inequality for Wright convex function and Hardy-Polya-Knopp’s inequalities for non negative and measurable convex functions are reviwed as in the literature as before.

Simply, in this thesis convexity and the well known Jensen’s inequality are reviwed with a systematic way from literature.