T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KLASİK EŞİTSİZLİKLER

Vedat MİÇOOĞULLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2013

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Vedat MİÇOOĞULLARI'nın hazırladığı "Klasik Eşitsizlikler" konulu bu çalışma 22/02/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Üye: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Seyit TEMİR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

KLASİK EŞİTSİZLİKLER

Vedat MİÇOOĞULLARI

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2013, Sayfa:79

Bu tezde çok bilinen klasik eşitsizlikler ispatlarıyla birlikte sistematik bir disiplin içerisinde çalışıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Hardy eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği

ABSTRACT

MSc Thesis

CLASSICAL INEQUALITIES

Vedat MİÇOOĞULLARI

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematic

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2013, Page:79

In this thesis, the well known classical inequalities including their proofs are studied with a systematic discipline.

KEY WORDS: Hölder inequality, Minkowski inequality, Hardy inequality, Hermite-Hadamard inequality

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tezde Klasik eşitsizlikler ve bu eşitsizliklerin sonucu olarak elde edilen diğer bazı eşitsizlikler ve uygulamaları ele alınmıştır. Çok bilinen Klasik eşitsizlikler ispatlarıyla birlikte sistematik bir disiplin içerisinde ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerin birkaçı; Cauchy eşitsizliği, Abel eşitsizliği, Jordan eşitsizliği, Bernoulli eşitsizliği, Chebysev eşitsizliği, Young eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Grüss eşitsizliği, Steffensen eşitsizliği, Schur eşitsizliği, Shapiro eşitsizliği, Carleman eşitsizliği, Wirtinger eşitsizliği, Hardy eşitsizliği ve Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Burada eşitsizlik teorisinde önemli bir yere sahip olan, çok bilinen ve literatürde sıkça kullanılan diskrit (ayrık) ve integral eşitsizliklerini tanıtmak ve uygulamalarına yer vermek esas amaçtır. Bunun yanında mevcut çalışma detaylı olarak çalışılmayan eşitsizliklerle ilgili mevcut kaynak sıkıntısına yardımcı olmakla beraber eşitsizlikler teorisi ve bu yönde çalışmak isteyenler için iyi bir katalog olmuştur.

Birinci kısımda yaygın olarak kullanılan bazı tanımlara yer verilmiştir. İkinci kısımda yaygın olarak bilinen Schwarz eşitsizliği, Cauchy eşitsizliği gibi normlu uzayda eşitsizliklere yer verilmiştir. Üçüncü kısımda ise genel eşitsizlikler değişik varyasyonları ve ispatlarıyla birlikte sistematik bir şekilde verilmiştir. Dördüncü kısımda türevleri içeren eşitsizliklere, beşinci kısımda türevleri içeren integral eşitsizliklerine yer verilmiştir. Altıncı kısımda bazı integral eşitsizlikleri, analitik yaklaşım kullanılarak ifade edilmiştir.

Hazırladığım bu tezin her aşamasında yoğun çalışma programına rağmen cumartesi-pazar demeden bana zaman ayırarak yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye, her zaman desteğini yanımda hissettiğim başta sevgili annem olmak üzere değerli aileme, çalışmalarım esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde benden manevi desteğini esirgemeyen sevgili arkadaşım Hülya ÇOLAKOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca jürimde bulunmayı kabul eden ve Erzurum'dan Şanlıurfa'ya bu nedenle gelen değerli hocam Prof. Dr. Muhammet Emin ÖZDEMİR'e, lisans döneminden beri desteğini yanımda hissettiğim ve bana her konuda yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

Bu tezde Klasik eşitsizlikler (KE) ve bu eşitsizliklerin sonucu olarak elde edilen diğer bazı eşitsizliklere ve uygulamalarına yer verilmiştir. Matematik ve matematiğin alt disiplinlerinin en temel enstrümanlarından bir tanesi eşitsizliklerdir. Bu alt branşlardan bazıları; fonksiyonel analiz, integral ve diferansiyel denklemler teorisi, interpolasyon teorisi, harmonik analiz, olasılık teorisi ve benzerleri. Aynı zamanda, eşitsizlikler mekanik, fizik ve diğer bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir.

Matematikte çok yaygın bir kullanıma sahip bu eşitsizliklerin diskrit (ayrık), integral varyasyonları verilmiştir. Bu eşitsizliklerin birkaçı; Jensen eşitsizliği (JE), Aritmetik ortalama (AO), Geometrik ortalama (GO), Hölder eşitsizliği (HE), Minkowski eşitsizliğidir. Yine, diferansiyel denklemlerde oldukça önemli ve çok bilinen eşitsizliklerden bir tanesi de Hardy eşitsizliği (HE), Hermite-Hadamard eşitsizliğidir (HHE). Son yıllarda, eşitsizlik teorisi sistematik olarak çok çalışılmakta ve hali hazırda hızlı bir gelişim göstermektedir. Konuya ilgi gittikçe artmaktadır. Bilinen eşitsizliklerin değişik varyasyonları, ispatları ve genelleştirilmiş varyasyonları birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu konuda yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır.

Klasik eşitsizliklerin diskrit (ayrık) ve integral varyasyonları ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerin sonucu olarak elde edilen diğer birçok önemli eşitsizlikler ifade edilerek ispat ve uygulamalarıyla verilmiştir. Literatürde bu konuda yazılmış kitap ve yayımlanmış makalelerden istifade yoluna gidilmiştir.

Temel eşitsizlik teorisinde, çok bilinen ve literatürde sıkça kullanılan diskrit (ayrık) ve integral eşitsizliklerini tanıtmak ve uygulamalarına yer vermek esas amaçtır. Bunun yanında detaylı olarak çalışılmayan eşitsizliklerle ilgili mevcut kaynak sıkıntısına yardımcı olmakla beraber bu konuda katalog oluşturulmuştur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Eşitsizlikler konusu matematikte çok yaygın bir kullanıma sahiptir. Bu eşitsizliklerin diskrit (ayrık) ve integral varyasyonları ile birlikte bunların değişik ispatları verilmiştir. Bu eşitsizliklerin bazıları; Cauchy eşitsizliği, Abel eşitsizliği, Jordan eşitsizliği, Bernoulli eşitsizliği, Chebysev eşitsizliği, Young eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Grüss eşitsizliği, Steffensen eşitsizliği, Schur eşitsizliği, Shapiro eşitsizliği, Carleman eşitsizliği şeklinde sıralanabilir.

Ayrıca, diferansiyel denklemlerde oldukça önemli ve çok bilinen Hardy eşitsizliği ve Hermite-Hadamard eşitsizliğine de yer verilmiştir.

Eşitsizlik teorisi son yıllarda birçok araştırmacı tarafından çok çalışılmakta ve hızlı bir gelişim göstermektedir. Konuya ilgi gittikçe artmaktadır. Bilinen eşitsizliklerin değişik varyasyonları, ispatları ve genelleştirilmiş varyasyonları birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu konuda yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır.

Hornich (1942) ve Adamovic (1964) Hlawka eşitsizliğini çalıştı.

Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliğinin sonlu boyutlu vektörler için ispatı 1821 yılında Cauchy tarafından, integral versiyonu ve ispatı ise 1859 yılında Cauchy'nin öğrencisi Buniakowski tarafından ve bunların iç çarpım uzayındaki genelleştirilmiş versiyonu ise 1885 yılında Schwarz tarafından verilmiştir.

Abel eşitsizliği için Mitrinovic (1970).

Jordan Eşitsizliği ve hiperbolik versiyonları Huygens (1888-1940), Redheffer (1969), Williams (1969) Bullen (1998), Sandor ve Bencze (2005), Klen, Visuri ve Vuorinen (2010), Neuman (2012) ve Wang, Lv ve Chu (2012) tarafından çalışılmıştır.

Bernoulli eşitsizliği Hadziivanov ve Prodanov (1965), Greber (1968) ve Mitrinovic (1970) tarafından çalışılmıştır.

Chebysev eşitsizliği Dunkel (1924), Seitz (1936-1937) ve Chebysev eşitsizliğinin olasılık versiyonu Ross (1994) kitabında verilmiştir.

Young eşitsizliği Young (1912), Diaz ve Metcalf (1970), Riesz (1928) ve daha fazla bilgi için Mitrinovic (1993) kitabına bakılabilir.

Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliğinin genelleştirilmiş şekli olan Hölder eşitsizliği Hölder (1889) ve Jensen (1906) tarafından çalışılmıştır.

Minkowski eşitsizliği Beckenbach ve Bellman (1965), Daykin ve Eliezer (1968) tarafından çalışılmıştır ve daha fazla bilgi için Mitrinovic (1993) kitabına bakılabilir.

Aczel eşitsizliği Aczel (1956) tarfından çalışılmıştır.

Popoviciu eşitsizliği Popoviciu (1959) tarafından çalışılmıştır.

Bellman eşitsizliği Bellman (1956) tarafından çalışılmıştır.

Grüss eşitsizliği Grüss (1935) tarafından çalışılmıştır.

Steffensen eşitsizliği Steffensen (1918) tarafından ortaya konulmuştur. Steffensen eşitsizliği Hayashi (1919; 1920) tarafından genelleştirilmiştir.

Schur eşitsizliği Hardy, Littlewood ve Polya (1952) tarafından, Schur eşitsizliğinin genelleştirilmiş versiyonu ise Guha (1962) tarafından ifade edilmiştir.

Shapiro (1954) Shapiro eşitsizliğini ifade etmiştir. Bu eşitsizliğin $n \leq 12$ çift sayıları için analitik ispat Bushell ve Mcleod (2002) tarafından verilmiştir. $n \leq 23$ tek sayıları için eşitsizliğinin analitik ispatı henüz verilmemiştir. Ayrıca, Tanrıverdi (2012) Shapiro eşitsizliğinin tersini vermiştir.

Hilbert eşitsizliği Hardy, Littlewood ve Polya (1952), Steele (2004) tarafından, bu eşitsizliğin elementer ispatı ise Oleszkiewicz (1993) tarafından verilmiştir. Hardy eşitsizliği Hardy (1915; 1919), Hardy, Littlewood ve Polya (1952), Kufner ve Persson (2003) tarafından çalışılmıştır. Sürekli fonksiyonlar için Hardy eşitsizliği (Landau, 1921; Landau, 1924) ve (Hardy, 1925) çalışmaları göz önüne alınarak Hardy tarafından çalışılmıştır.

Hardy-Landau eşitsizliği Landau (1921), Makarov, Goluzina, Lodkin ve Podkorytov (1992) tarafından çalışılmıştır.

Carleman eşitsizliği Carleman ve Hardy (1922), Hardy (1925) tarafından çalışılmıştır.

Polya-Knopp eşitsizliği (Carleson Eşitsizliği) Persson, Johansson ve Wedesting (2003), Kufner ve Persson (2003), Duncan ve McGregor (2003), Kufner, Maligranda ve Persson (2006) tarafından çalışılmıştır.

Hermite-Hadamard Eşitsizliği Hadamard (1893) tarafından ortaya konulmuştur. Bu eşitsizliğin tarihsel gelişimi Mitrinovic (1985) tarafından verilmiştir. Bu eşitsizlik ile ilgili çeşitli genelleştirmeler ve geliştirmeler üzerindeki araştırmalar Dragomir ve Pearce (2000), Niculescu ve Persson (2004) kaynaklarına bakılabilir. Ayrıca, bu eşitsizlik ile ilgili El Farissi (2010) nin da çalışmaları bulunmaktadır.

Jensen eşitsizliği Hardy, Littlewood ve Polya (1952) tarafından çalışılmıştır.

Hardy-Littlewood eşitsizliği Hadamard (1914) tarafından çalışıldı. Bu eşitsizliğe daha fazla katkı için Gorny (1939), Kollmogroff (1939) ve Steckin (1967) nin çalışmalarına bakılabilir. Ayrıca, bu eşitsizlik Bessmertnyh ve Levin (1962) tarfından geliştirilmiştir.

Wirtinger eşitsizliği Schwarz (1885), Poincare (1894), Levi (1906;1913), Pleijel (1949) ve Beesack (1958) tarafından çalışılmıştır.

Opial eşitsizliği Opial (1960), Olech (1960), Mallows (1965) tarafından çalışılmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Klasik eşitsizliklerin diskrit (ayrık) ve integral varyasyonları ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerin sonucu olarak elde edilen diğer birçok önemli eşitsizlikler ifade edilerek ispat ve uygulamalarıyla verilmiştir. Literatürde bu konuda yazılmış kitap ve yayımlanmış makalelerden faydalanma yoluna gidilmiştir.

3.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda ileriki kısımlarda gerekli olan bazı tanımlara ve bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1. A ve B iki küme olsun. A nın her elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f kuralına A dan B ye bir fonksiyon denir ve $f : A \to B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.2. $f : A \subset R \to R$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde artan, $f(x_1) \le f(x_2)$ olursa azalmayan fonksiyondur. Benzer olarak, E kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu azalan, $f(x_1) \ge f(x_2)$ ise artmayan fonksiyondur.

Tanım 3.1.3 $A \subset R, f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir. Yani, f fonksiyonunun a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - a| < \delta$ bağıntısını sağlayan her $x \in A$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olmasıdır.

Tanım 3.1.4 (Mutlak değerce sürekli fonksiyon). $I \subset R, f : I \to R$ fonksiyonun I aralığında mutlak değerce sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \leq \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$ olmasıdır. Burada, $k = 1,\ldots,n$ için (a_k, b_k) açık aralıkların birbirleriyle arakesitleri boş küme olsun ve bu sınırlı alt aralıkları $[a_k, b_k] \subset I$ dir.

Tanım 3.1.5. $f : [a,b] \subset R \to R$ bir fonksiyon olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $x \neq y$ olmak üzere $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ oluyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.1.6. $K = F$ olmak üzere tüm $n \in N$ için $x_n \in K$ olan $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ şeklindeki bütün diziler kümesi K^∞ ise $l^p = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty : \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$

ile tanımlanır.

Tanım 3.1.7. Ω, R^n de bir bölge ve $p > 0$ olmak üzere Ω bölgesinde tanımlı, $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$ özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı denir ve $f \in L^p$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.1.8. X boş olmayan bir küme ve $K = F$ olsun.

$$+ : XxX \to X, (x,y) \to x + y, \quad x, y \in X,$$
$$\cdot : KxX \to X, (\alpha, x) \to \alpha x, \qquad \alpha \in K,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ ve her $a, b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın.

- $x + y \in X,$
- $x + y = y + x,$
- $x + (y + z) = (x + y) + z,$

- Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in X$ vardır (θ ya X in toplama işlemine göre etkisiz elemanı denir),
- Her $x \in X$ için $x + x^{-1} = \theta$ eşitliğini sağlayan bir tek $x^{-1} \in X$ elemanı vardır (bu şartı sağlayan x^{-1} elemanına x in toplama işlemine göre tersi denir ve $-x$ ile gösterilir),
- Her $x \in X$ için $xe = ex = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $e \in X$ vardır (e ye X kümesinin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı denir),
- $a(x+y) = ax + ay$,
- $(a+b)x = ax + bx$
- $(ab)x = a(bx)$.

Bu durumda, X kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay ve elemanlarına da vektör adı verilir. $K = R$ ise X uzayına bir reel lineer uzay ve $K = C$ alınırsa X uzayına bir kompleks lineer uzay adı verilir.

Tanım 3.1.9. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle\ ,\ \rangle : X\, x\, X \to K$

dönüşümü

- Her $x \in X$ için $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
- Her $x, y \in X$ için $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
- Her $x, y \in X$ ve her $a \in K$ için $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$,
- Her $x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

özelliklerine sahip ise $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümüne X kompleks uzayı üzerinde bir iç çarpım denir.

Tanım 3.1.10. X bir K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\ \| : X \to R^{+},\ x \to \|x\|$$

dönüşümü tüm $x, y \in X$ ve tüm $a \in K$ için

- $\|x\| = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olması,
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

gerçekleşiyorsa X üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\ \|)$ ikilisine bir normlu uzay denir.

Tanım 3.1.11. Beklenen değer bir rastgele değişkenin alabileceği bütün değerlerin, olasılıklarıyla çarpılması ve bu işlemin bütün değerler üzerinden toplanmasıyla elde edilen değerdir. Rastgele değişkenin sürekli veya ayrık (kesikli) olması durumuna göre beklenen değer

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & X : \text{sürekli} \\ \sum_i x_i p(x_i), & X : \text{diskrit (kesik)} \end{cases}$$

ile tanımlanır. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur, $p(x)$ ise olasılık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.12. X değişkeninin beklenen değeri $\mu = E(X)$ olmak üzere varyans $\operatorname{var}(X) = E\left((X - \mu)^2\right)$ ile tanımlanır. Matematiksel notasyon olarak bir rastgele X değişkeni için varyans $\operatorname{var}(X)$ veya σ_X^2 ya da daha basitçe σ^2 ile gösterilir.

Tanım 3.1.13. $a = (a_1, \ldots, a_n)$ pozitif sayıların bir dizisi olsun. Bu halde, $a_1, \ldots, a_n$ sayılarının geometrik ortalaması ve aritmetik ortalaması sırasıyla

$$G_n(a) = (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ ve } A_n(a) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

şeklinde tanımlanır.

$$A_n(a) \ge G_n(a)$$

eşitsizliği bilinen Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğidir.

3.2. Normlu Uzayda Eşitsizlikler

Tanım 3.2.1. $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ ve $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ olsun.

$$\langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n}$$

ifadesine x ve y nin iç çarpımı denir.

$$|x|=\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

ifadesine x in normu denir.

Teorem 3.2.2 (Cauchy Eşitsizliği). Tüm x ve y reel sayıları için $xy\le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$.

İspat. $(x-y)^2\ge 0$ ifadesinden elde edilir.

Teorem 3.2.3 (Schwarz Eşitsizliği). Bir iç çarpım uzayında $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$ eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $y=\alpha x$ ise paralellik olduğundan eşitlik vardır. $y\ne\alpha x$ olsun. Her α skaleri için,

$$0\le\|x-\alpha y\|^2=\langle x-\alpha y,x-\overline{\alpha}y\rangle$$

$$=\langle x,x\rangle-\overline{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha\left(\langle y,x\rangle-\overline{\alpha}\langle y,y\rangle\right)$$

Özel olarak, $\overline{\alpha}=\dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$, $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ ve $z\overline{z}=|z|^2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$0\le\langle x,x\rangle-\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle=\|x\|^2-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$ olup $|\langle x,y\rangle|^2\le\|x\|^2\|y\|^2$ veya $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 (Hlawka Eşitsizliği) E^n, n boyutlu öklit vektör uzayı, bu halde; $x, y, z \in E^n$ için

$$|x|+|y|+|z|-|y+z|-|z+x|-|x+y|+|x+y+z| \geq 0$$

eşitsizliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
&(|x|+|y|+|z|-|y+z|-|z+x|-|x+y|+|x+y+z|)(|x|+|y|+|z|+|x+y+z|) \\
&= (|y|+|z|-|y+z|)(|x|-|y+z|+|x+y+z|) \\
&+ (|z|+|x|-|z+x|)(|y|-|z+x|+|x+y+z|) \\
&+ (|x|+|y|-|x+y|)(|z|-|x+y|+|x+y+z|)
\end{aligned}$$

ile verilir (Hornich,1942; Mitrinovic, 1970).

Hlawka eşitsizliği kompleks değerli vektörler için doğru değildir.

Teorem 3.2.5 (Hlawka Eşitsizliğinin Genelleştirilmiş Versiyonu) $x_k \in E^m$ olsun. $n \geq 2$ için

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n}|x_k| + \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i + x_j|$$

yazılır. Özel olarak $n = 3$ ise Hlawka eşitsizliği elde edilir (Adamovic,1964). Bu eşitsizlik ve değişik varyasyonları için (Mitrinovic, 1970) e bakınız.

3.3. Genel Eşitsizlikler

3.3.1. Cauchy-Buniakowski-Schwarz Eşitsizliği

Teorem 3.3.1.1. $a = (a_1, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, ..., b_n)$ reel sayılar dizisi olmak üzere

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \qquad (3.3.1.1)$$

vardır. Eşitlik hali a ve b dizilerinin orantılı olmasıyla mümkündür (Mitrinovic, 1970).

Bu eşitsizlik literatürde Cauchy-Buniakowski-Schwarz Eşitsizliği olarak bilinir.

İspat 1. x e bağlı aşağıdaki quadratik polinomunu göz önüne alalım.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0 \qquad (3.3.1.2)$$

Yani,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)x + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq 0 \qquad (3.3.1.3)$$

(3.3.1.1) eşitsizliğini gerektiren (3.3.1.3) eşitsizliğinin bütün reel değerli x ler için negatif olmadığı sonucuna ulaşırız. Yani, $\Delta \leq 0$. Diğer bir değişle eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart a ve b dizilerinin orantılı olmasıdır. Bu da teoremi ispatlar (Mitrinovic, 1970).

İspat 2. x ve y keyfi reel sayıları için

$$xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

olduğundan keyfi $\lambda \neq 0$ reel sayısı, a ve b reel dizileri için

$$|a_k b_k| = \lambda |a_k| \frac{1}{\lambda}|b_k| \leq \frac{1}{2}\lambda^2 a_k^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2} b_k^2 .$$

Eşitsizlikler üzerinde $k = 1$ den $k = n$ e kadar toplam alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

elde edilir.

$$\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

olacak şekilde λ seçilirse

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.1.4}$$

elde edilir.

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$$

olduğundan (3.3.1.4) eşitsizliğinden (3.3.1.1) eşitsizliği elde edilir (Mitrinovic,1970).

Teorem 3.3.1.2. a ve b dizileri kompleks ise (3.3.1.1) eşitsizliği

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right) \tag{3.3.1.5}$$

ile ifade edilir (Mitrinovic, 1970).

Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart a ve $\bar{b}$ dizilerinin orantılı olmasıdır.

İspat. λ kompleks bir sayı olsun.

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \left| a_k - \lambda \bar{b}_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - \lambda \bar{b}_k \right) \left(\bar{a}_k - \bar{\lambda} b_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\lambda} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)$$

$b \ne 0$ için $\lambda = \dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right)}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-\lambda\overline{b}_k\right|^2=\sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^2-\frac{\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2}{\sum_{k=1}^{n}\left|b_k\right|^2}\geq 0 \tag{3.3.1.6}$$

elde edilir. Bu da (3.3.1.5) te verilen Cauchy Eşitsizliğinin kompleks formudur.

(3.3.1.5) eşitsizliğinde eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $(k=1,...,n)$ için $a_k-\lambda\overline{b}_k=0$ olmasıdır. Yani eşitliğin olması için gerek ve yeter şart a ve $\overline{b}$ dizilerinin orantılı olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.1.3. (Üçgen Eşitsizliği) Herhangi $x,y\in R^n$ ve $\lambda\geq 0$ için

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$$

Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $x=0$ veya $y=\lambda x$ olmasıdır.

İspat.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= \|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2\left|\langle x,y\rangle\right|+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 \quad \text{(Schwarz ifadesi)}\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

Buradan her iki tarafın karekökü alınarak istenen sonuca varılır.

3.3.2. Abel Eşitsizliği

Teorem 3.3.2.1. $a_1,...,a_n$ ve $b_1,...,b_n$ $(b_1\geq...\geq b_n\geq 0)$ reel sayıların iki dizisi ve $(k=1,...,n)$ için $s_k=a_1+...+a_k$ olsun. Eğer $m=\min_{1\leq k\leq n}s_k$ ve $M=\max_{1\leq k\leq n}s_k$ ise

$$mb_1\leq a_1b_1+...+a_nb_n\leq Mb_1. \tag{3.3.2.1}$$

Bu eşitsizlik literatürde Abel eşitsizliği olarak bilinir (Mitrinovic, 1970).

İspat. $a_1b_1 + ... + a_nb_n$ toplamı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + ... + (s_n - s_{n-1})b_n$$
$$= s_1(b_1 - b_2) + ... + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n.$$

Ayrıca,

$$\begin{gathered} m(b_1 - b_2) \le s_1(b_1 - b_2) \le M(b_1 - b_2) \\ \vdots \\ m(b_{n-1} - b_n) \le s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) \le M(b_{n-1} - b_n) \\ mb_n \le s_nb_n \le Mb_n \end{gathered}$$

olduğunu görmek kolaydır. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa (3.3.2.1) eşitsizliği elde edilir (Mitrinovic, 1970).

3.3.3 Jordan Eşitsizliği

Teorem 3.3.3.1. $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\sec^2\theta \ge 1$ eşitsizliği 0 dan θ ya integre edilirse $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\tan\theta \ge \theta$ olur ve buradan; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ için

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \frac{\cos\theta}{\theta^2}(\theta - \tan\theta) \le 0.$$

Bunun sonucu olarak

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \ge \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \qquad \left(0 < \theta \le \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.3.3.1}$$

yazılır.

(3.3.3.1) eşitsizliğinde eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\theta = \frac{\pi}{2}$ olmasıdır. Diğer taraftan $\theta \geq 0$ için $\sin\theta \leq \theta$ olduğu gerçeği ve (3.3.3.1) eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \qquad \left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.3.3.2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe Jordan eşitsizliği denir (Mitrinovic, 1970).

İspat 1. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ için $\sin\theta$ fonksiyonunun grafiğini çizmek kolaydır. $(0,0)$ ve $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ noktasını birleştiren doğru parçası $y = \frac{2}{\pi}\theta$. Dolayısıyla $\sin\theta$ fonksiyonunun konkavlığından $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ olduğu geometrik olarak açıktır.

İspat 2. $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$, $f(0) = 1$ olduğu bilinmektedir.

$$f'(\theta) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2},$$

$g(\theta) = \theta\cos\theta - \sin\theta$ olsun. $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -\theta\sin\theta \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ azalan bir fonksiyondur. Buradan,

$$f(0) \geq f(\theta) \geq \frac{2}{\pi}.$$

Bu ise ispat edilmek istenendir.

Hiperbolik fonksiyonlar için iki taraflı trigonometrik eşitsizlik $(x \neq 0)$

$$(\cosh x)^{\frac{1}{3}} < \frac{\sinh x}{x} < \frac{\cosh x + 2}{3}, \; 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ için } (\cos x)^{\frac{1}{3}} < \frac{\sin x}{x} < \frac{\cos x + 2}{3}$$

eşitsizlikleri bir çok araştırmacının ilgisini çekmiştir (Huygens, 1888-1940; Bullen, 1998; Sandor ve Bencze, 2005; Klen ve ark, 2010; Neuman, 2012; Wang ve ark, 2012).

Not 1. Jordan eşitsizliği $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kapalı aralığında $f(\theta) = \sin\theta$ fonksiyonunun konkav oluşunun bir sonucudur. Gerçekten $y = \sin\theta$ eğrisi, uç noktalar hariç, $y = \frac{2}{\pi}\theta$ doğrusunun üzerindedir.

Not 2. θ reel olmak şartıyla

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \geq \frac{\pi^2 - \theta^2}{\pi^2 + \theta^2} \tag{3.3.3.3}$$

Bu eşitsizlik R. Redheffer eşitsizliği olarak bilinir.

(3.3.3.1) ve (3.3.3.3) eşitsizlikleri birbirlerini gerektirmez (Redheffer,1969).

İspat (Redheffer eşitsizliğinin ispatı). İspat $x \geq 0$ için yapılacaktır. $x \geq 1$ i ele alalım. Çok bilinen $\frac{\sin \pi y}{\pi y} \leq 1$ eşitsizliği kullanılırsa;

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} - \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)}\left(\frac{x-1}{x}\right) \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{x-1}{x} = -\frac{(1-x)^2}{x(1+x^2)} \leq 0$$

elde edilir. Şimdi de $0 < x < 1$ halini ele alalım. $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - x^2/n^2\right)$ olduğundan $n \geq 2$ için $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - x^2/k^2\right)$ olmak üzere $(1+x^2)P_n \geq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Gerçekten, $0 < x < 1$ ve $P_{n+1} = \left(1 - x^2/(n+1)^2\right)P_n$ ifadesine tümevarım uygulanırsa $(1+x^2)P_n > 1 + x^2/n$ elde edilir. En son $x = \frac{\theta}{\pi}$ alınırsa (3.3.3.3) eşitsizliği elde edilir (Williams, 1969).

3.3.4 Bernoulli Eşitsizliği ve Genelleştirmeleri

Teorem 3.3.4.1. Eğer $x > -1$ ve n pozitif tamsayı ise $(1+x)^n \geq 1+nx.$ Bu eşitsizlik literatürde Bernoulli eşitsizliği olarak bilinir (Mitrinovic, 1970).

İspat. $n=1$ için Bernoulli eşitsizliğinin eşitlik hali elde edilir. Bernoulli eşitsizliği $n=k\geq 1$ için doğru olsun. Yani, $x>-1$ için $(1+x)^k \geq 1+kx$ sağlansın. Bu son eşitsizlik $(1+x)>0$ ile çarpılırsa

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2$$

elde edilir ve böylece, $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x.$ Bu tümevarım ispatını tamamlar.

Sıfırdan farklı $x>-1$ için Bernoulli eşitsizliğinin genelleştirilmiş hali: $a>1$ veya $a<0$ için $(1+x)^a > 1+ax$ ve $0<a<1$ için $(1+x)^a < 1+ax.$ Gerçekten, Taylor formülünden $0<\theta<1$ için

$$(1+x)^a - 1 - ax = \frac{a(a-1)x^2}{2}(1+\theta x)^{a-2}$$

yazılır. $1+\theta x>0$ olduğundan ve $x\neq 0$ için $\operatorname{sgn}\left((1+x)^a-1-ax\right)=\operatorname{sgn}(a(a-1)).$

Bu nedenle, Bernoulli eşitsizliğinin genelleştirilmiş ifadeleri doğrudur (Mitrinovic, 1970).

Not. Bernoulli eşitsizliği aynı zamanda, $-2\leq x\leq -1$ için de geçerlidir. Gerçekten, bu x değerleri için $(1+x)^n \geq -|1+x|^n \geq -|1+x| = 1+x \geq 1+nx$ elde edilir (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.4.2. $n=2,3,\ldots$ ve $-1<x<\dfrac{1}{n-1}$ ise $(1+x)^n \leq 1+\dfrac{nx}{1+(1-n)x}.$ Eşitlik için gerek ve yeter şart $x=0$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

İspat. Bernoulli eşitsizliği $\left(1-\frac{x}{x+1}\right)^n$ ifadesine uygulanırsa $n=1,2,...$ ve $x>-1$ olduğundan $-\frac{x}{1+x}>-1$ için $\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^n \geq 1-n\frac{x}{1+x}$ elde edilir. Buna rağmen, $1-\frac{x}{1+x}=\frac{1}{1+x}$ olduğundan bir önceki eşitsizlik $\frac{1}{(1+x)^n} \geq \frac{1+x-nx}{1+x}$ ifadesine denktir. Eğer $1+x-nx>0$ ve $n=2,3,...$ (yani, $x<\frac{1}{n-1}$) ise $(1+x)^n \leq \frac{1+x}{1+x-nx} \leq 1+\frac{nx}{1+x-nx}$. Böylece, iddia ispatlanmış olur (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.4.3. $x_i(i=1,...,n)$ reel sayılarının her biri -1 den büyük ve hepsi birden negatif veya hepsi birden pozitif ise

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)>1+x_1+x_2+\cdots+x_n \text{ (Mitrinovic, 1970).}$$

Teorem 3.3.4.4. $n=2k+1 \quad (k=0,1,...)$ için $f_n(x)=(1+x)^n-1-nx$

olsun. Bu halde,

$$-3 \leq x_n \leq -2-\frac{1}{n} \text{ ve } x_n < x_{n+1} \quad (n=3,5,7,...)$$

iken $f_n(x)=0$ olacak şekilde bir tek x_n köküne sahiptir ve $x \neq 0$ ve $x>x_n$ için $f_n(x)>0$ ve $x<x_n$ için $f_n(x)<0$. Eğer $n=2k \quad (k=1,2,...)$ ise tüm $x \neq 0$ reel sayıları için $f_n(x)>0$ olur (Hadziivanov ve Prodanov, 1965; Mitrinovic, 1970).

Bernoulli eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir versiyonu aşağıdaki gibidir:

Teorem 3.3.4.5. $x>-1$ olmak şartıyla $(1+x)^a$ serisinin k. kısmi toplamı $F(k,a,x)=1+ax+C(a,2)x^2+\cdots+C(a,k)x^k$ ile verilsin. Bu halde,

i. $F(k,a,x)$ ifadesinden 1 atılırsa $(1+x)^a > F(k,a,x)$.

ii. Hiçbir terim atılmazsa $(1+x)^a = F(k,a,x)$.

iii. $F(k,a,x)$ ifadesinden atılan terim negatif ise $(1+x)^a < F(k,a,x)$ olur (Gerber, 1968; Mitrinovic, 1970).

3.3.5. Chebysev Eşitsizliği ve Aynı Türden Eşitsizlikler

Teorem 3.3.5.1.

$$a_1 \le \cdots \le a_n \text{ ve } b_1 \le \cdots \le b_n \text{ veya } a_1 \ge \cdots \ge a_n \text{ ve } b_1 \ge \cdots \ge b_n \tag{3.3.5.1}$$

olmak üzere $a = (a_1,...,a_n)$ ve $b = (b_1,...,b_n)$ reel sayıların iki dizisi ise bu halde,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} a_v\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} b_v\right) \le \frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n} a_v b_v \tag{3.3.5.2}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik literatürde Chebysev eşitsizliği olarak bilinir (Mitrinovic, 1970).

İspat. $\sum a = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sum b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $\sum ab = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ notasyonları kullanılarak

$$\sum_{\mu}\sum_{v}\left(a_\mu b_\mu - a_\mu b_v\right) = \sum_{\mu}\left(n a_\mu b_\mu - a_\mu \sum b\right) = n\sum ab - \sum a \sum b$$

$$\sum_{\mu}\sum_{v}\left(a_v b_v - a_v b_\mu\right) = \sum_{v}\left(n a_v b_v - a_v \sum b\right) = n\sum ab - \sum a \sum b$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} n\sum ab - \sum a \sum b &= \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{v}\left(a_\mu b_\mu - a_\mu b_v + a_v b_v - a_v b_\mu\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{v}\left(a_\mu - a_v\right)\left(b_\mu - b_v\right). \end{aligned} \tag{3.3.5.3}$$

(3.3.5.1) şartı $\mu, v = 1,...,n$ için $(a_\mu - a_v)(b_\mu - b_v) \ge 0$ olduğunu ifade eder. Bu nedenle, (3.3.5.3) ifadesinden,

$$n\sum ab - \sum a \sum b \ge 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (3.3.5.2) eşitsizliğine denktir.

(3.3.5.2) ifadesindeki eşitlik halinin olabilmesi için gerek ve yeter şart $a_1 = \cdots = a_n$ veya $b_1 = \cdots = b_n$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.5.2. Eğer;

$$\begin{aligned} &0 \le a_1 \le \cdots \le a_n, \\ &0 \le b_1 \le \cdots \le b_n, \\ &\vdots \\ &0 \le l_1 \le \cdots \le l_n, \end{aligned} \tag{3.3.5.4}$$

ise

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{n} \cdots \frac{\sum_{k=1}^{n} l_k}{n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdots l_k}{n}. \tag{3.3.5.5}$$

Özel olarak, $k = 1,\ldots,n$ için $a_k \ge 0$ ve m pozitif bir tamsayı ise $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^m \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^m$.

Yukarıdaki problem tanım olarak Sasser ve Slater (1967) tarafından verilmiştir. Cauchy ve Chebysev eşitsizliklerinin daha genel bir hali için (Seitz, 1936; Seitz, 1937; Mitrinovic, 1970) e bakınız.

Teorem 3.3.5.3. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde her ikisi birden ya artan ya da azalan reel değerli integrallenebilir iki fonksiyon ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \, \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx. \tag{3.3.5.6}$$

Eğer fonksiyonlardan biri artan, diğeri azalan ise eşitsizlik yön değiştirir (Dunkel, 1924; Mitrinovic, 1970).

Chebyshev eşitsizliğinin olasılık versiyonunu vermeden önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3.5.4. (Markov Eşitsizliği). X negatif değerleri almayan gelişigüzel (rastgele) bir değişken ise herhangi bir $a > 0$ için $P\{X \ge a\} \le \frac{E[X]}{a}$ (Ross, 1994).

İspat. $a \ge 0$ için $I = \begin{cases} 1, & x \ge a \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$ olsun. $X \ge 0$ olduğundan $I \le \frac{X}{a}$ olur. Her iki tarafın beklenen değer uygulanırsa $E[I] \le \frac{E[X]}{a}$ elde edilir. $E[I] = P\{X \ge a\}$ olduğu göz önüne alınırsa ispat biter (Ross, 1994).

Şimdi de Chebyshev eşitsizliğinin olasılık versiyonunu verelim.

Teorem 3.3.5.5. X sırasıyla μ ve σ^2 ortalama ve varyansına sahip gelişigüzel bir değişken ise herhangi bir $k>0$ için $P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$ (Ross,1994).

İspat. $(X-\mu)^2 \geq 0$ olduğundan $a=k^2$ alınarak Markov eşitsizliği uygulanırsa, $P\{(X-\mu)^2 \geq k^2\} \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2}$ olur. $(X-\mu)^2 \geq k^2$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $|X-\mu| \geq k$ olmasıdır. $P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{E[(X-\mu)^2]}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2}$ eşitsizliği istenendir (Ross, 1994).

3.3.6. Young Eşitsizliği

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$, tüm $a>0$ ve $b>0$ reel sayıları için $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

Bu ifade literatürde, Young eşitsizliği olarak bilinir. Bunu ispat etmeden önce aşağıdaki iddiayı ispatlayalım.

İddia. e^x konvekstir.

İspat. Tüm reel a ve b sayıları için

$$e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b$$

olduğunu gösterirsek ispat biter. (a,e^a) ve (b,e^b) noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$f(x) = \frac{e^b - e^a}{b-a}(x-a) + e^a$$

şeklindedir. $ta+(1-t)b,\ 0 \leq t \leq 1$ olmak şartıyla $[a,b]$ kapalı aralığındadır. $e^x \leq f(x)$ tir. Dolayısıyla

$$e^{ta+(1-t)b} \leq f(ta+(1-t)b) = te^a + (1-t)e^b$$

bulunur. Dolayısıyla iddia ispatlanmış olur. Şimdi de Young eşitsizliğinin ispatını yapalım.

İspat (Young eşitsizliğinin ispatı). $t=\frac{1}{p}$ ise $1-t=\frac{1}{q}$ olur. Bu halde, e^x fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \frac{1}{q} e^{\log b^q} = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

elde edilir.

Teorem 3.3.6.1. $c > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $[0, c]$ kapalı aralığı üzerinde reel değerli, sürekli ve kesin olarak artan bir fonksiyon olsun. $a \in [0, c]$ ve $b \in [0, f(c)]$ ve $f(0) = 0$ ise,

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geq ab \tag{3.3.6.1}$$

vardır. Burada f^{-1}, f nin tersidir.

(3.3.6.1) ifadesinde eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $b = f(a)$ olmasıdır (Young, 1912; Mitrinovic, 1970).

İspat.

$$g(a) = ab - \int_0^a f(x)dx \tag{3.3.6.2}$$

ve $b > 0$ bir parametre olsun. $g'(a) = b - f(a)$ ve f kesin olarak artan olduğundan

$0 < a < f^{-1}(b)$ ise $g'(a) > 0$, $a = f^{-1}(b)$ ise $g'(a) = 0$ ve $a > f^{-1}(b)$ ise $g'(a) < 0$. $a = f^{-1}(b)$ için g nin maksimum $g(a)$ dır. Bu halde,

$$g(a) \leq \max g(x) = g\left(f^{-1}(b)\right) \tag{3.3.6.3}$$

elde edilir. Kısmi integrasyonla

$$g\left(f^{-1}(b)\right) = bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)dx = \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx$$

elde edilir. $y = f(x)$ alınırsa

$$g\left(f^{-1}(b)\right) = \int_0^b f^{-1}(y)dy \tag{3.3.6.4}$$

elde edilir. (3.3.6.2) ve (3.3.6.4) ifadeleri (3.3.6.3) ifadesinde yerine yazılırsa (3.3.6.1) elde edilir (Diaz ve Metcalf, 1970; Mitrinovic, 1970).

Örnek 1. $c>0$ olmak üzere $(0,c)$ açık aralığı üzerinde $p>1$ için $f(x)=x^{p-1}$ fonksiyonu Young eşitsizliğinin bütün şartlarını sağlamaktadır. Young eşitsizliğinden $\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b x^{\frac{1}{p-1}}dx \geq ab$ yani, $\frac{1}{p}a^p+\frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} \geq ab$ elde edilir. Bu son ifade $a,b\geq 0,\ p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \geq ab$ yazılır (Riesz, 1928; Mitrinovic, 1970).

Örnek 2. $f(x)=\log(1+x)$ olsun. Bu fonksiyon Young eşitsizliğinin bütün koşullarını sağlamaktadır. Dolayısıyla,

$$\int_0^a \log(1+x)dx+\int_0^b \left(e^x-1\right)dx \geq ab$$

Yani, $a,b\geq 0$ olmak üzere

$$(1+a)\log(1+a)-(1+a)+\left(e^b-b\right)\geq ab$$

elde edilir.

Teorem 3.3.6.2. $[0,b]$ kapalı aralığı üzerinde f ve g pozitif iki fonksiyon f' ve g' negatif olmayan, sürekli iki fonksiyon olsun. Ayrıca $f(0)=0$ olsun. Bu halde $0<a\leq b$ için

$$f(a)g(b)\leq \int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^b f(x)g'(x)dx$$

yazılır. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $a=b$ veya $a<b$ fakat (a,b) açık aralığı üzerinde g nin sabit olmasıdır.

İspat. $\int_0^a g(x)f'(x)dx$ e kısmi integrasyon uygulanarak elde edilir (Mitrinovic, 1993).

3.3.7. Hölder Eşitsizliği

Teorem 3.3.7.1. $k=1,\ldots,n$ için $a_k \geq 0, b_k \geq 0$ ve $p>1$ olmak üzere $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olsun. Bu halde,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \tag{3.3.7.1}$$

Eşitlik halinin olabilmesi için gerek ve yeter şart $\alpha a_k^p = \beta b_k^q$ olmasıdır. Burada α ve β sayıları, $\alpha^2+\beta^2>0$ olacak şekilde negatif olmayan reel sabitlerdir (Hölder, 1889; Mitrinovic, 1970).

İspat. $\sum_{k=1}^{n} a_k^p = 0$ veya $\sum_{k=1}^{n} b_k^q = 0$ ise (3.3.7.1) ifadesindeki eşitlik sağlanır. $\sum_{k=1}^{n} a_k^p > 0$ ve $\sum_{k=1}^{n} b_k^q > 0$ olma durumunu ele alalım.

$$a = a_\mu\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{-\frac{1}{p}}, \qquad b = b_\mu\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{-\frac{1}{q}} \tag{3.3.7.2}$$

ifadeleri $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p>1,\ a,b\geq 0$ için Young eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{p}\frac{a_\mu^p}{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}+\frac{1}{q}\frac{b_\mu^q}{\sum_{k=1}^{n} b_k^q} \geq \frac{a_\mu b_\mu}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

elde edilir. $\mu=1,\ldots,n$ e kadar toplam alınırsa,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olması halinde Hölder eşitsizliği elde edilir.

Young eşitsizliğine eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $a^p=b^q$ olmasıdır. Hölder eşitsizliğnde eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $k=1,\ldots,n$ için , $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{-1}a_k^p=\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{-1}b_k^q$, yani, $\alpha a_k^p=\beta b_k^q$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.7.2. $k=1,\ldots,n$ için $a_k>0, b_k>0$ ve $p<0$ veya $q<0$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Bu halde,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\sum_{k=1}^{n}a_kb_k. \quad (3.3.7.4)$$

Eşitlik halinin olabilmesi için gerek ve yeter şart $k=1,\ldots,n$ için $\alpha a_k^p=\beta b_k^q$ olmasıdır. Burada α ve β sayıları $\alpha^2+\beta^2>0$ olacak şekilde negatif olmayan reel sabitlerdir (Mitrinovic, 1970).

İspat. $p<0$, $P=-\frac{p}{q}$ ve $Q=\frac{1}{q}$ ise $P>0$ ve $Q>0$ olmak üzere $\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}=1$. Hölder eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{k=1}^{n}A_k^P\right)^{\frac{1}{P}}\left(\sum_{k=1}^{n}B_k^Q\right)^{\frac{1}{Q}}\geq\sum_{k=1}^{n}A_kB_k \quad (3.3.7.5)$$

yazılır. $A_k=a_k^{-q}$ ve $B_k=a_k^qb_k^q$ alınırsa (3.3.7.5) eşitsizliği (3.3.7.4) eşitsizliğine indirgenir (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.7.3. $a_{ij}\ (i=1,\ldots,n\ ;\ j=1,\ldots,m)$ pozitif sayılar ve $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_m}\geq 1$ olacak şekilde $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ pozitif sayılar ise

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\cdots a_{im} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}}\cdots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{im}^{\alpha_m}\right)^{\frac{1}{\alpha_m}}$$ (Jensen, 1906; Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.7.4. $1<p<+\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ve $b=(b_1,\ldots,b_n)$ kompleks iki vektör olsun. Bu halde,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.3.7.6}$$

Eşitlik halinin olabilmesi için gerek ve yeter şart $k=1,\ldots,n$ için $|a_k|^p$ ve $|b_k|^q$ dizilerinin orantılı olması ve $\arg a_k b_k$ nin k dan bağımsız olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.7.5 (Hölder eşitsizliğinin integral versiyonu). $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g , $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı iki reel fonksiyon ve $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart A ve B sabit olmak üzere hemen hemen her yerde $A|f(x)|^p = B|g(x)|^q$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

3.3.8. Minkowski Eşitsizliği

Teorem 3.3.8.1. $k=1,\ldots,n$ için $a_k \geq 0, b_k \geq 0$ ve $p>1$ olsun. Bu halde

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3.8.1}$$

Eşitlik halinin olması için gerek ve yeter şart $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ve $b=(b_1,\ldots,b_n)$ dizilerinin orantılı olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

İspat.

$$(a_k+b_k)^p = a_k(a_k+b_k)^{p-1} + b_k(a_k+b_k)^{p-1}$$

ifadesinde $k=1,\ldots,n$ e kadar toplam alınırsa

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p = \sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1} \tag{3.3.8.2}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinden $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ve $p>1$ için

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$p=q(p-1)$ ile beraber yukarıdaki iki bağıntı toplanırsa

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p \leq \left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ ifadesine bölünürse (3.3.8.1) eşitsizliği elde edilir (Daykin ve Eliezer, 1968; Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.8.2. $k=1,\ldots,n$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ olsun. $p>1$ ise

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3.8.3}$$

ve

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{1}{p}}\right)^p + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\frac{1}{p}}\right)^p \le \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{\frac{1}{p}}\right)^p . \qquad (3.3.8.4)$$

$0 < p < 1$ için (3.3.8.3) ve (3.3.8.4) eşitsizlikleri yön değiştirir (Beckenbach ve Bellman, 1965; Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.8.3. $p > 1$ ve $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, \ldots, b_n)$ kompleks iki dizi olmak üzere,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ (Mitrinovic, 1970).}$$

Teorem 3.3.8.4 (Minkowski eşitsizliğinin integral versiyonu). f ve g , $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli iki fonksiyon ve $p > 1$ için,

$$\int_a^b |f|^p dx < \infty \text{ ve } \int_a^b |g|^p dx < \infty$$

olsun. Bu halde,

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Eşitlik için gerek ve yeter şart hemen hemen her yerde $f(x) = 0$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

3.3.9. Aczel Eşitsizliği

Teorem 3.3.9.1. $b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2 > 0$ veya $a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2 > 0$ olacak şekilde $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, \ldots, b_n)$ reel sayıların iki dizisi olsun. Bu halde,

$$\left(a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2\right)\left(b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2\right) \le \left(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \cdots - a_n b_n\right)^2 . \qquad (3.3.9.1)$$

Eşitlik halinin olabilmesi için gerek ve yeter şart a ve b dizilerinin orantılı olmasıdır (Aczel, 1956; Mitrinovic, 1970).

İspat. k reel olmak üzere $a \neq kb$ ve $b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2 > 0$ olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 - a_2b_2 - \cdots - a_nb_n\right)x \\ &\quad + \left(a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2\right) \\ &= \left(b_1x - a_1\right)^2 - \left(b_2x - a_2\right)^2 - \cdots - \left(b_nx - a_n\right)^2 \end{aligned} \tag{3.3.9.2}$$

yazılır. $b_1 \neq 0$ olduğundan

$$f\left(\frac{a_1}{b_1}\right) = -\left(b_2\frac{a_1}{b_1} - a_2\right)^2 - \cdots - \left(b_n\frac{a_1}{b_1} - a_n\right)^2 < 0$$

olur. $x \to \mp\infty$ için $f(x) \to +\infty$ olduğundan f fonksiyonu $\left(-\infty, \dfrac{a_1}{b_1}\right)$ ve $\left(\dfrac{a_1}{b_1}, +\infty\right)$ aralıklarında iki köke sahiptir. (3.3.9.2) denklemi iki köke sahiptir ve (3.3.9.1) elde edilir.

Eşitliğin olabilmesi için a nın b ile orantılı olması gerekir.

Not. Simetriden dolayı $b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2 > 0$ yerine $\left(a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2\right) > 0$ yazılırsa aynı sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.9.2. (Popoviciu Eşitsizliği) $p \geq 1$ için

$$b_1^p - b_2^p - \cdots - b_n^p > 0 \text{ veya } a_1^p - a_2^p - \cdots - a_n^p > 0 \tag{3.3.9.3}$$

olacak şekilde $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, \ldots, b_n)$ reel sayıların negatif olmayan iki dizisi ise

$\left(a_1^p - a_2^p - \cdots - a_n^p\right)\left(b_1^p - b_2^p - \cdots - b_n^p\right) \leq \left(a_1b_1 - a_2b_2 - \cdots - a_nb_n\right)^p$ (Popoviciu, 1959; Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.3.9.3 (Belmann Eşitsizliği)

$a = (a_1, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, \ldots, b_n)$ (3.3.9.3) denklemini sağlayan negatif olmayan reel sayıların iki dizisi ise $p \geq 1$ için

$$\left(a_1^p - a_2^p - \cdots - a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(b_1^p - b_2^p - \cdots - b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left((a_1+b_1)^p - (a_2+b_2)^p - \cdots - (a_n+b_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Bellman, 1956; Mitrinovic, 1970).

3.3.10. Grüss Eşitsizliği

Teorem 3.3.10.1. f ve g , (a,b) açık aralığında tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Tüm $x \in (a,b)$ için

$$\varphi \leq f(x) \leq \Phi, \qquad \gamma \leq g(x) \leq \Gamma$$

olsun. Burada $\varphi, \Phi, \gamma, \Gamma$ sabit reel sayılardır. Bu halde,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\right| \leq \frac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.3.10.1)$$

yazılır.

Grüss (1935), $\frac{1}{4}$ sayısının olabilecek en iyi sabit olduğunu göstererek (3.3.10.1) ifadesini ispat etti (Mitrinovic, 1970).

İspat. $t = \frac{x-a}{b-a}$ olsun. $F = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ ve \ G = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx$ ise bu halde,

$$F = \int_0^1 f(x)dx, G = \int_0^1 g(x)dx \text{ ve } D(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx - FG$$

yazılır. Bu halde (3.3.10.1) eşitsizliği

$$|D(f,g)| \leq \frac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma) \qquad (3.3.10.2)$$

halini alır. g yerine f alınırsa Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliğinden

$$D(f,f)=\int_0^1 f(x)^2\,dx-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\geq 0 \tag{3.3.10.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$D(f,f)=(\Phi-F)(F-\varphi)-\int_0^1[\Phi-f(x)][f(x)-\varphi]dx,$$

ifadesinden

$$D(f,f)\leq(\Phi-F)(F-\varphi) \tag{3.3.10.4}$$

yazılır. Kolayca

$$D(f,g)=\int_0^1[f(x)-F][g(x)-G]dx,$$

yazılır. Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$D(f,g)^2\leq\int_0^1[f(x)-F]^2\,dx\int_0^1[g(x)-G]^2dx=D(f,f)D(g,g).$$

elde edilir. (3.3.10.3) ve (3.3.10.4) eşitsizlikleri kullanılarak

$$D(f,g)^2\leq(\Phi-F)(F-\varphi)(\Gamma-G)(G-\gamma) \tag{3.3.10.5}$$

yazılır.

$$4(\Phi-F)(F-\varphi)\leq(\Phi-\varphi)^2,$$
$$4(\Gamma-G)(G-\gamma)\leq(\Gamma-\gamma)^2,$$

gerçeğinden hareketle (3.3.10.5) eşitsizliği (3.3.10.2) eşitsizliğini gerektirir.

Özel olarak $f(x)=g(x)=\operatorname{sgn}(2x-1)$ alınırsa $\frac{1}{4}$ ün (3.3.10.2) eşitsizliği için en iyi sabit olduğu görülecektir (Grüss, 1935; Mitrinovic, 1970).

3.3.11. Steffensen Eşitsizliği

Teorem 3.3.11.1. f ve g , (a,b) açık aralığı üzerinde tanımlı ve integrallenebilir iki fonksiyon ve aynı aralık üzerinde f hiçbir zaman artan olmayan bir fonksiyon ve $0 \leq g(t) \leq 1$ ise $\lambda = \int_a^b g(t)dt$ olmak üzere

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t)dt \text{ (Steffensen, 1918; Mitrinovic, 1970).} \qquad (3.3.11.1)$$

İspat. (3.3.11.1) ifadesinin ikinci eşitsizliğini ele alalım.

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+\lambda} f(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt &= \int_a^{a+\lambda} [1-g(t)]f(t)dt - \int_{a+\lambda}^{b} f(t)g(t)dt \\
&\geq f(a+\lambda)\int_a^{a+\lambda} [1-g(t)]dt - \int_{a+\lambda}^{b} f(t)g(t)dt \\
&= f(a+\lambda)\left[\lambda - \int_a^{a+\lambda} g(t)dt\right] - \int_{a+\lambda}^{b} f(t)g(t)dt \\
&= f(a+\lambda)\left[\int_a^{b} g(t)dt - \int_a^{a+\lambda} g(t)dt\right] - \int_{a+\lambda}^{b} f(t)g(t)dt \\
&= f(a+\lambda)\int_{a+\lambda}^{b} g(t)dt - \int_{a+\lambda}^{b} f(t)g(t)dt \\
&= \int_{a+\lambda}^{b} g(t)[f(a+\lambda) - f(t)]dt \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.11.1) ifadesinin birinci eşitsizliği benzer şekilde yapılır. Ayrıca (3.3.11.1) ifadesinin birinci eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilir.

Gerçekten $G(t) = 1 - g(t)$ ve $\Lambda = \int_a^b G(t)dt$ yazılırsa $0 \leq G(t) \leq 1$ olur. Buradan

$$b - a = \lambda + \Lambda \qquad (3.3.11.3)$$

yazılır. (3.3.11.1) ifadesinin ikinci eşitsizliğinden

$\int_a^b f(t)G(t)dt \le \int_a^{a+\Lambda} f(t)dt$ veya $\int_a^b f(t)[1-g(t)]dt \le \int_a^{b-\lambda} f(t)dt$ veya

$\int_a^b f(t)dt - \int_a^{b-\lambda} f(t)dt \le \int_a^b f(t)g(t)dt$ ya da $\int_{b-\lambda}^b f(t)dt \le \int_a^b f(t)g(t)dt$

elde edilir. (3.3.11.1) ifadesinin ikinci eşitsizliği için aşağıdaki ispat da yapılır.

$$H(x) = \int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(t)dt - \int_a^x f(t)g(t)dt$$

şeklinde tanımlansın. $H(a)=0$ ve $H'(x) = f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right)g(x) - f(x)g(x) \ge 0$

ile verilir. $0 \le g(t) \le 1$, $a + \int_a^x g(t)dt \le x$ ve f azalan olduğundan

$f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \ge f(x)$ (Steffensen, 1918; Mitrinovic, 1970).

Steffensen eşitsizliği T. Hayashi (1919; 1920) tarafından genelleştirildi. f aynı şartları sağlamak üzere $0 \le g(t) \le A$ ise $\lambda = \frac{1}{A}\int_a^b g(t)dt$ olmak üzere

$A\int_{b-\lambda}^b f(t)dt \le \int_a^b f(t)g(t)dt \le A\int_a^{a+\lambda} f(t)dt$ (Mitrinovic, 1970).

3.3.12. Schur Eşitsizliği

Teorem 3.3.12.1. x, y, z pozitif sayılar ve $\lambda \in R$ ise,

$$x^\lambda(x-y)(x-z) + y^\lambda(y-z)(y-x) + z^\lambda(z-x)(z-y) \ge 0 \qquad (3.3.12.1)$$

yazılır. $x = y = z$ olması halinde eşitlik oluşur (Hardy ve ark., 1952; Mitrinovic, 1970).

İspat etmeden önce yaygın olarak kullanılan ve Guha (1962) tarafından ifade edilen genelleştirilmiş versiyonunu ispat edelim.

Teorem 3.3.12.2. a,b,c,u,v,w pozitif reel sayılar ve

$$a^{\frac{1}{p}}+c^{\frac{1}{p}}\leq b^{\frac{1}{p}} \tag{3.3.12.2}$$

$$u^{\frac{1}{p+1}}+w^{\frac{1}{p+1}}\geq v^{\frac{1}{p+1}} \tag{3.3.12.3}$$

olsun. Bu halde, $p>0$ ise

$$ubc-vca+wab\geq 0 \tag{3.3.12.4}$$

yazılır. Eğer $-1<p<0$ ise, (3.3.12.3) ve (3.3.12.4) eşitsizlikleri yön değiştirir. Eğer $p<-1$ ise (3.3.12.2) ve (3.3.12.3) eşitsizlikleri yön değiştirir. Her durumda (3.3.12.4) ifadesinde eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart (3.3.12.2), (3.3.12.3) ve

$$\frac{a^{p+1}}{u^p}=\frac{b^{p+1}}{v^p}=\frac{c^{p+1}}{w^p}$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

İspat. $p>0$ ise Hölder eşitsizliğinden

$$\left[a^{\frac{1}{p+1}}(uc)^{\frac{1}{p+1}}+c^{\frac{1}{p+1}}(wa)^{\frac{1}{p+1}}\right]^{p+1}\leq (uc+wa)\left(a^{\frac{1}{p}}+c^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

yazılır. Diğer bir değişle

$$ac\left(u^{\frac{1}{p+1}}+w^{\frac{1}{p+1}}\right)^{p+1}\leq (uc+wa)\left(a^{\frac{1}{p}}+c^{\frac{1}{p}}\right)^p$$

elde edilir. Buradan (3.3.12.2) ve (3.3.12.3) ifadelerinden (3.3.12.4) hemen elde edilir. Diğer durumlar benzer olarak elde edilir (Mitrinovic, 1970).

Şimdi de Teorem 3.3.12.1. i ispat edelim. Genelliği bozmaksızın $0 \le z \le y \le x$ olsun. Teorem 3.3.12.2 de $p = 1, a = y - z, b = x - z, c = x - y, u = x^{\lambda}, v = y^{\lambda}, w = z^{\lambda}$ alınırsa (3.3.12.4) ifadesinden (3.3.12.1) elde edilir. (3.3.12.2) şartı eşitliği sağlar. $\lambda \ge 0$ veya $\lambda \le 0$ olmak şartıyla $u^{\frac{\lambda}{2}} \ge v^{\frac{\lambda}{2}}$ veya $w^{\frac{\lambda}{2}} \ge v^{\frac{\lambda}{2}}$ eşitsizliklerinden (3.3.12.3) ifadesi sağlanır (Mitrinovic, 1970).

3.3.13. Devirli (Cyclic) Eşitsizlikler

Teorem 3.3.13.1. Shapiro Eşitsizliği

$$x_i \ge 0, x_i + x_{i+1} > 0 \qquad (x_{n+1} = x_1,\ i = 1, \ldots, n) \tag{3.3.13.1}$$

olmak üzere,

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \ge \frac{n}{2} \tag{3.3.13.2}$$

eşitsizliğine Shapiro eşitsizliği denir (Shapiro, 1954; Mitrinovic, 1970).
Bu eşitsizlik, $n \le 12$ çift sayıları için analitik olarak ispat edilmiştir (Mitrinovic, 1970; Bushell ve Mcleod, 2002). $n \le 23$ tek sayıları için eşitsizliğin doğruluğu analitik olarak hala çözüme açıktır. Aynı koşullar altında bu eşitsizliğin tersi

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_3 + x_4}{x_2} + \cdots + \frac{x_n + x_1}{x_{n-1}} + \frac{x_1 + x_2}{x_n} \ge 2n$$

olduğu gösterilmiştir (Tanrıverdi, 2012).

3.3.14. Hilbert Eşitsizliği

$$f, g \in L^2((0, \infty)) \text{ ise } \left| \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x) g(y)}{x + y} dx dy \right| \le \pi \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Burada π olabilecek en iyi sabittir. $f = 0$ ve $g = 0$ olması halinde eşitlik oluşur .

Bu eşitsizliklerin ispatı için (Hardy ve ark., 1952; Steele, 2004) e bakılabilir. Elementer ispatı için ise (Oleszkiewicz, 1993) e bakınız.

3.3.15. Hardy Eşitsizliği

Eğer $p>1$ ve $\{a_k\}_1^\infty$ negatif olmayan sayıların bir dizisi ise Hardy diskrit (ayrık) eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$$

ile verilir. $p>1, f$ negatif olmayan ve $(0,x)$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve ayrıca $\int_0^\infty f(x)^p\,dx<\infty$ ise sürekli fonksiyonlar için Hardy eşitsizliği

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p\,dx$$

ile verilir (Hardy ve ark., 1952; Kufner ve Persson, 2003; Kufner ve ark., 2006).

Teorem 3.3.15.1. $a_n \ge 0$ ve $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ olsun. Aşağıdaki serilerden birinin yakınsaklığı diğerlerini gerektirir.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nA_n}{n}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_na_m}{n+m}$.

Bu teoremin süreklilik versiyonu ise $a>0, f$ negatif olmayan, (a,∞) aralığı üzerinde integrallenebilir ve $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ olmak üzere,

$$I_1 = \int_a^\infty \frac{f(x)F(x)}{x}dx,$$

$$I_2 = \int_a^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^2 dx,$$

$$I_3 = \int_a^\infty \int_a^\infty \frac{f(x)f(y)}{x+y}dxdy \text{ (Hardy, 1915; Kufner ve ark., 2006).}$$

Not.

$$\int_a^x \left(\frac{F(t)}{t}\right)^2 dt \le 2\int_a^x \left(\frac{f(t)F(t)}{t}\right)dt$$
$$\le \int_a^x \left(\frac{F(t)}{t}\right)^2 dt + 4\int_x^{2x} \left(\frac{F(t)}{t}\right)^2 dt$$

yazılır. Buradan $I_2 \le I_3 \le 2I_1$. (iii) için bir üst sınır (i) tarafından verilebilir. Bu

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n} \le 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m a_n}{m+n} = 2\sum_{n=1}^{N}a_n\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m}{m+n}$$
$$\le 2\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_m = 2\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{A_n}{n}$$

ile açıktır (Kufner ve ark., 2006).

Teorem 3.3.15.2. $a_n \ge 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ serisinin yakınsaklığı $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2$ serisinin yakınsaklığını gerektirir (Kufner ve ark., 2006).

İspat.

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 = \left(a_n + \frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 \le 2a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 = 4a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4\frac{a_n A_n}{n}.$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla her N için

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 4\sum_{n=1}^{N}a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4\sum_{n=1}^{N}\frac{a_nA_n}{n}$$

yazılır. Üstelik $-2a_nA_n = -\left(A_n^2 - A_{n-1}^2\right) - a_n^2 \leq -\left(A_n^2 - A_{n-1}^2\right)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{a_nA_n}{n} &\leq -\sum_{n=1}^{N}\frac{\left(A_n^2 - A_{n-1}^2\right)}{n}\\ &= -\frac{A_1^2}{1.2} - \frac{A_2^2}{2.3} - \cdots - \frac{A_{N-1}^2}{(N-1).N} - \frac{A_N^2}{N}\\ &\leq -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}A_n^2\end{aligned}$$

yazılır. Bu son ifade bir önceki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 &\leq 4\sum_{n=1}^{N}a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}A_n^2\\ &= 4\sum_{n=1}^{N}a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2(n+1)}A_n^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açık bir şekilde

$$\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leq 4\sum_{n=1}^{N}a_n^2$$

yazılır. Bu sonuç ise teoremin ispatını verir (Hardy, 1919; Kufner ve ark., 2006).

Teorem 3.3.15.3. (Hölder-Roger-Riesz Eşitsizliği) Eğer $p > 1, a_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$ yakınsak ise $A_n = \sum_{k=1}^{n}a_k$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p$ yakınsaktır (Kufner ve ark., 2006).

İspat. $\Phi_n = n^{-p} + (n+1)^{-p} + (n+2)^{-p} + \cdots$ olsun. $A_0 = 0$ olmak üzere her N için

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p &= \sum_{n=1}^{N}A_n^p\left(\Phi_n - \Phi_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(A_n^p - A_{n-1}^p\right)\Phi_n - A_N^p\Phi_{N+1}\\ &\leq \sum_{n=1}^{N}\left(A_n^p - A_{n-1}^p\right)\Phi_n \leq p\sum_{n=1}^{N}a_nA_n^{p-1}\Phi_n\end{aligned}$$

yazılır. Üstelik

$$\Phi_n < n^{-p} + \int_n^{\infty} x^{-p} dx = n^{-p} + \frac{n^{-(p-1)}}{p-1} \le \frac{p}{p-1} n^{-(p-1)}$$

yazılır. Bu üst sınır ve Hölder eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n} \right)^p &\le \frac{p^2}{p-1} \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{A_n}{n} \right)^{p-1} \\ &\le \frac{p^2}{p-1} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n} \right)^p \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n} \right)^p \le \left(\frac{p^2}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p$ elde edilir (Kufner ve ark., 2006).

3.3.16. Hardy-Landau Eşitsizliği

$p > 1, a_n \ge 0$ ve $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olsun. Bu halde tüm N (veya $N = \infty$) için bu eşitsizlik

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{A_n}{n} \right)^p \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p .$$

Burada, $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ sabiti en keskin olanıdır (Landau, 1921; Makarov ve ark, 1992; Kufner ve ark., 2006).

İspat. $y \ge 0$ için

$$y^p - py + p - 1 \geq 0$$

yazılır. Bu durum Bernoulli eşitsizliğinden açıkça görülür. Yani,

$$y^p \geq 1 + p(y-1).$$

$y = \dfrac{y_1}{y_2}$ yazılarak bu eşitsizlik uygulanırsa

$$y_1^p - py_1 y_2^{p-1} + (p-1)y_2^p \geq 0$$

elde edilir. $y_1 = b_n$ ve $y_2 = \dfrac{(p-1)B_n}{pn}$. Burada $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ alınırsa

$$b_n^p - pb_n\left(\frac{p-1}{p}\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{p-1}{p}\frac{B_n}{n}\right)^p \geq 0$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \sum_{n=1}^{N} pb_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p \geq 0$$

yazılır. Üstelik $pb_n B_n^{p-1} = pB_n^{p-1}(B_n - B_{n-1}) \geq B_n^p - B_{n-1}^p$ ifadesine kısmi toplam uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} pb_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} &\geq \sum_{n=1}^{N}\left(B_n^p - B_{n-1}^p\right)\frac{1}{n^{p-1}} \\ &\geq \sum_{n=1}^{N} B_n^p\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) \geq (p-1)\sum_{n=1}^{N} B_n^p \frac{1}{(n+1)^p}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlik birlikte düşünülürse

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^p \geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} B_n^p\left(\frac{p}{(n+1)^p} - \frac{p-1}{n^p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} c_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^p$$

elde edilir. Burada $n \to \infty$ için $c_n = p\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-p} - p + 1 \to 1$ dir.

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = a_1,\ b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_{2m} = a_2, \ldots, b_{(N-1)m+1} = b_{(N-1)m+2} = \cdots = b_{Nm} = a_N$
olsun. N yerine Nm yazılırsa

$$m\left(\frac{p-1}{p}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p \geq \left(c_1 + c_2 + \ldots + c_m\right)\left(\frac{A_1}{1}\right)^p + \left(c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{2m}\right)\left(\frac{A_2}{2}\right)^p$$
$$+ \cdots + \left(c_{(N-1)m+1} + c_{(N-1)m+2} + \cdots + c_{Nm}\right)\left(\frac{A_N}{N}\right)^p$$

bulunur. m ye bölünür ve $m \to \infty$ ise

$$\frac{\left(c_1 + c_2 + \ldots + c_m\right)}{m} \to 1 \text{ ve } \frac{\left(c_{m+1} + c_{m+2} + \cdots + c_{2m}\right)}{m} \to 1$$

yazılır. Bu ise Hardy-Landau eşitsizliğinin tüm değerleri için (hatta $N \to \infty$ için) doğruluğunu gerektirir.

Şimdi de $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ nin $N = \infty$ için olabilecek keskin bir üst sınır olduğunu görelim. $\left(0 < \varepsilon < 1 - \frac{1}{p}\right)$ için $a_n = n^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}$ olsun. Bu seçimin olması halinde

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} > \int_1^n x^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} dx$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{p-\varepsilon}}\left(n^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}} - 1\right) > \frac{p}{p-1}\left(n^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}} - 1\right)$$

yazılır. Bu ise

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1 - \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}}}\right)^p$$
$$\geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1 - \frac{p}{n^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}}}\right)$$
$$= \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(n^{-1-\varepsilon p} - pn^{-2+\frac{1}{p+\varepsilon}-\varepsilon p}\right)$$

ifadesini gerektirir. Üstelik $2-\frac{1}{p-\varepsilon}+\varepsilon p>1$ olduğundan $\varepsilon>0, N\to\infty$ için $C_{N,\varepsilon}\to C$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p>\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p-p\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2-\frac{1}{p-\varepsilon}+\varepsilon p}}\right)$$
$$=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p-pC_{N,\varepsilon}\right)$$

yazılır. Buradan sonuç olarak

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p}{\sum_{n=1}^{N}a_n^p}>\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\left(1-\frac{pC_{N,\varepsilon}}{\sum_{n=1}^{N}a_n^p}\right)\to\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$$

bulunur. Çünkü $N\to\infty$ ve $\varepsilon\to 0^+$ iken

$$\sum_{n=1}^{N}a_n^p=\sum_{n=1}^{N}n^{-1-\varepsilon p}\to\infty$$

olur. Bu da bu üst sınırın keskin olduğunun bir kanıtıdır. Hatta $\varepsilon=0$ yazılmasıyla bu hesaplamalar doğrudur.

Şimdi de sürekli fonksiyonlar için Hardy eşitsizliğinin ispatını verelim. (Landau, 1921; Landau, 1924) ve (Hardy, 1925) çalışmaları göz önüne alınarak Hardy aşağıdaki ispatı verdi.

İspat. $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ olsun. Kısmi integral ve hemen hemen tüm $x\in(0,\infty)$ için $\frac{d}{dx}\left(F(x)^p\right)=pF(x)^{p-1}f(x)$ özdeşliği göz önüne alınır ve $0<\alpha<A<\infty$ ile keyfi bir α sayısı ele alınırsa,

$$\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p}dx=-\frac{1}{p-1}\int_{\alpha}^{A}F(x)^{p}\frac{d}{dx}\left(x^{1-p}\right)dx$$
$$=\frac{\alpha^{1-p}}{p-1}F(\alpha)^{p}-\frac{A^{1-p}}{p-1}F(A)^{p}+\frac{1}{p-1}\int_{\alpha}^{A}x^{1-p}\frac{d}{dx}\left(F(x)^{p}\right)dx$$
$$\leq\frac{\alpha^{1-p}}{p-1}F(\alpha)^{p}+\frac{p}{p-1}\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)dx$$

yazılır. Üstelik Hölder eşitsizliğinin sürekli versiyonu göz önüne alınarsa,

$$\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)dx\leq\left(\int_{\alpha}^{A}f(x)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

yazılır. $\alpha\leq\beta\leq A$ olacak şekilde β seçilir ve bir önceki iki eşitsizlik $F(x)$ yerine $F(x)-F(\alpha)$ yazılarak uygulanırsa

$$\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p}dx\leq\frac{p}{p-1}\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p-1}f(x)dx$$
$$\leq\frac{p}{p-1}\left(\int_{\alpha}^{A}f(x)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

elde edilir. Böylece

$$\left(\int_{\alpha}^{A}\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{p}{p-1}\left(\int_{\alpha}^{A}f(x)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$ ve buradan

$$\left(\int_{\beta}^{A}\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{p}{p-1}\left(\int_{0}^{\infty}f(x)^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte ilk olarak $\alpha\to0^{+}$ gönderilirse $F(x)-F(\alpha)$ nın artan olarak $F(x)$ e gittiği gözlemlenir. İspatı tamamlamak için $A\to\infty$ ve $\beta\to0^{+}$ gönderilirse ispat biter (Kufner ve ark., 2006).

Not. $n=1,2,\ldots$ için $a_n\geq0,\lambda_n\geq0,A_n=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n,\Lambda_n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

ve $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^p$ yakınsak olsun. Bu halde,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\frac{A_n}{\Lambda_n}\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^p$$

yazılır. Bu ise Hardy diskrit (ayrık) eşitsizliğinin genelleştirilmiş bir halidir. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n$ yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\dots a_n^{\lambda_n}\right)^{\frac{1}{\Lambda_n}} \le e\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n$$

elde edilir. Burada e keskin bir üst sınırdır. Eğer her $\lambda_n = 1$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_1a_2\dots a_n\right)^{\frac{1}{n}} \le e\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik Hardy diskrit (ayrık) eşitsizliğinin limitidir (Kufner ve ark., 2006).

3.3.17. Carleman Eşitsizliği

Yukarıda ifade edilen son eşitsizlik ilk olarak Carleman tarafından ispat edilmiştir ve eşitsizlik literatürde Carleman eşitsizliği olarak bilinmektedir. Carleman tarafından verilen ispat oldukça uzundur. Hardy eşitsizliğinden ispat oldukça kolay olup bu ispat Carleman için bir sürpriz olmuştur (Carleman and Hardy, 1922; Kufner ve ark., 2006).

Sürekli fonksiyonlar için Hardy eşitsizliğinde limit alınırsa,

$(0,x)$ açık aralığı üzerinde $f(x)$ ölçülebilir ve kesin olarak pozitif bir fonksiyon ise

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)dx \le e\int_0^\infty f(x)dx \qquad (3.3.17.2)$$

elde edilir (Hardy, 1925; Persson ve ark., 2003; Kufner ve ark., 2006).

Teorem 3.3.17.1. $a_1, a_2, \ldots$ pozitif sayılar ve $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ yakınsak ise

$$a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + \ldots + \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} < e(a_1 + a_2 + \ldots). \qquad (3.3.17.1)$$

İspat 1. Aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliği

$$\frac{(k+1)^k}{k!} = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^k$$

ile birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} a_i &= \sum_{i=1}^{\infty} i a_i \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i a_i \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + k a_k}{k(k+1)} \\
&> \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\left(k! \prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k!}{(k+1)^k}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \ge \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}}.
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlik doğrudur. Çünkü eşitsizliğin tüm terimleri için aynı zamanda eşitlik oluşmaz. Eşitlik bazı $c > 0$ için $a_k = \frac{c}{k}$ alınmasıyla oluşur. Fakat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak olduğundan bu durum geçerli değildir (Carleman ve Hardy, 1922; Persson ve ark., 2003).

İspat 2. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden tüm $i = 1,2,\ldots$; her k ve tüm $c_i > 0$ için

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\prod_{i=1}^{k} c_i\right)^{-\frac{1}{k}} \left(\prod_{i=1}^{k} c_i a_i\right)^{\frac{1}{k}} \le \left(\prod_{i=1}^{k} c_i\right)^{-\frac{1}{k}} \frac{1}{k}\prod_{i=1}^{k} c_i a_i$$

sağlanır. $i = 1,2,\ldots,k$ için $c_i = \frac{(1+i)^i}{i^{i-1}}$ alınırsa $\left(\prod_{i=1}^{k} c_i\right)^{\frac{1}{k}} = k+1$ ve buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k} c_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i \sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i a_i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\left(1+\frac{1}{i}\right)^i \leq e\sum_{i=1}^{\infty} a_i .\end{aligned}$$

Kesin olarak eşitsizlik hali bir önceki ispata benzer (Hardy, 1920; Persson ve ark., 2003).

Carleman eşitsizliğinin integral versiyonu aşağıdaki şekildedir.

Teorem 3.3.17.2. f, $(0,\infty)$ açık aralığında integrallenebilen negatif olmayan bir fonksiyon ise

$\int_0^{\infty}\exp\left[\frac{1}{x}\int_0^{\infty}\log f(t)dt\right]dx < e\int_0^{\infty} f(x)dx$ (Persson ve ark., 2003; Kufner ve ark.,2006).

İspat. f, $(0,\infty)$ açık aralığında integrallenebilen negatif olmayan bir fonksiyon ve $g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{x} yf(y)dy$ şeklinde tanımlansın. Bu halde, $\int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} g(x)dx.$

Bunun için negatif olmayan fonksiyonlar için Fubini teoreminin basit bir durumuna ihtiyaç duyulmaktadır. Buradan,

$$\int_0^{\infty} g(x)dx = \int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2}\int_0^{x} yf(y)dy = \int_0^{\infty} yf(y)dy\int_y^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \int_0^{\infty} f(y)dy.$$

Φ konveks fonksiyon, ϕ integralenebilen bir fonksiyon ve μ olasılık ölçümü ise Jensen eşitsizliğinin olasılık versiyonu $\Phi\left(\int \phi d\mu\right) \leq \int \Phi(\phi)d\mu$ eşitsizliği kullanılacaktır. Buna $\Phi = \exp$ ve $[a,b]$ kapalı aralığında $d\mu = \frac{dx}{(b-a)}$ olduğunda ihtiyaç duyulacaktır. ϕ sürekli olduğunda sol taraftaki integral yerine yaklaşık olarak eşit alt bölüntüler alınmak şartıyla Riemann toplamı ve Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliği kullanılır. ϕ integrallenebilir olması halinde dominated (baskın) yakınsaklık teoremi kullanılır. Bu aydınlatıcı bilgilerden sonra Knopp ispatını vermeye hazırız.

$x\log x - x$ in $\log x$ in integrali olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(y)dy\right) &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log(yf(y))dy - \frac{1}{x}\int_0^x \log y dy\right)\\ &= e^{1-\log x}\exp\left(\int_0^x \log(yf(y))\frac{dy}{x}\right)\\ &\leq \frac{e}{x}\int_0^x \exp(\log(yf(y)))\frac{dy}{x}\\ &= \frac{e}{x^2}\int_0^x yf(y)dy\end{aligned}$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için 0 dan ∞ a integral alınır ve böylece istenen elde edilir (Duncan ve McGregor, 2003; Kufner ve ark., 2006).

3.3.18. Polya-Knopp Eşitsizliği (Carleson Eşitsizliği)

Not. Carleman eşitsizliğinin sürekli versiyonunun diskrit versiyonunu gerektirdiğini görelim.

Burada $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin artmayan bir dizi olduğunu kabul edelim. Carleman eşitsizliğinin sürekli versiyonunda $k = 1,2,\ldots$ için $x \in [k-1,k)$ olmak üzere $f(x) = a_k$ olsun. Bu halde,

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3.3.18.1}$$

ve $\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)dx$ elde edilir. Üstelik $k = 1,2,\ldots$ için $\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)dx = a_1$ ve

$$\int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)dx = \int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\ln a_i + \frac{x-(k-1)}{x}\ln a_{k+1}\right)dx$$
$$\geq \int_{k-1}^{k}\exp\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln a_i\right)dx = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} \tag{3.3.18.2}$$

elde edilir.

Bu son eşitsizlikteki integrali alınan fonksiyon $i = 1,2,\ldots,k$ için sırasıyla $k-1$ tane ağırlık için $\frac{1}{x},\ldots,\frac{1}{x}$ ve k. ağırlık için de $\frac{x-(k-1)}{k}$ alınmak şartıyla $\ln a_i$ sayılarının ağırlıklı aritmetik ortalamasına bağlıdır. Burada $k-1 \leq x \leq k$ ve ayrıca dizinin azalan ortalama değeri $x = k$ için en küçük değerdir. Yani tüm ağırlıklar $\frac{1}{k}$ dır. Buradan (3.3.18.1) ve (3.3.18.2) eşitsizliklerinin değerlendirilmesiyle (3.3.17.1) elde edilir (Persson ve ark., 2003; Kufner ve ark., 2006).

Carleson eşitsizliğinin ağırlıklar için bir üst versiyonu $p < 1$ için

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)x^p dx < \frac{e}{1-p}\int_0^\infty f(x)x^p dx .$$

$p < 0$ için de $\int_0^\infty x^p \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f^*(t)dt\right)dx \leq e^{p+1}\int_0^\infty x^p f^*(x)dx$ ifadesinden daha geneldir. Bunun için (Persson ve ark., 2003) a bakınız.

İspat. (3.3.17.2) ifadesinde $f(t)$ yerine $\frac{f(t)}{t}$ yazılırsa (3.3.17.2) ifadesinin sol tarafı $-\frac{1}{x}\int_0^x \ln t dt = -\frac{1}{x}[t\ln t - t]_0^x = -\ln x + 1$ olduğundan

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\left(\int_0^x \ln f(t)dt - \int_0^x \ln t dt\right)\right)dx = e\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)\frac{dx}{x}$$

elde edilir. Böylece (3.3.17.2) ifadesine denk olan ifade

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)\frac{dx}{x} < \int_0^\infty f(x)\frac{dx}{x}$$

formundadır. Bu son ifadenin ispatı için $f(u)=e^u$ nun konveks olduğu göz önüne alınarak Jensen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)\frac{dx}{x} &\leq \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx\\ &= \int_0^\infty f(t)\left(\int_t^\infty \frac{1}{x^2}dx\right)dt\\ &= \int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

elde edilir (Persson ve ark., 2003; Kufner ve Persson, 2003; Duncan ve McGregor, 2003; Kufner ve ark., 2006).

3.3.19. Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$f: I \subseteq R \to R$ konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$ (El Farissi,2010).

İspat. (a,b) açık aralığı üzerinde konveks bir fonksiyonun (a,b) açık aralığında sürekli ve $x \in (a,b)$ için $f^+(x)$ ve $f^-(x)$ sağ ve sol türevlerine sahip olduğu bilinmektedir. Bu sebepten dolayı f iki defa türevlenebilir olmak şartıyla $f(x)$ fonksiyonunun x_0 civarındaki Taylor açılımı

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2}$$

şeklindedir. Konveks bir f fonksiyonu için $f''(x) > 0$ olduğundan

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ise $f(x) \geq r(x)$ olur. Yani konveks bir fonksiyon kendisinin tanjant eğrisinden büyük veya eşittir. Eğer $r(x)$ bu şekilde değilse $r(x) = f(x_0) + c(x - x_0)$, burada $c \in [f^-(x_0), f^+(x_0)]$. $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ ise $r(x) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + c\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$ olur. Dolayısıyla $f(x) \geq r(x)$ tir. Diğer taraftan konveksliğin tanımından

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ifadesi $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. Dolayısıyla $f(x) \leq s(x)$ tir. Netice itibariyle $r(x) \leq f(x) \leq s(x)$ tir. Bu eşitsizlik a dan b ye integre edilirse

$$\int_a^b r(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b s(x)dx$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b r(x)dx &= \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] dx \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + c\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b s(x)dx &= \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx \\
&= f(a)(b-a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx \\
&= \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)
\end{aligned}$$

ve böylece $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ yazılır (Ambrosio, 2007).

3.3.20. Hermite-Hadamard Eşitsizliği Üzerine Bir Not

Burada çok bilinen Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir genelleştirmesi çalışılacaktır.

3.3.20.1. Giriş ve Temel Sonuçlar

Analizde ve kısmi diferansiyel denklemlerde simetriye sahip eşitsizlikler oldukça önemli bir yer tutar. Bu eşitsizliklerden en bilineni ve yaygın olarak kullanılanı ilk olarak (Hadamard, 1893) de yayımlanan Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Bu nedenle elde edilen yeni genelleştirilmiş versiyonunun analiz ve kısmi diferansiyel denklemlerde önemli bir kullanıma sahip olabileceği düşüncesindeyiz.

$I=[a,b]$ olmak üzere tüm $x,y\in I$, $0\leq\lambda\leq 1$ ve $f:I\rightarrow R$ olsun. $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ oluyorsa f ye konvekstir denir. f nin, I üzerinde sürekli ve (a,b) açık aralığında iki defa türevlenebilir olabilmesi için gerek ve yeter şart tüm $x\in(a,b)$ için $f''(x)\geq 0$ olmasıdır.

Teorem.3.3.20.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $f:I\subseteq R\rightarrow R$ konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.3.20.1}$$

Bu eşitsizliğin tarihsel gelişimi için (Mitrinovic, 1985) e bakılabilir. Hermite-Hadamard ile ilgili çeşitli genelleştirmeler ve geliştirmeler üzerindeki araştırmalar için (Dragomir ve Pearce, 2000; Niculescu ve Persson, 2004) e bakılabilir. Burada keyfi negatif olmayan reel değerli integrallenebilir $\Phi:\mathrm{I}\rightarrow R$ fonksiyonunun

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\Phi(x)dx\right)\leq l\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f\circ\Phi(x)dx\leq L\leq\frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2} \tag{3.3.20.2}$$

ifadesini sağlayacak şekilde l ve L nin varlığını göstereceğiz.

İspatlamaya çalıştığımız (3.3.20.2) ifadesi (El Farrisi, 2010) de ifade edilen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le l \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le L \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.3.20.3}$$

denkleminin genelleştirilmiş versiyonudur.

Teorem 3.3.20.2. $f: R \to R$ konveks bir fonksiyon olsun. $f \circ \Phi(x)$ konveks olacak şekilde $\Phi : \mathrm{I} \to R$ negatif olmayan reel değerli integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu halde $n \in N, \lambda_0 = 0, \lambda_{n+1} = 1$ ve $0 \le \lambda_1 \le ... \le \lambda_n \le 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx\right) &\le l(\lambda_1,...,\lambda_n) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f\circ\Phi(x)dx \\ &\le L(\lambda_1,...,\lambda_n) \le \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.3.20.4}$$

Burada,

$$l(\lambda_1,...,\lambda_n) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) f\left(\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b} \Phi(x)dx\right),$$

$$L(\lambda_1,...,\lambda_n) = \sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{f\circ\Phi((1-\lambda_k)a+\lambda_k b) + f\circ\Phi((1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b)}{2}$$

(Gao, 2010).

Sonuç 1. $f, \Phi, f\circ\Phi$ yukarıda tanımlandığı gibi olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx\right) &\le \sup_{0\le\lambda_1\le...\le\lambda_n\le 1} l(\lambda_1,...,\lambda_n) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f\circ\Phi(x)dx \\ &\le \sup_{0\le\lambda_1\le...\le\lambda_n\le 1} L(\lambda_1,...,\lambda_n) \le \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.3.20.5}$$

Teorem 3.3.20.2. de $\Phi(x) = x$ ve $n = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2. I üzerinde $f: R \to R$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu halde $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq l(\lambda)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq L(\lambda)\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Burada

$$l(\lambda)=\lambda f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)+(1-\lambda)f\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right),$$
$$L(\lambda)=\frac{1}{2}\left(f(\lambda b+(1-\lambda)a)+\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\right).$$

Teorem 3.3.20.2. nin ispatı için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.3.20.3. (Jensen Eşitsizliği) $f:R\to R$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu halde negatif olmayan reel değerli integrallenebilir $\Phi:\mathrm{I}\to R$ için

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\circ\Phi(x)dx.$$

İspat. İspat için (Hardy ve ark, 1952) a bakınız.

İspat. (Teorem 3.3.20.2 nin İspatı) f ve $f\circ\Phi$ konveks olduklarından $f(x)$ ve Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı olan $f\circ\Phi(x)$ için Jensen eşitsizliği uygulanarak

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx\right)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\circ\Phi(x)dx\leq \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2} \tag{3.3.20.7}$$

elde edilir. $\lambda_0=0$ olduğundan $[a,(1-\lambda_1)a+\lambda_1 b]=[(1-\lambda_0)a+\lambda_0 b,(1-\lambda_1)a+\lambda_1 b]$

yazılır. $k=0,1,...,n$ için (3.3.20.7) ifadesi $[(1-\lambda_k)a+\lambda_k b,(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b]$ ye uygulanırsa

$$f\left(\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)dx\right)$$
$$\leq \frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b} f\circ\Phi(x)dx \tag{3.3.20.8}$$
$$\leq \frac{f\circ\Phi((1-\lambda_k)a+\lambda_k b)+f\circ\Phi((1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b)}{2}$$

elde edilir. (3.3.20.8) deki her terim $(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$ ile çarpılarak ve 0 dan n ye toplam alınarak

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)f\left(\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)dx\right)$$
$$\leq \frac{1}{(b-a)}\sum_{k=0}^{n}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b} f\circ\Phi(x)dx$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{f\circ\Phi((1-\lambda_k)a+\lambda_k b)+f\circ\Phi((1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b)}{2}$$

elde edilir. Yani $l(\lambda_1,...,\lambda_n)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\circ\Phi(x)dx \leq L(\lambda_1,...,\lambda_n)$ elde edilir. Burada $l(\lambda_1,...,\lambda_n)$ ve $L(\lambda_1,...,\lambda_n)$ Teorem 3.3.20.2 deki gibidir. Diğer iki eşitsizliğin ispatı için aşağıdaki yol takip edilir. Yani

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx\right)\leq l(\lambda_1,...,\lambda_n)\leq L(\lambda_1,...,\lambda_n)\leq \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2} \tag{3.3.20.9}$$

$f:R\to R$ ve $f\circ\Phi(x)$ konveks ve $\sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=1$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)dx\right) = f\left(\sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)dx\right) \\
& \leq \sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) f\left(\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)dx\right) \\
& \leq \sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{f\circ\Phi((1-\lambda_k)a+\lambda_k b)+f\circ\Phi((1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b)}{2} \\
& \leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(((1-\lambda_k)-(1-\lambda_{k+1}))((1-\lambda_k)+(1-\lambda_{k+1}))f\circ\Phi(a)) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(\lambda_{k+1}+\lambda_k)f\circ\Phi(b) \\
& = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\left((1-\lambda_k)^2-(1-\lambda_{k+1})^2\right)f\circ\Phi(a)+\left(\lambda_{k+1}^2-\lambda_k^2\right)f\circ\Phi(b)\right) \\
& = \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2}
\end{aligned}
$$

yazılır (Gao, 2010).

Örnek 1. $a_0 = a_{n+1} = 0$, $a_1,...,a_n \geq 0$ ve $a_i \neq 0$ olmak üzere Teorem 3.3.20.2. den $\lambda_k = \dfrac{\sum_{i=0}^{k} a_i}{\sum_{i=0}^{n} a_i}$ olacak şekilde en az bir a_i vardır. Bu halde, $c_k = (1-\lambda_k)a + \lambda_k b$ olmak üzere,

$$
l(\lambda_1,...,\lambda_n) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k}\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} f\left(\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{a_{k+1}(b-a)}\int_{c_k}^{c_{k+1}}\Phi(x)dx\right) \tag{3.3.20.10}
$$

$$
L(\lambda_1,...,\lambda_n) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k}\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}\frac{f\circ\Phi(c_k)+f\circ\Phi(c_{k+1})}{2} \tag{3.3.20.11}
$$

elde edilir.

Hermite-Hadamard Eşitsizliği ile ilgili daha fazla bilgi için (El Farissi, 2010), (Ambrosio) ve en önemli kaynak olarak da (Dragomir ve Pearce, 2000) e bakınız.

3.3.21. Jensen Eşitsizliği

$I \subset R$ bir aralık olsun f, I üzerinde tanımlı konveks bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ ise

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i f(x_i)\ .$$

Alternatif olarak, f konveks bir fonksiyon, $X \in \{x_i : 1,2,\ldots,N\}$ gelişi güzel (raslantısal) $P(x_i)$ olasılıklarına sahip bir değişken ve $\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1$ olsun. Bu halde,

$$f(E\{X\}) \leq E\{f(X)\}$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{N} f(x_i) P(x_i).$$

İspat. İspat tümevarım ile yapılacaktır. $N = 1$ olması halinde durum aşikardır. $N = 2$ için f fonksiyonunun konveks olduğu kullanılırsa

$$f(x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2)) \leq f(x_1) P(x_1) + f(x_2) P(x_2)$$

elde edilir. $N = k - 1$ için doğru olsun. Ayrıca, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için $P'(x_i) = P(x_i)/(1 - P(x_k))$ olsun.

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i) P(x_i) = (1 - P(x_k)) \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) P'(x_i) + f(x_k) P(x_k)$$

$$\geq (1 - P(x_k)) f\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i P'(x_i)\right) + f(x_k) P(x_k) \quad \text{(Kabulden)}$$

$$\geq f\left((1 - P(x_k)) \sum_{i=1}^{k-1} x_i P'(x_i) + x_k P(x_k)\right) \qquad (N = 2)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i P(x_i) + x_k P(x_k)\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i P(x_i)\right).$$

Bu ise istenilendir.

3.4. Türevleri İçeren Önemli Eşitsizlikler

3.4.1. Hardy-Littlewood Eşitsizliği

Teorem 3.4.1.1. f ve $f^{(n)}$, R üzerinde tanımlı, sınırlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $k = 0,1,\dots,n$ için,

$$M_k = \sup\left|f^{(k)}(x)\right| \qquad (x \in R)$$

olsun. Bu halde genel n değeri için

$$M_k^n \le C_{n,k}^n M_0^{n-k} M_n^k \tag{3.4.1.1}$$

olur. Burada $C_{n,k}$ sabittir.

Hadamard (1914), eşitsizliği (3.4.1.1) ifadesinin özel bir durumu olarak $C_{n,1} \le 2^{n-1}$ olduğunu gösterdi. Özel olarak $n = 2$ ve aynı k değerleri için

$$M_1^2 \le 2M_0 M_2 \tag{3.4.1.2}$$

geçerlidir (Mitrinovic, 1970).

3.4.2. Gorny'nin Eşitsizliğe Katkısı

I, uzunluğu δ olan kapalı bir aralık olsun. f, I aralığı üzerinde n defa türevlenebilir bir fonksiyon ve $|f(x)| \le M_0$ ve $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M_n$ olsun. Bu halde her $x \in I$ ve $0 < k < n$ için,

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \le 4e^{2k} \binom{n}{k}^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n'^{\frac{k}{n}}$$

elde edilir. I aralığının orta noktasında $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq 16(2e)^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n'^{\frac{k}{n}}$ elde edilir. Burada $M_n' = \max\left(M_n, M_0 n! \delta^{-n}\right)$ (Gorny, 1939; Mitrinovic, 1970).

Not. Eğer $I = (0,+\infty)$ veya $(-\infty,+\infty)$ ise $M_n' = M_n$ ve $(-\infty,+\infty)$ için herhangi bir nokta orta nokta gibi düşünülerek $C_{n,k} \leq 16(2e)^k$ elde edilir. Böylece $C_{n,k} \leq \dfrac{K_{n-k}}{K_n^{\frac{(n-k)}{n}}}$ elde edilir.

3.4.3. Kolmogoroff 'un Eşitsizliğe Katkısı

$$\left.\begin{cases} K_n = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}; & n \ \text{çift ise} \\ K_n = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^{n+1}}; & n \ \text{tek ise} \end{cases}\right\} \text{için } C_{n,k} \leq \frac{K_{n-k}}{K_n^{\frac{(n-k)}{n}}}.$$

Tüm n ve k değerleri için $1 < C_{n,k} < \dfrac{\pi}{2}$ ve $n \to +\infty$ için $C_{n,n-1} \to \dfrac{\pi}{2}$ ve $C_{n,1} \to 1$ dir (Kolmogoroff, 1939; Mitrinovic, 1970).

3.4.4. Steckin'in Eşitsizliğe Katkısı

$(0,+\infty)$ için a ve b pozitif sabitler olmak üzere

$$\left.\begin{cases} 1 \leq k \leq \dfrac{n}{2} \ \text{için}, & a\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leq C_{n,k} \leq A\left(\dfrac{e^2 n}{(4k)}\right)^k \\ \dfrac{n}{2} \leq k < n \ \text{için}, & a(n-k)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{n}{(n-k)}\right)^{n-k} \leq C_{n,k} \leq A\left(\dfrac{2n}{(n-k)}\right)^{n-k} \end{cases}\right\}.$$

Yine (3.4.1.2) denklemi yanında türevleri içeren eşitsizlikler de vardır. $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde f, n defa türevlenebilir bir fonksiyon ve $a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b$ olmak şartıyla $a_1,\ldots,a_n$, f fonksiyonunun kökleri olsun. Bu halde, $k=0,1,\ldots,n-1$ için aynı aralık üzerinde

$$\left|f^{(k)}(t)\right| \leq \frac{1}{(n-k)!}(b-a)^{n-k} \max_{a\leq t\leq b}\left|f^{(k)}(t)\right|$$

eşitsizliği vardır. Ayrıca bu eşitsizlik Bessmertnyh ve Levin (1962) tarafından geliştirildi.

Diğer önemli bir eşitsizlik ise

f, $\left|f(t)\right| \leq 1$ olmak şartıyla $(-1,1)$ aralığı içerisinde n defa türevlenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. $(-1,1)$ açık aralığının içinde bir J aralığı olsun. $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ olacak şekilde J_1, J_2, J_3 şeklinde ardışık parçalara ayrılsın ve J_2 nin uzunluğu μ ve $m_k(J) = \inf\left|f^{(k)}(t)\right|$ olsun. Bu halde,

$$m_k(J) \leq \frac{1}{\mu}\left(m_{k-1}(J_1) + m_{k-1}(J_3)\right) .$$

Bu eşitsizlikten $m_k(J) \leq \dfrac{2^{\frac{1}{2}k(k+1)} k^k}{\lambda^k}$ elde edilir. Burada λ, J nin uzunluğudur.

$F(x)$, $a \leq x \leq b$ aralığı içinde kompleks değerli iki defa sürekli türevlenebilir bir fonksiyon ve bu aralığın alt aralıklarının herhangi birinde sabit olmasın. Üstelik eğer $F(a)=0$, $F(b)=2\gamma \geq 0$ ve $\mu = \max\limits_{a\leq x\leq b}\left|\dot{I}m\ F(x)\right| > 0$ ise

$$\min_{a\leq x\leq b}\left|\frac{F'(x)^2}{F''(x)}\right| \leq \max\left(\mu, \frac{\gamma^2+\mu^2}{2\mu}\right)$$

elde edilir (Mitrinovic, 1970).

3.5. Türevleri İçeren İntegral Eşitsizlikleri

3.5.1. Wirtinger Eşitsizliği

Teorem 3.5.1.1. $f(x+2\pi)=f(x)$, f reel değerli ve $f' \in L^2$ olsun. Bu halde, eğer $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$ ise

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \le \int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx \qquad (3.5.1.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart A ve B sabit olmak üzere $f(x) = A\cos x + B\sin x$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

(3.5.1.1) eşitsizliği f üzerinde daha zayıf şartlar altında (f ve f', (a,b) aralığında sürekli, $f(a)=f(b)$ ve $\int_a^b f(x)dx = 0$),

$$\int_a^b f'(x)^2 dx \ge \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b f(x)^2 dx \qquad (3.5.1.2)$$

ile bilinmektedir. (3.5.1.1) ifadesi her ne kadar Wirtinger eşitsizliği olarak anılsa da (3.5.1.2) eşitsizliği (3.5.1.1) eşitsizliğinden daha önce ifade edilmiştir. (3.5.1.2) eşitsizliğine Almansı eşitsizliği denir.

(3.5.1.2) eşitsizliğinde f üzerine konulan şartlar daha da esnetilebilir. (3.5.1.2) eşitsizliğinden daha genel ve f ve f', sürekli fonksiyonlar, $f(a)=f(b)$ ve p, (a,b) açık aralığında pozitif ve sürekli fonksiyon ise

$$\frac{\int_a^b p(x) f(x)^2 dx}{\int_a^b f'(x)^2 dx}$$

problemini maksimize eden f fonksiyonu çalışıldı. (3.5.1.2) eşitsizliğinden önce ifade edilen

$$\frac{\iint_T p(x,y) f(x,y)^2 dxdy}{\iint_T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy} \tag{3.5.1.3}$$

ifadesinin maksimum değeri Schwarz (1885) tarafından çalışılmıştır.

$p(x,y)=1$ ve $\iint_T f(x,y)dxdy = 0$, T konveks bir bölge, l ise T bölgesi içinde iki noktayı birleştiren maksimal uzunluk olmak üzere (3.5.1.3) ifadesi için bir üst sınırın $\frac{7l^2}{24}$ olduğu Poincare (1894) tarafından verilmiştir. Poincare aynı zamanda f fonksiyonunun üç değişkeni olması halinde bir üst sınır vermiştir.

Benzer olarak T konveks bir bölge olmak üzere O noktasının T bölgesine olan minimum ve maksimum uzunluğu sırasıyla l ve L ve $\iint_T f(x,y)dxdy = 0$ olsun. Bu halde, $K = \min\left(\frac{3l}{2L^3}, \frac{1}{13L^2} \right)$ olmak üzere,

$$\frac{\iint_T p(x,y) f(x,y)^2 dxdy}{\iint_T \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy} \le \frac{1}{K}$$

olduğu Levi (1906) tarafından verilmiştir.

Levi (1913), farklı şartlar altında bu oranın değişik varyasyonlarını çalışmıştır.

(a,b) aralığında, $f(a)=f(b)=0$ olmak üzere f' sınırlı olan bir fonksiyon olsun. Hatta $|f(x)| < \alpha$ olsun. (a,b) aralığında ölçülebilir k_1 ve k_2 alt kümeleri yazılsın. Bu halde,

$$\int_a^b f(x)^2 dx \le \frac{(b-a)^2}{8}\int_{k_1} f'(x)^2 dx + \alpha(b-a)\int_{k_2} |f'(x)| dx,$$

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \le \frac{(b-a)^2+8}{16}\int_{k_1} f'(x)^2 dx + \alpha\left(\frac{b-a}{2}+1\right)\int_{k_2} |f'(x)| dx.$$

(3.5.1.2) ifadesinin genelleştirilmiş versiyonu Pleijel (1949) tarafından f reel değerli, $f(x+2\pi)=f(x)$ ve $f''\in L^2$ olmak şartıyla,

$$2\pi\frac{\int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx}{\int_0^{2\pi} f''(x)^2 dx}\int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx \le 2\pi\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \left(\int_0^{2\pi} f(x)dx\right)^2 \le 2\pi\int_0^{2\pi} f'(x)^2 dx$$

ile verilmiştir.

Bu tip eşitsizliklerin daha değişik varyasyonları ve yönlendirmeleri için (Mitrinovic, 1970) e bakınız.

$$y''(x)+p(x)y(x)=0, \qquad (3.5.1.4)$$

diferansiyel denklemini $a>0$ olmak şartıyla $(-a,a)$ aralığında ele alalım. Bu açık aralığın üzerinde f sürekli bir fonksiyon ve $y_1(x)>0$, (3.5.1.4) denkleminin bir çözümü ve $\int_{-a}^{+a} p(x)dx \ge 0$ olsun. Ayrıca, eğer $f(-a)=f(a)$, $f'\in L^2$ ve $\int_{-a}^{+a} p(x)f(x)dx=0$ ise $\int_{-a}^{+a} f'(x)^2 dx \ge \int_{-a}^{+a} p(x)f(x)^2 dx$ eşitsizliği sağlanır.

Eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $f(x)=Ay_1(x)$ olmasıdır. Burada $y_1(-a)\ne 0$ yada $y_1(a)\ne 0$ ise $A=0$ dır.

Bu eşitsizliklerin buna benzer bir analoğu olan $\int_{-a}^{+a} f''(x)^2 dx \ge \int_{-a}^{+a} p(x)f(x)^2 dx$ eşitsizliği Beesack (1958) tarafından çalışılmıştır (Mitrinovic, 1970).

3.5.2. Opial Eşitsizliği

Teorem 3.5.2.1. $[0,h]$ aralığı üzerinde f' sürekli bir fonksiyon ve eğer $f(0)=f(h)=0$ ve $x\in(0,h)$ için $f(x)>0$ ise

$$\int_0^h |f(x)f'(x)|dx \le \frac{h}{4}\int_0^h f'(x)^2\,dx \tag{3.5.2.1}$$

yazılır. Burada $\frac{h}{4}$ sabiti olabilecek en iyi sabittir (Mitrinovic, 1970).

Yukarıdaki f fonksiyonu esnetilerek aşağıdaki eşitsizlik Olech (1960) tarafından verilmiştir.

Teorem 3.5.2.2. f, $[0,h]$ aralığı üzerinde mutlak değerce sürekli bir fonksiyon ve $f(0)=f(h)=0$ ise (3.5.2.1) eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$f(x)=\begin{Bmatrix} f(x)=cx; & 0\le x\le \dfrac{h}{2} \\ f(x)=c(h-x); & \dfrac{h}{2}\le x\le h \end{Bmatrix}$$

olmasıdır. Burada c sabittir (Mitrinovic, 1970).

Olech (1960)'in ispatı Opial (1960)'in ispatından daha basittir. (3.5.2.1) eşitsizliğinin ispatını verelim.

Teorem 3.5.2.3. g, $[0,a]$ kapalı aralığı üzerinde mutlak değerce sürekli bir fonksiyon ve eğer $g(0)=0$ ise

$$\int_0^a |g(x)g'(x)|dx \le \frac{a}{2}\int_0^a g'(x)^2\,dx \tag{3.5.2.2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\frac{a}{2}$ olabilecek en iyi sabittir.

(3.5.2.2) ifadesinde eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart c sabit olmak şartıyla $g(x)=cx$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

İspat. (3.5.2.2) ifadesinde sırasıyla $f=g,\ a=\frac{h}{2}$ ve $g(x)=f(h-x),\ a=\frac{h}{2}$ ise

$$\int_0^{\frac{h}{2}}|f(x)f'(x)|dx \le \frac{h}{4}\int_0^{\frac{h}{2}} f'(x)^2\,dx,$$
$$\int_0^{\frac{h}{2}}|f(h-x)f'(h-x)|dx \le \frac{h}{4}\int_0^{\frac{h}{2}} f'(h-x)^2\,dx$$

eşitsizliği elde edilir. $\int_0^{\frac{h}{2}}|f(h-x)f'(h-x)|dx \le \frac{h}{4}\int_0^{\frac{h}{2}} f'(h-x)^2\,dx$ eşitsizliğinde $h-x=t$ denilerek $\int_0^{\frac{h}{2}}|f(x)f'(x)|dx \le \frac{h}{4}\int_0^{\frac{h}{2}} f'(x)^2\,dx$ eşitsizliği ile toplanırsa (3.5.2.1) eşitsizliği elde edilir.

Olech (1960)'in ispatından daha basit ispatlar verilmiştir. Bu ispatlardan bir tanesi Mallows (1965) tarafından verilmiştir.

$0\le x\le a$ için $h(x)=\int_0^x|g'(t)|dt$ olsun. Bu halde, $0\le x\le a$ için $|g(x)|\le h(x)$ ve böylece,

$$2\int_0^a|g'(x)g(x)|dx \le 2\int_0^a h'(x)h(x)dx = h(a)^2 \tag{3.5.2.3}$$

yazılır. Bu sebeple Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliğinden

$$h(a)^2=\left(\int_0^a|h'(x)|dx\right)^2 \le \int_0^a dx\int_0^a h'(x)^2\,dx = a\int_0^a|g'(x)|^2dx \tag{3.5.2.4}$$

yazılabilir. (3.5.2.3) ve (3.5.2.4) ifadelerinin karşılaştırılmasından (3.5.2.2) eşitsizliği elde edilir.

(3.5.2.4) ifadesindeki eşitliğin (yani (3.5.2.2) ifadesindeki eşitliğin) olabilmesi için gerek ve yeter şart $g(x) = cx$ olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.5.2.4. $(-\infty \le a < X < +\infty)$ olmak üzere p fonksiyonu (a, X) aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon ve $\int_a^X \frac{1}{p(x)} dx < +\infty$ olsun. Ayrıca $[a, X]$ aralığı üzerinde f fonksiyonu mutlak değerce sürekli olsun. $a \le x \le X$ için $f(x) = \int_a^x f'(t)dt;$ $x \to a+$ için $f(x)^2 = O\left(\int_a^x \frac{dt}{p(t)}\right)$ olması halinde

$$\int_a^X |f(x)f'(x)| dx \le \frac{1}{2} \int_a^X \frac{dx}{p(x)} \int_a^X p(x) f'(x)^2 dx$$

eşitsizliği doğrudur.

Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $f(x) = c\int_a^x \frac{dt}{p(t)}$ olmasıdır. Burada c sabittir (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.5.2.5. p, (a, b) açık aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon ve $\int_a^b \frac{dx}{p(x)} < +\infty$ olsun. f fonksiyonu $[a, X], [X, b]$ aralıklarının her alt aralığında mutlak değerce sürekli ve $a \le x \le X$ için $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$; $X \le x \le b$ için $f(x) = -\int_x^b f'(t)dt$; $x \to a+$ için $f(x)^2 = O\left(\int_a^x \frac{dt}{p(t)}\right)$; $x \to b-$ için $f(x)^2 = O\left(\int_x^b \frac{dt}{p(t)}\right)$ varsa

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \le \frac{K}{2} \int_a^b p(x) f'(x)^2 dx \tag{3.5.2.5}$$

yazılır. Burada X ve K, $\int_a^X \frac{dt}{p(t)} = \int_X^b \frac{dt}{p(t)} = K$ ile belirlenir.

Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $f(x)=\begin{cases} A\int_a^x \frac{dt}{p(t)}; & a \le x < X \\ B\int_x^b \frac{dt}{p(t)}; & X < x \le b \end{cases}$

olmasıdır (Mitrinovic, 1970).

Opial eşitsizliği bu son teoremde $a=0$ ve $p(x)=1$ alınarak elde edilir.

Teorem 3.5.2.4' ün genelleşmiş versiyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.5.2.6. $[a,X]$ kapalı aralığı üzerinde p pozitif bir fonksiyon, $\int_a^X \frac{dx}{p(x)} < +\infty$ ve q, pozitif, sınırlı ve artmayan bir fonksiyon olsun. Eğer f, $[a,X]$ aralığı üzerinde sürekli ve $f(a)=0$ ise

$$\int_a^X q(x)|f(x)f'(x)|dx \le \frac{1}{2}\int_a^X \frac{dx}{p(x)}\int_a^X p(x)q(x)f'(x)^2\,dx$$

elde edilir.

Eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $q(x)$ in sabit ve $f(x)=c\int_a^x \frac{dt}{p(t)}$ olmasıdır. Burada c sabittir (Mitrinovic, 1970).

Teorem 3.5.2.5'in genelleşmiş versiyonu da Teorem 3.5.2.6'dan elde edilir.

Opial eşitsizliğinin diğer yöndeki farklı varyasyonları aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.5.2.7. f, $[a,b]$ aralığı üzerinde mutlak değerce sürekli ve $f(a)=0$ ise tüm $p \ge 0$ ve $q \ge 1$ için

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q\,dx \le \frac{q}{p+q}(b-a)^p\int_a^b |f'(x)|^{p+q}\,dx \text{ (Mitrinovic, 1970).} \qquad (3.5.2.6)$$

Yukarıdaki teoremde eğer $f(a)=f(b)=0$ ise aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.5.2.8. f, $[a,b]$ aralığı üzerinde mutlak değerce sürekli ve $f(a)=f(b)=0$ ise tüm $p \geq 0$ ve $q \geq 1$ için,

$$\int_a^b |f(x)|^p |f'(x)|^q dx \leq \frac{q}{p+q}\left(\frac{b-a}{2}\right)^p \int_a^b |f'(x)|^{p+q} dx. \tag{3.5.2.7}$$

Daha fazla bilgi ve yönlendirme için (Mitrinovic, 1970) e bakınız.

3.6. Çeşitli İntegral Eşitsizlikleri

Bu kısımda bazı integral eşitsizlikleri, analitik yaklaşım ve tümevarım kullanılarak ifade edilmiştir.

Önerme 3.6.1. $f(x)$, (a,b) açık aralığında türevlenebilir ve $f(a)=0$ olsun. Eğer $0 \leq f'(x) \leq 1$ ise,

$$\int_a^b [f(x)]^3 dx \leq \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \tag{3.6.1}$$

Eğer $f'(x) \geq 1$ ise (3.6.1) eşitsizliği yön değiştirir. Eğer $f(x) \equiv 0$ veya $f(x) = x-a$ ise (3.6.1) ifadesinde eşitlik oluşur (Qi, 2000).

İspat. $a \leq t \leq b$ için $F(t) = \left(\int_a^t f(x)dx\right)^2 - \int_a^t [f(x)]^3 dx$ olsun. Basit bir hesaplama ile

$$F'(t) = \left\{2\int_a^t f(x)dx - [f(t)]^2\right\} f(t) = G(t)f(t)$$

$$G'(t) = 2[1-f'(t)]f(t).$$

$f'(t) \geq 0$ ve $f(a)=0$ olduğundan, $f(t)$ artan , $f(t) \geq 0$.

Aşağıdaki karşılaşılabilecek durumları değerlendirelim.

1. $0 \leq f'(t) \leq 1$ olduğunda $G'(t) \geq 0$ olur. $G(a) = 0$ olduğundan $G(t)$ artan ve $G(t) \geq 0$. Bu sebeple, $F'(t) = G(t) f(t) \geq 0$, yani $F(t)$ artandır. $F(a) = 0$ olduğundan $F(t) \geq 0$ ve $F(b) \geq 0$. (3.6.1) eşitsizliği geçerlidir.

2. $f'(t) \geq 1$ için $G'(t) \leq 0$ olur. Yani $G(t)$ azalandır. $F'(t) \leq 0$. Dolayısıyla, $F(t)$ azalandır. Bu halde $F(t) \leq 0$ dır. Yani (3.6.1) eşitsizliği yön değiştirir.

3. $f'(t) = 1$ veya $f(t) = 0$ olması halinde eşitlik olduğundan $f(t) = t + c$ (3.6.1) ifadesinde yerine yazılarak $c = -a$ kullanılırsa $f(t) = t - a$ elde edilir (Qi, 2000).

Sonuç 1. $f(x)$, $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon, $f(0) = 0$ ve $x \in (0,1)$ için $0 \leq f'(x) \leq 1$ olsun. Bu halde,

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \tag{3.6.2}$$

(3.6.2) ifadesindeki eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $f(x) = 0$ veya $f(x) = x$ olmasıdır.

Önerme 3.6.2. $f(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında n. dereceden sürekli türevlenebilen fonksiyon ve $0 \leq i \leq n-1$ için $f^{(i)}(a) \geq 0$ ve $f^{(n)}(x) \geq n!$ olsun. Bu halde

$$\int_a^b [f(x)]^{n+2} dx \geq \left(\int_a^b f(x) dx \right)^{n+1} \tag{3.6.3}$$

İspat. $t \in [a,b]$ için

$$H(t) = \int_a^t [f(x)]^{n+2} dx - \left(\int_a^t f(x) dx \right)^{n+1} \tag{3.6.4}$$

olsun. Buradan,

$$H'(t) = \left\{ [f(x)]^{n+1} - (n+1) \left[\int_a^t f(x) dx \right]^n \right\} f(t) = h_1(t) f(t) \, ,$$

$$h_1'(t)=(n+1)\left\{[f(x)]^{n-1}f'(t)-n\left[\int_a^t f(x)dx\right]^{n-1}\right\}f(t)=(n+1)h_2(t)f(t) \ ,$$

$$h_2'(t)=\left\{[f(x)]^{n-2}f''(t)+(n-1)[f(t)]^{n-3}[f'(t)]^2-n(n-1)\left[\int_a^t f(x)dx\right]^{n-2}\right\}f(t)=h_3(t)f(t).$$

Tümevarım ile $2\le i\le n$ için

$$\begin{aligned}&p_2(t)=(n-1)[f(t)]^{n-3}[f'(t)]^2\\&p_{i+1}(t)f(t)=p_i'(t)+(n-i)f^{(i)}(t)[f(t)]^{n-i-1}f'(t)\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

olduğundan

$$h_i'(t)=\left\{f^{(i)}(t)[f(t)]^{n-i}+p_i(t)\frac{n!}{(n-i)!}\left[\int_a^t f(x)dx\right]^{n-i}\right\}f(t)=h_{i+1}(t)f(t) \tag{3.6.5}$$

olduğu sonucuna varılır.

$0\le i\le n-1$ için $f^{(n)}(t)\ge n!$ ve $f^{(i)}(a)\ge 0$ olduğundan $f^{(i)}(t)\ge 0,\ 0\le i\le n-1$ için artandır. Tümevarım kullanılarak

$$p_i(t)=\sum_{j_0+\sum_{k=1}^{i-1}k.j_k=n-1}C(j_0,j_1,...,j_{i-1})\prod_{k=0}^{i-1}\left[f^{(k)}(t)\right]^{j_k} \ ,$$

olduğunu görmek kolaydır. Burada $0\le k\le i-1$ için j_k ve $C(j_0,j_1,...,j_{i-1})$ negatif olmayan tamsayılardır.

Bu nedenle $p_k'(t)\ge 0$ ve $p_{k+1}(t)\ge 0$ elde edilir ve $2\le k\le n$ için $p_{k-1}'(t)$ ve $p_k(t)$ artandır. Basit hesaplamayla $h_{n+1}(t)=f^{(n)}(t)+p_n(t)-n!$ elde edilir. $f^{(n)}(t)\ge n!$ olduğu göz önüne alınırsa $h_{n+1}(t)\ge 0$ ve $h_n'(t)\ge 0$ elde edilir. Bu halde, $h_n(t)$ artandır. $h_i(t)$ tanımından $1\le i\le n-1$ için $h_{i+1}(a)=f^{(i)}(a)[f(a)]^{n-i}+p_i(a)\ge 0$ elde edilir. Bu nedenle i üzerinde tümevarım kullanılırsa $1\le i\le n$ için $h_i'(t)\ge 0, h_i(t)\ge 0$

ve $h_i(t)$ nin artan olduğu elde edilir. O zaman $H'(t) \geq 0$ ve artandır. Dolayısıyla (3.6.3) eşitsizliği $H(b) \geq 0$ ile elde edilir. Böylece (3.6.2) önermesi ispatlanmış olur (Qi, 2000).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu çalışma henüz tam olarak istenen hedefe ulaşmamıştır. Bunun en önemli sebeplerinden bir tanesi, işlenen her bir eşitsizliğin ayrı bir derinlik ve inceleme gerektirmesidir. Ayrıca, işlenen eşitsizliklerin bazıları için genelleştirilmiş varyasyonları literatürde detaylı bir şekilde taranmamıştır.

Buna rağmen, mevcut çalışma eşitsizlikler teorisi ve ülkemizde bu yönde çalışmak isteyenler için iyi bir katalog teşkil etmektedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tezde birçok eşitsizlik detaylı bir irdeleme gerektirmektedir. Öneri olarak ise detaylı bir irdeleme yapılırsa hedeflenen sonuca varılmış olur.

KAYNAKLAR

ACZEL, J., 1956. Some General Methods in the Theory of Functional Equations in One Variable. New Applications of Functional Equations. Uspehi Mat. Nauk (N.S) 11, 3 (69): 3-68.

ADAMOVIC, D. D., 1964. Generalisation D'une Identite De Hlawka Et De L'Inegalite Correspondante. Mat. Vesnik, 1 (16): 39-43.

AMBROSIO, A., 2007. Proof of Hermite-Hadamard integral inequality (version 4). PlanetMath.org.http://planetmath.org/ProofOfHermiteHadamardIntegralInequality.html.

BECKENBACH, E. F. and BELLMAN R., 1965. Inequalities. 2nd ed., Berlin-Hiedelberg-Newyork.

BECKENBACH, E. F. and BELLMAN, R., 1983. Inequalities. Springer, Berlin.

BEESACK, P. R., 1958. Integral inequalities of the Wirtinger type. Duke Math. J., 25: 477-498.

BELLMAN, R., 1956. On an Inequality Concerning An Indefinite Form. Amer. Math. Monthly, 63: 108-109.

BESSMERTNYH, G. A., and YU LEVIN, A., 1962. Some bounds for differentiable functions of one variable. Doklady Akad. Nauk, SSSR 144: 471-474.

BUSHELL, P. J., and MCLEOD, J. B., 2002. Shapiro's cyclic inequality for even n. J. of Inequal. & Appl., 7: 331-348.

CARLEMAN, T., and HARDY, G. H., 1922. Fourier series and analytic functions. Proc. Royal Soc. A, 101: 124-133.

DAYKIN, D. E. and ELIEZER C. J., 1968. Generalization of Hölder's and Minkowski's Inequalities. Proc. Cambridge Phil. Soc., 64(4): 1023-1027.

DRAGOMIR, S. S. and PEARCE C. E. M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities. (RGMIA Monographs http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermitehadamard.html) Victoria University. 361p.

DIAZ, J. B., and METCALF, F. T., 1970. An analytic proof of Young's inequality. Amer. Math. Monthly, 77(6): 603-609.

DUNCAN, J., and MCGREGOR, C. M., 2003. Carleman's Inequality. Amer. Math. Monthly, 110(5): 424-431.

DUNKEL, O., 1924. Integral Inequalites with Applications to the Calculus of Variations. Amer. Math. Monthly, 31: 326-337.

EL FARISSI, A., 2010 Simple Proof and Refinement of Hermite-Hadamard Inequality. Journal of Mathematical Inequalities, 4(3): 365-369.

GAO, X., 2010. A Note on the Hermite-Hadamard Inequality. Journal of Inequalities, 4(4): 587-591.

GERBER, L., 1968. An Extension of Bernoulli's inequality. Amer. Math. Monthly, 75: 875-876.

GORNY, A., 1939. Contribution a l'etude des fonctions derivables d'une variable reelle. Acta Math., 71: 317-358.

GRÜSS, G., 1935. Über Das Maximum Des Absoluten Betrages Von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx.$ Math. Z., 39: 215-226.

GUHA, U. C., 1962. Inequalities leading to Generalizations of Schur's Inequality. Math. Gaz., 46: 227-229.

HADAMARD, J., 1893. Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d'une fonction consideree par Riemann. J. Math. Pures Appl., 58: 171-215.

HADZIIVANOV, N., and PRODANOV I., 1965. Bernoulli's Inequalities. Fiz. Mat. Spis.. Bulgar. Akad. Nauk, 8 (41): 115-120.

HARDY, G. H., 1915. Notes on some points in the integral calculus, XLI. On the convergence of certain integrals and series. Messenger of Math, 45: 163-166.

HARDY, G. H., 1919. Notes on some points in the integral calculus, LI. On Hilbert's double-series theorem and some connected theorems concerning the convergence of infinite series and integrals. Messenger of Math, 48: 107-112.

HARDY, G. H., 1920. Notes on a Theorem of Hilbert. Math. Z., 6: 314-317.

HARDY, G. H., 1925. Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals. Messenger of Math, 54: 150-156.

HARDY, G., LITTLEWOOD, J. E. and POLYA, G., 1952. Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge, MA, 314p.

HARDY, G., LITTLEWOOD, J. E. and POLYA, G., 1952. Inequalities. 2nd ed., Cambridge.

HAYASHI, T., 1919. On Curves with Monotonous Curvature. Tohoku Math. J., 15: 226-239.

HORNICH, H., 1942. Eine Ungleichung Für Vektorlangen. Math. Z., 48: 268-274.

HÖLDER, O., 1889. Über Einen Mittelwerthssatz. Nachr. Ges.Wiss. Göttingen, 38-47.

HUYGENS, C., Oeuvres Completes 1888-1940, Societe Hollondaise des Science, Haga.

JANET, M., 1930. Sur une suite de fonctions consideree par Hermite et son application a un probleme de calcul des variations. C. R. Acad. Sci. Paris, 190: 32-34.

JENSEN, J. L. W. V., 1906. Sur Les Fonctions Convexes Et Les Inegalites Entre Les Valeurs Moyennes. Acta Math., 30(1): 175-193.

JOHANSSON, M., PERSSON, L. E., and WEDESTING, A., 2003. Carleman's Inequality-History, Proofs and Some New Generalizations. J. of Inequal. & Appl., 4(3): article 53, 1-42.

KLEN, R., VISURI, M., and VUORINEN, M., 2010. On Jordan type Inequalities for Hyperbolic Functions. J. of Inequal. & Appl., 2010 (article. ID 362548): 14 pages.

KOLLMOGROFF, A., 1939. On inequalities between upper bounds of consecutive derivaties of an arbitrary function defined on an infinite interval. Ucen. Zap. Moskov. Gos. Univ. Mat., 30: 3-16.

KUFNER, A,. and PERSSON, L. E., 2003. Weighted Inequalities of Hardy Type. World Scientific, Singapore, 355p.

KUFNER, A., MALIGRANDA, L., and PERSSON, L. E., 2006. The Prehistory of the Hardy Inequality. Amer. Math. Monthly, 113(8): 715-732.

LANDAU, E., 1921. Letter to G. H. Hardy.

LANDAU, E., 1924. Letter to G. H. Hardy.

LEVI, E. E., 1906. Su un lemma del Poincare. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl Sci. Fis. Mat. Natur., 15(5): 83-89 and 353-358.

LEVI, E. E., 1913. Sui criteri sufficienti per il massimo e per il minimo nel calcolo delle variazioni. Ann. Mat. Pura Appl., 21(3): 173-218.

LV, Y., WANG, G., and CHU, Y., 2012. A note on Jordan type Inequalities for Hyperbolic Functions. Applied Mathematics Letters, 25: 505-508.

MAKAROV, B. M., GOLUZINA, M. G., LODKIN, A. A., and PODKORYTOV, A. N., 1992. Selected Problems in Real Analysis, Transl. of Math. Monographs, American Mathematical Society, Providence.

MALLOWS, C. L., 1965. An even simpler proof of Opial's Inequality. Proc. Amer. Math. Soc., 16: 173.

MITRINOVIC, D. S., 1970. Analytic Inequalities. Germany Library of Congrees Catalog, Berlin, 400p.

MITRINOVIC, D. S. and LACKOVIC, I. B., 1985. Hermite and Convexity. Aequationes Math., 28: 229-232.

MITRINOVIC, D. S., PECARIC, J. E. and FINK, A. M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 740p.

NEUMAN, E., 2012. Inequalities Involving Hyperbolic Functions and Trigonometric Functions. Bulletin of International Mathematical Virtual Institute, 2: 87-92.

NICULESCU, C. and PERSSON L. E., 2004. Old and New on the Hermite-Hadamard Inequality. Real Analysis Exchange, 29(2): 663-685.

OLESZKIEWICZ, K., 1993. An Elementary proof of Hilbert's Inequality. Amer. Math. Monthly, 100(3): 276-280.

PLEIJEL, A., 1949. An Inequality. Mat. Tidsskr. A, 67-69.

POINCARE, H., 1894. Sur les equations de la physique mathematique. Rend. Circ. Mat. Palermo, 8: 57-156.

POPOVICIU, T., 1959. On an Inequality. Gaz. Mat. Fiz. A, 11 (64): 451-461.

QI, F., 2000. Several Integral Inequalities. J. Ineq. Pure and Appl. Math., 1(2) art. 19: 2-7.

REDHEFFER, R., 1969. Problem 5642. Amer. Math. Monthly, 76 (4): 442.

RIESZ, F., 1928. Su Alcune Disiguaglianze. Boll. Un. Mat. Ital., 7: 77-79.

ROSS, S., 1994. A First Course in Probability. Macmillan Collage Company, Inc. Newyork.

SANDOR, J., and BENCZE, M., 2005. On Huygens trigonometric inequality. RGMIA Res. Rep. Collection, 8(3): article 14.

SASSER, D. W., and SLATER, M. L., 1967. On the inequality $\sum x_i y_i > \left(\frac{1}{n}\right)\sum x_i \sum y_i$ and the van der Waerden permanent conjecture. J. Comb. Theory, 3: 25-33.

SEITZ, G., 1936-1937. Une Remarque Aux Inegalites. Aktuarske Vedy, 6: 167-171.

SHAPIRO, H. S., 1954. Advanced problem 4603. Amer. Math. Monthly, 61: 571.

STECKIN, S. B., 1967. Inequalities between the upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function on the half-line. Mat. Zametki, 1: 665-674.

STEELE, J.M., 2004. The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities. Cambridge University Press, UK, 306p.

STEFFENSEN, J. F., 1918. On Certain Inequalities Between Mean Values, and Their Aplication to Actuarial Problems. Skand. Aktuarie tidskr., 82-93.

TANRIVERDİ, T., 2012. Reverse Shapiro type inequality. Int. Journal of Math. Analysis, 6(38): 1871-1875.

WILLIAMS, J. B., 1969. A Delightful inequality. Amer. Math. Monthly, 76 (10): 1153-1154.

YOUNG, W.H., 1912. On Classes of Summable Functions and Their Fourier Series. Proc. Roy. Soc. London A, 87: 225-229.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Hatay'ın Samandağ ilçesinde doğdu. İlk ve Orta Öğrenimini Hatay'da tamamladı. 2004 yılında kazandığı Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2008 yılında mezun oldu. 2008-2009 eğitim-öğretim yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezsiz yüksek lisansını tamamladı. 2009-2010 eğitim öğretim yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans programına başladı.

Şu anda Şanlıurfa Siverek'te Mustafa Kemal Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

ÖZET

Bu tezde çok bilinen klasik eşitsizlikler ispatlarıyla birlikte sistematik bir disiplin içerisinde çalışıldı.

Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliği, Abel eşitsizliği, Jordan eşitsizliği, Bernoulli eşitsizliği, Chebysev eşitsizliği, Young eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Aczel eşitsizliği, Grüss eşitsizliği, Steffensen eşitsizliği, Schur eşitsizliği, Shapiro eşitsizliği, Hilbert eşitsizliği, Hardy eşitsizliği, Hardy-Landau eşitsizliği, Carleman eşitsizliği, Polya-Knopp eşitsizliği (Carleson eşitsizliği), Hermite-Hadamard eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, Hardy-Littlewood eşitsizliği, Wirtinger eşitsizliği, Opial eşitsizliği ve çeşitli integral eşitsizlikleri çalışıldı.

SUMMARY

In this thesis, the well known classical inequalities including their proofs are studied with a systematic discipline.

Cauchy-Buniakowski-Schwarz inequality, Abel’s inequality, Jordan’s inequality, Bernoulli’s inequality, Chebysev’s inequality, Young’s inequality, Hölder’s inequality, Minkowski’s inequality, Aczel’s inequality, Grüss’ inequality, Steffensen’s inequality, Schur’s inequality, Shapiro’s inequality, Hilbert’s inequality, Hardy’s inequality, Hardy-Landau inequality, Carleman’s inequality, Polya-Knopp inequality, Hermite-Hadamard inequality, Jensen’s inequality, Hardy-Littlewood inequality, Wirtinger’s inequality, Opial’s inequality and several integral inequalities are studied.