T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HEİSENBERG UZAYININ GEODEZİKLERİ

Selahattin ASLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2013

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEİSENBERG UZAYININ GEODEZİKLERİ

Selahattin ASLAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Abdullah YILDIRIM
Yıl: 2013, Sayfa: 52

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı ile bu çalışmada geçen tanım ve teoremleri içeren ana kavramlara ayrılmıştır. İkinci bölümde tez ile ilgili materyal ve yöntemler verilmiştir. Üçüncü bölümde çalışmanın orijinal kısmı, Simplektik lineer uzay ve Lie parantez operatöründen yararlanarak Heisenberg cebirini elde ettik. Bununla birlikte standart simplektik lineer uzayının Heisenberg cebirini göz önünde bulundurarak $(2n+1)$-boyutlu Heisenberg grubunun tanımı verilmiştir. Son olarak 3-boyutlu Heisenberg uzayının matris grup modeli, standart sol invaryant metrikleri ve geodezikleri gösterdik. Son bölümde ise tez ile ilgili sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Heisenberg cebir, Heisenberg grup, Simplektik lineer uzay, Geodezik.

ABSTRACT

Master Thesis

GEODESİCS OF HEİSENBERG SPACE

Selahattin ASLAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Abdullah YILDIRIM
Year: 2013, Page: 52

This thesis consist of four chapters. First chapter is devoted to the introduction and the main concepts which is mentioned in definitions and theorems. In chapter second shown that material and method in connection with thesis. In chapter third are the original part of the study, and we have obtained Heisenberg algebra by means of symplectic linear space and Lie brackets. Moreover, we introduced $(2n+1)-$dimensional Heisenberg group by means of standard symplectic linear space and Heisenberg algebra. Finally, we have showed matrix group model of N^3, standard left invariant metrics of N^3 and geodesics of N^3 In the last chapter we have shown results and recommendations in connection with thesis.

KEY WORDS: Heisenberg algebra, Heisenberg group, Symplectic linear space, Geodesic.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren, çalışmamın her aşamasında yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, yol gösteren ve yardımlarını benden esirgemeyen saygıdeğer tüm hocalarıma saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Akademik çalışmam konusunda bana maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve değerli dostlarıma teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

C	: Komplaks Sayılar
G	: Grup
GL	: Genel Lineeer grup
J	: Jakobien Matris
$\bar{K}$	: Kesitsel Eğrilik
N^3	: Heisenberg Uzayı
R	: Reel Sayılar
$T_M(P)$	: Tanjant Uzayı
V	: Vektör Uzayı
$<,>$	: İç Çarpım
$\wedge$	: Vektörel Çarpım

1 KURAMSAL TEMELLER

Karl Werner Heisenberg (1925) ve Erwin Schrödinger (1926) çok yakın zamanlarda birbirlerinden bağımsız olarak atomun kuantum (dalga) mekaniğini farklı olarak, fakat matematik yönünden eşit şekilde formüllendirdiler. Bu teoriler 1928 senesinde İngiliz teori fizikçisi Paul Dirac tarafından genişletilip geliştirildi. 1927'de Leipzig Üniversitesi fizik profesörlüğüne tayin edildi. Aynı yıl meşhur belirsizlik prensibini ortaya koydu. Matematikte, Warner Heisenberg den sonra isimlendirilen Heisenberg grubu $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ formunun 3×3 üst üçgen matrisin grubudur. a, b ve c elemanları tamsayı veya reel sayı olabilir. Gerçek Heisenberg grubu 3-boyutlu kuantum mekaniğinin tanınmasıyla ortaya çıkar. Daha genel olarak n-boyutlu sistemlere ve en genel olarak herhangi bir simplektik vektör uzayına ilişkilendirilen grupları düşünebiliriz.

Biz burada Simplektik lineer uzay ve Lie parantez operatöründen yararlanarak Heisenberg cebirini tanımladık. Bununla birlikte standart Simplektik uzayının Heisenberg cebirini göz önünde bulundurarak $(2n+1)$-boyutlu Heisenberg grubunu tanımladık. Daha sonra 3-boyutlu Heisenberg uzayının matris grup modeli, standart sol invaryant metrikleri ve son olarak olarak geodezikleri incelenmiştir.

1.1 Ana Kavramlar

Tanım 1.1.1. Boş olmayan bir G cümlesi ile aşağıdaki üç aksiyoma uyan bir

$$T : \quad (x, y) \in G \times G \quad \rightarrow \quad xTy \in G$$

iç işleminden oluşan (G, T) ikilisine bir grup denir.

1. T birleşimlidir: Bütün $x, y, z \in G$ elemanları için

$$(xTy)Tz = xT(yTz)$$

2. T için G de bir tek e birim elemanı vardır: $\forall x \in G$ için

$$eTx = xTe = x$$

3. $\forall x \in G$ elemanının T için G de bir x' inversi vardır:

$$xTx' = x'Tx = e.$$

T işlemine bir grup işlemi denir. (G,T) grubu anlamında bazen kısaca "G grubu" da denir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.2. Eğer (G,T) grubunda T grup işlemi değişimli ise, yani, $xTy = yTx$ ise (G,T) grubuna değişimli grup veya Abel grup denir. Aksi halde gruba sadece "grup" veya değişimsiz grup denir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.3. Boş olmayan bir H cümlesi iki T, $\perp$ iç işlemlerinden oluşan $(H,T,\perp)$ üçlüsünü ele alalım. Eğer (H,T) bir Abel grubu iken ikinci iç işlem olan $\perp$, H da birleşimli ise ve birinci işlem üzerine dağılımlı ise $(H,T,\perp)$ üçlüsüne bir halka denir.

Bu tanımda geçen halka aksiyomlarını şöyle sıralayabiliriz. Birinci işlem T (Abel grubu işlemi) nin sağlanması gereken aksiyomlar;

1. $T : (x,y) \in H \times H \to xTy \in H$, $\forall x,y \in H$ (Kapalılık aksiyomu)
2. $(xTy)Tz = xT(yTz)$, $\forall x,y,z \in H$ (Birleşim aksiyomu)
3. $xTe = eTx = x$, $\forall x \in H$ (Birim elemanının varlığı aksiyomu)
4. $xTx' = x'Tx = e$, $x' \in H$ (Ters elemanın varlığı aksiyomu)
5. $xTy = yTx$ (Değişim aksiyomu).

Bu aksiyomlarla (H,T) bir değişimli grup olur. İkinci işlem $\perp$ nin sağlaması gereken aksiyomlar:

1. $\perp : (x,y) \in H \times H \to x\perp y \in H$, $\forall x,y \in H$ (Kapalılık aksiyomu)
2. $(x\perp y)\perp z = x\perp(y\perp z)$ (Birleşim aksiyomu)
3. $\left\{ \begin{array}{l} (xTy)\perp z = (x\perp z)T(y\perp z) \\ z\perp(xTy) = (z\perp x)T(z\perp y) \end{array} \right\}$ (Dağılım aksiyomu)

(Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.4. f, R^n uzayından R ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise f fonksiyonu, C^0 sınıfından bir fonksiyondur denir. R^n dan R ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^0(R^n,R)$ biçiminde gösterilir.

R^n nın her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^1 sınıfındandır denir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.5. f fonksiyonunun R^n nın her bir noktasında k ıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^k sınıfındandır denir. R^n den R ye giden C^k sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^k(R^n, R)$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.6. R^n nın her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa f fonksiyonu C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur denir. R^n den R ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(R^n, R)$ biçiminde gösterilir. $p \in R^n$ için f fonksiyonu p noktasının en az bir açık komşuluğunda düzgün ise f fonksiyonu, p noktasında C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur denir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.7. $(C, T, \perp)$ bir halka olsun ve (C, T) Abel grubunun birim elemanı e olmak üzere $C^* = C - \{e\}$ olsun. Eğer $(C^*, \perp)$ bir grup ise $(C, T, \perp)$ üçlüsüne bir aykırı cisimdir denir. Cismi temsil etmek üzere $(C, T, \perp)$ yerine sadece "C cismi" de denir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.8. K bir cisim ve $(V, +, 0)$ bir abelyen grup olsun. Ayrıca $K \times V$ den V ye giden bir işlevin (fonksiyonun) varlığını varsayalım. Eğer $a \in K$ ve $v \in V$ ise, bu işlevin (a, v) çiftinde aldığı değeri av olarak yazalım. Bütün bunlar şu özallikleri sağlasın: Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

1. $a(v + w) = av + aw$,
2. $(a + b)v = av + bv$,
3. $(ab)v = a(bv)$,
4. $1v = v$.

O zaman $\{V, +, 0, K \times V \to V\}$ yapısına K üzerine bir vektör uzayı adı verilir (Hacısalihoğlu, 2010).

Tanım 1.1.9. U, R^n uzayının açık bir alt kümesi olsun. U nun her bir q noktasına, q noktasında bir teğet vektör karşılık getiren bir fonksiyona, U üstünde bir vektör alanı denir.

Bu tanıma göre V, U üstünde bir vektör alanı ise

$$V : U \to \cup T_q(R^n), \text{ her } q \in U \text{ için } V(q) \in T_q(R^n)$$

dir. $V(q)$ vektörü çoğu vakit V_q biçiminde gösterilir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 1.1.10. V ve W aynı K cismi üstünde vektör uzayları ve L, V uzayından W uzayına bir fonksiyon olsun. L fonksiyonu aşağıdaki iki önermeyi doğrularsa L ye lineer dönüşüm adı verilir.

1. Her $u, v \in V$ için $L(u+v) = L(u) + L(v)$,
2. Her $c \in K$ ve her $u \in V$ için $L(cu) = cL(u)$

(Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.11. $L : V \to W$ lineer bir dönüşüm olsun. L birebir ve örten ise L ye lineer izomorfizm denir. V den W uzayına giden en az bir lineer izomorfizm varsa V uzayı W uzayına izomorftur denir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.12. V ve W, K cismi üstünde vektör uzayları olsun. V den W uzayına giden bütün lineer dönüşümlerin kümesi $L(V, W)$ ile veya $Hom(V, W)$ ile gösterilir. Lineer bir dönüşüme, homomorfizm adı da verilir.

$L \in L(V, W)$ ve $G \in L(V, W)$ için L ile G nin toplamı

$$(L+G)(u) = L(u) + G(u)$$

eşitliğiyle tanımlı $L + G : V \to W$ fonksiyonudur. $c \in K$ olmak üzere c ile L nin çarpımı

$$(cL)(u) = cL(u)$$

eşitliğiyle tanımlı $cL : V \to W$ fonksiyonudur (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.13. V K cismi üstünde bir vektör uzayı olsun. V de çarpma adını verdiğimiz bir iç işlem varsa ve aşağıdaki önermeler doğru ise V ye K cismi üstünde bir cebir adı verilir.

1. V kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Daha açık olarak $\forall u, v \in V$ için uv tanımlıdır ve $uv \in V$ dir.
2. V de çarpmanın birleşme özelliği vardır. Daha açık bir anlatımla $\forall u, v, w \in V$ için $u(vw) = (uv)w$ dir.
3. Çarpmanın toplama üstüne sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Daha açık bir anlatımla $\forall u, v, w \in V$ için $u(v+w) = uv+uw$ ve $(u+v)w = uw+vw$ dir.
4. $\forall c \in K$ ve $\forall u, v \in V$ için $(cu)v = c(uv)$ ve $u(cv) = c(uv)$ dir

(Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.14. V, K cismi üstünde bir vektör uzayı olmak üzere $L(V,V)$ kümesini $gl(V)$ ile gösterelim. $L \in gl(V)$ olmak üzere L dönüşümünün kuvvetleri,

$$L^0 = I_V \text{ ve } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } L^k = L \circ L \circ ... \circ L$$

eşitlikleriyle tanımlanır (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.15. V, K cismi üstünde bir cebir olsun. V deki çarpma işlemi değişmeli ise V ye değişmeli cebir denir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.16. V, K cismi üstünde bir cebir olsun. V deki çarpma işlemine göre V nin sıfır vektöründen farklı bir birim elemanı varsa V ye birimli cebir denir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.17. V, K cismi üstünde bir cebir ve H, V nin bir alt vektör uzayı olsun. H kümesi çarpmaya göre kapalı ise H ya, V nin alt cebiri denir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.18. U ve V, K cismi üstünde iki cebir olsun. U dan V ye

$$\text{her } u,\, v \in U \text{ için } L(uv) = L(u)L(v)$$

önermesini doğrulayan bir lineer dönüşümüne cebir homomorfizmi denir. Birebir ve örten bir cebir homomorfizmine cebir izomorfizmi denir (Sabuncuoğlu, 2011).

Tanım 1.1.19. Bir $F : E^n \to E^m$ dönüşümünün $\forall P \in E^n$ noktasındaki $(F_*)_P$ türev dönüşümü $1:1$ ise $(F_*)_P$ türev dönüşümüne regülerdir denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.20. X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji denir.

$(T1)$ $X, \emptyset \in \tau$,

$(T2)$ $\forall A_1, A_2 \in \tau$ ise $A_1 \cap A_2 \in \tau$,

$(T3)$ $A_i \in \tau$ $i \in I$, $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$

Burada $(T1)$ ve $(T2)$ önermelerinin anlamları açıktır. $(T3)$ önermesinde I bir indeks cümlesidir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.21. Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.22. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f: \quad X \quad \to \quad Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizim (topolojik dönüşüm) denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.23. X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.24. M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik manifold (veya topolojik n-manifold) dur denir.

1. M bir Hausdorff uzayıdır.
2. M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.
3. M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir

(Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.25. E^n in iki açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir

$$\Psi: \quad U \quad \to \quad V$$

fonksiyonu için şu iki önerme doğru ise Ψ ye C^k sınıfından bir diffeomorfizim ve U ile V ye de k.dereceden diffeomorfiktirler denir.

1. $\Psi \in C^k(U, V)$.
2. $\Psi^{-1} : V \to U$ var ve $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$

(Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.26. M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından differensiyellenebilir manifold denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.27. $F : E^n \to E^m$ dönüşümünün türev dönüşümü $P \in E^n$ için $(F_*)_P$ olsun. Sırasıyla, $T_{E^n}(P)$ ve $T_{E^m}(P)$ de

$$\Phi = \{\frac{\partial}{\partial x_1}|_P, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}|_P\},\ \Psi = \{\frac{\partial}{\partial y_1}|_{F(P)}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}|_{F(P)}\}$$

standart bazları için $(F_*)_P$ nin karşılık geldiği matris $J(F, P)$ ile gösterilir ve $J(F, P)$ matrisine, F nin P noktasındaki Jakobien matrisi ve bu matrise karşılık gelen lineer dönüşüme de F nin Jakobien dönüşümü denir. Açık olarak yazmak gerekirse, seçilen koordinat sistemlerine göre F nin $P \in E^n$ noktasındaki Jakobien matrisi,

$$J(F,P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}|_P & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}|_P & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}|_P \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}|_P & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}|_P & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}|_P \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}|_P & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}|_P & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}|_P \end{bmatrix}$$

dir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.28. M ve $\bar{M}$ birer C^∞ manifold ve

$$f : \ M \ \to \ \bar{M}$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* Jakobian matrisi $\forall P \in M$ noktasında regüler ise f ye M den $\bar{M}$ içine bir immersiyon (=daldırma) denir. Bir başka ifade ile $rankf = boyM$ ise f bir immersiyondur (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.29. M ve $\bar{M}$ birer C^∞ manifold ve

$$f : \ M \ \to \ \bar{M}$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* Jakobian matrisi regüler ise ve f tek değişkenli ise f ye M den $\bar{M}$ içine bir imbedding (1-boyutlu daldırma) dir denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.30. $f \in \otimes^n V^*$, $g \in \otimes^m V^*$ olmak üzere f ile g nin tensörel çarpımı $f \otimes g$, $\forall(v_1, ..., v_n) \in V^n$ ve $\forall(u_1, ..., u_m) \in V^m$ için

$$(f \otimes g)(v_1, ..., v_n, u_1, ..., u_m) = f(v_1, ..., v_n)g(u_1, ..., u_m)$$

olarak tanımlanır. $f \otimes g$ nin $(n + m)$. dereceden tensör olduğu açıktır.

$$f \in (V_1^* \otimes V_2^* \otimes V_3^* \otimes ... \otimes V_p^*),\ g \in (U_1^* \otimes U_2^* \otimes U_3^* \otimes ... \otimes U_q^*)$$

ise $f \otimes g$ tensörü

$$(v_1, ..., v_p) \in V_1 \times V_2 \times V_3 \times ... \times V_p,\ (u_1, ..., u_q) \in U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_q$$

olmak üzere,

$$(f \otimes g)(v_1, ..., v_p, u_1, ..., u_q) = f(v_1, ..., v_p)g(u_1, ..., u_q)$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.31. $f \in T^2(V)$ olsun. $\sigma \in S_2$ olmak üzere

$$(\sigma f)(v_1, v_2) = f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)})$$

olarak tanımlanıyor. Bu durumda, $\forall \sigma \in S_2$ için $\sigma f = s(\sigma) f$ ise f ye 2. dereceden kovaryant alterne tensör denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.32.

$$\begin{aligned} A_2 &: \otimes^2 V^* \to \otimes^2 V^* \\ A_2(f) &= \sum_{\sigma \in S_2} s(\sigma)\sigma f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı A_2 fonksiyonuna, $\otimes^2 V^*$ ın bir alterneleyen operatorü denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.33.

$$\begin{aligned} \wedge &: T^1(V) \times T^1(V) \to \wedge^2 V^* \\ (f, g) &\to f \wedge g = A_2(f \otimes g) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı, $\wedge$ fonksiyonuna dış çarpım fonksiyonu ve $f \wedge g$ alterne tensörüne de f ve g tensörlerinin dış çarpımı denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 1.1.1. $\forall f, g \in T^1(V)$ olmak üzere $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in V \times V$ için

$$(f \wedge g)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1)g(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_2)g(\vec{x}_1)$$

dir.(Hacısalihoğlu, 1998)

İspat: Tanım 1.1.32. ve **Tanım 1.1.33.** gereğince

$$f \wedge g = \sum_{\sigma \in S_2} s(\sigma)\sigma(f \otimes g)$$

dir.

$$S_2 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$s(\sigma_1) = 1$, $\sigma_1\sigma_1 = \sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2$, $s(\sigma_2) = -1$, $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_2\sigma_2 = \sigma_1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f \wedge g &= s(\sigma_1)\sigma_1(f \otimes g) + s(\sigma_2)\sigma_2(f \otimes g) \\ &= (f \otimes g) - \sigma_2(f \otimes g) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise, $\forall(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in V \times V$ için

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= (f \otimes g)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) - \sigma_2(f \otimes g)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ &= f(\vec{x}_1)g(\vec{x}_2) - (f \otimes g)(\vec{x}_{\sigma_2(1)}, \vec{x}_{\sigma_2(2)}) \\ &= f(\vec{x}_1)g(\vec{x}_2) - (f \otimes g)(\vec{x}_2, \vec{x}_1) \\ &= f(\vec{x}_1)g(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_2)g(\vec{x}_1) \end{aligned}$$

demektir.

Tanım 1.1.34. M bir C^∞ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve Reel değerli C^∞ fonksiyonların halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \quad \chi(M) \times \chi(M) \quad \rightarrow \quad C^\infty(M, R)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada, $\langle , \rangle$ işlemine M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir (Hacısalihoğlu, 1994).

Tanım 1.1.35. M bir topolojik uzay ve G de bir topolojik grup olsun.

$$\begin{aligned} \eta : \quad & G \times M & \rightarrow \quad & M \\ & (g, X) & \rightarrow \quad & \eta(g, X) \quad = \eta_g(X) = gX \end{aligned}$$

olarak tanımlanan η dönüşümünde G, M ye etki ediyor denir. Bu anlamda G cümlesine etkiler (action) in cümlesi de denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.36. G nin birim elemanı e ve $\forall X \in M$ için;

$$\eta(e, X) = \eta_e(X) = eX = X$$

ise G, M üzerinde etkilidir denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.37. Eğer herhangi iki $X, Y \in M$ için $Y = gX$ olacak şekilde bir $g \in G$ bulunabiliyor ise G ye M üzerinde geçişlidir denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.38. Bir M manifoldu ile bir G topolojik dönüşümler grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa G ye M üzerinde bir topolojik dönüşümler grubu denir.

1.
$$\begin{aligned} \varphi : \quad & G \times M & \rightarrow \quad & M \\ & (g, X) & \rightarrow \quad & \varphi(g, X) \quad = gX \end{aligned}$$

2. $(g_1g_2)X = g_1(g_2X)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall X \in M$
3. G nin birim elemanı e olmak üzere $\forall X \in M$ için $eX = X$

(Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.39. M bir manifold ve G de bir grup olsun. Şayet G, M üzerinde etkili ve geçişli ise M ye G grubunun **homogen uzayı** denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Örnek: $O(n) = \{A : A \in R_n^n, \det A = 1\}$

$$S^{n-1} = \left\{ \vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n : \left\| \vec{X} \right\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1 \right\}$$

S^{n-1}, $O(n)$ grubunun homogen uzayıdır. Gerçekten;

$I \in O(n)$ ve $X \in S^{n-1}$

$$\begin{array}{llll} \varphi : & O(n) \times S^{n-1} & \rightarrow & S^{n-1} \\ & (I, X) & \rightarrow & \varphi(I, X) \quad = IX = X \end{array}$$

olduğundan $O(n)$, S^{n-1} üzerinde etkilidir. Ayrıca $\forall X, Y \in S^{n-1}$ için $Y = AX$ olacak şekilde bir $A \in O(n)$ vardır. O halde $O(n)$, S^{n-1} üzerinde geçişlidir. Geçişlilik için bir başka ifade verebiliriz:

$e_1, e_2, ..., e_n \in S^{n-1}$ ve $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ ortonormal bir baz olsun. Ayrıca $v_1, v_2, ..., v_n \in S^{n-1}$ ve $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ de bir başka ortonormal baz olsun. O zaman bir $e_j \in S^{n-1}$ ve diğeri de $v_j \in S^{n-1}$ için $v_j = Ae_j$ olacak şekilde bir $A \in O(n)$ vardır. Bunu bir dönüşüm ile $A = [\sigma_{ij}]$ olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \varphi : & O(n) \times S^{n-1} & \rightarrow & S^{n-1} \\ & ([\sigma_{ij}], e_j) & \rightarrow & \varphi([\sigma_{ij}], e_j) \quad = [\sigma_{ij}].e_j = v_j \in S^{n-1} \end{array}$$

olacak şekilde bir $[\sigma_{ij}] \in O(n)$ vardır. Dolayısıyla $O(n)$, S^{n-1} üzerinde geçişlidir.

Tanım 1.1.40. R reel sayılar cismi üzerinde sonlu ve çift boyutlu bir vektör uzayı V olsun. V üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(.,.)$ işlemi varsa V ye simplektik lineer uzay denir.

$$\begin{array}{llll} (.,.) : & V \times V & \rightarrow & R \\ & (X, Y) & \rightarrow & (.,.)(X, Y) \quad = (X, Y) \end{array}$$

1. Bilineer
2. Alterne

3. Nondejenere; yani $\forall X \in V$ için $(X,Y)=0$ ise $Y=0$ dır

(Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.41. G bir grup, aynı zamanda bir C^∞ manifold olsun. Bu grubun işlemi $\odot$ olsun. $\odot$ grup işlemine göre $\forall Y \in G$ için ters eleman Y^{-1} olmak üzere;

$$\begin{array}{rlcll} \odot: & G\times G & \to & G & \\ & (X,Y) & \to & \odot(X,Y) & = X\odot Y^{-1} \end{array}$$

işlemi C^∞ ise, G ye Lie grubu denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.42. G bir Lie grubu olsun. Grup işlemi $\odot$ ve $a\in G$ olsun.

$$\begin{array}{rlcll} l_a: & G & \to & G & \\ & g & \to & l_a(g) & = a\odot g \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcll} R_a: & G & \to & G & \\ & g & \to & R_a(g) & = g\odot a \end{array}$$

biçiminde tanımlı dönüşümlere sırasıyla $\forall a\in G$ ile belirli sol öteleme ve sağ öteleme denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.43. G bir lie grubu, grup işlemi $\odot$ ve $a\in G$ olsun.

$$\begin{array}{rlcll} l_a: & G & \to & G & \\ & g & \to & l_a(g) = & a\odot g \end{array}$$

ile

$$\begin{array}{rlcll} R_a: & G & \to & G & \\ & g & \to & R_a(g) = & g\odot a \end{array}$$

biçiminde tanımlı dönüşümlere, sırasıyla, $\forall a\in G$ ile belirli sol paralelizim ve sağ paralelizim denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.44. G_1 ve G_2 grup işlemleri sırasıyla, $\Box$ ve $\circledcirc$ olan iki Lie grubu olsun. Bir

$$F:\ G_1 \to G_2$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ve $\forall g_1, g_2 \in G_1$ için,

$$F(g_1\Box g_2) = F(g_1)\circledcirc F(g_2)$$

eşitliği var ise, F ye G_1 den G_2 ye bir Lie grup homomorfizmidir denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.45. Bir Lie grubu G, $\forall a\in G$ için, sol ve sağ ötelemeler, sırasıyla, l_a

ve R_a olsun.

$$\begin{array}{rlcl} (l_a)_*: & T_G(g) & \rightarrow & T_G(ag) \\ & X_g & \rightarrow & (l_a)*(X_g) \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} (R_a)_*: & T_G(g) & \rightarrow & T_G(ga) \\ & X_g & \rightarrow & (R_a)*(X_g) \end{array}$$

biçiminde tanımlı dönüşümlere, sol grup paralelizm ve sağ grup paralelizm denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.46. G bir Lie grubu ve X G üzerinde bir vektör alanı olmak üzere $\forall a, g \in G$ için;

$$(l_a)*(X_g) = X_{ag}$$

ise X vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.47. $gl = \{V, \oplus, R, +, \cdot, \otimes, [,]\}$, bir reel vektör uzayı olsun. $[,] : gl \times gl \rightarrow gl$ bracket operatörü için

1. Anti-simetriktir ($[x, y] = -[y, x]$)
2. Bilineer
3. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jakobi özdeşliği)

özdeşliğini sağlıyorsa, $(gl, [,])$ ikilisine bir Lie cebiri denir (Hacısalihoğlu, 1980).

Tanım 1.1.48. Bir G Lie grubu üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(G)$ olsun. $\chi(G)$ toplama ve skaler ile çarpma işlemleriyle bir vektör uzayıdır. $\chi(G)$, parantez operatörü ile $\chi(G)$ bir Lie cebiridir. Bu Lie cebirine G Lie grubunun Lie cebiri denir ve $gl(G)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

Teorem 1.1.2. M bir n-Riemann manifoldu olsun. O zaman, M üzerindeki metrik tensörün ifadesi;

$$\langle , \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

veya aynı şey demek olan

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x_j \circ \alpha)}{dt}$$

dir. Burada, $x_1, x_2, ..., x_n$ ile M nin bir koordinat komşuluğundaki koordinat fonksiyonları gösterilmektedir (Hacısalihoğlu, 2004).

İspat: M bir Riemann manifoldu olduğuna göre üzerindeki metrik tensör bir iç çarpım fonksiyonudur, $\forall P \in M$ için,

$$\langle , \rangle : \; T_M(P) \times T_M(P) \; \rightarrow \; R$$

fonksiyonu olup bu fonksiyon simetrik, pozitif tanımlı ve 2-lineerdir. Diğer taraftan, m nin bir U açık cümlesinde koordinat fonsiyonları $x_1, x_2, ..., x_n$ ise

$$\forall Y, Z \in \chi(M) \text{ için } Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \; Z = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

dir. Buradan,

$$\langle Y, Z \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} y_i z_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

dir ve

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}$$

dersek

$$\langle Y, Z \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} y_i z_j$$

elde edilir. $x_1, x_2, ..., x_n \in C^\infty(M, R)$ olduğundan

$$dx_i(Y) = Y(x_i) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i) = y_i$$

benzer şekilde

$$dx_j(Z) = z_j$$

dir. Böylece,

$$\langle Y, Z \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i(Y) dx_j(Z)$$

olur. $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için yazılabilen bu eşitlikten de

$$\langle\rangle (X, Y) = (\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j)(X, Y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i(Y) dx_j(Z) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$$

elde edilir. Burada özel olarak, $\{([a, b], \alpha)\}$ atlası ile verilen eğrinin teğet vektör alanı $T = Y = Z$ alınırsa, eğrinin (a) dan (t) ye uzunluğu

$$s(t) = |\alpha|_a^t = \int_a^t (\langle T_{\alpha(t)}, T_{\alpha(t)} \rangle)^{\frac{1}{2}} dt$$

olmak üzere,

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \langle T_{\alpha(t)}, T_{\alpha(t)} \rangle$$

veya

$$T = (\frac{d(x_1 \circ \alpha)}{dt}, ..., \frac{d(x_n \circ \alpha)}{dt}) \text{ olduğundan}$$

$$(\frac{ds}{dt})^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x_j \circ \alpha)}{dt}$$

elde edilir.

Riemann metriği çoğunlukla

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.49. Bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir Riemann koneksiyonu D olsun. D nin M ye ait bir bölge üzerindeki $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^{\infty}(M, R)$ için,

1. $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$,
2. $D_{X+Z}(Y) = D_X Y + D_Z Y$,
3. $D_{fX} Y = f D_X Y$,
4. $D_X(fY) = X[f]Y + f D_X Y$
5. $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$,
6. $Z[\langle X, Y\rangle] = \langle D_Z X, Y\rangle + \langle X, D_Z Y\rangle$

özelliklerini sağlar (Hacısalihoğlu, 2004).

Teorem 1.1.3. Bir Riemann (veya yarı-Riemann) manifoldu üzerinde bir tek Riemann koneksiyonu vardır (Hacısalihoğlu, 2004).

İspat: M nin her bir U koordinat komşuluğunda bir D Riemann koneksiyonu var olduğunu ve bunun tek olduğunu göstereceğiz.

U üzerinde lokal koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan baz vektör alanlarının cümlesi

$$\Psi = [X_1, X_2, ..., X_n]$$

ve

$$\langle X_i, X_j\rangle = g_{ij},\ 1 \leq i, j \leq n$$

olsun. $\langle , \rangle$ metrik tensörünün Ψ bazına göre matrisi $g = [g_{ij}]$ olup, $\langle , \rangle$ bir iç çarpım fonksiyonu olduğundan g regülerdir. Zira, g matrisi, simetrik ve $g_{ij} > 0$ dır. Diğer taraftan simetrik bir matris pozitif tanımlı ise (köşegen üzerindeki değerleri pozitif ise) bu matrisin determinantı karakteristik değerlerinin çarpımına eşittir. Ayrıca karakteristik değerleri de "pozitif" tir. O halde g^{-1} vardır. g^{-1} in bileşenlerini $(g^{-1})_{ij}$ ile gösterelim. Bu durumda M üzerinde bir afin koneksiyonu D olsun. D nin bir riemann koneksiyonu olduğunu ve tek olduğunu göstereceğiz.

$$D_{X_k} X_j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{jk} X_i$$

olmak üzere

$$\Gamma^i_{jk} : \; U \overset{C^\infty}{\longrightarrow} R$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu fonksiyonlara D nin II. cins Christoffel sembolleri de denir. Buradan U üzerinde D yi vermek demek

$$D_{X_k}X_j = \sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{jk} X_i$$

eşitliğindeki Γ^i_{jk} fonksiyonların D Riemann koneksiyonun sağladığı bütün özellikleri sağlar demektir. Diğer taraftan $\forall f \in C^\infty(U, R)$ için

$$\begin{aligned}
[X_k, X_s](f) &= X_k[X_s[f]] - X_s[X_k[f]] \\
&= X_k[\frac{\partial f}{\partial x_s}] - X_s[\frac{\partial f}{\partial x_k}] \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_s} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$[X_k, X_s] = 0$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
0 &= [X_k, X_s] = D_{X_k}X_s - D_{X_s}X_k \\
&= \sum_{t=1}^{n} \Gamma^t_{sk} X_t - \sum_{t=1}^{n} \Gamma^t_{ks} X_t \\
&= \sum_{t=1}^{n} (\Gamma^t_{sk} - \Gamma^t_{ks}) X_t
\end{aligned}$$

dir. $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ lineer bağımsız olduğundan,

$$\Gamma^t_{sk} - \Gamma^t_{ks} = 0$$

veya

$$\Gamma^t_{sk} = \Gamma^t_{ks} \tag{1}$$

bulunur.

D nin Riemann koneksiyonu olması için **Tanım 1.1.49.** da 5. ve 6. dan

$$\begin{aligned}
& X_i[\langle X_j, X_r\rangle] + X_j[\langle X_r, X_i\rangle] - X_r[\langle X_i, X_j\rangle] \\
= \; & \langle D_{X_i}X_r, X_j\rangle + \langle X_r, D_{X_i}X_j\rangle + \left\langle D_{X_j}X_r, X_i\right\rangle + \left\langle X_r, D_{X_j}X_i\right\rangle \\
& - \langle D_{X_r}X_i, X_j\rangle - \langle X_i, D_{X_r}X_j\rangle \\
= \; & \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ri}^{k}\langle X_k, X_j\rangle + \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ji}^{k}\langle X_r, X_k\rangle + \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{rj}^{k}\langle X_k, X_i\rangle + \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\langle X_r, X_k\rangle \\
& - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ir}^{k}\langle X_k, X_j\rangle - \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{jr}^{k}\langle X_i, X_k\rangle \\
= \; & \sum_{k=1}^{n}\left\{(\Gamma_{ri}^{k} - \Gamma_{ir}^{k})\langle X_k, X_j\rangle + (\Gamma_{rj}^{k} - \Gamma_{jr}^{k})\langle X_i, X_k\rangle + (\Gamma_{ji}^{k} + \Gamma_{ij}^{k})\langle X_r, X_k\rangle\right\}
\end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$X_i[\langle X_j, X_r\rangle] + X_j[\langle X_r, X_i\rangle] - X_r[\langle X_i, X_j\rangle] = 2\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ji}^{k}g_{kr}$$

veya

$$X_i[g_{rj}] + X_j[g_{ri}] - X_r[g_{ij}] = 2\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ji}^{k}g_{kr}$$

$1 \leq i, j, k, r \leq n$, olur. Bu eşitliği matris formunda yazarak

$$\begin{aligned}
[\Gamma_{ji}^{k}] &= \frac{1}{2}g^{-1}\left\{X_i[g_{rj}] + X_j[g_{ri}] - X_r[g_{ij}]\right\} \\
&= \frac{1}{2}g^{-1}\left\{\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{r=1}^{n}(g^{-1})_{kr}(\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r})\right\}
\end{aligned}$$

veya matris eşitliğinden, $g^{kr} = (g^{-1})_{kr}$ konumu ile,

$$\Gamma_{ji}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}g^{kr}\left[\frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right], \text{ (koszul eşitliği)}$$

olur.

Tanım 1.1.50. M bir $n-$boyutlu $(n \geq 4)$ Riemann (yarı Riemann) manifold ve g de M nin metriği olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{array}{llll}
R: & \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) & \rightarrow & C^{\infty}(M, R) \\
 & (X, Y, Z, W) & \rightarrow & R(X, Y, Z, W) = \langle X, R(Z, W)Y\rangle, \\
 & & & \qquad\qquad\qquad = g(X, R(Z, W)Y)
\end{array}$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre, ($R \in T_4^0(\varkappa(M))$, M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir. Burada,

$$
\begin{array}{rlll}
R: & \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\
 & (Z,W,Y) & \rightarrow & R(Z,W,Y) \quad = R(Z,W)Y
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
R(Z,W)Y &= D_Z D_W Y - D_W D_Z Y - D_{[Z,W]}Y \\
&= ([D_Z, D_W] - D_{[Z,W]})Y
\end{aligned}
$$

de Riemann Eğrilik tensörüdür (Hacısalihoğlu, 2004).

Tanım 1.1.51. Riemann anlamındaki bir manifold M ve bir $P \in M$ noktasındaki $T_M(P)$ tanjant uzayının iki boyutlu bir alt uzayı F olsun. F nin bir bazı $\{X,Y\}$ ve $K(X,Y,X,Y) = \langle X, R(X,Y)Y\rangle$ olmak üzere

$$
\bar{K}(F) = \frac{\langle X, R(X,Y)Y\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - (\langle X,Y\rangle)^2} = \frac{K(X,Y,X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - (\langle X,Y\rangle)^2}
$$

olarak tanımlanan $\bar{K}(F)$ reel sayısına F nin Riemann anlamındaki eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 2004).

Tanım 1.1.52. (M,g) bir n-boyutlu Riemann manifoldu ve $\{X_1, X_2, ...X_n\}$, $\chi(M)$ in bir bazı olsun.

$$
\begin{array}{rlll}
\tilde{S}: & \chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\
 & X & \rightarrow & \tilde{S}(X) = -\sum\limits_{i=1}^{n} R(X_i, X)X_i
\end{array}
$$

biçiminde tanımlanan $\tilde{S}$ operatörüne M nin Ricci Operatörü denir. $\tilde{S}$ yardımı ile M nin Ric veya S ile gösterilen Ricci Eğrilik Tensörü

$$
\begin{array}{rllll}
Ric: & \chi(M)\times\chi(M) & \rightarrow & C^\infty(M,R) & \\
 & (X,Y) & \rightarrow & S(X,Y) = Ric(X,Y) & = g(\tilde{S}(X),Y) \\
 & & & & = -g(\sum\limits_{i=1}^{n} R(X_i,X)X_i, Y)
\end{array}
$$

olarak tanımlanan tensördür (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 1.1.53. M bir Riemann n-Manifold olsun. M nin bir P noktasındaki Skaler eğriliği; $T_M(P)$ nin bütün 2-boyutlu altuzaylarına göre olan Kesit eğriliklerinin toplamına denir ve

$$
\tau(P) = \sum_{i \neq j = 1}^{n} \bar{K}_{ij}
$$

ile hesaplanır (Hacısalihoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 1.1.54. n-boyutlu bir C^∞ manifold M ve M üzerinde bir koneksiyon D olsun.

$$\begin{array}{rlll} Tor: & \chi(M)\times\chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ & (X,Y) & \rightarrow & Tor(X,Y) = D_XY - D_YX - [X,Y] \end{array}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı D koneksiyonun torsiyon tensörü denir.

Tor tensörünün X ve Y gibi C^∞ olan iki vektör alanına gene C^∞ olan bir üçüncü vektör alanı karşılık getireceği tanımdan açıktır (Hacısalihoğlu, 2004).

Tanım 1.1.55. Eğer $\alpha : I \xrightarrow{C^\infty} E^n$ eğrisi üzerinde Y bir C^∞ vektör alanı ve α üzerinde $D_TY = 0$ ise Y vektör alanına α eğrisi üzerinde bir paralel vektör alanıdır denir. Eğer bir α eğrisi üzerinde $D_TT = 0$ ise α eğrisine bir jeodezik (geodesic) eğri adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 1.1.56. Geodezikler, E^{n+1} deki M hiperyüzeyleri üzerinde öyle özel eğrilerdir ki, bunlar E^{n+1} de doğruların oynadığı rolü M üzerinde oynarlar.

E^{n+1} de bir M hiperyüzeyi üzerinde geodezik denen eğri öyle bir parametrik eğridir ki bu eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M ye ortogonaldır. Yani eğri

$$\alpha : \ I \ \rightarrow \ M$$

ise

$$\ddot{\alpha}(t) \in T_M^{\perp}(\alpha(t)), \ \forall t \in I$$

dır (Hacısalihoğlu, 1994).

2 MATERYAL ve YÖNTEM

2.1 Materyal

Bu çalışmada incelediğimiz kaynaklar; internet üzerinden veya ulaştığımız makaleler ve kitaplardan elde edilmiştir.

2.2 Yöntem

Bu çalışma için gerekli bütün temel kavramlar verilmiştir. Bu çalışmada elde edilen bütün sonuçlar incelenmiş olup ve elde edilen sonuçlar 3-boyutlu Heisenberg uzayında ki karşılıkları bulunmuştur. Bu çalışmanın yazılımında ve çalışmadaki matris gösterimleri ve sayısal değerlerin yazılımında Scientific Workplace bilgisayar programından yararlanılmıştır.

3 ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

3.1 3-Boyutlu Heisenberg Uzayı

Bu bölümde sonlu boyutlu Heisenberg cebirini ve Heisenberg grubunu açıklayacağız.

Tanım 3.1.1. (V, Ω) bir sonlu boyutlu (boyut sayısı= $2n$) simplektik lineer uzay olsun. $V \times R$ üzerinde bir Lie parantez operatörü şu şekilde tanımlanır; $r, r' \in V$, $z, z' \in R$ olmak üzere

$$\begin{array}{rlcll} [.,.]: & (V \times R) \times (V \times R) & \rightarrow & V \times R & \\ & ((r,z),(r',z')) & \rightarrow & [(r,z),(r',z')] & = (0, \Omega(r,r')) \end{array}$$

yukarıda;

$$\Omega = \left\{ f \in T^2(V) : f : V \times V \underset{alterne}{\overset{bilineer}{\longrightarrow}} R \right\}$$

dır. Buna göre $\eta = (V \times R, [.,.])$ bir Lie cebiridir. Bu Lie cebirine V nin Heisenberg cebiri denir (Inoguchı ve ark., 1999).

Kolaylığın hatırı için $(V, \Omega) = (R^{2n}(q,p), \sum dq_i \wedge dp_j)$ standart simplektik lineer uzayının Heisenberg cebirini göz önünde bulunduracağız

$\wedge^2(R^{2n})^*$, ikinci dereceden alterne tensörlerin cümlesini göstersin;

$$\wedge^2(R^{2n})^* = \{f : f \in T^2(R^{2n}),\ \forall \sigma \in S_2 \text{ için } \sigma f = s(\sigma) f\}$$

Dış çarpım;

$$\begin{array}{rlcl} \wedge: & T^1(R^{2n}) \times T^1(R^{2n}) & \rightarrow & \wedge^2(R^{2n})^* \\ & (dq_i, dp_j) & \rightarrow & dq_i \wedge dp_j \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} dq_i \wedge dp_j: & R^{2n} \times R^{2n} & \rightarrow & R \\ & ((q,p),(q',p')) & \rightarrow & dq_i \wedge dp_j((q,p),(q',p')) \end{array}$$

$(q_1, q_2, ..., q_n, p_1, p_2, ..., p_n) \in R^{2n}$ doğal koordinat sistemini göstersin Lie parantez operatörünü aşağıdaki gibi daha belirgin gösterebiliriz.

$$\begin{array}{rlcl} [.,.]: & (R^{2n} \times R) \times (R^{2n} \times R) & \rightarrow & R^{2n} \times R \\ & [(q,p,z),(q',p',z')] & \rightarrow & [(q,p,z),(q',p',z')] \end{array}$$

$$[(q,p,z),(q',p',z')] = (0,0,\sum(q_i p'_j - q'_j p_i))$$

$$\begin{aligned} dq_i \wedge dp_j((q,p),(q',p')) &= (dq_i \otimes dp_j - dp_j \otimes dq_i)((q,p),(q',p')) \\ &= dq_i(q,p)dp_j(q',p') - dp_j(q,p)dq_i(q',p') \\ &= q_i p'_j - p_j q'_i \end{aligned}$$

Öyle ise;

$$(V,\Omega) = (R^{2n}(q,p), \sum dq_i \wedge dp_j) = (R^{2n}(q,p), \sum(q_i p'_j - p_j q'_i))$$

olarak alabiliriz.

η ye uygun Lie grubunu

$$N = (R^{2n+1}(X,Y,z),*) \qquad X,Y \in R^{2n},\ z \in R$$

şeklinde alalım. Bu grubun çarpma işlemini şu şekilde tanımlayalım.

$$\begin{aligned} *:\ & N^{2n+1} \times N^{2n+1} && \rightarrow N^{2n+1} \\ & ((X,Y,z),(X',Y',z')) && \rightarrow *((X,Y,z),(X',Y',z')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *((X,Y,z),(X',Y',z')) &= (X,Y,z)*(X',Y',z') \\ &= (X+X', Y+Y', z+z' \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum dx_i \wedge dy_j[(X,Y),(X',Y')]) \\ &= (X+X', Y+Y', z+z' + \frac{1}{2}\sum x_i y'_j - x'_j y_i) \end{aligned}$$

(Inoguchı ve ark., 1999)

Burada $(X,Y,z) = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, z) \in R^{2n+1}$ nın doğal koordinat sisteminin terimleridir.

N nin birim elemanı $(0,0,0)$ ve $(X,Y,z)^{-1} = -(X,Y,z)$ dir (Inoguchı ve ark., 1999).

Tanım 3.1.2. Yukarıdaki şekilde tanımlanan N Lie grubuna, $(2n+1)$ boyutlu Heisenberg grubu denir (Inoguchı ve ark., 1999).

$n = 1$ için $*$ işlemi;

$$(x,y,z)*(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y))$$

olur.

Teorem 3.1.1. $(N^3,*)$ olsun. $\forall X,Y\in N^3$, $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$

$$\begin{array}{rlcl} *: & N^3\times N^3 & \rightarrow & N^3 \\ & (X,Y) & \rightarrow & X*Y = \left(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3+\frac{1}{2}x_1y_2-\frac{1}{2}y_1x_2\right) \end{array}$$

işlemi ile $(N^3,*)$ bir Lie grubudur (Inoguchı ve ark., 1999).

İspat:

1. R^3 bir manifold, $N^3=\{X=(x_1,x_2,x_3)\in R^3:\forall x_1,x_2,x_3\in R\}$ olduğundan N^3 de bir manifolddur.

2. $(N^3,*)$ bir gruptur.

   (a) Gerçekten; $\forall X,Y\in N^3$ için $X*Y\in N^3$ dir.

   (b) $\forall X,Y,Z\in N^3$ için $X=(x_1,x_2,x_3)$, $Y=(y_1,y_2,y_3)$ ve $Z=(z_1,z_2,z_3)$ olmak üzere

   $$\begin{aligned} X*(Y*Z) &= (x_1,x_2,x_3)*\left(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3+\frac{1}{2}y_1z_2-\frac{1}{2}z_1y_2\right) \\ &= \Big\{(x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3+\frac{1}{2}x_1y_2 \\ &\quad +\frac{1}{2}y_1x_2)+z_3+\frac{1}{2}(x_1+y_1)z_2-\frac{1}{2}z_1(x_2+y_2)\Big\} \\ &= \left(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3+\frac{1}{2}x_1y_2-\frac{1}{2}y_1x_2\right)*(z_1,z_2,z_3) \\ &= (X*Y)*Z \end{aligned}$$

   olduğunda $*$ işlemi birleşimlidir.

   (c) $*$ işleminin N^3 de bir tek e birim elemanı vardır. $\forall X\in N^3$ için $e*X=X*e=X$ ve $e=(0,0,0)$ dir. Gerçekten; $e=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$, $X=(x_1,x_2,x_3)$ olsun.

   $$\begin{aligned} e*X &= (\theta_1,\theta_2,\theta_3)*(x_1,x_2,x_3) \\ &= \left(\theta_1+x_1,\theta_2+x_2,\theta_3+x_3+\frac{1}{2}\theta_1x_2-\frac{1}{2}x_1\theta_2\right) \\ &= (x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

   ise

   $$\begin{aligned} (\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= (0,0,0) \\ e &= (0,0,0) \end{aligned}$$

   olur.

(d) $\forall X \in N^3$ elemanının $*$ işlemine göre N^3 de
$X * X' = X' * X = e$ olacak şekilde bir tek X' inversi vardır. Gerçekten;
$X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $X' = (x_1', x_2', x_3')$ olsun.

$$\begin{aligned} X * X' &= (x_1, x_2, x_3) * (x_1', x_2', x_3') = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \\ &= (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3' + \frac{1}{2}x_1 x_2' - \frac{1}{2}x_1' x_2) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

ise

$$x_1 = -x_1', \;\; x_2 = -x_2', \;\; x_3 = -x_3'$$

olduğundan

$$\begin{aligned} X' &= (x_1', x_2', x_3') = -(x_1, x_2, x_3) \\ X' &= -X \end{aligned}$$

olur.

3. $\forall X, Y \in N^3$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\begin{aligned} * : \; N^3 \times N^3 &\rightarrow N^3 \\ (X, Y) &\rightarrow X * Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}x_1 y_2 - \frac{1}{2}y_1 x_2) \end{aligned}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir, çünkü $x_i, y_i : N^3 \rightarrow R$ diferensiyellenebilir olduklarından

$$x_1 + y_1, \;\; x_2 + y_2 \text{ ve } x_3 + y_3 + \frac{1}{2}x_1 y_2 - \frac{1}{2}y_1 x_2$$

koordinat fonksiyonlarıda diferensiyellenebilirdir.

Tanım 3.1.3. $(N^3, *)$ Lie grubuna Heisenberg grubu denir (Inoguchı ve ark., 1999).

3.2 Sol İnvaryant Vektör Alanı

Bu bölümde N^3 te sol paralelizm ve sol grup paralelizmini açıklayacağız.

$\forall P = (p_1, p_2, p_3) \in N^3$ ve $\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in N^3$

$$\begin{aligned} \ell_p : \; N^3 &\rightarrow N^3 \\ X = (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow \ell_p(X) = P * X \\ & \ell_p(X) = (p_1 + x_1, p_2 + x_2, p_3 + x_3 + \frac{1}{2}p_1 x_2 - \frac{1}{2}x_1 p_2) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan ℓ_p dönüşümüne N^3 üzerinde sol paralelizm denir.

N^3, Lie grubunun birim elemanı $e = (0,0,0)$ olmak üzere,

$$\begin{array}{llll} \ell_p : & N^3 & \to & N^3 \\ & X = (x_1, x_2, x_3) & \to & \ell_p(X) = \quad P * X \\ & & & \ell_p(X) = \quad (p_1 + x_1, p_2 + x_2, p_3 + x_3 + \frac{1}{2}p_1x_2 - \frac{1}{2}x_1p_2) \end{array}$$

olduğundan $(\ell_p)_*$ ile ℓ_p Jacobianı gösterirse

$$\begin{aligned} (\ell_p)_* &= \left[\frac{\partial(\ell_p)_i}{\partial x_j}\right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(\ell_p)_1}{\partial x_1} & \frac{\partial(\ell_p)_1}{\partial x_2} & \frac{\partial(\ell_p)_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\ell_p)_2}{\partial x_1} & \frac{\partial(\ell_p)_2}{\partial x_2} & \frac{\partial(\ell_p)_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(\ell_p)_3}{\partial x_1} & \frac{\partial(\ell_p)_3}{\partial x_2} & \frac{\partial(\ell_p)_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p_2}{2} & \frac{p_1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{array}{llll} (\ell_p)_* : & T_{N^3}(e) & \to & T_{N^3}(p) \\ & X_e & \to & (\ell_p)_*(X_e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p_2}{2} & \frac{p_1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ & & & (\ell_p)_*(X_e) = (x_1, x_2, x_3 - \frac{p_2}{2}x_1 + \frac{p_1}{2}x_2) \end{array}$$

$\bar{w}(X) = x_3 - \frac{p_2}{2}x_1 + \frac{p_1}{2}x_2$ konumunu yapalım. O zaman

$$(\ell_p)_*(X_e) = (x_1, x_2, \bar{w}(X))$$

olur ve $(\ell_p)_*$ dönüşümüne N^3 te sol grup paralizm denir. Burada

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = (1,0,0), \ \frac{\partial}{\partial x_2} = (0,1,0), \ \frac{\partial}{\partial x_3} = (0,0,1)$$

olarak alınır. O zaman

$$(\ell_p)_*(X_e) = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{w}(X)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

olur. Buna göre, $(\ell_p)_*(\frac{\partial}{\partial x_1}) = e_1$, $(\ell_p)_*(\frac{\partial}{\partial x_2}) = e_2$, $(\ell_p)_*(\frac{\partial}{\partial x_3}) = e_3$ dersek

$$e_1 = (1, 0, -\frac{p_2}{2}),\ e_2 = (0, 1, \frac{p_1}{2}),\ e_3 = (0, 0, 1)$$

veya

$$e_1 = (1,0,0) - \frac{p_2}{2}(0,0,1) \qquad e_2 = (0,1,0) + \frac{p_1}{2}(0,0,1) \qquad e_3 = (0,0,1)$$

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{p_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{p_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}$$

olur. Yani $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\} \to \{e_1, e_2, e_3\}$ baz dönüşümünün matriside $(\ell_p)_*$ Jacobianının matrisidir:

$$\left[\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{p_2}{2} & \frac{p_1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Teorem 3.2.1. Sol invaryant vektör alanlarının oluşturduğu $\chi_\ell(G)$ vektör uzayı G grubunun birim noktasındaki tanjant uzaya izomorftur. Yani;

$$\chi_\ell(G) \to T_G(e)$$

dönüşümü bir izomorfizimdir (Inoguchı ve ark., 1999).

3.3 N^3 Lie Grubunun Lie Cebiri

Teorem 3.3.1. $\forall X, Y \in T_{N^3}(e)$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olsun.

$$\begin{array}{lcll} [.,.]: & T_{N^3}(e) \times T_{N^3}(e) & \to & T_{N^3}(e) \\ & (X, Y) & \to & [X, Y] = \quad (0, 0, x_1y_2 - y_1x_2) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $[.,.]$ dönüşümü $T_{N^3}(e)$ üzerinde bir Lie operatörüdür (Inoguchı ve ark., 1999).

İspat:

1. $[.,.]$ antisimetriktir: $\forall X, Y \in T_{N^3}(e)$ için, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} [X, Y] &= (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) \\ [X, Y] &= -(0, 0, x_2y_1 - x_1y_2) \\ [X, Y] &= -[Y, X] \end{aligned}$$

2. $[.,.]$ iki lineerdir:

   (a) $\forall \lambda \in R$, $\forall X, Y \in T_{N^3}(e)$ için, $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} [\lambda X, Y] &= (0, 0, (\lambda x_1)\, y_2 - (\lambda x_2)\, y_1) \\ &= \lambda(0, 0, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= \lambda\, [X, Y] \end{aligned}$$

   (b) $\forall X, Y, Z \in T_{N^3}(e)$ için, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} [X + Y, Z] &= (0, 0, (x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1) \\ &= (0, 0, x_1z_2 - x_2z_1 + y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= (0, 0, x_1z_2 - x_2z_1) + (0, 0, y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= [X, Z] + [Y, Z] \end{aligned}$$

3. $[.,.]$ **J**acobi özdeşliğini sağlar:

$\forall X, Y \in T_{N^3}(e)$ için, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= [X, (0, 0, y_1z_2 - y_2z_1)] \\ &\quad + [Y, (0, 0, z_1x_2 - z_2x_1)] \\ &\quad + [Z, (0, 0, x_1y_2 - x_2y_1)] \\ &= (0, 0, 0) + (0, 0, 0) + (0, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Tanım 3.3.1. $\{T_{N^3}(e), +, R, +, ., \circledcirc, [.,.]\}$ Lie cebirine N^3 Lie grubunun Lie cebiri denir (Inoguchı ve ark., 1999).

3.4 N^3 ün Matris Grup Modeli

Teorem 3.4.1. N^3 ün matris grup modelini elde etmek için N^3 den reel genel lineer $GL(3,R)$ grubuna bir imbeding tanımlayacağız. Bunu da; $t = x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2$ olmak üzere

$$\begin{array}{rlll} l: & N^3 & \longrightarrow & GL(3,R) \\ & (x_1,x_2,x_3) & \longrightarrow & l(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece elde etmiş olduğumuz matris ailesini

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in R,\ t = x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \right\}$$

ile gösterebiliriz. Burada l Lie grup homomorfizmdir (Inoguchı ve ark., 1999).

İspat:

1. l birebirdir**:** $P = (x_1,x_2,x_3)$ ve $Q = (y_1,y_2,y_3)$ olsun.

$$\begin{array}{rcl} l(x_1,x_2,x_3) & = & l(y_1,y_2,y_3) \\ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_3 + \frac{1}{2}y_1y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

   ise

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3$$

   dır. Buradan da

$$P = Q$$

   olur.

2. l bir Lie grup homomorfizmidir: $P = (x_1,x_2,x_3)$, $Q = (y_1,y_2,y_3)$ ve $\forall P, Q \in N^3$

   (a)

$$\begin{array}{rcl} P * Q & = & (x_1,x_2,x_3) * (y_1,y_2,y_3) \\ & = & (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)) \end{array}$$

   ise

$$l(P * Q) = l(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1))$$

ise

$$l(P*Q)=\begin{bmatrix} 1 & x_1+y_1 & x_3+y_3+\frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2)+x_1y_2 \\ 0 & 1 & x_2+y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

(b)

$$\begin{aligned} l(P).l(Q) &= l(x_1,x_2,x_3).l(y_1,y_2,y_3) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3+\frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_3+\frac{1}{2}y_1y_2 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_1+y_1 & x_3+y_3+\frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2)+x_1y_2 \\ 0 & 1 & x_2+y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(a) ve (b) den $l(P*Q)=l(P)*l(Q)$ olur. Buda bize l nin işlemleri koruduğunu gösterir.

Tanım 3.4.1. $g\in\mathcal{N}$ ve $g=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $x_1=x_2=t=0$ noktasında $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}$ ve $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ matrislerini baz kabul eden uzaya $\mathcal{N}$ Lie grubunun Lie cebiri denir. Burada $t=x_3+\frac{1}{2}x_1x_2$ dır (Sattinger ve Weaver, 1993).

Yukarıdaki tanıma göre;

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \frac{\partial g}{\partial x_2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \frac{\partial g}{\partial t}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre $\mathcal{N}$ nın birim noktasındaki tanjant uzayını

$$T_{\mathcal{N}}(e)=\left\{\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \ \forall x_1,x_2,x_3\in R\right\}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Teorem 3.4.2. $\forall g, f \in T_{\mathcal{N}}(e)$ olsun.

$$\begin{array}{rccl} [.,.]: & T_{\mathcal{N}}(e) \times T_{\mathcal{N}}(e) & \to & T_{\mathcal{N}}(e) \\ & (g,f) & \to & [g,f] = \quad gf - fg \end{array}$$

şeklinde tanımlanan $[.,.]$ dönüşümü $T_{\mathcal{N}}(e)$ üzerinde bir Lie operatörüdür (Inoguchı ve ark., 1999).

İspat:

1. $[.,.]$, antisimetriktir: $\forall g, f \in T_{\mathcal{N}}(e)$

$$\begin{aligned} [g,f] &= gf - fg \\ &= -(fg - gf) \\ &= -[f,g] \end{aligned}$$

2. $[.,.]$, ikilineerdir:

   (a) $\forall g, f \in T_{\mathcal{N}}(e)$

$$\begin{aligned} [g+h,f] &= (g+h)f - f(g+h) \\ &= gf + hf + -fg - fh \\ &= (gf - fg) + (hf - fh) \\ &= [g,f] + [h,f] \end{aligned}$$

   (b) $\forall g \in T_{\mathcal{N}}(e)$ ve $\forall \lambda \in R$ için,

$$\begin{aligned} [\lambda g, f] &= (\lambda g)f - f(\lambda g) \\ &= \lambda(gf - fg) \\ &= \lambda\,[g,f] \end{aligned}$$

3. $[.,.]$ Jacobi özdeşliğini sağlar: $\forall g, f, h \in T_{\mathcal{N}}(e)$ için,

$$\begin{aligned} [g,[f,h]] + [f,[h,g]] + [h,[g,f]] &= [g, fh - hf] + [f, hg - gh] \\ &\quad + [h, gf - fg] \\ &= g\,(fh - hf) - (fh - hf)\,g \\ &\quad + f\,(hg - gh) - (hg - gh)\,f \\ &\quad + h\,(gf - fg) + (gf - fg)\,h \\ &= gfh - ghf - fhg + hfg + fhg \\ &\quad - fgh - hgf + ghf + hgf - hfg \\ &\quad - gfh + fgh \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

3.5 $\mathcal{N}$ nin Üstel Dönüşüm

$\forall h \in T_{\mathcal{N}}(e)$

$$\begin{aligned} \exp : \ T_e\mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N} \\ h &\rightarrow \exp h = e^h = I + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + ... + \frac{1}{n!}h^n + ... \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Eğer $h = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in T_e\mathcal{N}$ ise;

$$\begin{aligned} e^h &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \\ &+ ... + \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n + ... \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & x_1x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{3!}0 + ... + \frac{1}{n!}0 + ... \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

olur. $T_{\mathcal{N}}(e)$ nin bir bazı

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1}_{|(x_1,x_2,t)=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{\partial g}{\partial x_2}_{|(x_1,x_2,t)=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial g}{\partial t}_{|(x_1,x_2,t)=0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olduğunu söylemiştik. Şimdi $\frac{\partial g}{\partial x_1}$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}$ ve $\frac{\partial g}{\partial t}$ vektörlerine karşılık gelen sol invaryant vektör alanlarını bulalım.

$\mathcal{N}$ deki hız vektörü $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ olan bir eğri çizelim.

$$\begin{aligned} \alpha: \ I &\rightarrow \mathcal{N} \\ s &\rightarrow \alpha(s) = \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sol öteleme altında α eğrisinin resmi; $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{N}$ için,

$$\begin{aligned} \ell_P: \ \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N} \\ \alpha(s) &\rightarrow \ell_P(\alpha(s)) = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & t \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. α eğrisinin $s = 0$ noktasındaki resminin tanjant vektörü;

$$\begin{aligned} (\ell_P)_*: \ T_{\mathcal{N}}(e) &\rightarrow T_{\mathcal{N}}(P) \\ \alpha'(0) &\rightarrow (\ell_P)_* (\alpha'(0)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(\ell_P)_* (\alpha'(0)) = \frac{\partial g}{\partial x_1}$$

olur. Aynı şekilde hız vektörü $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}$ olan bir başka eğri β ise;

$$\begin{aligned} \beta: \ I &\rightarrow \mathcal{N} \\ s &\rightarrow \beta(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

β eğrisinin sol öteleme altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned} \ell_P: \ \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N} \\ \beta(s) &\rightarrow \ell_P(\beta(s)) = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & t \\ 0 & 1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_1 s \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. β nın $s=0$ noktasındaki resminin tanjant vektörü;

$$\begin{aligned}(\ell_P)_*(\beta'(0)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + p_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_2} + p_1 \frac{\partial g}{\partial t}\end{aligned}$$

olur. Benzer olarak hız vektörü $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ olan bir başka eğri γ ise;

$$\begin{aligned}\gamma \quad I &\rightarrow \mathcal{N} \\ s &\rightarrow \gamma(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

γ nın sol öteleme altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned}\ell_P : \ \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N} \\ \gamma(s) &\rightarrow \ell_P(\gamma(s)) = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & t \\ 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dır. γ nın $s=0$ noktasındaki resminin tanjant vektörü;

$$\begin{aligned}(\ell_P)_*(\gamma'(0)) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial g}{\partial t}\end{aligned}$$

olur. Buna göre $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g}{\partial x_2}, \dfrac{\partial g}{\partial t}$ lere karşılık gelen sol invaryant vektör alanları $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \alpha_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial t}, \ \alpha_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

olur.

3.6 $\mathcal{N}$ Üzerinde Cartan Yapı Denklemi

$A, X \in \mathcal{N}$ olsun.

$$\begin{array}{rccl} l_A: & \mathcal{N} & \to & \mathcal{N} \\ & X & \to & l_A(X) = \quad AX = \eta \end{array}$$

ise;

$$\eta = AX$$

ise

$$d\eta = d(AX)$$

ise

$$d\eta = AdX$$

ise

$$d\eta = \eta X^{-1}dX$$

ise

$$\Omega = X^{-1}dX$$

ise

$$d\eta = \eta\Omega$$

olur ve $d\eta = \eta\Omega$ şeklinde Cartan yapı denklemi karşımıza çıkmış olur.

Teorem 3.6.1. $X \in \mathcal{N}$ ise sol öteleme altındaki görüntüsü; $Y = AX$ olsun. $\Omega = X^{-1}dX$ ve $\Omega' = Y^{-1}dY$ ise,

$$\Omega' = \Omega$$

dır (Flanders,1963).

İspat:

$$\begin{array}{rccl} l_A: & \mathcal{N} & \to & \mathcal{N} \\ & X & \to & l_A(X) = \quad AX \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Omega' &= (l_A(X))^{-1}d(l_A(X)) \in \mathcal{N} \\ &= (AX)^{-1}d(AX),\ A^{-1}A = I \\ &= X^{-1}dX \\ \Omega' &= \Omega \end{aligned}$$

Tanım 3.6.1. $\mathcal{N}$ nin herhangi bir elemanı X olsun. $\Omega = X^{-1}dX$ matrisinin elemanlarına $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ lerin dual sol invaryant 1-formları denir (Flanders,1963).

Buna göre $\forall X \in \mathcal{N}$ için:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & t \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & x_1x_2 - t \\ 0 & 1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ise

$$dX = \begin{bmatrix} 0 & dx_1 & dt \\ 0 & 0 & dx_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ise

$$\begin{aligned} \Omega &= X^{-1}dX \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -x_1 & x_1x_2 - t \\ 0 & 1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & dx_1 & dt \\ 0 & 0 & dx_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & dx_1 & dt - x_1dx_2 \\ 0 & 0 & dx_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bu matrisin elemanlarını

$$\sigma_1 = dx_1 \qquad \sigma_2 = dx_2 \qquad \sigma_3 = dt - x_1dx_2$$

ile gösterirsek, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ lerin dual sol invaryant 1-formları;

$$\sigma_1 = dx_1 \qquad \sigma_2 = dx_2 \qquad \sigma_3 = dt - x_1dx_2$$

olur. Gerçekten; $\alpha_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $\alpha_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_1\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\alpha_3 = \dfrac{\partial}{\partial t}$ olduğundan

$$\sigma_1(\alpha_1) = 1 \qquad \sigma_2(\alpha_1) = 0 \qquad \sigma_3(\alpha_1) = 0$$

$$\sigma_1(\alpha_2) = 0 \qquad \sigma_2(\alpha_2) = 1 \qquad \sigma_3(\alpha_2) = 0$$

$$\sigma_1(\alpha_3) = 0 \qquad \sigma_2(\alpha_3) = 0 \qquad \sigma_3(\alpha_3) = 1$$

Bu bileşenleri aşağıda ki şekilde gösterebiliriz

$vekt\ddot{o}rler$	$sol\ invaryant\ vekt\ddot{o}r\ alanlar\imath$	$sol\ invaryant\ 1-formlar$
$\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$	$\alpha_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$	$\sigma_1 = dx_1$
$\dfrac{\partial g}{\partial x_2}$	$\alpha_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \dfrac{\partial}{\partial t}$	$\sigma_2 = dx_2$
$\dfrac{\partial g}{\partial t}$	$\alpha_3 = \dfrac{\partial}{\partial t}$	$\sigma_3 = dt - x_1 dx_2$

3.7 $\mathcal{N}$ nin Standart Sol İnvaryant Metrikleri

Bir vektör uzayı üzerinde bir metrik aşağıdaki şekilde tanımlanır;

R cismi üzerinde V bir vektör uzayı olsun. $\forall X \in V$ için;

$$\begin{array}{llll} \langle .,. \rangle : & V \times V & \rightarrow & R \\ & (X,X) & \rightarrow & \langle .,. \rangle (X,X) = \langle X,X \rangle \end{array}$$

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle (X,X) &= \langle X,X \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle x_i x_j, \ \ x_i = dx_i[X], \ \ x_j = dx_j[X], \ \ g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i[X] dx_j[X] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \oplus dx_j \, (X,X) \end{aligned}$$

$\forall X \in V$ için doğru olduğundan,

$$\langle .,. \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \oplus dx_j$$

olur. Yukarıda dx_i lerin 1-formlar olduğundan dikkat edelim.

$n = 3$ için bu metrik;

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}, \ [g_{ij}]^T = [g_{ij}]$$

olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j \\ \langle X, X \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i g_{ij} x_j \\ \langle X, X \rangle &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde de gösterebiliriz. Demek ki bir metrik verildiği zaman simetrik bir matris elde edebiliriz. Öyle ise metrik yerine o matrisi alabiliriz.

3.8 $\mathcal{N}$ Üzerinde Sol invaryant Riemann Metrikleri

$$\begin{aligned} ds_\lambda^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \lambda\sigma_3^2, \ \ \lambda > 0 \\ &= dx^2 + dy^2 + \lambda w^2, \quad \lambda > 0, \ \ w = (dt - xdy) \end{aligned}$$

Yukarıdaki metriklerde $\lambda = 1$ için $g = g_1$ metriğini hesaplayalım;

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + w^2$$

denkleminde w;

$$\begin{aligned} w &= (dt - xdy) \\ w &= d(z + \frac{1}{2}xy) - xdy \\ w &= dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy \end{aligned} \tag{2}$$

ise;

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy)^2 \\ &= (1 + \frac{y^2}{4})dx^2 + (-\frac{x}{2})dy^2 + dz^2 - \frac{xy}{4}dxdy - \frac{xy}{4}dydx \\ &\quad + \frac{y}{2}dxdz + \frac{y}{2}dzdx - \frac{x}{2}dydz - \frac{x}{2}dzdy \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde;

$$\begin{array}{lll} g_{11} = 1 + \frac{y^2}{4} & g_{12} = -\frac{xy}{4} & g_{13} = \frac{y}{2} \\ g_{21} = -\frac{xy}{4} & g_{22} = 1 + \frac{x^2}{4} & g_{23} = -\frac{x}{2} \\ g_{31} = \frac{y}{2} & g_{32} = -\frac{x}{2} & g_{33} = 1 \end{array}$$

o halde metriğimiz;

$$g = [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Tanım 3.8.2. $N^3 = (R^3(x,y,z), g)$ Riemann manifolduna bir Heisenberg 3-uzay denir (Inoguchı ve ark., 1999).

3.9 N^3 ün Eğrilikleri ve Konneksiyonları

Tanım 3.9.1. $X = (x,y,z)$, $Y = (x', y', z') \in N^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} l_X : \; N^3 &\rightarrow N^3 \\ Y &\rightarrow (l_X)(Y) = X * Y \\ &\qquad\qquad = (x,y,z) * (x', y', z') \\ &\qquad\qquad = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - x'y)) \end{aligned}$$

dönüşümüne N^3 de sol öteleme denir (Inoguchı ve ark., 1999).

N^3 ün $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ standart bazını ele alalım. N^3 te hız vektörü $\frac{\partial}{\partial x}$ olan bir α eğrisi seçelim. α eğrisinin sol öteleme altında resmi

$$\begin{array}{rlcll} l_X: & N^3 & \to & N^3 & \\ & \alpha(t) & \to & (l_X)(\alpha(t)) & = X * \alpha(t) \\ & & & & = (x,y,z) * (t,0,0) \\ & & & & = (x+t, y, z - \frac{1}{2}ty) \end{array}$$

dir. Bu eğrinin $t = 0$ noktasında resminin tanjant vektörü;

$$\begin{array}{rlcll} l_X: & T_eN^3 & \to & T_XN^3 & \\ & \alpha'(0) & \to & (l_X)(\alpha'(0)) & = (1,0,-\frac{1}{2}y) \end{array}$$

dir. T_XN^3 ün bir bazı $\{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. Buna göre;

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}$$

alabiliriz.

Aynı şekilde;

$$\begin{array}{rlcll} \beta: & I & \to & N^3 & \\ & t & \to & \beta(t) & = (0,t,0) \end{array}$$

olsun.

$$\begin{array}{rlcll} l_X: & N^3 & \to & N^3 & \\ & \beta(t) & \to & (l_X)(\beta(t)) & = X * \beta(t) \\ & & & & = (x, y+t, z + \frac{1}{2}tx) \end{array}$$

Bu eğrinin $t = 0$ noktasındaki resminin tanjant vektörü;

$$\begin{array}{rcl} (L_x)(\beta'(0)) & = & (0,1,\frac{1}{2}x) \\ e_2 & = & \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} \end{array}$$

alabiliriz. Benzer olarak;

$$\begin{array}{rlcll} \gamma: & I & \to & N^3 & \\ & t & \to & \gamma(t) & = (0,0,t) \end{array}$$

Eğrinin $t = 0$ noktasındaki resminin tanjant vektörü;

$$(l)_*(\gamma'(o)) = \frac{\partial}{\partial z} = e_3$$

olur. $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazına göre N^3 ün metriği

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_3 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{y^2}{4} & -\frac{xy}{4} & \frac{y}{2} \\ -\frac{xy}{4} & 1 + \frac{x^2}{4} & -\frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} & -\frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

$[g_{ij}]$ matrisinin tersini $[g^{ij}]$ ile gösterirsek;

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{4} \end{bmatrix}$$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ bazı için ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere;

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

∇ nin bileşenleri;

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_r g^{kr} \left\{ \frac{\partial g_{rj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right\}$$

olur. Gerekli hesaplamalardan sonra Γ_{ij}^{k} nın bileşenleri;

$$\begin{array}{lll}
\Gamma_{11}^{1}=0 & \Gamma_{12}^{1}=\dfrac{y}{4} & \Gamma_{13}^{1}=0 \\[2ex]
\Gamma_{11}^{2}=-\dfrac{y}{2} & \Gamma_{12}^{2}=\dfrac{x}{4} & \Gamma_{13}^{2}=-\dfrac{1}{2} \\[2ex]
\Gamma_{11}^{3}=-\dfrac{xy}{4} & \Gamma_{12}^{3}=\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8} & \Gamma_{13}^{3}=-\dfrac{x}{4} \\[2ex]
\Gamma_{22}^{1}=-\dfrac{x}{2} & \Gamma_{23}^{1}=\dfrac{1}{2} & \Gamma_{33}^{1}=0 \\[2ex]
\Gamma_{22}^{2}=0 & \Gamma_{23}^{2}=0 & \Gamma_{33}^{2}=0 \\[2ex]
\Gamma_{22}^{3}=\dfrac{xy}{4} & \Gamma_{23}^{3}=-\dfrac{y}{4} & \Gamma_{33}^{3}=0
\end{array}$$

olur. Gerekli hesaplamalardan sonra $\nabla_{e_j}e_i$ nın bileşenleri;

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{e_1}e_1=0 & \nabla_{e_2}e_2=0 & \nabla_{e_3}e_3=0 \\[2ex]
\nabla_{e_1}e_2=\dfrac{1}{2}e_3 & \nabla_{e_2}e_1=-\dfrac{1}{2}e_3 & \nabla_{e_1}e_3=-\dfrac{1}{2}e_2 \\[2ex]
\nabla_{e_3}e_1=-\dfrac{1}{2}e_2 & \nabla_{e_2}e_3=\dfrac{1}{2}e_1 & \nabla_{e_3}e_2=\dfrac{1}{2}e_1
\end{array} \tag{3}$$

olur.

3.10 Eğrilik Tensör Alanı

$1\leq i,j,k,r\leq 3$ olmak üzere Eğrilik tensör alanı

$$R(e_i,e_j)e_k=\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k-\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k-\nabla_{[e_i,e_j]}e_k=R_{kij}^{r}e_r$$

dır. $i=1$, $j=2$, $k=2$ için

$$\begin{aligned}
R(e_1,e_2)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2-\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2-\nabla_{[e_1,e_2]}e_2 \\
&= -\frac{3}{4}e_1
\end{aligned}$$

$$R_{212}^{1}=-\frac{3}{4},\ R_{212}^{2}=0,\ R_{212}^{3}=0$$

dır. $i=1$, $j=3$, $k=3$ için

$$\begin{aligned} R(e_1,e_3)e_3 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3-\nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3-\nabla_{[e_1,e_3]}e_3 \\ &= \frac{1}{4}e_1 \end{aligned}$$

$$R^1_{313}=\frac{1}{4},\ R^2_{313}=0,\ R^3_{313}=0$$

dir. $i=2$, $j=3$, $k=3$ için

$$\begin{aligned} R(e_2,e_3)e_3 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_3-\nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_3-\nabla_{[e_2,e_3]}e_3 \\ &= \frac{1}{4}e_2 \end{aligned}$$

$$R^1_{323}=0,\ R^2_{323}=\frac{1}{4},\ R^3_{323}=0$$

dir.

3.11 Torsiyon Tensör Alanı

$$\begin{aligned} T(e_i,e_j) &= \nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_j}e_i-[e_i,e_j] \\ \sum_k T^k_{ij}e_k &= \sum_k \Gamma^k_{ij}e_k-\sum_k \Gamma^k_{ji}e_k \\ \sum_k T^k_{ij}e_k &= \sum_k(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji})e_k \\ T^k_{ij} &= \Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji},\ \ (1)\text{ den} \\ T_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

3.12 N^3 ün Kesitsel Eğrilik Tensör Alanı

$1 \leq i,j \leq 3$ olmak üzere Kesitsel eğrilik tensör alanı

$$K(e_i,e_j,e_j,e_i)=\bar{K}_{ij}=\frac{\langle R(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle\langle e_j,e_j\rangle-\langle e_i,e_j\rangle^2}$$

dır.

1. $\pi = sp\{e_1, e_2\}$ olması halinde kesitsel eğrilik

$$\begin{aligned}\bar{K}_{12} &= \frac{\langle R(e_1,e_2)e_2, e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle\langle e_2,e_2\rangle - \langle e_1,e_2\rangle^2} \\ &= \frac{\left\langle -\frac{3}{4}e_1, e_1\right\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle\langle e_3,e_3\rangle - \langle e_1,e_3\rangle^2} \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. $\pi = sp\{e_1, e_3\}$ olması halinde kesitsel eğrilik

$$\begin{aligned}\bar{K}_{13} &= \frac{\langle R(e_1,e_3)e_3, e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle\langle e_3,e_3\rangle - \langle e_1,e_3\rangle^2} \\ &= \frac{\left\langle \frac{1}{4}e_1, e_1\right\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle\langle e_3,e_3\rangle - \langle e_1,e_3\rangle^2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

3. $\pi = sp\{e_2, e_3\}$ olması halinde kesitsel eğrilik

$$\begin{aligned}\bar{K}_{23} &= \frac{\langle R(e_2,e_3)e_3, e_2\rangle}{\langle e_2,e_2\rangle\langle e_3,e_3\rangle - \langle e_2,e_3\rangle^2} \\ &= \frac{\left\langle \frac{1}{4}e_2, e_2\right\rangle}{\langle e_2,e_2\rangle\langle e_3,e_3\rangle - \langle e_2,e_3\rangle^2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

dir.

3.13 Ricci Eğrilik Tensörü

$1 \leq i, j, k \leq 3$ olmak üzere Ricci eğrilik tensörü

$$Ric(e_j, e_k) = R_{jk} = -g(\sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_j)e_i, e_k)$$

dir. $j = 1$ ve $k = 1$ için

$$\begin{aligned} R_{11} &= -g(\sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_1)e_i, e_1) \\ &= -g(R(e_1, e_1)e_1 + R(e_2, e_1)e_2 + R(e_3, e_1)e_3, e_1) \\ &= -g(0 + \frac{3}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_1, e_1) \\ &= -g(\frac{1}{2}e_1, e_1) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. $j = 1$ ve $k = 2$ için

$$\begin{aligned} R_{12} &= -g(\sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_1)e_i, e_2) \\ &= -g(R(e_1, e_1)e_1 + R(e_2, e_1)e_2 + R(e_3, e_1)e_3, e_2) \\ &= -g(0 + \frac{3}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_1, e_2) \\ &= -g(\frac{1}{2}e_1, e_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $j = 1$ ve $k = 3$ için

$$\begin{aligned} R_{13} &= -g(\sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_1)e_i, e_3) \\ &= -g(R(e_1, e_1)e_1 + R(e_2, e_1)e_2 + R(e_3, e_1)e_3, e_3) \\ &= -g(0 + \frac{3}{4}e_1 - \frac{1}{4}e_1, e_3) \\ &= -g(\frac{1}{2}e_1, e_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $j = 2$ ve $k = 3$ için

$$\begin{aligned} R_{23} &= -g(\sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_2)e_i, e_3) \\ &= -g(R(e_1, e_2)e_1 + R(e_2, e_2)e_2 + R(e_3, e_2)e_3, e_3) \\ &= -g(\frac{3}{4}e_2 + 0 - \frac{1}{4}e_2, e_3) \\ &= -g(\frac{1}{2}e_2, e_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. $j = 2$ ve $k = 2$ için

$$\begin{aligned} R_{22} &= -g(\sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_2)e_i, e_2) \\ &= -g(R(e_1, e_2)e_1 + R(e_2, e_2)e_2 + R(e_3, e_2)e_3, e_2) \\ &= -g(\frac{3}{4}e_2 + 0 - \frac{1}{4}e_2, e_2) \\ &= -g(\frac{1}{2}e_2, e_2) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. $j = 3$ ve $k = 3$ için

$$\begin{aligned} R_{33} &= -g(\sum_{i=1}^{n} R(e_i, e_3)e_i, e_3) \\ &= -g(R(e_1, e_3)e_1 + R(e_2, e_3)e_2 + R(e_3, e_3)e_3, e_3) \\ &= -g(-\frac{1}{4}e_3 - \frac{1}{4}e_3 + 0, e_3) \\ &= -g(-\frac{1}{2}e_3, e_3) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur.

3.14 Skaler Eğrilik

$1 \leq i, j \leq 3$ olmak üzere Skaler eğrilik

$$\tau(P) = \sum_{i \neq j=1}^{n} \bar{K}_{ij}$$

dir. O halde N^3 ün Skaler eğriliği

$$\begin{aligned}
\tau(P) &= \sum_{i \neq j=1}^{n} \bar{K}_{ij} \\
&= \bar{K}_{12} + \bar{K}_{21} + \bar{K}_{13} + \bar{K}_{31} + \bar{K}_{23} + \bar{K}_{32} \\
&= -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

olur.

3.15 N^3 ün Geodezikleri

$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, N^3 te s ile parametrize edilmiş bir eğridir.

$$\begin{aligned}
\gamma' &= x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z} \text{ ve (2) den} \\
w(\gamma') &= x'\frac{y}{2} - y'\frac{x}{2} + z'
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\gamma' &= x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z} \\
&= x'\frac{\partial}{\partial x} - x'\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y'\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + x'\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} - y'\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} + z'\frac{\partial}{\partial z} \\
&= x'(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}) + y'(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}) + (x'\frac{y}{2} - y'\frac{x}{2} + z')\frac{\partial}{\partial z} \\
&= x'e_1 + y'e_2 + w(\gamma')e_3
\end{aligned}$$

olmak üzere γ nın hız vektör alanı

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'}\gamma' &= \nabla_{\gamma'}x'e_1 + y'e_2 + w(\gamma')e_3 \\
&= \nabla_{\gamma'}x'e_1 + \nabla_{\gamma'}y'e_2 + \nabla_{\gamma'}w(\gamma')e_3 \\
&= \gamma'[x']e_1 + x'\nabla_{\gamma'}e_1 + \gamma'[y']e_2 + y'\nabla_{\gamma'}e_2 + \gamma'[w(\gamma')]e_3 + w(\gamma')\nabla_{\gamma'}e_3 \\
&= x''e_1 + x'x'\nabla_{e_1}e_1 + x'y'\nabla_{e_2}e_1 + x'w(\gamma')\nabla_{e_3}e_1 + y''e_2 + y'x'\nabla_{e_1}e_2 \\
&\quad + y'y'\nabla_{e_2}e_2 + y'w(\gamma')\nabla_{e_3}e_2 + (w(\gamma'))'e_3 + w(\gamma')x'\nabla_{e_1}e_3 \\
&\quad + w(\gamma')y'\nabla_{e_2}e_3 + w(\gamma')w(\gamma')\nabla_{e_3}e_3 \\
&\quad \text{(3) den} \\
&= x''e_1 + w(\gamma')y'e_1 + y''e_2 + w(\gamma')x'e_2 + (w(\gamma'))'e_3 \\
&= (x'' + w(\gamma')y')e_1 + (y'' - w(\gamma')x')e_2 + (w(\gamma'))'e_3
\end{aligned}$$

dir.

Geodeziğin özelliklerinden

$$\begin{aligned}
(i) \qquad x'' + w(\gamma')y' &= 0 \\
(ii) \qquad y'' - w(\gamma')x' &= 0 \\
(iii) \qquad (w(\gamma'))' &= 0
\end{aligned}$$

dir.

Özellikle (iii), $w(\gamma')$ γ eğrisi boyunca sabit olduğunu gösterir. $w(\gamma') = A$ olmak üzere geodezik eşitlikler

$$\begin{aligned}
x'' &= -Ay' \\
y'' &= Ax'
\end{aligned}$$

olur.

Yukarıdaki diferensiyel denklemlerini $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\gamma(0)' = (u_0, v_0, w_0)$ başlangıç şartları altında çözebiliriz (Inoguchı ve ark., 1999).

Önerme: γ, N^3 te (u_0, v_0, w_0) başlangıç hızıyla (x_0, y_0, z_0) da başlayan bir yay tarafından parametrelendirilmiş bir geodezik eğridir. Daha sonra A sabiti $A = w_0 - \frac{1}{2}(x_0 v_0 - y_0 u_0)$ ile belirlenir. γ geodeziği aşağıdaki formüllerle verilir.

1. Eğer $A = 0$ ise, o zaman γ yatay doğru olur, yani N^3 ün liflerine ortogonal bir doğrudur. Daha açık bir şekilde γ, (u_0, v_0, w_0) doğrultman vektörüyle (x_0, y_0, z_0) da başlayan bir doğrudur.

2. Eğer $A \neq 0, \pm 1$ ise, o zaman γ

$$x(s) = \frac{1}{A}(u_0 \sin(As) + v_0 \cos(As)) + x_0, \tag{4}$$

$$y(s) = \frac{1}{A}(-u_0 \cos(As) + v_0 \sin(As)) + y_0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} z(s) = {} & As + \frac{1 - A^2}{2A}s - \frac{1}{2A}(x_0 u_0 - y_0 v_0)\cos(As) + \\ & \frac{1}{2A}(x_0 v_0 - y_0 u_0)\sin(As) + z_0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x'' &= -Ay', \\ x''' &= -Ay'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= Ax', \\ y''' &= Ax'' \end{aligned}$$

yukarıdaki eşitliklerden,

$$x''' + A^2 x' = 0 \tag{7}$$
$$y''' + A^2 y' = 0 \tag{8}$$

diferensiyel denklemleri elde edilir.

(7) in bir çözümü $x' = -u_0 \cos(As) + v_0 \sin(As)$ için

$$\begin{aligned} x' &= u_0 \cos(As) - v_0 \sin(As) \\ x'' &= -Au_0 \sin(As) - Av_0 \cos(As) \\ x''' &= -A^2 u_0 \cos(As) + A^2 v_0 \sin(As) \end{aligned}$$

yukarıdaki eşitlikleri (7) te yerine yazarsak

$$\begin{aligned} x''' + A^2x' &= -A^2u_0\cos(As) + A^2v_0\sin(As) \\ &\quad +A^2(u_0\cos(As) - v_0\sin(As)) \\ &= -A^2u_0\cos(As) + A^2v_0\sin(As) \\ &\quad +A^2u_0\cos(As) - A^2v_0\sin(As) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(7) i sağladığını görürüz. Buradan da

$$\begin{aligned} x' &= u_0\cos(As) - v_0\sin(As) \\ x(s) &= \frac{1}{A}(u_0\sin(As) + v_0\cos(As)) + c_1, \;\; c_1 = x_0 \text{ için} \\ x(s) &= \frac{1}{A}(u_0\sin(As) + v_0\cos(As) + x_0 \end{aligned}$$

olur. (4) yi elde etmiş oluruz.
(8) in bir çözümü $y' = u_0\sin(As) + v_0\cos(As)$ için

$$\begin{aligned} y' &= u_0\sin(As) + v_0\cos(As) \\ y'' &= Au_0\cos(As) - Av_0\sin(As) \\ y''' &= -A^2u_0\sin(As) - A^2v_0\cos(As) \end{aligned}$$

yukarıdaki eşitlikleri (8) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} y''' + A^2y' &= -A^2u_0\sin(As) - A^2v_0\cos(As) \\ &\quad +A^2(u_0\sin(As) + v_0\cos(As)) \\ &= -A^2u_0\sin(As) - A^2v_0\cos(As) \\ &\quad +A^2u_0\sin(As) + A^2v_0\cos(As) \\ &= 0 \end{aligned}$$

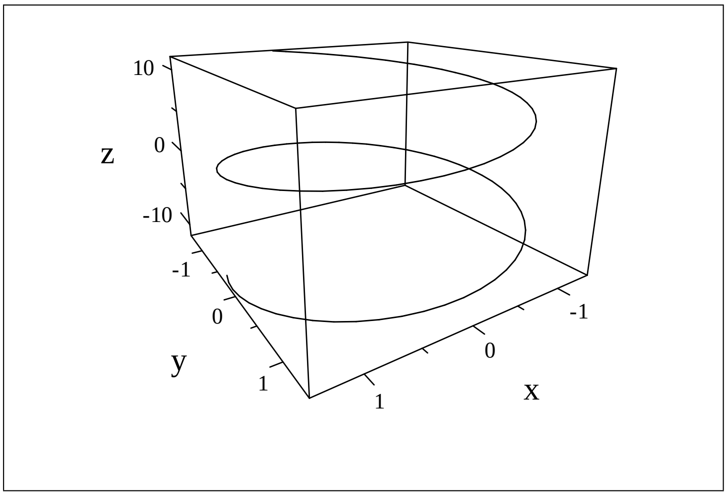
(8) i sağladığını görürüz.Buradan da

$$\begin{aligned} y'(s) &= u_0\sin(As) + v_0\cos(As) \\ y(s) &= \frac{1}{A}(-u_0\cos(As) + v_0\sin(As)) + c_2, \;\; c_2 = y_0 \text{ için} \\ y(s) &= \frac{1}{A}(-u_0\cos(As) + v_0\sin(As)) + y_0 \end{aligned}$$

olur. (5) yi elde etmiş oluruz (Inoguchı ve ark., 1999).

Örnek: γ geodezik eğrisi başlangıç hızı $\gamma'(0) = \frac{1}{\sqrt[2]{3}}(1,1,1)$ ile başlayan bir helixtir;

$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} \sqrt[2]{2}\cos(\frac{s}{\sqrt[2]{3}} - \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt[2]{2}\sin(\frac{s}{\sqrt[2]{3}} - \frac{\pi}{4}) \\ \frac{2}{\sqrt[2]{3}}s \end{bmatrix} \tag{9}$$



γ **geodezik eğrisi**

Şekil 3.1. (9) da verilen $\gamma(s)$ geodezik eğrisinin gösterimi

4 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Karl Werner Heisenberg (1925) ve Erwin Schrödinger (1926) çok yakın zamanlarda birbirlerinden bağımsız olarak atomun kuantum (dalga) mekaniğini farklı olarak, fakat matematik yönünden eşit şekilde formüllendirdiler. Bu teoriler 1928 senesinde İngiliz teori fizikçisi Paul Dirac tarafından genişletilip geliştirildi. 1927'de Leipzig Üniversitesi fizik profesörlüğüne tayin edildi. Aynı yıl meşhur belirsizlik prensibini ortaya koydu. Matematikte, Warner Heisenberg den sonra isimlendirilen Heisenberg grubu $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ formunun 3×3 üst üçgen matrisin grubudur. a, b ve c elemanları tamsayı veya reel sayı olabilir. Gerçek Heisenberg grubu 3-boyutlu kuantum mekaniğinin tanınmasıyla ortaya çıkar. Daha genel olarak n-boyutlu sistemlere ve en genel olarak herhangi bir simplektik vektör uzayına ilişkilendirilen grupları düşünebiliriz.

Biz burada Simplektik lineer uzay ve Lie parantez operatöründen yararlanarak Heisenberg cebiri tanımlandı. Bununla birlikte standart Simplektik uzayının Heisenberg cebirini göz önünde bulundurarak $(2n+1)$-boyutlu Heisenberg grubu tanımlandı. Daha sonra 3-boyutlu Heisenberg uzayının matris grup modeli, standart sol invaryant metrikleri ve son olarak olarak geodezikleri gösterildi.

4.2 Öneriler

Heisenberg cebiri ve 3-boyutlu Heisenberg uzayı tanımlandıktan sonra N^3 Riemann manifoldunun holonomi ve N^3 ün holonomi grubu gösterilebilir. Daha sonra N^3 ün sol invaryant etki yapısı ve N^3 de ideal control problemlerinin gösterilmesi önerilebilir.

KAYNAKLAR

HACISALİHOĞLU, H. H., 2010. Lineer Cebir. Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Cilt 1, Elazığ, 395s.

HACISALİHOĞLU, H. H., 2004. Diferensiyel Geometri. Nobel Basımevi, 3.Cilt, Ankara, 206s.

HACISALİHOĞLU, H. H, 1998. Diferensiyel Geometri. Ertem Matbaa, 1.Cilt, Ankara, 269s.

SABUNCUOĞLU, A., 2011. Lineer Cebir. Nobel Yayın, Ankara, 661s.

SABUNCUOĞLU, A., 2011. Analitik Geometriv. Nobel Yayın, Ankara, 329s.

SABUNCUOĞLU, A., 2010. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın, Ankara, 515s.

HACISALİHOĞLU, H. H., EKMEKÇİ, N., 2003. Tensör Geometri. Nobel Yayın, Ankara, 251s.

SATTİNGER, D. H., and WEAVER, O. L., 1993. Lie Groups and Algebras with Applications to physics, Geometry, and Mechanics. Springer -Verlag, New York, 215s.

FLANDERS, H., 1963. Differential Forms with Application to The Physical Sciences. Dover publications, NewYork, 205s.

INOGUCHI, J. I., KUMAMOTO, T., OHSUGI, N., and SUYAMA, Y., 1999. Differential Geometry of Curves and Surfaces in 3-Dimentional Homoge neous I. Fukuoka University SCI. Reports, Fukuoka, 29(2):155-182.

HACISALİHOĞLU, H. H, 1980. Yüksek Diferansiyel Geometriye Giris. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını, Ankara, 439s.

ÖZÇEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** SelahattinASLAN
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Şanlıurfa, 24.02.1984
Telefon	**:** 0544 251 18 24
Faks	**:**
e-mail	**:** slhttn84@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı**	**İlçe**	**İl**	**BitirmeYılı**
Lise	: Şanlıurfa Lisesi	Merkez	Şanlıurfa	2003
Üniversite	: Akdeniz Üniversitesi	Konyaaltı	Antalya	2008
YüksekLisans	: Harran Üniversitesi	Merkez	Şanlıurfa	2013
Doktora	:			

UZMANLIK ALANI

Geometry

YABANCI DİLLER

İngilizce