

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN CAYLEY AĞACI ÜZERİNDEKİ
FARKLI ETKİLEŞİMLİ POTTS MODELLERİNİN FAZ
DİYAGRAMLARININ İNCELENMESİ**

Gökhan GÖK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2011

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN CAYLEY AĞACI ÜZERİNDEKİ
FARKLI ETKİLEŞİMLİ POTTS MODELLERİNİN FAZ
DİYAGRAMLARININ İNCELENMESİ**

Gökhan GÖK

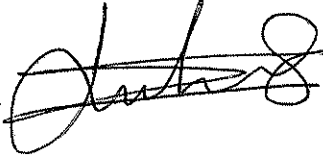
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2011

Doç. Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında, Gökhan GÖK' ün hazırladığı "İkinci ve üçüncü mertebeden Cayley ağacı üzerindeki farklı etkileşimli Potts modellerinin faz diyagramlarının incelenmesi" konulu bu çalışma 20/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Seyit TEMİR



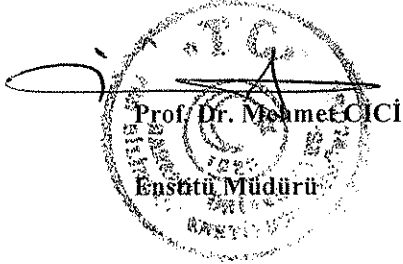
Üye: Doç. Dr. Hasan AKIN



Üye: Yrd. Doç. Dr. Aydın İZGİ



Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım



Bu Çalışma TÜBİTAK Tarafından Desteklenmiştir.

Proje No: 109T678

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Ana Kavramlar.....	4
1.1.1. Ising modeli	4
1.1.2. Potts Modeli	8
1.1.3. Graf	10
1.1.4. Latis (Örgü).....	10
1.1.5. Spin	12
1.1.6. Kronecker Deltası	14
1.1.7. Konfigürasyon.....	14
1.1.8. Cayley Ağacı.....	15
1.1.9. Cayley ağacı üzerindeki komşuluklar	16
1.1.10. Potts modelinin uygulamaları	19
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	26
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	28
3.1. Materyal	28
3.2. Yöntem.....	28
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	29
4.1. İkinci mertebeden Potts modelinin temel denklemleri.....	29
4.2. Üçüncü mertebeden Potts modelinin temel denklemleri	72
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	86
5.1. Sonuçlar	86
5.2. Öneriler	87
KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	91
ÖZET	92
SUMMARY	93

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN CAYLEY AĞACI ÜZERİNDEKİ FARKLI ETKİLEŞİMLİ POTTS MODELLERİNİN FAZ DİYAGRAMLARININ İNCELENMESİ

Gökhan GÖK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Seyit TEMİR

Yıl: 2011, Sayfa: 93

Bu tezde kompleks sistemlerin davranışlarını gözlemlemek ve meydana gelecek sonuçları tahmin etmek için pek çok disiplinde yaygın olarak kullanılan Potts modelinin faz diyagramları incelenmiştir. İkinci mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde ikili ve üçlü etkileşimli $q=5$, $q=6$ ve $q=15$ spin durumlu Potts modelinin faz diyagramları daha önceki çalışmalardan faydalanılarak elde edilmiştir. Ayrıca üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve aynı seviye üçlü komşuluk etkileşimli Potts modelinin $q=3$ spin durumunun belirlediği faz diyagramları bilgisayar programlama dili kullanılarak analiz edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Cayley Ağacı, Potts Modeli, Karşılıklı Etkileşim, Faz Diyagramı

ABSTRACT

Master Thesis

INVESTIGATION OF THE PHASE DIAGRAMS OF THE POTTS MODELS WITH DIFFERENT INTERACTIONS ON SECOND AND THIRD ORDER CAYLEY TREE

Gökhan GÖK

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seyit TEMİR

Year: 2011, Page: 93

In this thesis, the phase diagrams of the Potts model that is widely used in many disciplines have been investigated to observe the behaviors of complex systems and estimate happened results. The phase diagrams of $q=5$, $q=6$ and $q=15$ spin states Potts models obtained by means of previous studies. Additionally, the phase diagrams of three states Potts model with competing nearest neighbor, next nearest neighbor and one level triple of neighbors interactions have been analyzed by using a computer programming language.

KEY WORDS: Cayley Tree, Potts Model, Competing Interactions, Phase Diagram

TEŐEKKÖR

Yoğun alıŐma ve uęraŐlar sonucu ortaya çıkan bu tezimin hazırlanmasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Seyit TEMİR'e ve fikirleriyle beni yönlendiren çok değerli hocalarım Prof. Dr. Nasir GANIKHODJAEV, Doç. Dr. Hasan AKIN ve Yrd. Doç. Dr. Selman UğUZ' a, ayrıca bu çalışmada bilgisayar yazılımı alanında verdiği desteklerden dolayı değerli arkadaŐım Abdülkadir TEKPINAR' a çok teŐekkr ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Spinlerin herhangi bir andaki durumları	4
Şekil 1.2. Spin durumları	7
Şekil 1.3. Genel bir graf örneği	10
Şekil 1.4. Kare latis	10
Şekil 1.5. Üçgen latis.....	10
Şekil 1.6. Petek latis.....	11
Şekil 1.7. Yönelim durumları	12
Şekil 1.8. $Q = \{\text{siyah, beyaz}\}$ için bir grafın iki farklı durumu.....	13
Şekil 1.9. \mathbb{Z}^2 tam sayılar latisi üzerinde bir konfigürasyon.....	15
Şekil 1.10. İkinci mertebeden bir Cayley ağacı	16
Şekil 1.11. En yakın komşuluk olan x,y köşe noktaları	16
Şekil 1.12. Bir seviye ikinci komşuluk olan x ve y köşe noktaları.....	17
Şekil 1.13. Uzatılmış ikinci komşuluk olan x ,y köşe noktaları	17
Şekil 1.14. İki seviye üçlü komşuluk olan x,y,z köşe noktaları.....	18
Şekil 1.15. Uzatılmış (prolonged) üçlü komşuluk olan x,y,z köşe noktaları	18
Şekil 1.16. Köpükleri incelemek için kullanılan latis	19
Şekil 1.17. İnsanın biyolojik hücrelerini temsil eden latis	21
Şekil 1.18. Tümör büyüme deneyinin sonuçları	22
Şekil 1.19. Schelling'in komşulukları	23
Şekil 1.20. Dört farklı grup ile oluşan komşuluk	24
Şekil 4.1. i_0 kök noktasından çıkan i_1 ve i_2 spin değerleri.....	29
Şekil 4.2. $i_0=1$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu	30
Şekil 4.3. $i_0=2$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu	32
Şekil 4.4. $i_0=3$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu	33
Şekil 4.5. $i_0=4$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu	35
Şekil 4.6. $i_0=5$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu	36
Şekil 4.7. $Z^{(n)}(1,1,1)$ üzerine inşa edilen dallar	39
Şekil 4.8. $q=5$ ve $\gamma = 0$ için modelin faz diyagramı.....	48
Şekil 4.9. $q=5$ ve $\gamma=1$ için modelin faz diyagramı.....	48
Şekil 4.10. $q=5$ ve $\gamma = 2$ için modelin faz diyagramı.....	49
Şekil 4.11. $q=5$ ve $\gamma= -1$ için modelin faz diyagramı	49
Şekil 4.12. $q=5$ ve $\gamma = -2$ için modelin faz diyagramı	50
Şekil 4.13. $q=6$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramı	61
Şekil 4.14. $q=6$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramı	61
Şekil 4.15. $q=6$ ve $\gamma = -1.8$ için faz diyagramı	62
Şekil 4.16. $q=6$ ve $\gamma = -2.5$ için faz diyagramı	62
Şekil 4.17. $q=6$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramı	63
Şekil 4.18. $i_0 = 1$ kök noktasının belirlediği 225 farklı olasılık	64
Şekil 4.19. $Z^{(n)}(2,1,2)$ üzerine inşa edilen dallar	67
Şekil 4.20. $q= 15$ ve $\gamma = 0$ için modelin faz diyagramı.....	70
Şekil 4. 21. $q= 15$ ve $\gamma = 1$ için modelin faz diyagramı.....	70
Şekil 4. 22. $q= 15$ ve $\gamma = -1$ için modelin faz diyagramı	71
Şekil 4. 23. $q= 15$ ve $\gamma = -1.8$ için modelin faz diyagramı	71
Şekil 4. 24. İkinci mertebeden bir Cayley ağacının genel görünümü.....	72
Şekil 4. 25. (4.2.1) Hamiltonyen denkleminde belirtilen komşuluklar	73
Şekil 4. 26. $Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix}\right)$ üzerine kurulmuş olan dallar	80

Şekil 4. 27. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma =0$ için modelin faz diyagramı.....	84
Şekil 4. 28. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma =1$ için modelin faz diyagramı.....	84
Şekil 4. 29. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma =-1$ için modelin faz diyagramı	85
Şekil 4.30. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma =2$ için modelin faz diyagramı.....	85

KISALTMALAR DİZİNİ

ANNNI Modeli	Axial Next-Nearest-Neighbor Ising Modeli
NN	Nearest-Neighbor
NNN	Next-Nearest-Neighbor

1. GİRİŞ

Çoklu etkileşimlerden meydana gelen spin modelinin düşüncesi, metalik alaşımlardaki faz geçişlerinin belirlenmesi ve yeni faz geçiş tiplerinin sergilenmesinden site sızmasına (site percolation) kadar fiziğin pek çok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Modüle edilmiş yapılar sergileyen sistemler, düzenli veya düzensiz latisler ile günümüzde yoğun madde fiziğinde kapsamlı olarak çalışılmaktadır (P. Bak., 1982).

Modüle edilmiş yönelim için idealleşmiş sistemler arasında Ising modeli (ANNNI modeli), orijinal olarak Elliot (1981) tarafından Erbium'un manyetik yapısını tanımlamak için ortaya atılmıştır. Kiral Potts modeli ise Ostlund ve Huse (1981) tarafından öne sürülmüştür ve pek çok teknikle günümüzde yaygın olarak çalışılmaktadır.

Bak ve Jensen (1981), alan denklemleri tarafından üretilen ölçümü koruyan dönüşüm içindeki modüle edilmiş fazların çalışılması ile ilgili ilginç ve güçlü bir metodu ANNNI modeline uygulamışlardır. Metodun temel kusuru, durağan fakat sabit olmayan yörüngelere karşılık gelen termodinamik çözümlerin gerçekliği ile ilgilidir.

Fakat bu modeller Cayley ağacı üzerinde tanımlandığı zaman, rekabetçi etkileşimlerden oluşan Ising modelinin durumu Vannimenus (1981) tarafından incelenmiştir. Ayrıca Vannimenus (1981), çekici (attractive) dönüşümlerin ilginç fiziksel çözümlere karşılık geldiğini göstermiştir. Bu durum nümeriksel işlemleri oldukça sadeleştirmiştir ve tüm faz diyagramlarının detaylı çalışmasını mümkün kılmıştır.

ANNNI modeli, tek bir eksen yönüne paralel konumdaki bir sonraki en yakın komşuluklar tarafından yönlendirilen ve en yakın komşuluklar ile oluşan Ising modelini içermektedir. Bu, muhtemelen pek çok modüle edilmiş fazı ve bir Lifshitz noktası ile zengin bir faz diyagramını sergileyen en basit aşikar olmayan modeldir. $T-p$ uzayında ANNNI modelinin global faz diyagramı yapısının elde edilmesi için teorik olarak çalışmalar yapılmıştır. Burada T sıcaklığı ve $p = -J_p/J_1$ değişkeni de rekabetçi etkileşimler arasındaki oranı göstermektedir.

Nümeriksel ortalama alan hesaplarının temelinde, Bak ve Boehm (1980) tarafından şeytan merdiveni olarak adlandırılan düşük sıcaklıkta oluşan orantılı fazların sınırsız bir serisinin varlığı ispatlanmıştır.

Bu ortalama alan resmi Fisher ve Selke (1980) tarafından yapılan düşük sıcaklıklı seri genişlemeleri tarafından desteklenmiştir. Paramanyetik- Modüle edilmiş sınırdaki analitik ortalama alan hesaplamaları, kritik dalga sayısının ve Lifshitz noktasının sürekli olarak değiştiğini göstermektedir.

Bir modelin faz diyagramı, fazların içyapısını, fazın dengesini ve bir fazdan diğer bir faza geçişini ifade etmektedir. Ayrıca fazın geçiş doğrularını içermektedir. Potts modeli, tıpkı Ising modeli gibi bir Cayley ağacı üzerinde aşikâr olmayan manyetik yönelimlerin görünümünden dolayı yaygın olarak çalışılmaktadır.

Cayley ağacı elastik bir latis değildir, fakat ağacın şaşırtıcı topolojisi pek çok kesin çözümün elde edilmesini mümkün kılar. Ağaç üzerinde pek çok problemin çözümü düzenli latislerden daha basittir ve standart Bethe-Pierls teorisine eşittir (Katsura and Takizawa, 1974).

En yakın komşuluk (NN) etkileşimleri bağlantı sabiti J ve uzatılmış komşuluk (NNN) etkileşimlerinin J_p bağlantı sabitini içeren bir Ising modeli durumunda Vannimenus (1981), beklenen paramanyetik ve ferromanyetik fazların yanı sıra yeni fazlar bulmayı başarmıştır. Bu sonuçlardan, Cayley ağacı üzerindeki rekabetçi etkileşimlerle oluşan Ising modelinin periyodik latisler üzerindeki modellerle pek çok benzerliğe sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Bu sonuçtan dolayı Ising modeli günümüz araştırmalarında bir odak noktası olmuştur. Ising modelinin daha detaylı çalışılması basit nümeriksel metotlar kullanılarak kesin çözümler ile yapılmıştır. Bu durum yeni fazları keşfetmek ve farklı davranış tiplerini ortaya çıkarmak umuduyla daha karmaşık modellerde çalışılabileceğini ifade etmektedir.

Latisler üzerinde lineer olmayan rekursif (yinelemeli) denklemleri içeren istatistiksel mekaniğin önemli bir noktası, yinelemeli denklemlerin günümüzde de yoğun olarak araştırılan zengin dinamik sistemler ile bağlantılı olmasıdır. Cayley ağacı üzerindeki latis modellerine karşılık gelen dinamik sistemlerin limit davranışlarını belirlemek için literatürde farklı yaklaşımlar vardır.

Bunlardan birisi Cayley ağacı üzerindeki Markov random alanlarının özellikleri ile ilişkilidir. Diğer ise dinamik sistemlere karşılık gelen ayrışım fonksiyonlarına bağlı olan yinelemeli denklemler ile ilgilidir. Latis modelleri için faz geçiş problemlerinin tam çözümlerinin bulunması genel olarak zordur ancak bazı yaklaşım metotları kullanılarak tam çözümler de elde edilebilir.

Bu tezde, yukarıda bahsedilen ikinci yaklaşım metodu kullanılacaktır. Bir Cayley ağacı üzerindeki latıs modelleri için yinelemeli denklemlerin elde edilmesi, analizi ve bu denklemlere karşılık gelen faz diyagramlarının bilgisayar programlama dili kullanılarak çözümlenmesi hedeflenmektedir.

Çalışmada, ikinci mertebeden Cayley ağacı üzerinde farklı ikili ve üçlü komşuluk etkileşimli Potts modeline karşılık gelen Hamiltonyen denklemleri incelenecektir. Burada, Vannimenus (1981), Ganikhodjaev ve ark. (2009) ve Temir ve ark. (2010) tarafından yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar incelenecektir.

Bu tezde ilk aşamada, ikinci ve üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde ikili ve üçlü etkileşimlerle meydana gelen iki farklı Hamiltonyen denkleminin bazı spin durumları ile oluşan Potts modellerinin bazı faz diyagramlarını incelemek için, modellerin ayrışım fonksiyonları elde edilip bu ayrışım fonksiyonlarının belirlediği yinelemeli denklemler hesaplanacaktır. İkinci aşamada ise bu denklemlerin belirttiği faz diyagramları bilgisayar programlama dili ile çözümlenecektir.

1.1. Ana Kavramlar

1.1.1. Ising modeli

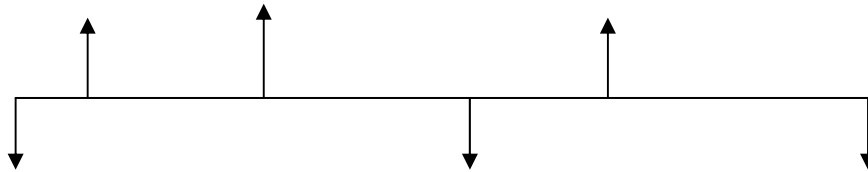
Son yıllarda olasılık teorisinde Markov random alanı olarak adlandırılan yeni bir stokastik süreç tipi tanımlanmıştır. Bu tür süreç tiplerini araştırma motivasyonu orijinal olarak istatistiksel fizikten doğmuştur. Fakat istatistiksel fizikte bu tür süreçlerin Markov süreçlerinin doğal bir genelleştirilmesi olduğu açıktır ve bu alanda boş olan indeksin yerini almıştır (Kindermann ve Snell, 1980).

Markov random alan teorisinin temelleri Preston (1974) veya Spitzer (1971)' de bulunabilir. Markov random alan kavramı Alman fizikçi Ernst Ising' ten sonra genel bir olasılık çerçevesi içine birçok özel model yerleştirme çabasıyla meydana gelmiştir.

Ising, Lenz' in bir öğrencisiydi ve doktora tezini şimdi Ising modeli olarak adlandırılan konu üzerine yazdı. Ising (1925), bu modeli kullanarak deneysel anlamda ferromanyetik maddeler hakkında bazı gerçekleri gözlemledi.

Ising (1925), bulduğu sonuçların bir özetini yayımladığı zaman modelin Lenz tarafından önerildiğini ifade etti. Lenz tarafından yayınlanan makalede modelin yüzeysel bir fikri verilmiştir.

Ising, eksen üzerinde noktaların bir dizisini $0,1,2,\dots, n$ şeklinde düşünmüştür. Her bir nokta veya köşe de küçük bir dipol veya spin vardır. Spin verilen herhangi bir anda yukarı veya aşağı durumlardan birisidir. Bu genel olarak aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi konfigürasyonlar formunda spin durumlarını belirtir.



Şekil 1.1. Spinlerin herhangi bir andaki durumları (Kindermann ve Snell, 1980)

Ising (1925), tüm mevcut konfigürasyonların kümesi üzerine bir olasılık ölçümü yerleştirmiştir. Böyle bir ölçüm random alanı olarak adlandırılır. Güncel olasılık notasyonu kullanılarak tüm dizilerin Ω uzayını en basit uzay olarak aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

burada $\omega_j = +$ veya $\omega_j = -$ dir. “+” spin yukarısını “-“ spin aşağısını belirtmektedir. O halde Ω üzerinde tanımlı σ_j spinini bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Eğer $\omega_j = +$ ise $\sigma_j(\omega) = 1$ ve eğer $\omega_j = -$ ise $\sigma_j(\omega) = -1$ ’ dir.

Ising (1925), Ω üzerinde bir olasılık ölçümünü aşağıdaki şekilde tanımlamıştır. Her bir ω konfigürasyonu için $U(\omega)$ enerjisi;

$$U(\omega) = -J \sum_{i,j} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - mH \sum_i \sigma_i(\omega) \quad (1.1)$$

denklemleri ile belirlenmektedir (Kindermann ve Snell, 1980).

Burada ilk toplam bir ünitenin parçası olan noktaların tüm i, j çiftleri üzerinde alınmıştır. İlk terim, spinlerin etkileşiminden meydana gelen enerjiyi temsil eder. Ising, sadece hesaba katılacak komşu spinler arasındaki etkileşimleri basit olarak toplamıştır. J bağlantı sabiti, düşünülen maddenin bir özelliğidir.

$J > 0$ durumu, çekici durum olarak adlandırılır. Bunun sebebi etkileşim içinde olan komşu spinlerin aynı seviyede kalma eğiliminde olduğu içindir.

$J < 0$ durumu, itici durum olarak adlandırılır. Çünkü etkileşim içindeki spin çiftlerinin birbirlerini zıt yöne itme eğiliminde oldukları içindir.

İkinci terim, bir H yoğunluğunun dış manyetik alanının etkisini gösterir. $m > 0$ sabiti, maddenin bir özelliği olup çekici durumda, ilk terimdeki tüm spinlerin yönelimleri yukarı olduğu zaman minimum enerjiye katkı sağlamaktadır. İkinci terimde ise tüm spinlerin yönü dış alanla aynı yönde olursa minimum enerjiye katkı sağlamaktadır.

Ising (1925), ω konfigürasyonları için olasılıkları;

$$e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)} \quad (1.2)$$

şeklindeki bir oran ile belirlemiştir (Kindermann ve Snell, 1980).

Burada T sıcaklık ve k bir evrensel sabittir. Ω üzerinde ki olasılık ölçümü;

$$P(\omega) = \frac{e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)}}{Z} \quad (1.3)$$

burada normalleştirme sabiti Z ise;

$$Z = \sum_{\omega} e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)} \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada Z ayrışım fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır (Kindermann ve Snell, 1980). Bu ölçümü düşünmenin yararlı bir yolu aşağıdaki gibi açıklanmıştır. Her bir i noktasıyla ilişkili bir U_i enerjisi;

$$U_i(\omega) = \frac{-J}{2} \sum_{|i-j|=1} \sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - mH\sigma_i(\omega) \quad (1.5)$$

şeklindedir (Kindermann ve Snell, 1980).

O halde
$$P(\omega) = \frac{1}{Z} \prod_i e^{-\frac{1}{kT}U(\omega)} \quad (1.6)$$

şeklinde yazılabilir (Kindermann ve Snell, 1980). Bu yüzden bir konfigürasyonun göreceli olasılığı, tüm noktalar üzerinde bir çarpım olarak basit bir şekilde elde edilebilir ve noktanın ağırlığını belirlemek için her bir noktada var olan enerji kullanılmaktadır.

İki boyutlu bir latis üzerinde tipik bir konfigürasyon aşağıdaki şekilde düşünülmüştür (Kindermann ve Snell, 1980). Bir nokta ve bu noktanın komşusu arasındaki etkileşimle enerji tanımlanmıştır. Olasılık ölçümü de (1.2), (1.3) ve (1.4)' de olduğu gibi tanımlanmaktadır. Aşağıdaki şekilde iki boyutta sınır olmaksızın bir noktanın 4 komşusu vardır.

+ + - - + - - + + - + - + + +
 + + - + + - + - + - + - + + +
 + + + + - - - + + + - - + + +
 + + + + + - - - - + + + + + +
 + + - - - - + + - + - + - - +

Şekil 1.2. Spin durumları (Kindermann ve Snell, 1980)

Ising (1925), sadece manyetik yorumu dikkate alırken bu model birçok fiziksel ve biyolojiksel alanda da örneğin gazlar, ikili alaşımlar ve hücre yapılarında da uygulanabilir olarak bulunmuştur.

Sosyolojik olarak Potts modelinin bir uygulaması, Weidlich (1971) tarafından yapılmıştır. Burada bir grup insan düşünülmüştür. İnsanların her birinin durumu verilen bir anda ya liberal (aşağı) ya da muhafazakar (yukarı) olarak seçilmiştir. Burada meydana gelecek enerji gerilim olarak adlandırılmıştır. (1.1)' deki birinci ifade insanların etkileşimlerinden meydana gelen gerilimdir. Buradaki dış alan ise hükümetin liberal ya da muhafazakar durumu olabilir.

Eğer tüm insanlar birbirleriyle ve hükümet ile aynı fikirde iseler minimum gerilim meydana gelmektedir. Tabi ki böyle bir uygulamada özel komşulukların ve düzenli latis için sınırlamanın ihmal edilmesi gerekebilir (Weidlich, 1971).

1.1.2. Potts Modeli

Potts modeli, özel olarak kompleks sistemlerin uzun terimli davranışlarını inceleyen istatistiksel mekanik modellerinin bir sınıfı olarak tanımlanabilir (Beaudin, 2007). Bu modeller hemen hemen her konu alanını örneklemek için zengin bir yapıya sahiptirler. Özellikle konformal alan teorisi, düğüm teorisi, sızma teorisi, quantum grupları ve integrallenebilir sistemlerin kesişme noktası tarafından meydana gelen araştırmaların merkezinde bulunmaktadır (Beaudin, 2007).

Potts modeli, her bir elemanın sahip olduğu belirli karakteristik özelliklerine dayanan sistem elemanlarının birbirleriyle olan etkileşimlerini araştırmaktadır. Potts modeli biyoloji, sosyoloji, fizik ve kimya gibi alanlarında çok geniş uygulama sahasına sahip kullanışlı bir matematiksel modelleme aracı olarak işlev görmektedir.

Potts modeli, ikiden fazla bileşen ($q > 2$) için Ising modelinin bir genelleştirilmesidir (Potts, 1952). Son zamanlarda Potts modeli istatistiksel fizikte ki pek çok problemin çözümünü içermektedir (Wu, 1982). Modelin belirli özellikleri hakkında bazı kesin sonuçlar bilinmektedir. Fakat bunların pek çoğu yaklaşım metotları üzerine dayanmaktadır. Burada, standart latisler üzerinde analitik çözümler mevcut olmadığı ifade edilebilir. Fakat periyodik latisler üzerindeki spin modellerinin faz geçişlerinin araştırmaları, çeşitli fiziksel özelliklerin tam çözümlerinin mevcut olduğunu göstermektedir (Dorogovtsev ve ark., 2004; Peruggi, 1984; Timonin, 2004). Periyodik latisler üzerindeki böyle çalışmalar Migdal-Kadanof grup metodunun gelişmesiyle başlamıştır. Buradaki latisler sıradan kristallerin yaklaşımı olarak ortaya çıkmıştır. Diğer bir deyişle modellerin tam çözümlerinin çalışılması istatistiksel mekanikte bazı genel ilgiyi hak etmektedir (Baxter, 1982). Daha genel olarak düzensiz graflar üzerinde istatistiksel mekaniğin araştırmaları günümüzde oldukça çalışılan bir konudur (Lyons, 2000). Örneğin Bethe latisi (Cayley ağacı), düzensiz graf yapısıyla en basit periyodik latis çeşididir. Bunun anlamı, Bethe latisinin iç noktalarının sayılarının sınır noktalarının sayısına oranı, büyük bir sistemin termodinamiği içindeki limitinin sıfır olmayan bir sabite yakınsamasıdır. Yani W_n/V_n oranı $n \rightarrow \infty$ iken $(k-1)/(k+1)$ ' e yakınsama eğilimindedir (Ganikhodjaev, 1990). Burada k sayısı latisin mertebesini ifade etmektedir.

(Peruggi, 1983; Peruggi, 1984)'de Bethe latisi üzerinde q -durumlu Potts modelinin faz diyagramları çalışılmıştır ve ferromanyetik Potts modelinin doğal faz geçişleri bulunmuştur. (Ganikhodjaev, 1990)'da bulunan bu sonuçlar kullanılarak üç durumlu Potts modelin sayılamayan pek çok doğal fazları belirlenmiştir. Bu araştırmalar (Georgi, 1988; Preston, 1974; Sinai, 1982; Peruggi, 1984)'deki teorik ölçüm gelişmelerine bağlı olarak yapılmıştır.

Potts modelin kökeni 1900 yılların ortalarına dayanmaktadır. İki matematikçi Julius Ashkin ve Edward Teller (Baxter, 1982), bir sistem içindeki çeşitli elemanların davranışlarını göstermek için matematiksel bir model kullanan ilk kişiler arasındadırlar. Cyril Domb, kendisinin doktora öğrencisi olan Renfrey B. Potts' a doktora tez konusu olarak bu modeli önermiştir.

Potts, Ashkin ve Teller' in kurdukları temel ile çok faydalı bir model inşa etmiştir. Potts, 1952 yılında yayınladığı çalışmada bu özel modeli açıklamıştır. Modelin formu günümüzde q -durumlu Potts modeli olarak bilinmektedir.

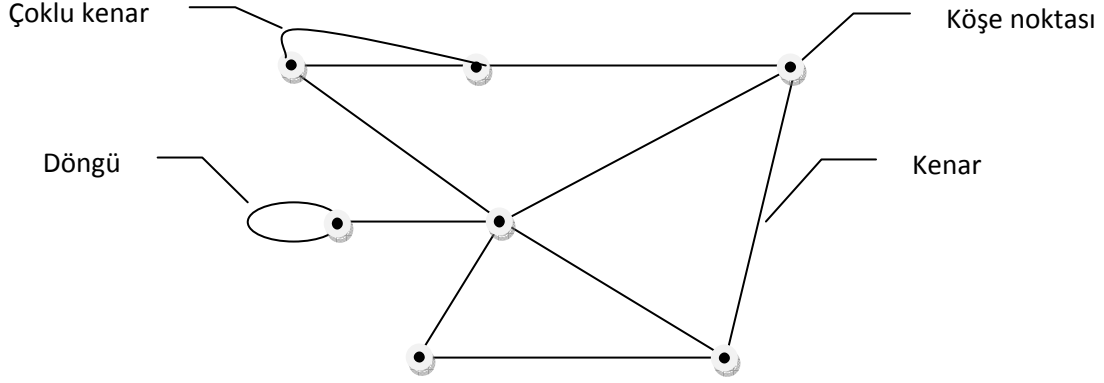
Potts modeli, bilim adamları ve matematikçiler tarafından kompleks sistemlerin stokastik sonuçlarını tahmin etmek için kullanılmaktadır. Bu nedenle Potts modeli kullanılarak istatistiksel mekanik alanında pek çok uygulama yapılmaktadır.

İstatistiksel mekanik kendi isminden de anlaşılacağı üzere iki temel konuyu içermektedir. Mekanik; belirli dış faktörlerin ne kadar iç elemanı etkilediğini açıklarken, istatistik ise sonuçları tahmin etmek ve pek çok veriyi çalışmalarda kullanmak için karşılaştırma yapmaktadır.

Potts modeli temel olarak, uzun terimli sonuçların ne olduklarını tahmin etmek için, bir sistem içindeki elemanlar arasındaki etkileşimleri incelemektedir. Graf teorisi, Potts modelini analiz ve tahmin etmek için gerekli olan temel kavramları sağlamaktadır. Graf teorisini daha iyi incelemek için (Tucker, 2002) kaynağına bakılabilir.

1.1.3. Graf

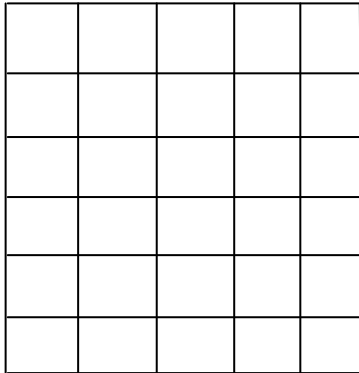
Genel bir graf, $G=(V,\Lambda)$ ikilisinden oluşur. Burada V , G grafi üzerindeki köşe noktalarının kümesini, Λ ise G grafi üzerindeki kenarların kümesini ifade etmektedir. Köşe noktaları bir nesnenin veya sistemin iç elemanlarını temsil ederken, kenarlar ise eleman çiftleri arasındaki potansiyel etkileşimleri temsil etmektedir.



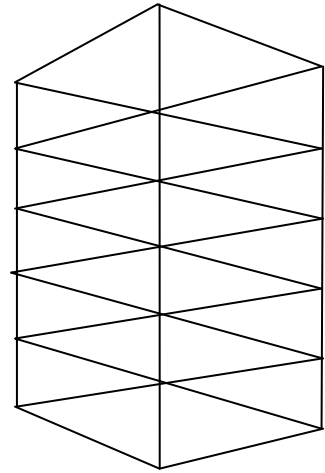
Şekil 1.3. Genel bir graf örneği (Beudin, 2007)

1.1.4. Latis (Örgü)

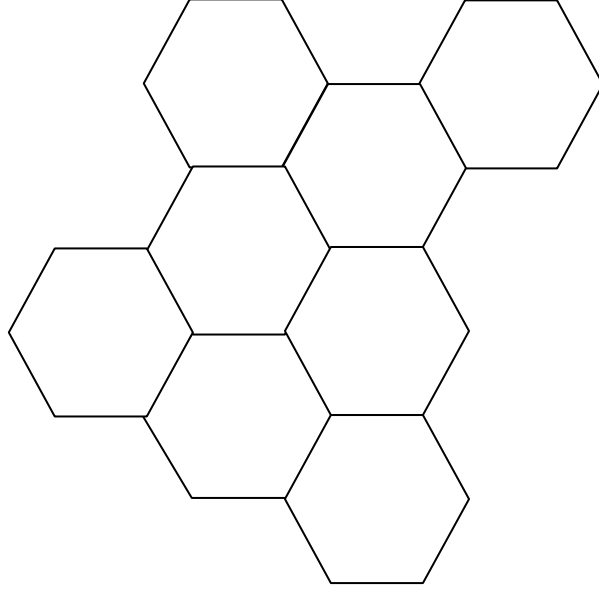
Geometrik örgü şekillerine veya modellerine verilen isimdir. Latis modelleri bazen sonlu bazen sonsuz veya periyodik (hiyerarşik) olabilir. Buna göre değişik isimlerle adlandırılabilir. Pek çok uygulamada grafın düzenli bir yapı olduğu kabul edilmektedir. Örneğin latisler (örgü modelleri) gibi. Bazı genel latis örnekleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.4. Kare latis



Şekil 1.5. Üçgen latis



Şekil 1.6. Petek latis

Tanım 1.1.1. Bir kompleks sistem bir graf tarafından modellenebilen nesnelere meydana gelen yapıdır.

Kompleks sistemlerin örnekleri atomlar, insanlar, meyveler veya hücre organizasyonları olarak örneklendirilebilir. Bu nesnelere, grafi teoriksel incelemeye olanak sağlayan düzenli içyapılardan meydana gelir.

Tanım 1.1.2. $x, y \in V$ iki köşe noktası olmak üzere eğer bu noktaları birbirlerine bağlayan bir kenar var ise bu iki köşe noktası birbirinin komşusudur denir.

Bu kavram graf üzerinde köşe noktalarının durumuna bağlı olarak birbirlerini etkileyip etkilemediğini ifade eder.

Tanım 1.1.3. Bir G grafının birbirine bağlı bir bileşeni, herhangi iki köşe arasındaki kenarlarının bir yolu mevcut olan graf içindeki köşelerinin maksimum alt kümesidir.

Potts modeli, matematikçiler ve diğer bilim adamlarının kompleks sistemlerin davranışlarını anlamak için kullandıkları matematiksel bir modelleme aracıdır.

Potts modelinin yapısı bir kompleks sistemin iç elemanlarını incelemek ve kompleks sistemin tüm davranışını belirlemek için elemanların birbirleriyle olan etkileşimlerini tahmin etmeyi sağlayacak bir özelliğe sahiptir. Diğer bir deyişle model mikroskopik iç elemanları ve zamanla gözlemlenebilen makroskopik sonuçlar için elemanların etkileşimlerine çalışmaktadır.

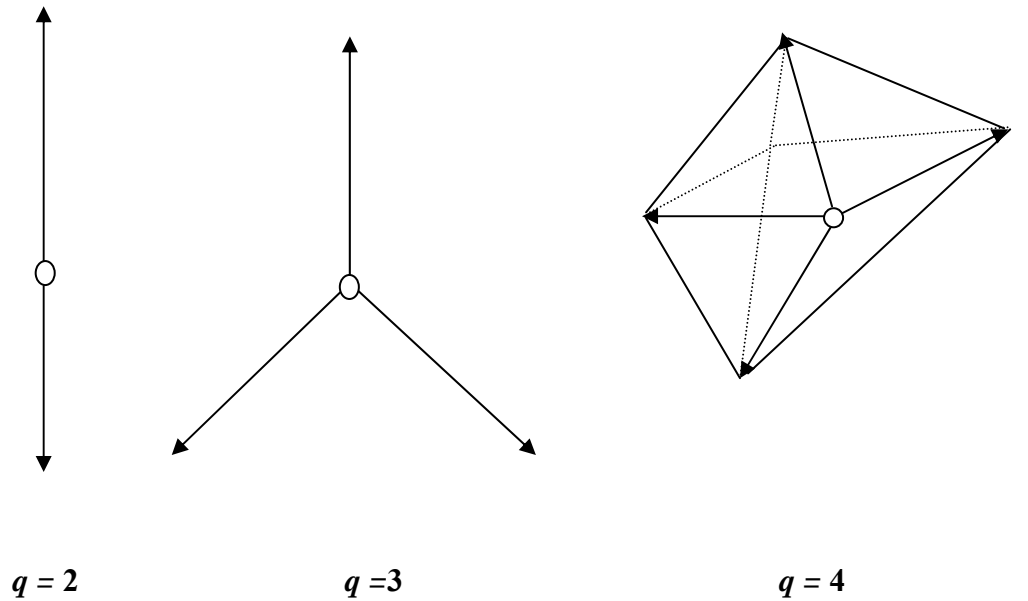
1.1.5. Spin

S belirli özelliklere sahip bir küme ve G bir graf olsun. Bir V köşe noktasındaki bir spin, V kümesine S 'nin bir elemanının atanması durumudur.

Grafın her köşe noktasına bir spin durumu karşılık gelmektedir. Spinlerin kombinasyonu, komşu elemanların birbiriyle olan etkileşimlerini belirlemektedir.

Bazı genel spin örnekleri sıcaklık (sıcak veya soğuk), manyetizma (pozitif veya negatif), yön (yukarı, aşağı veya yan yönler) ve renk (mavi, yeşil, kırmızı veya mor), ... gibi sıralanabilir.

Potts modelinde genel olarak spinler $1, \dots, q$ olarak kullanılmaktadır. Burada $q = |S|$ dir ve $q=2$ spin durumunda Potts modeli, Ising modeli olarak bilinmektedir.



Şekil 1.7.Yönelim durumları

Tüm mevcut olan yönelimler eksensel simetriye sahip olup yönelimler arasındaki açı;

$$\theta_n = 2\pi n/q, n = 0, 1, \dots, q-1 \quad (1.7)$$

ile belirlenmektedir.

Tanım 1.1.4. Bir grafın herhangi bir andaki durumu, köşe noktalarına karşılık gelen spinlerin herhangi bir seçimi durumudur (Beaudin, 2007).



Şekil 1.8. $Q = \{\text{siyah, beyaz}\}$ için bir grafın iki farklı durumu

Sistemin elemanları latis üzerindeki konumlarına bağlı olarak birbirlerini etkilemeleri ve her birine farklı spinlerin karşılık gelmesi durumuna göre sistemin toplam enerjisi meydana gelmektedir. Bir kompleks sistemin toplam enerjisini ölçen fonksiyona Hamiltonyen denklemi denir. Hamiltonyen denklemi sistem içindeki her bir kenara bir değer atayarak bir grafın özel durumundaki enerjisini ölçer. Bu değer uygulamaya bağlı olarak değişebilir. Potts modeli ile ilgili literatürde bir sistemin Hamiltonyeni için iki baskın tanım bulunmaktadır. Her iki tanım da aynı notasyonla kullanılmaktadır.

1.1.6. Kronecker Deltası

J sistemin komşu elemanları arasındaki etkileşim enerjisidir. σ_i , ω durumunda i köşesine atanan spinin değeridir. Bu ifadeler Kronecker delta fonksiyonunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\delta_{\sigma_i \sigma_j} = \begin{cases} 1, \sigma_i = \sigma_j \\ 0, \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases} \quad (1.8)$$

Tanım 1.1.5. İlk Hamiltonyen denklemi;

$$h_1(\omega) = -J \sum_{\{x,y\} \in \Lambda(G)} \delta_{\sigma_x \sigma_y} \quad (1.9)$$

burada G , grafının herhangi bir andaki özel bir durumudur.

Tanım 1.1.6. Hamiltonyen denklemi için ikinci tanım ise;

$$h_2(\omega) = J \sum_{\{x,y\} \in \Lambda(G)} (1 - \delta_{\sigma_x \sigma_y}) \quad (1.10)$$

şeklindedir.

1.1.7. Konfigürasyon

Bir konfigürasyon her bir $x \in V$ köşe noktasını, $\varphi(x) \in S$ olan bir spin değerine atayan dönüşümdür ve

$$\varphi: V \rightarrow S$$

$$x \rightarrow \varphi(x)$$

şeklinde de ifade edilir.

φ konfigürasyonu $\Omega = S^V$ uzayının bir elemanı olup, bir konfigürasyon, latisin bir renkleşmesi durumudur.

\mathbb{Z}^2 tam sayılar latisi üzerinde $q = 3$ spin durumlu bir konfigürasyon örneği aşağıdaki gibidir.

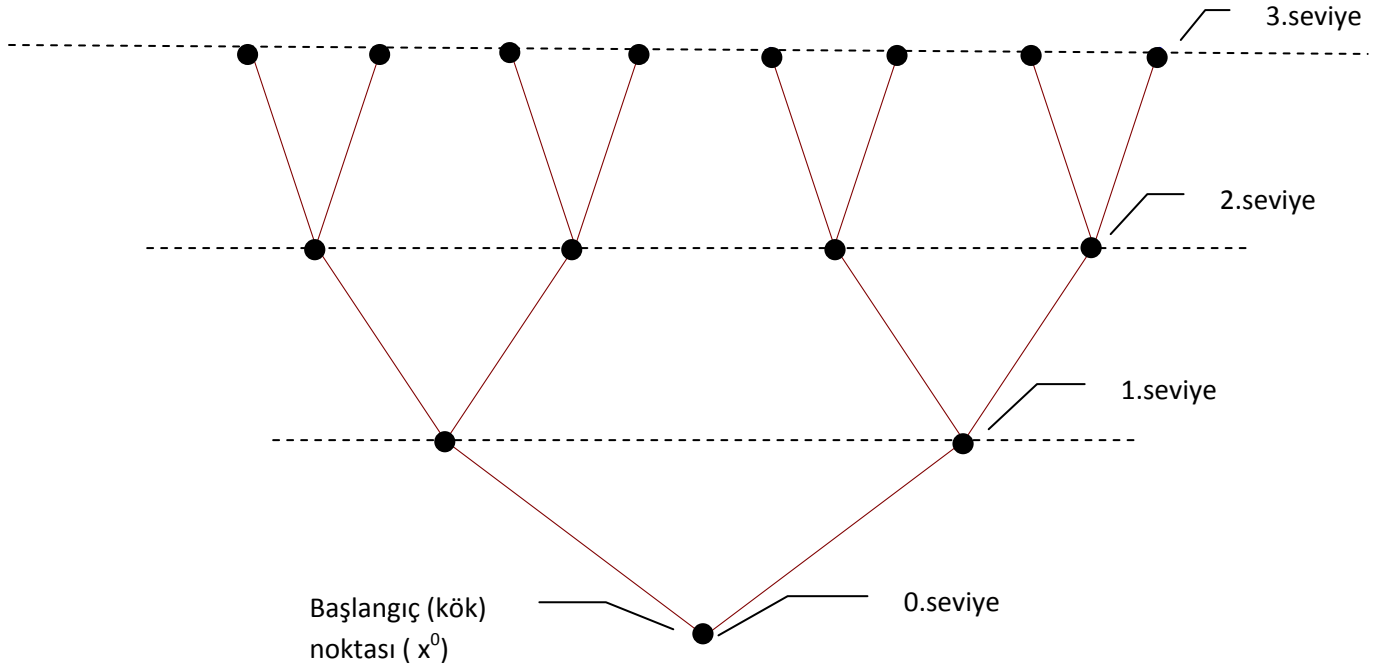
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |

1 → 2 → 3 →

Şekil 1.9. \mathbb{Z}^2 tam sayılar latisi üzerinde bir konfigürasyon

1.1.8. Cayley Ağacı

Herhangi k -mertebeden ($k \geq 1$) Cayley ağacı Γ^k , Şekil 1.10.'da gösterildiği üzere her bir köşe noktasından (x^0 hariç) $k + 1$ tane kenarın sonsuz şekilde uzandığı bir latis modelidir. $\Gamma^k = (V, A)$ şeklinde gösterilen Cayley ağacı için V Cayley ağacının köşe noktalarının kümesini ve A ise kenarlarının kümesini belirtmektedir. Eğer iki köşe noktası x ve y 'yi birleştiren bir kenar $l \in A$ var ise “en yakın komşuluk” olarak adlandırılır ve $l = \langle x, y \rangle$ şeklinde gösterilir. $x, y \in V$ olmak üzere, V kümesi üzerindeki uzaklık $d(x, y)$, x ve y arasındaki en kısa yol üzerindeki kenarların sayısı olarak tanımlanır. Herhangi belirlenmiş bir nokta $x^0 \in V$ için, bu noktaya göre seviyeler kümesi $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$ ve $V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}$ şeklinde verilir ve V_n içerisindeki kenar noktalarının kümesi L_n olarak temsil edilir.

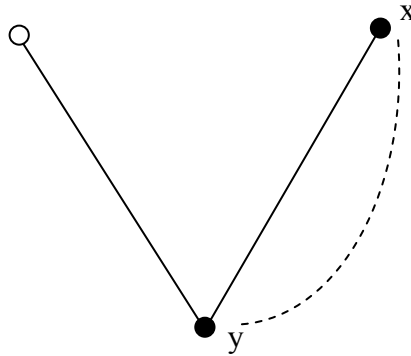


Şekil 1.10. İkinci mertebeden bir Cayley ağacı

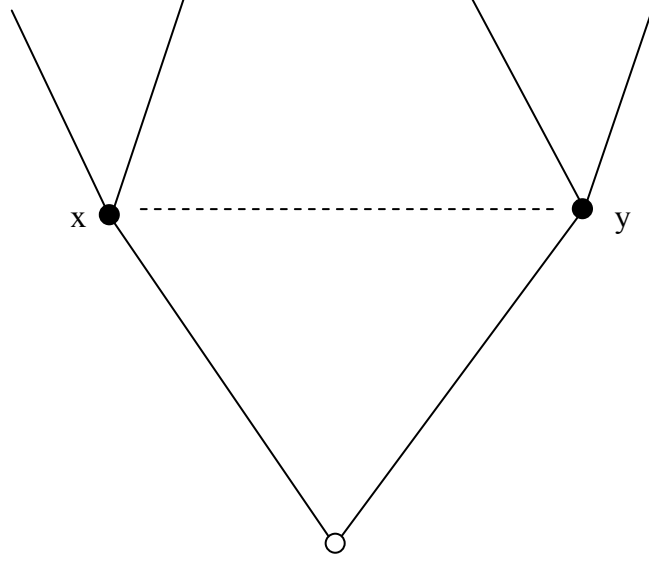
1.1.9. Cayley ağacı üzerindeki komşuluklar

Cayley ağacı üzerinde aşağıda şekillerde belirtildiği gibi komşuluklar düşünebiliriz;

Yukarıda da belirtildiği üzere eğer iki köşe nokta x ve y 'yi birleştiren bir kenar $l \in \Lambda$ var ise “en yakın komşuluk” olarak adlandırılır ve $\langle x, y \rangle$ şeklinde gösterilir.

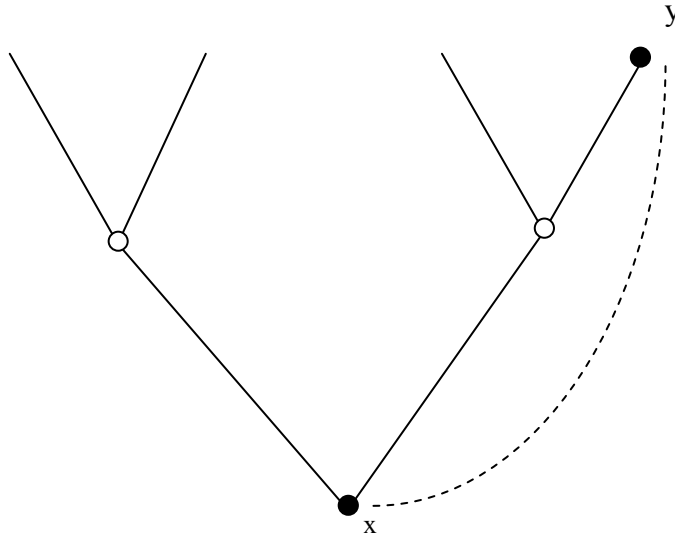
Şekil 1.11. En yakın komşuluk olan x, y köşe noktaları

Eğer $x, y \in V$ köşe noktaları arasındaki mesafe $d(x, y) = 2$ ise bu iki köşe noktası uzatılmış ikinci komşuluk adını alır ve iki farklı durumu vardır. İlk duruma bir seviye ikinci komşuluk adı verilir ve $\overline{x, y}$ şeklinde gösterilir.



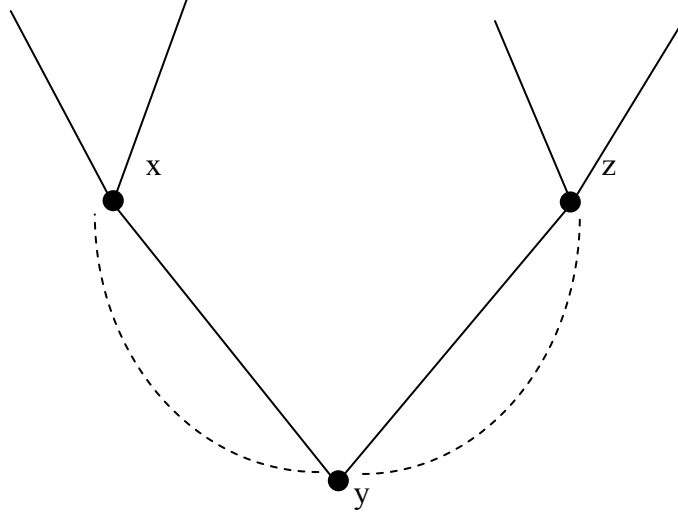
Şekil 1.12. Bir seviye ikinci komşuluk olan x ve y köşe noktaları

İkinci duruma ise uzatılmış (prolonged) ikinci komşuluk adı verilir ve $\widetilde{x, y}$ şeklinde gösterilir.



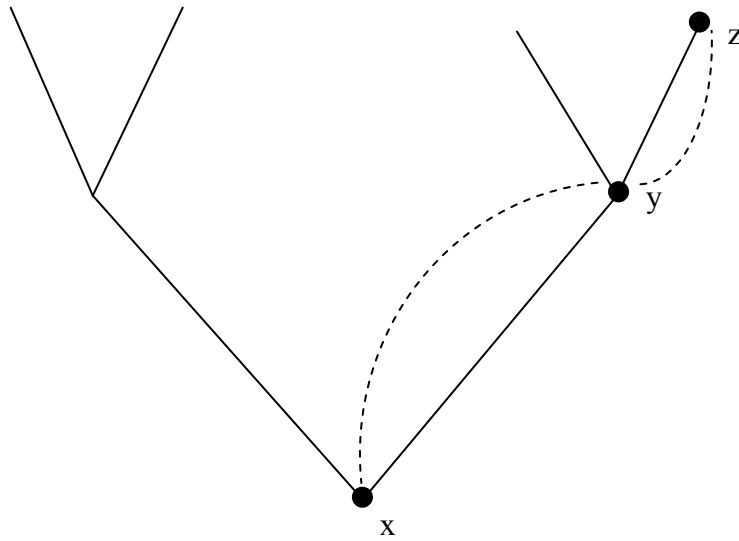
Şekil 1.13. Uzatılmış ikinci komşuluk olan x, y köşe noktaları

Eğer $x,y,z \in V$ köşe noktaları arasında $\langle x,y \rangle$ ve $\langle y,z \rangle$, $x \neq z$ olacak şekilde en yakın komşulukları varsa bu x,y,z köşe noktaları üçlü komşuluklardır denir ve bu komşuluk ikiye ayrılır. Birincisi iki seviye üçlü komşuluktur ve $\overline{\langle x,y,z \rangle}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca bu durumda $x,z \in W_n$ 'dir.



Şekil 1.14. İki seviye üçlü komşuluk olan x,y,z köşe noktaları

İkinci durum; $\langle x,y \rangle$ ve $\langle y,z \rangle$ olup bu köşe noktaları uzatılmış üçlü komşuluk olarak adlandırılır ve $\langle \widetilde{x}, y, z \rangle$ şeklinde gösterilir. Ayrıca burada $x \in W_n$, $y \in W_{n+1}$ ve $z \in W_{n+2}$ biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 1.15. Uzatılmış (prolonged) üçlü komşuluk olan x,y,z köşe noktaları

1.1.10. Potts modelinin uygulamaları

Bu kısımda Potts modelinin üç uygulamasına değinilecektir (Beaudin, 2007). Birincisi köpüklerin davranışlarını incelemek için kullanılan Potts modelinin fiziksel uygulamasıdır. İkinci uygulama ise tümörlerin büyüme davranışlarını izlemek için kullanılan biyolojik uygulamadır. Son uygulama olarak insan etkileşimlerini çalışmak için kullanılan Potts modelinin sosyolojik uygulamasıdır.

Potts modelin fiziksel uygulaması, Sanyal ve Glazier (2006) tarafından “akışkan köpükler içindeki yapışkan kararsızlıklar: hücrel bir Potts modeli” adlı makalelerinde yapılmıştır. Bu deney köpük içinden akan tek büyük baloncğun izlenmesine dayanmaktadır. İlk bakışta köpük akışının pek fazla uygulama alanına sahip olmadığı düşünülebilir. Fakat yangınla mücadele, petrol elde etme, mayalanma gibi pek çok uygulama alanına sahiptir.

Sanyal ve Glazier (2006) köpük akışının hızı arttıkça ne gibi değişiklikler meydana geleceğini görmek için bu akışı izlediler. Bu yazarlar Şekil 1.16’ deki gibi bir latisi inceleyerek deneye başlamışlardır.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | 4 | 3 | 3 |
| 4 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |

Şekil 1.16. Köpükleri incelemek için kullanılan latis

Deney içindeki elemanlar tek latis noktaları değildir. Fakat aynı spinler ile birleşen bölgeler tek bir baloncuk temsil etmektedirler. Bu durumda 3. katmanın belirttiği baloncuk en büyük baloncuktur.

Sistemin enerjisi için göz önüne alınan Hamiltonyen denklemi;

$$H = \sum_{ij} J(1 - \delta_{\sigma_i \sigma_j}) + \lambda \sum_n (a_n - A_n)^2$$

λ değeri baloncuk üzerindeki sınırlanan alanın genişliğini belirtmektedir. A_n değeri baloncuk üzerine hiçbir etkinin olmadığı andaki baloncuk yüzeyindeki alanı ifade etmektedir. a_n ise baloncukun şu andaki yüzey alanıdır. n sayısı ise baloncuk sayısıdır.

Deneyin sonuçları çok yararlı olarak bulunmuştur. Köpük içerisinde tek büyük bir baloncuk izlenerek araştırmacılar büyük köpüklerin küçük köpüklerden daha hızlı aktığını gözlemlemişlerdir. Araştırmacılar ayrıca köpüğün kontrolsüz olarak akmaya başladığı yerde kritik bir hızın var olduğunu göstermişlerdir. Bu sonuçlar, bu olguyla ilgili işlerde çalışanları daha dikkatli olmaları gerektiğini söylemektedir. Bu kişiler madde içinde oluşabilecek büyük köpükleri önlemek için maddede ne kadar hava bırakılması gerektiği konusunda daha dikkatli olabilirler. Ayrıca akımı kontrol edebilmek için akışı belirli bir hızın altında tutmaya çalışabilirler.

Potts modelin biyolojik uygulaması, kanserli bir tümörün büyümesini içermektedir. Sun ve ark. (2004) “ Besin etkinliği ile ilgili tümör büyümesinin ayrı bir örneklenmesi” adlı makalelerinde yaptıkları deneyi açıklamışlardır.

Deney Şekil 1.17’ deki gibi bir latisin incelenmesi ile başlamaktadır.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 3 | 5 | 5 |
| 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 4 | 1 | 1 |

Şekil 1.17. İnsanın biyolojik hücrelerini temsil eden latis

Burada aynı spinlerle birleşen latis bölgeleri tek bir hücreyi temsil etmektedir. Örneğin, Şekil 1.17' te 6 tane hücre vardır. Bu hücrelerin iki tanesi 1 ile ifade edilen aynı tip hücrelerdir. Bu deneyde kullanılan Hamiltonyen bir önceki uygulamada kullanılan Hamiltonyen den biraz daha karmaşıktır.

$$H = \sum_{ij} \sum_{ij} J_{\tau(\sigma_{ij})\tau(\sigma_{ij})} \{1 - \delta_{\sigma_{ij}, \sigma_{i,j}^*}\} + \sum_{\sigma} \lambda (v_{\sigma} - V_T)^2 + Kp(i, j)$$

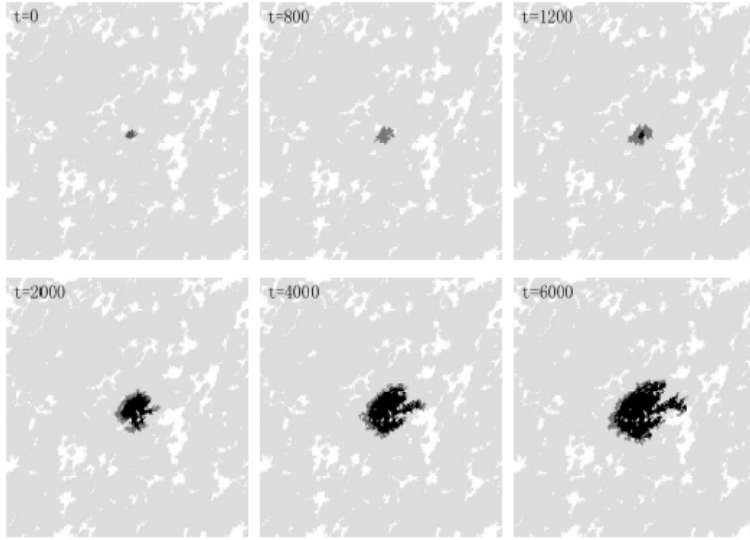
Bu deneyde $\tau(\sigma_{ij})$ hücre tipini belirtir ve J değeri hücrenin tipine göre değişmektedir. Eğer latis üzerindeki noktaların birisi herhangi bir hücre tarafından işgal edilmiyorsa elemanlar arasındaki etkileşim $J_{hücre-ECM}$ sabiti kullanılarak da modellenebilir. Bu sabit hücre ve hücre ortamı veya dış katman arasındaki genişliği ölçmektedir.

$\lambda(v_{\sigma} - V_T)^2$ terimi hücrenin deformasyonu ve büyüme enerjisini belirtmektedir. V_T değeri hücreye herhangi bir dış etki olmadığı andaki hacmidir. Sonuç olarak $p(i, j)$ ifadesi ise ij durumunda ne kadar besinin var olduğunu göstermektedir.

Bu deneyin yapılmasında üç adım vardır. İlk adım, gerçekçi bir hücre döngüsünün gelişimidir. Yazarlar sağlıklı ve hasta hücrelerin her ikisi ile oluşan tam olasılıksal latisleri elde etmek için Metropolis algoritmasını kullanmışlardır.

İkinci adımda ise hücre bölünmelerini araştırmışlardır. Hücre bölünmesi kanser araştırmalarının çok karmaşık bir parçasıdır. Yazarlar, hücrenin enerjisi arttığı ve hücre bölünmeye devam ettiği için hücre bölünmesini zamanın bir fonksiyonu olarak düşünmüşlerdir. Son adım ise çevre besininin kontrolüdür. Bu deneyde tek besin kaynağı tümörün sol tarafı üzerindeki toplardamardır. Bu üç adım tanımlandıktan sonra deney yapılmıştır. Monte-Carlo simülasyonları ile tüm değerler belirlenebilir ve ne kadar tümör büyüdüğü incelenebilir.

Bu deneyden Sun ve ark. (2004) çok önemli iki sonuç elde etmişlerdir. Bu simülasyon aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 1.18. Tümör büyüme deneyinin sonuçları (Sun ve ark., 2004)

Yazarlar başlangıç seviyesinde tümör büyümesinin üstel biçimde arttığını bulmuşlardır. Fakat hasta hücreler eklendikçe daha fazla besine ihtiyaç duyulmakta ve bazı hücreler ölmekte ve diğer hücrelerde yeterince hızlı çoğalamamaktadırlar. İkinci sonuçta ise tümör toplardamara doğru hareket etmektedir. Eğer doktorlar bu sonuçları kullanırlarsa kanserli hücrelerle mücadelede daha iyi bir gidişat olacağı sonucuna varmışlardır.

Potts modelin sosyolojik uygulaması ise, insan davranışlarını incelemektedir. Potts modeli direkt olarak kullanılmamasına rağmen deneyde kullanılan model, Potts modeli ile aynı köklere sahiptir. Ekonomi alanında 2005 Nobel ödülü kazanan Schelling tarafından yazılan “ Ayrımcılığın dinamik modelleri” başlıklı makalesinde Potts modeline çok benzer bir model tanımlamıştır. Bu deneyde aşağıdaki şekildeki gibi bir latis kullanılmıştır.

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| x | y | x | y |
| | x | y | x |
| x | | y | y |
| x | x | x | |

Şekil 1.19. Schelling'in komşulukları

x ' bir grup insanı temsil ederken y farklı bir grup insanı temsil etmektedir. Deneyde kullanılan bu latis her gruptaki birey sayılarını içeren pek çok değerle beraber Schelling deneylerini meydana getirmektedir. Bir bireyi tanımlama yöntemi ise bireylerin komşuluğu ve insanların sahip oldukları komşuluk etkileşimleri içindeki tercih oranlarına göre değişmektedir. Deney tüm latise bakılarak yapılmakta ve mutsuz olan tüm insanlar belirlenmektedir. Bu insanlar durumlarını bazı olasılık tipleriyle değiştirmektedirler. Schelling, latis etrafında hareket eden insanları farklı yollarla tanımlamıştır.

Schelling, ayrımcılık üzerinde çok dikkat çeken bazı sonuçları ortaya koymak için çok farklı deneyler yapmıştır. Bu deneyde insanların kendilerinden farklı durumda olan insanları bilinçli veya bilinçsiz olarak kendilerinden ayırdığı sonucu ortaya çıkmıştır.

Schelling' in deneylerindeki çok az değişiklik ile bu model bir Potts modeli yapısına dönüşmektedir. (Fouladvand ve ark., 2005) şehirlerin iç mahallelerinde ki Ghetto'lar için Potts modeli gibi bir model kullanmıştır. Bu deney Schelling' in deneyinin bir genelleştirilmesidir.

Aşağıdaki yöntemle Potts modeli insan davranışlarını belirlemek için düşünülmüştür. Burada insanların komşuluklarını, işlerini, şehirlerini veya insanların birbirlerini etkiledikleri diğer durumları belirlemek için bir latis kullanılmıştır. Bu kez diğerine göre daha fazla grup kullanılmıştır. Örneğin, yaşlı insanlar, üniversiteli oda arkadaşları, büyük çocuklu aileler ve küçük çocuklu aileler gibi. İlk adımda, bu insan gruplarının her bir üyesi yepyeni bir gelişim içinde beraber yaşamaktadırlar. Burada yaşlıları 1, üniversiteli oda arkadaşlarını 2, büyük çocuklu aileleri 3 ve küçük çocuklu aileleri 4 ile gösterilmiştir. Başlangıç latisi aşağıdaki gibidir.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 4 | 4 |
| 1 | 3 | 4 | 2 | 1 |

Şekil 1.20. Dört farklı grup ile oluşan komşuluk

Bu grupların üyeleri yakınlarında yaşayacak olan insanlar hakkında tercihe sahiptirler. Örneğin yaşlı insanlar onları rahatsız eden büyük partilerden dolayı üniversiteli oda arkadaşlarının yakınlarında yaşamalarını istememektedirler.

Küçük çocuklu aileler ise çocukları evlerinden uzaklaşmaması için birbirlerine yakın yaşamayı tercih etmektedirler. Bu deneyde tercihleri gerçekliğe uyacak biçimde geliştirilmiştir.

Bu deney için kullanılan Hamiltonyen denklemi, meydana gelecek olan tüm etkileşimlerin enerjilerini ölçmektedir. Bu deneydeki dış kuvvetler ise evlerin fiyatları, evlerin iş yerlerine olan yakınlığı ve insanların ne kadarının şu anki evlerinden hoşlandığı gibi durumlar olabilir. Metropolis algoritması daha fazla olay için latis durumlarının olasılıklarını daha yüksek bir kesinlikte hesaplayabilir. Sonuç olarak, ayrımcılık oluşumunda rol oynayan tercihleri görebilmekteyiz.

Potts modeli; köpük akışı, tümör büyümesi ve insan etkileşimleri gibi olguları çalışmak için kullanılmıştır. Potts modeli gibi modeller ile doğal olayların uzun terimli davranışlarını ve sonuçlarını tahmin edebiliriz.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Ising, 1925 yılında danışmanı tarafından önerilen ve bugün Ising modeli olarak adlandırılan modeli bir-boyutlu olarak çözmüştür. Orijinalinde ferromanyetik model olarak görülen Ising modelin, bir-boyutta hatta herhangi bir boyutta faz geçişinin olmadığını önermiştir. Ancak pek çok çalışmada faz geçişinin varlığı ispatlanmıştır.

Domb tarafından ilk olarak önerilen, Potts modeli (Potts, 1952) Ising modelinin bir genelleştirilmesidir. Ising modelinde spin sayısı $q=2$ iken Potts modelinde spin sayısı ikiden büyüktür ($q>2$). Vannimenus (1981) , en yakın ve uzatılmış en yakın etkileşimli Ising modeli için bir modüle edilmiş (modulated) faz diyagramının varlığını ispatlamıştır. Bu çalışmadan itibaren pek çok araştırmacı (Mariz ve ark, 1985; Da Silca ve ark, 1986), Cayley ağacı üzerinde en yakın ve uzatılmış en yakın etkileşimli Ising ve Potts modellerinin faz diyagramları ve Lifshitz noktalarının bulunması problemi ile ilgilendiler. Potts modeli ile ilgili ayrıntılı bilgi için Wu (1982) tarafından yapılan çalışmaya bakılabilir.

Inawashiro ve ark. (1983) ve Inawashiro ve Thompson (1983), Vannimenus'ten bağımsız olarak en yakın komşuluk ve uzatılmış (prolonged) sonraki en yakın komşuluk etkileşimli Ising modelini, $J_p=J_0$ durumunda incelemişlerdir, burada J_0 bir-seviyeli sonraki en yakın komşuluk etkileşimidir.

Mariz ve ark. (1985) bu sonuçları bir-seviyeli sonraki en yakın komşuluk etkileşimine dış manyetik alanı da ilave ederek genelleştirmişlerdir. En yakın komşuluk ve üçlü komşuluk etkileşimli Potts modelinin faz geçişlerinin olup olmadığını araştırmak için (Ganikhodjaev ve ark., 2008) matematiksel analizler yapmışlardır.

Ganikhodjaev ve ark. (2009), Cayley ağacı üzerinde iki mertebeli sonraki en yakın komşuluk ve en yakın komşuluk etkileşimli üç durumlu Potts modelinin faz diyagramını incelemişlerdir. Bu çalışmada yazarlar Vannimenus'un bulduğu paramanyetik, ferromanyetik ve modulated fazlara ilave olarak paramodüle edilmiş faz olarak adlandırılan yeni bir fazın varlığını nümerik olarak çözmüşlerdir. Potts modeli için elde edilen bu faz çeşidi Ising modelinden farklıdır. Vannimenus (1981),

Mariz ve ark. (1985) ve Ganikhodjaev ve ark. (2008) çalışmalarından hareketle Hamiltonyen denklemi ile elde edilen Potts modellerinin faz diyagramlarını, Delphi bilgisayar programlama dili yardımıyla Ganikhodjaev ve ark. (2009) elde etmişlerdir. Bu çalışmalardan hareketle, analizi yapılacak olan Cayley ağacı üzerinde ikili ve üçlü etkileşimli Potts modelinin bazı spin durumlarındaki yineleme denklemleri çözümlenerek bu lineer olmayan denklem sistemlerinin matematiksel anlamdaki yorumları yapılacak ve faz diyagramlarının grafikleri çizdirilecektir. Burada elde edilen grafiklerin matematiksel ve fiziksel analizleri yapılacaktır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada uygulanan temel yöntem şudur; bu konuda yapılmış olan bütün çalışmalar internet üzerinden, kütüphanelerden veya bizzat çalışmanın yazarlarından istenmek suretiyle temin edilmiştir.

3.2. Yöntem

Elde edilen kaynaklar incelenerek uygulanan metotlar araştırılmıştır. Bu incelenen kaynaklar değerlendirilerek ilave sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle Temir ve ark. (2010) ve Ganikhodjaev ve ark. (2009)'un yaptığı çalışmalardan yararlanılmıştır. Temir ve ark. (2010) ikili ve üçlü etkileşimli bir Potts modelinin faz diyagramlarını $S=\{1,2,3\}$ spin durumunu düşünerek incelemiştir. Ayrıca Ganikhodjaev ve ark. (2009) farklı bir Hamiltonyen denklemini düşünerek modelin faz diyagramlarını belirlemiştir.

Bu tezde, Temir ve ark. (2010)'nın inceledikleri ikinci mertebeden Cayley ağacı üzerinde ikili ve üçlü etkileşimli $q=3$ durumlu Potts modelinin spin değeri olan q 'nun $q=5$, $q=6$ ve $q=15$ gibi büyük değerler verildiğinde faz diyagramlarında ne gibi değişiklikler olacağı incelenmiştir. Ayrıca, en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve aynı seviye üçlü komşuluk etkileşimlerinden meydana gelen Potts modelinin, üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde elde edilen faz diyagramları analiz edilmiştir.

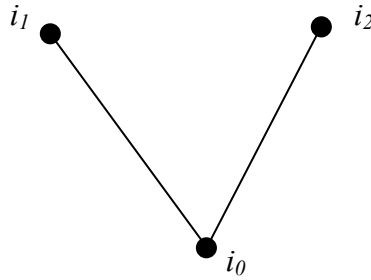
Bu çalışmada, faz diyagramlarını görebilmek için iterasyon denklemleri mantığıyla çalışan bilgisayar programlama dili kullanılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. İkinci mertebeden Potts modelinin temel denklemleri

\mathbb{Z}_+^2 , x^0 başlangıç (kök) noktasının dışındaki her bir köşe noktasından (x^0 hariç) üç kenarın döngü oluşturmadan çıktığı ikinci mertebeden yarı sonsuz bir Cayley ağacı olmak üzere bu Cayley ağacı üzerindeki (4.1.2) modelinin temel denklemlerini belirlemek için V_n üzerindeki ayrışım fonksiyonlarını kullanacağız. Burada V_1 üzerinde verilen başlangıç koşulları, Cayley ağacının üzerindeki temel denklemlerin üretilmesine ne kadar etki ettiğini belirlemektedir.

$Z^{(n)}(i_1, i_0, i_2)$ ifadesi V_n üzerindeki ayrışım fonksiyonu olarak adlandırılır. Aşağıdaki şekilde belirtildiği gibi i_0 , x^0 kök noktasına karşılık gelen spin değeridir ve i_1 ve i_2 sırasıyla bu kök noktasından çıkan kenarlar üzerindeki köşe noktalarına karşılık gelen spin değerleridir.



Şekil 4.1. i_0 kök noktasından çıkan i_1 ve i_2 spin değerleri

Bu kısımda ilk olarak $S=\{1,2,3,4,5\}$ spin durumunun meydana getireceği 125 farklı ayrışım fonksiyonları hesaplanacaktır. Ayrıca buradaki toplam ayrışım fonksiyonu;

$$Z^{(n)} = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^q Z^{(n)}(i_1, i_2, i_3) \quad (4.1.1)$$

biçiminde tanımlanır.

$S=\{1,2,3,4,5\}$ spin durumlu Potts modeli için en yakın komşuluk, uzatılmış (prolonged) ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimlerinden meydana gelen Hamiltonyen denklemi;

$$H(\sigma) = -J_T \sum_{\langle x,y,z \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} - J_P \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (4.1.2)$$

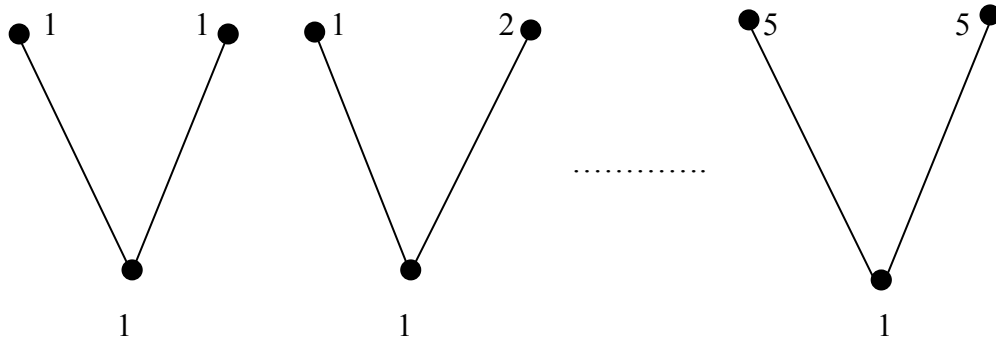
şeklinde bir forma sahiptir. Burada J_T , J_P ve $J \in \mathbb{R}$ bağlantı sabitleri ve δ Kronecker sabitidir.

Ayrıca ayrışım fonksiyonlarının hesaplanmasında kullanılan genelleştirilmiş Kronecker sembolü;

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = \begin{cases} 1, & \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) \\ 0, & \text{aksitakdirde} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

biçiminde ifade edilir.

Ayrışım fonksiyonlarını hesaplamak için ilk adım, kök noktasındaki spin değeri $i_0=1$ olan durumdan başlanmaktadır ve bu durum için 25 farklı olasılık aşağıdaki şekillerdeki gibidir;



Şekil 4.2. $i_0=1$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu

O halde ayrışım fonksiyonlarının hesabı aşağıdaki gibidir;

$$Z^{(n)}(1,1,1) = \alpha^2 c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(1,1,2) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(1,1,3) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(1,1,4) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(1,1,5) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,5)$$

$$Z^{(n)}(2,1,1) = cZ^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(2,1,2) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(2,1,3) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(2,1,4) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(2,1,5) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,5)$$

$$Z^{(n)}(3,1,1) = cZ^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(3,1,2) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(3,1,3) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(3,1,4) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(3,1,5) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,5)$$

$$Z^{(n)}(4,1,1) = cZ^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(4,1,2) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(4,1,3) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(4,1,4) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(4,1,5) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,5)$$

$$Z^{(n)}(5,1,1) = cZ^{(n)}(1,5) Z^{(n)}(1,1)$$

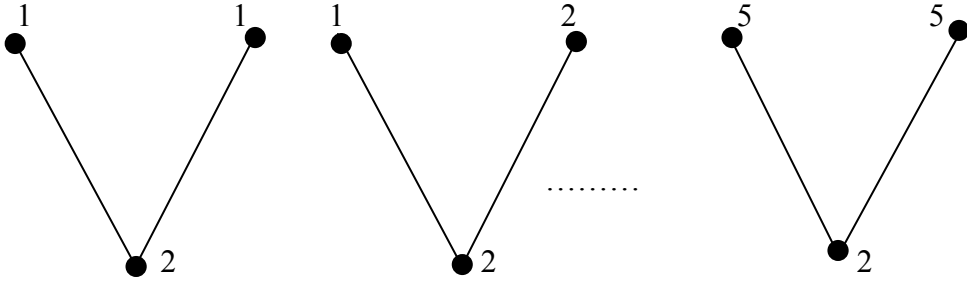
$$Z^{(n)}(5,1,2) = Z^{(n)}(1,5) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(5,1,3) = Z^{(n)}(1,5) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(5,1,4) = Z^{(n)}(1,5) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(5,1,5) = Z^{(n)}(1,5) Z^{(n)}(1,5)$$

Şimdi kök noktasındaki $i_0=2$ spin değerinin belirlediği 25 farklı ayrışım fonksiyonlarını hesaplayalım;



Şekil 4.3. $i_0=2$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu

$$Z^{(n)}(1,2,1) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}(1,2,2) = cZ^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(1,2,3) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}(1,2,4) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,4)$$

$$Z^{(n)}(1,2,5) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,5)$$

$$Z^{(n)}(2,2,1) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}(2,2,2) = a^2 c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(2,2,3) = c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}(2,2,4) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,4)$$

$$Z^{(n)}(2,2,5) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,5)$$

$$Z^{(n)}(3,2,1) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}(3,2,2) = cZ^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(3,2,3) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}(3,2,4) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,4)$$

$$Z^{(n)}(3,2,5) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,5)$$

$$Z^{(n)}(4,2,1) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}(4,2,2) = cZ^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(4,2,3) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}(4,2,4) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,4)$$

$$Z^{(n)}(4,2,5) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,5)$$

$$Z^{(n)}(5,2,1) = cZ^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,1)$$

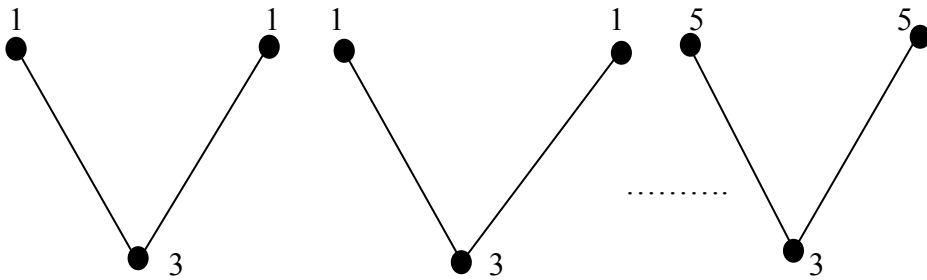
$$Z^{(n)}(5,2,2) = cZ^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(5,2,3) = Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}(5,2,4) = Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,4)$$

$$Z^{(n)}(5,2,5) = Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,5)$$

$i_0=3$ spin değerinin belirlediği 25 farklı olasılık ise;



Şekil 4.4. $i_0=3$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu

$$Z^{(n)}(1,3,1) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}(1,3,2) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}(1,3,3) = cZ^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}(1,3,4) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,4)$$

$$Z^{(n)}(1,3,5) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,5)$$

$$Z^{(n)}(2,3,1) = cZ^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}(2,3,2) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}(2,3,3) = cZ^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}(2,3,4) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,4)$$

$$Z^{(n)}(2,3,5) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,5)$$

$$Z^{(n)}(3,3,1) = cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}(3,3,2) = cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}(3,3,3) = a^2 c^2 Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}(3,3,4) = cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,4)$$

$$Z^{(n)}(3,3,5) = cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,5)$$

$$Z^{(n)}(4,3,1) = Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}(4,3,2) = Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}(4,3,3) = cZ^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}(4,3,4) = Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,4)$$

$$Z^{(n)}(4,3,5) = Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,5)$$

$$Z^{(n)}(5,3,1) = Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,1)$$

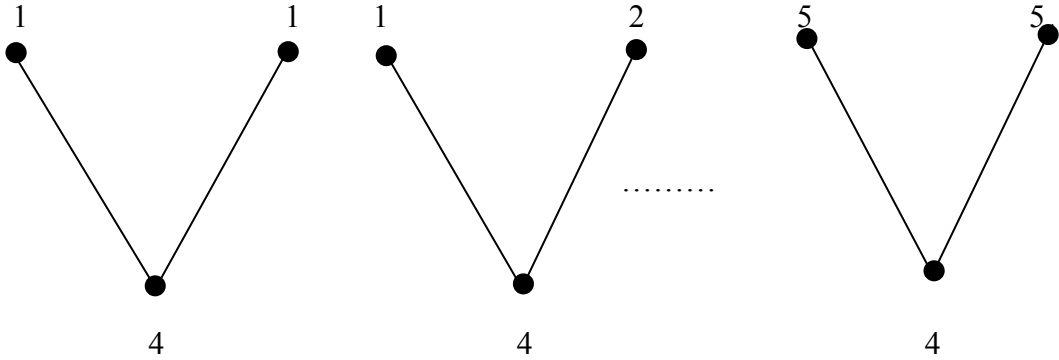
$$Z^{(n)}(5,3,2) = Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}(5,3,3) = cZ^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}(5,3,4) = Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,4)$$

$$Z^{(n)}(5,3,5) = Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,5)$$

$i_0=4$ kök noktasının belirlediği 25 farklı durum ise;



Şekil 4.5. $i_0=4$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu

$$Z^{(n)}(1,4,1) = Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,1)$$

$$Z^{(n)}(1,4,2) = Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,2)$$

$$Z^{(n)}(1,4,3) = Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,3)$$

$$Z^{(n)}(1,4,4) = cZ^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,4)$$

$$Z^{(n)}(1,4,5) = Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,5)$$

$$Z^{(n)}(2,4,1) = Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,1)$$

$$Z^{(n)}(2,4,2) = Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,2)$$

$$Z^{(n)}(2,4,3) = Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,3)$$

$$Z^{(n)}(2,4,4) = cZ^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,4)$$

$$Z^{(n)}(2,4,5) = Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,5)$$

$$Z^{(n)}(3,4,1) = Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,1)$$

$$Z^{(n)}(3,4,2) = Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,2)$$

$$Z^{(n)}(3,4,3) = Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,3)$$

$$Z^{(n)}(3,4,4) = cZ^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,4)$$

$$Z^{(n)}(3,4,5) = Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,5)$$

$$Z^{(n)}(4,4,1) = cZ^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,1)$$

$$Z^{(n)}(4,4,2) = cZ^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,2)$$

$$Z^{(n)}(4,4,3) = cZ^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,3)$$

$$Z^{(n)}(4,4,4) = a^2 c^2 Z^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,4)$$

$$Z^{(n)}(4,4,5) = cZ^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,5)$$

$$Z^{(n)}(5,4,1) = Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,1)$$

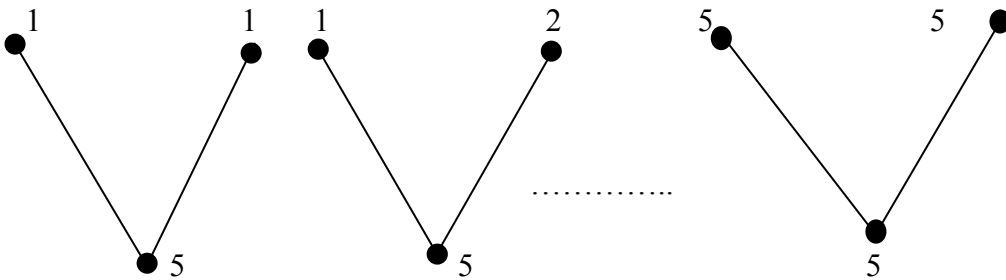
$$Z^{(n)}(5,4,2) = Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,2)$$

$$Z^{(n)}(5,4,3) = Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,3)$$

$$Z^{(n)}(5,4,4) = cZ^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,4)$$

$$Z^{(n)}(5,4,5) = Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,5)$$

Son olarak $i_0=5$ spin değerinin belirlediği 25 farklı durum;



Şekil 4. 6. $i_0=5$ için 25 farklı ayrışım fonksiyonu

$$Z^{(n)}(1,5,1) = Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,1)$$

$$Z^{(n)}(1,5,2) = Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,2)$$

$$Z^{(n)}(1,5,3) = Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,3)$$

$$Z^{(n)}(1,5,4) = cZ^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,4)$$

$$Z^{(n)}(1,5,5) = cZ^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,5)$$

$$Z^{(n)}(2,5,1) = Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,1)$$

$$Z^{(n)}(2,5,2) = Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,2)$$

$$Z^{(n)}(2,5,3) = Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,3)$$

$$Z^{(n)}(2,5,4) = cZ^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,4)$$

$$Z^{(n)}(2,5,5) = cZ^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,5)$$

$$Z^{(n)}(3,5,1) = Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,1)$$

$$Z^{(n)}(3,5,2) = Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,2)$$

$$Z^{(n)}(3,5,3) = Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,3)$$

$$Z^{(n)}(3,5,4) = Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,4)$$

$$Z^{(n)}(3,5,5) = cZ^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,5)$$

$$Z^{(n)}(4,5,1) = Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,1)$$

$$Z^{(n)}(4,5,2) = Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,2)$$

$$Z^{(n)}(4,5,3) = Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,3)$$

$$Z^{(n)}(4,5,4) = Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,4)$$

$$Z^{(n)}(4,5,5) = cZ^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,5)$$

$$Z^{(n)}(5,5,1) = cZ^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,1)$$

$$Z^{(n)}(5,5,2) = cZ^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,2)$$

$$Z^{(n)}(5,5,3) = cZ^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,3)$$

$$Z^{(n)}(5,5,4) = cZ^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,4)$$

$$Z^{(n)}(5,5,5) = a^2 c^2 Z^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,5)$$

şeklinde 125 farklı ayrışım fonksiyonu hesaplanmış oldu. Şimdi bu ayrışım fonksiyonları içinden diğerlerinden bağımsız olanlar seçilmelidir bunun için Hamiltonyen denklemi üzerindeki komşuluk tipleri ve Kronecker deltası ve sınır şartı olan $\bar{\sigma}^{(n)}(V/V_n) \equiv 1$ göz önüne alınarak aşağıdaki beş farklı ayrışım fonksiyonu seçilebilir bunlar;

$$\left. \begin{array}{l} Z^{(n)}(1,1,1) \\ Z^{(n)}(2,1,2) \\ Z^{(n)}(1,2,1) \\ Z^{(n)}(2,2,2) \\ Z^{(n)}(3,2,3) \end{array} \right\} \quad (4.1.4)$$

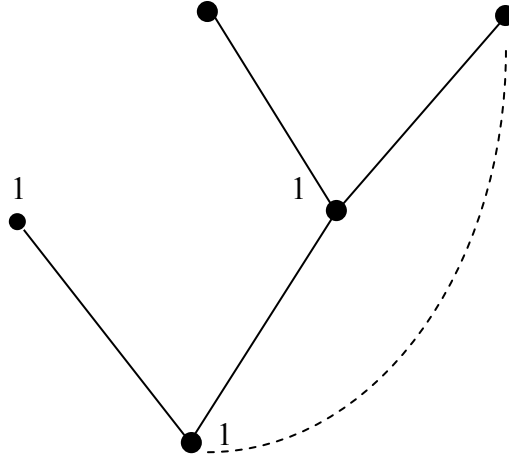
şeklindedir.

Vannimenus (1981)'deki çalışmasında bu seçim yapıldıktan sonra bu bağımsız fonksiyonları aşağıdaki gibi bir notasyonla kullanmıştır, bunlar;

$$\left. \begin{array}{ll} u_1^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(1,1,1)} & u_4^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(2,2,2)} \\ u_2^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(2,1,2)} & u_5^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(3,2,3)} \\ u_3^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(1,2,1)} & \end{array} \right\} \quad (4.1.5)$$

Bu sonuçlar bulunduktan sonra uzatılmış (prolonged) ikinci seviye komşuluk etkileşimleri hesaplanabilir. Bu uzatılmış komşuluk etkileşimlerini görmek için aşağıdaki şekiller incelenebilir.

İlk hesaplamada $u_1^{(n)} = Z^{(n)}(1,1,1)$ bağımsız ayrışım fonksiyonu üzerine inşa edilecek dallar üzerinden hesaplanacaktır.



Şekil 4.7. $Z^{(n)}(1,1,1)$ üzerine inşa edilen dallar

Buradan uzatılmış (prolonged) komşuluk etkileşimlerinin hesabı yapılırsa;

$$u_1^{(n)} = ac \left[b^2 Z^{(n)}(1,1,1) + 2bZ^{(n)}(1,1,2) + 2bZ^{(n)}(1,1,3) + 2bZ^{(n)}(1,1,4) + 2bZ^{(n)}(1,1,5) \right. \\ \left. + Z^{(n)}(2,1,2) + 2Z^{(n)}(2,1,3) + 2Z^{(n)}(2,1,4) + 2Z^{(n)}(2,1,5) + Z^{(n)}(3,1,3) + 2Z^{(n)}(3,1,4) \right. \\ \left. + 2Z^{(n)}(3,1,5) + Z^{(n)}(4,1,4) + 2Z^{(n)}(4,1,5) + Z^{(n)}(5,1,5) \right]$$

olarak hesaplanır, burada tüm ayrışım fonksiyonları $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, $u_3^{(n)}$, $u_4^{(n)}$, $u_5^{(n)}$ cinsinden hesaplanmalıdır bu hesaplar sırasıyla;

$$Z^{(n)}(1,1,1) = (u_1^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(1,1,2) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,1,3) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,1,4) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,1,5) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,1,2) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,2) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,2) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,3) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,4) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,4) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,5) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,5) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,1,3) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,1,4) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,4) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,1,5) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,5) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,1,4) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,4) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(5,1,5) = Z^{(n)}(1,5) Z^{(n)}(1,5) = (u_2^{(n)})^2$$

şeklinde bulunur, son olarak bulunan bu eşitlikler denklemde yerine yazılırsa;

$$u_1^{(n)} = ac [b^2(u_1^{(n)})^2 + 8ba^{-1} u_1^{(n)}u_2^{(n)} + 16(u_2^{(n)})^2]$$

denklemini elde edilir.

$u_2^{(n)}$ 'nin hesaplanması' da aynı şekilde fakat burada $Z^{(n)}(2,1,2)$ ayrışım fonksiyonu üzerine inşa edilen dal üzerinden hesaplanacaktır.

Buna göre, uzatılmış (prolonged) komşuluk etkileşimlerinin hesabı;

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} = & [b^2 Z^{(n)}(1,2,1) + 2b Z^{(n)}(1,2,2) + 2b Z^{(n)}(1,2,3) + 2b Z^{(n)}(1,2,4) + 2b Z^{(n)}(1,2,5) \\ & + Z^{(n)}(2,2,2) + 2 Z^{(n)}(2,2,3) + 2Z^{(n)}(2,2,4) + 2Z^{(n)}(2,2,5) + Z^{(n)}(3,2,3) + 2Z^{(n)}(3,2,4) \\ & + 2Z^{(n)}(3,2,5) + Z^{(n)}(4,2,4) + 2Z^{(n)}(4,2,5)] \end{aligned}$$

olur. Hesap içindeki ayrışım fonksiyonları aynı şekilde $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, $u_3^{(n)}$, $u_4^{(n)}$, $u_5^{(n)}$ cinsinden hesaplanırsa;

$$Z^{(n)}(1,2,1) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) = (u_3^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(1,2,2) = cZ^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) = a^{-1} u_3^{(n)} u_4^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,2,3) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) = u_3^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,2,4) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,4) = u_3^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,2,5) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,5) = u_3^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,2,2) = (u_4^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,2,3) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) = a^{-1} u_4^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,2,4) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,4) = a^{-1} u_4^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,2,5) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,5) = a^{-1} u_4^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(3,2,3) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,2,4) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,4) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,2,5) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,5) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,2,4) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,4) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,2,5) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,5) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(5,2,5) = Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,5) = (u_5^{(n)})^2$$

şeklinde bulunan bu eşitlikler $u_2^{(n)}$ de yerine yazılırsa;

$$u_2^{(n)} = [b^2(u_3^{(n)})^2 + 2ba^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 6bu_3^{(n)}u_5^{(n)} + (u_4^{(n)})^2 + 6a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 9(u_5^{(n)})^2]$$

elde edilir.

$u_3^{(n)}$ hesaplanması $Z^{(n)}(1,2,1)$ ayrışım fonksiyonu üzerine kurulacaktır;

$$\begin{aligned} u_3^{(n)} = & [Z^{(n)}(1,1,1) + 2bZ^{(n)}(1,1,2) + 2Z^{(n)}(1,1,3) + 2Z^{(n)}(1,1,4) + 2Z^{(n)}(1,1,5) \\ & + b^2Z^{(n)}(2,1,2) + 2bZ^{(n)}(2,1,3) + 2bZ^{(n)}(2,1,4) + 2bZ^{(n)}(2,1,5) + Z^{(n)}(3,1,3) + 2Z^{(n)}(3,1,4) \\ & + 2Z^{(n)}(3,1,5) + Z^{(n)}(4,1,4) + 2Z^{(n)}(4,1,5) + Z^{(n)}(5,1,5)] \end{aligned}$$

aynı şekilde hesap içindeki ayrışım fonksiyonları;

$$Z^{(n)}(1,1,1) = (u_1^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(1,1,2) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,1,3) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,1,4) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,1,5) = a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,1,2) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,3) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,4) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,4) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,1,5) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,5) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,1,3) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,1,4) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,4) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,1,5) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,5) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,1,4) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,4) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,1,5) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,5) = (u_2^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(5,1,5) = Z^{(n)}(1,5) Z^{(n)}(1,5) = (u_2^{(n)})^2$$

şeklinde bulunur, bu eşitlikler yerine yazılırsa;

$$u_3^{(n)} = [(u_1^{(n)})^2 + 2ba^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)} + 6a^{-1} u_1^{(n)} u_2^{(n)} + (b+3)^2 (u_2^{(n)})^2]$$

olarak hesaplanır.

$u_4^{(n)}$, ün hesaplanması ise $Z^{(n)}(2,2,2)$ ayrışım fonksiyonunun belirttiği dal üzerinden hesaplanmaktadır. Bu dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinin hesabı yapılırsa $u_4^{(n)}$ denklemi;

$$u_4^{(n)} = ac [Z^{(n)}(1,2,1) + 2bZ^{(n)}(1,2,2) + 2Z^{(n)}(1,2,3) + 2Z^{(n)}(1,2,4) + 2Z^{(n)}(1,2,5) + b^2Z^{(n)}(2,2,2) \\ + 2bZ^{(n)}(2,2,3) + 2bZ^{(n)}(2,2,4) + 2bZ^{(n)}(2,2,5) + Z^{(n)}(3,2,3) + Z^{(n)}(3,2,4) + 2Z^{(n)}(3,2,5) \\ + Z^{(n)}(4,2,4) + 2Z^{(n)}(4,2,5) + Z^{(n)}(5,2,5)]$$

şeklinde hesaplanır. Hesap içindeki ayrışım fonksiyonlarının eşitlikleri yazılacak olursa;

$$Z^{(n)}(1,2,1) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,1) = (u_3^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(1,2,2) = cZ^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,2) = a^{-1} u_3^{(n)} u_4^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,2,3) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,3) = u_3^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,2,4) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,4) = u_3^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,2,5) = Z^{(n)}(2,1) Z^{(n)}(2,5) = u_3^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,2,2) = (u_4^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,2,3) = c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3) = a^{-1} u_4^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,2,4) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,4) = a^{-1} u_4^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,2,5) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,5) = a^{-1} u_4^{(n)} u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(3,2,3) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,2,4) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,4) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,2,5) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,5) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,2,4) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,4) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,2,5) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,5) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(5,2,5) = Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,5) = (u_5^{(n)})^2$$

elde edilmiş olur.

Bulunan bu eşitlikler denklemden yerine yazılırsa;

$$u_4^{(n)} = ac[(u_3^{(n)})^2 + 2ba^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 6u_3^{(n)}u_5^{(n)} + b^2(u_4^{(n)})^2 + 6ba^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 9(u_5^{(n)})^2].$$

Son olarak $u_5^{(n)}$ ' in hesaplanmasın da ise $Z^{(n)}(5,2,5)$ üzerine inşa edilen dal üzerinden hesaplanacak olup bu dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinin belirlediği $u_5^{(n)}$ denklemi;

$$u_5^{(n)} = [Z^{(n)}(1,3,1) + 2bZ^{(n)}(1,3,2) + 2Z^{(n)}(1,3,3) + 2Z^{(n)}(1,3,4) + 2Z^{(n)}(1,3,5) + b^2Z^{(n)}(2,3,2) + 2bZ^{(n)}(2,3,3) + 2bZ^{(n)}(2,3,4) + 2bZ^{(n)}(2,3,5) + Z^{(n)}(3,3,3) + 2Z^{(n)}(3,3,4) + 2Z^{(n)}(3,3,5) + Z^{(n)}(4,3,4) + 2Z^{(n)}(4,3,5) + Z^{(n)}(5,3,5)] \quad \text{ve}$$

$$Z^{(n)}(1,3,1) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) = (u_3^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(1,3,2) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) = u_3^{(n)}u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,3,3) = cZ^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) = a^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,3,4) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,4) = u_3^{(n)}u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(1,3,5) = Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,5) = u_3^{(n)}u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,3,2) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,3,3) = c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) = a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(2,3,4) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,4) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(2,3,5) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,5) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,3,3) = a^2c^2Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) = (u_4^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(3,3,4) = cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,4) = a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(3,3,5) = cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,5) = a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)}$$

$$Z^{(n)}(4,3,4) = Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,4) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(4,3,5) = Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,5) = (u_5^{(n)})^2$$

$$Z^{(n)}(5,3,5) = Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,5) = (u_5^{(n)})^2$$

olarak bulunur son durumda bulunan bu eşitlikler $u_5^{(n)}$, de yerine yazılırsa;

$$u_5^{(n)} = [(u_3^{(n)})^2 + 2a^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 2bu_3^{(n)}u_5^{(n)} + 4u_3^{(n)}u_5^{(n)} + b^2(u_5^{(n)})^2 + 2ba^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 4b(u_5^{(n)})^2 + (u_4^{(n)})^2 + 4a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 4(u_5^{(n)})^2].$$

Burada, $a = \exp(\frac{J_T}{2T})$; $b = \exp(\frac{J_P}{T})$; $c = \exp(\frac{J}{T})$ ' dir. Ayrıca (4.1.1)' de belirtilen toplam ayrışım fonksiyonu;

$$Z^{(n)} = [(u_1^{(n)})^2 + 4(u_3^{(n)})^2 + 8a^{-1}u_1^{(n)}u_2^{(n)} + 16(u_2^{(n)})^2 + 11a^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 4(u_4^{(n)})^2 + 24u_3^{(n)}u_5^{(n)} + 21a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 36(u_5^{(n)})^2]$$

şeklinde hesaplanır.

Paramanyetik fazda(yüksek simetri fazı) $u_1^{(n)} = u_4^{(n)}$, $u_2^{(n)} = u_3^{(n)} = u_5^{(n)}$ dir. Faz diyagramlarını görebilmek için aşağıdaki kısaltılmış değerlerin kullanılması yararlı olacaktır;

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2u_2 + u_3 + u_5}{u_1 + u_4}, & y_1 &= \frac{u_1 - u_4}{u_1 + u_4} \\ y_2 &= \frac{u_2 - u_3}{u_1 + u_4}, & y_3 &= \frac{u_2 - u_5}{u_1 + u_4} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

x' in değeri y_1, y_2, y_3 parametrelerinden farklı olup en yakın komşuluk bağlarının dağılımının bir ölçümüdür.

(4.1.6)' deki ifadelerden aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{A_1(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}, & y_1' &= \frac{A_2(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)} \\ y_2' &= \frac{A_3(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}, & y_3' &= \frac{A_4(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

(4.1.7)' deki denklemler üzerinden hesaplamalara devam edilirse,

$$\begin{aligned}
A_1 = & 2[b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 4(1-y_1)^2 + 12a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\
& + 9(x+y_3-3y_2)^2 + 6b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)] + [4(1+y_1)^2 + 4ba^{-1}(1+y_1)(x+y_2+y_3) \\
& + 12a^{-1}(1+y_1)(x+y_2+y_3) + (b+3)^2(x+y_2+y_3)^2] + [(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 2b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4a^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 4(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) \\
& + b^2(x+y_2-3y_3)^2 + 4ba^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 4b(x+y_2-3y_3)^2 + 4(1-y_1)^2 \\
& + 8a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + 4(x+y_2-3y_3)^2] \tag{4.1.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & ac[4b^2(1+y_1)^2 + 16ba^{-1}(x+y_3+y_2)(1+y_1) + 16(x+y_3+y_2)^2] - ac[(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 4ba^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) + 6(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 \\
& + 12ba^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 9(x+y_2-3y_3)^2] \tag{4.1.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & [b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 6b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\
& + 12a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 9(x+y_2-3y_3)^2] - [4(1+y_1)^2 + 4ba^{-1}(1+y_1)(x+y_3+y_2) \\
& + 12a^{-1}(1+y_1)(x+y_2+y_3) + (b+3)^2(x+y_2+y_3)^2] \tag{4.1.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & [b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 6b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\
& + 12a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 9(x+y_2-3y_3)^2] - [(x+y_3-3y_2)^2 + 2(b+2)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) \\
& + 4a^{-1}(b+2)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 + (b+2)^2(x+y_2-3y_3)^2] \tag{4.1.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & ac[4b^2(1+y_1)^2 + 16ba^{-1}(x+y_3+y_2)(1+y_1) + 16(x+y_3+y_2)^2] + ac[(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 4ba^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) + 6(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 \\
& + 12ba^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 9(x+y_2-3y_3)^2] \tag{4.1.12}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Nihayet elde edilen dört denklemlilik sistem, sırasıyla Ising modeli (Vannimenus, 1981), (Mariz, 1985) ve (Ganikhodjaev, 2006)' in Potts modelinin temel denklemlerinden daha karmaşıktır.

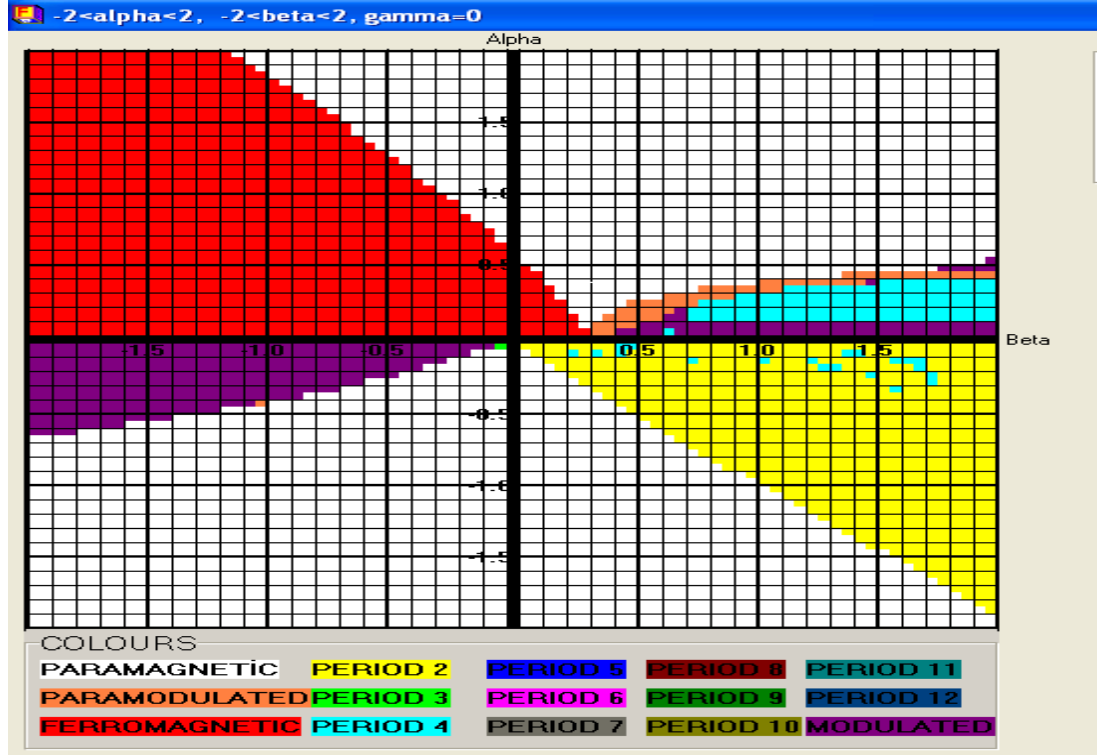
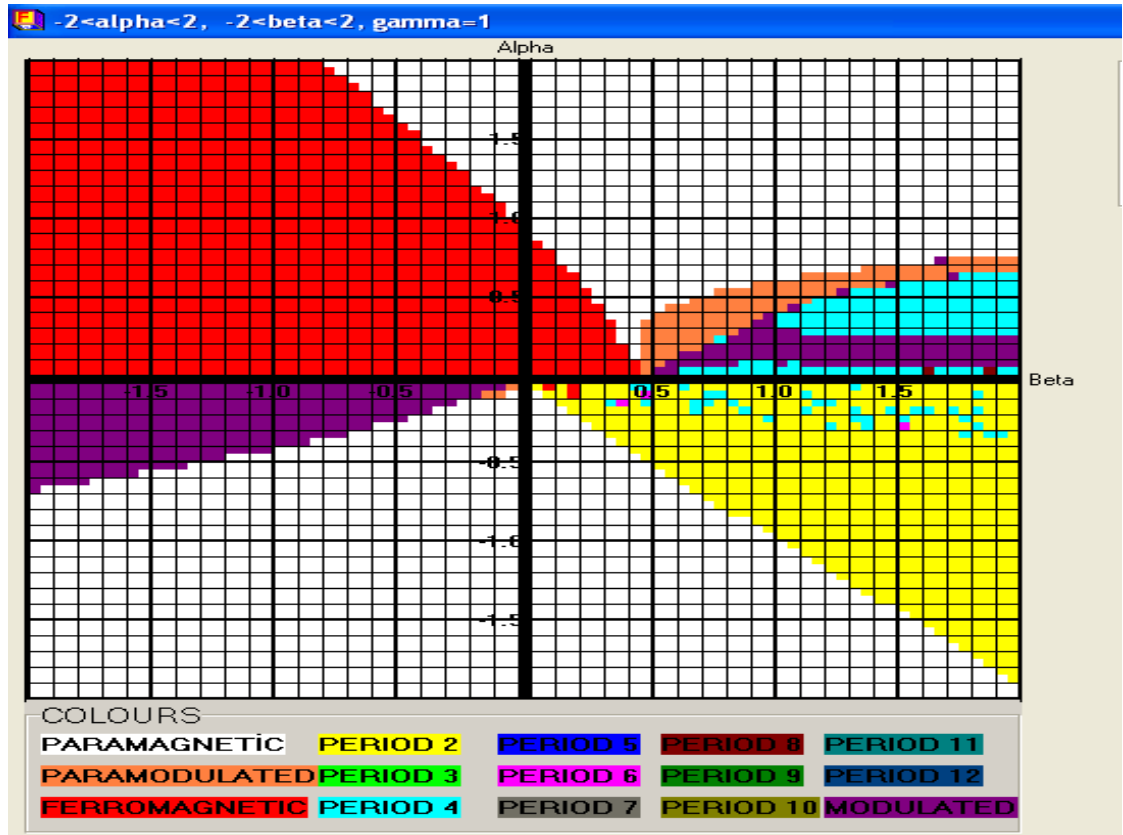
Yukarıdaki yinelemeli denklemler (4.1.8-4.1.12), ayrıca $(\frac{T}{J}, \frac{-J_P}{J}, \frac{J_T}{J})$ uzayında nümeriksel olarak tam faz diyagramını görmemizi sağlayacaktır.

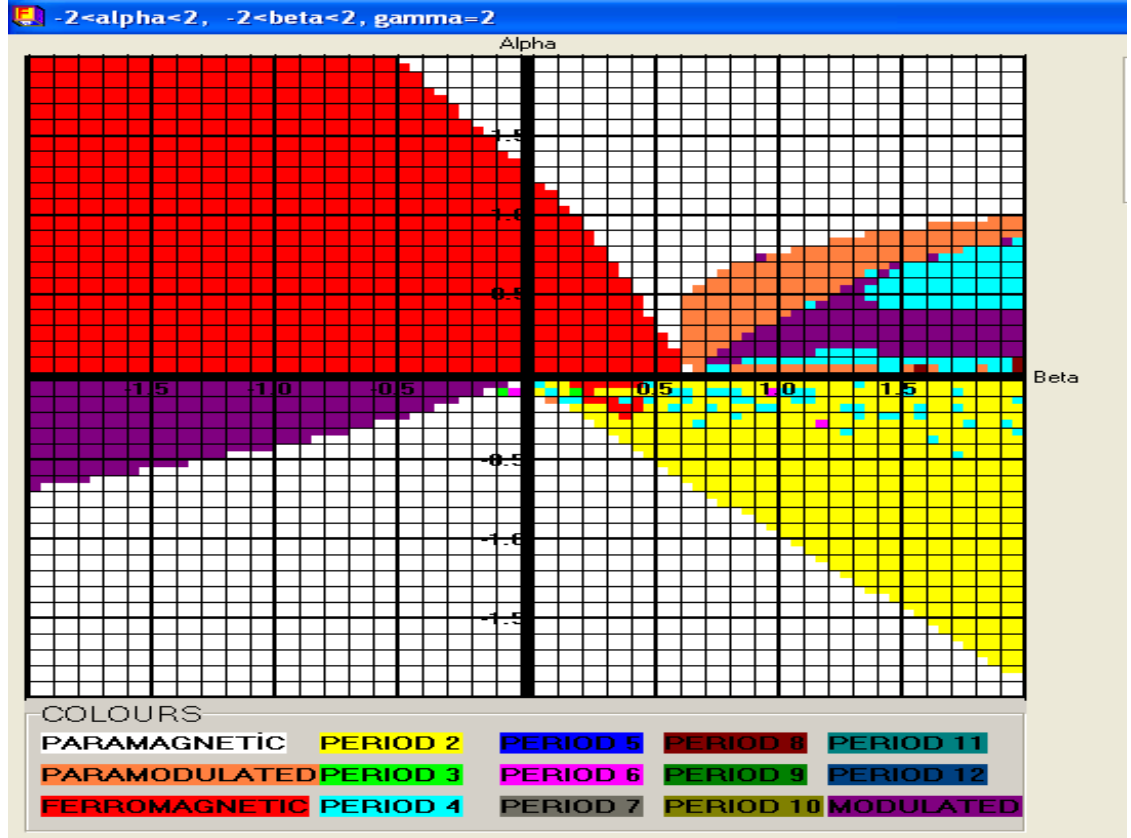
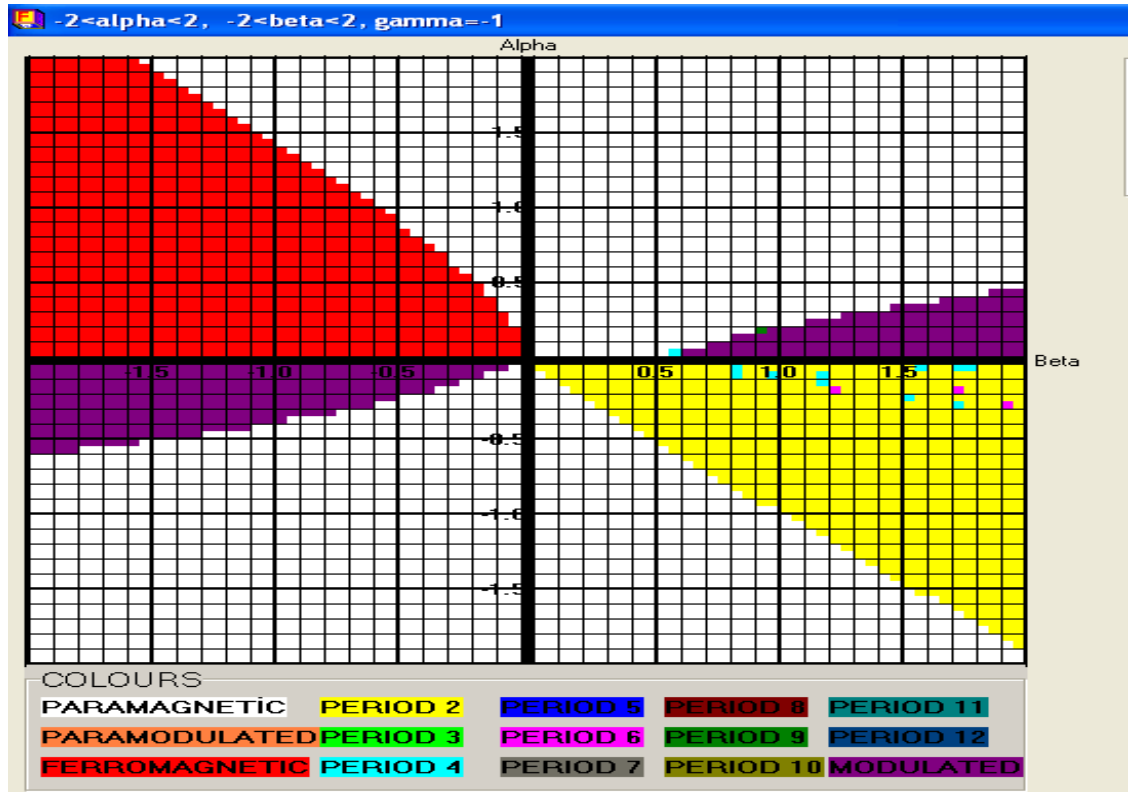
Burada ayrıca, $\frac{T}{J} = \alpha$, $\frac{-JP}{J} = \beta$, $\frac{JT}{J} = \gamma$ ve $a = \exp((2\alpha)^{-1}\gamma)$, $b = \exp((-\alpha)^{-1}\beta)$ ve $c = \exp(\alpha^{-1})$ ' dir.

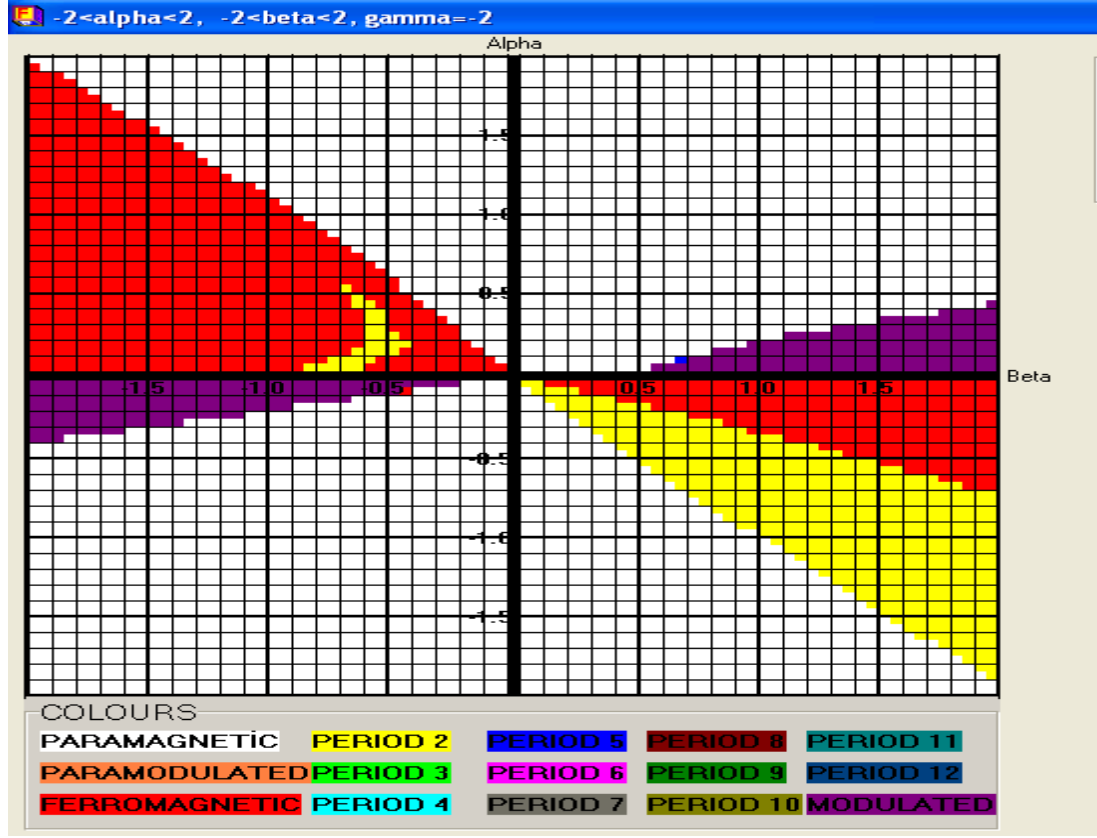
$\bar{\sigma}^{(n)} \left(\frac{V}{V_n} \right) \equiv 1$ sınır şartına karşılık gelen başlangıç koşulları hesaplanırsa;

$$\left. \begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{2b^2 + a^2c^2 + 1}{a^3c^3b^2 + ac} \\ y_1^{(1)} &= \frac{a^2c^2b^2 - 1}{a^2c^2b^2 + 1} \\ y_2^{(1)} &= \frac{b^2 - a^2c^2}{a^3c^3b^2 + ac} \\ y_3^{(1)} &= \frac{a^2c^2 - 1}{a^3c^3b^2 + ac} \end{aligned} \right\} \quad (4.1.13)$$

olarak bulunur. Aşağıda (4.1.8-4.1.12)'deki yinelemeli denklemlerin yukarıdaki başlangıç koşullarına göre belirttiği faz diyagramları;

Şekil 4.8. $q=5$ ve $\gamma=0$ için modelin faz diyagramıŞekil 4.9. $q=5$ ve $\gamma=1$ için modelin faz diyagramı

Şekil 4.10. $q=5$ ve $\gamma = 2$ için modelin faz diyagramıŞekil 4.11. $q=5$ ve $\gamma = -1$ için modelin faz diyagramı

Şekil 4.12. $q=5$ ve $\gamma = -2$ için modelin faz diyagramı

Yinelemeli denklemlere (4.1.8-4.1.12) birçok iterasyon yapıldıktan sonra faz diyagramlarının davranışlarını görebilmekteyiz. İterasyonlardan sonra en basit sabit nokta olan $(x^*, y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ ' a ulaşılır. Bu durumda eğer $y_1^* = y_2^* = y_3^* = 0$ ise bu durum paramanyetik faza karşılık gelir. Eğer $y_1^*, y_2^*, y_3^* \neq 0$ ise bir ferromanyetik faz belirtir. İkinci olarak, sistem p periyodu ile periyodik olabilir burada $p = 2$ durumu anti-ferromanyetik fazdır ve $p = 4$ durumu antifaz olarak adlandırılır. Ayrıca sistem periyodik olmayabilir. Çok uzun bir periyot ve periyodik olmayan durum arasındaki farkı nümeriksel olarak düşünmek zordur bunun için $p \leq 12$ olduğu durumları p -periyotlu fazlar olarak düşüneceğiz. $p > 12$ için tüm periyodik fazları ve periyodik olmayan fazları modüle edilmiş faz olarak düşüneceğiz. Yukarıdaki (4.1.8-4.1.12) şekillerinde bazı γ değerleri için modelin faz diyagramları görülmektedir.

İkinci hesaplamada $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ spin durumlu ($q=6$) Potts modelinin (4.1.2)'deki Hamiltonyen denklemindeki komşuluk etkileşimlerine göre meydana gelecek olan faz diyagramlarını inceleyeceğiz.

Fakat burada spin durumumuz olan $q=6$ olduğundan dolayı $6^3=216$ tane ayrışım fonksiyonu meydana gelecektir. Bu ayrışım fonksiyonları;

$$Z^{(n)}(1,1,1)=a^2c^2(Z^{(n)}(1,1))^2$$

$$Z^{(n)}(1,1,2) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(1,1,3) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(1,1,4) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(1,1,5) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,5)$$

$$Z^{(n)}(1,1,6) = cZ^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,6)$$

$$Z^{(n)}(2,1,1) = cZ^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(2,1,2) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(2,1,3) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(2,1,4) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(2,1,5) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,5)$$

$$Z^{(n)}(2,1,6) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,6)$$

$$Z^{(n)}(3,1,1) = cZ^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(3,1,2) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(3,1,3) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(3,1,4) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,4)$$

$$Z^{(n)}(3,1,5) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,5)$$

$$Z^{(n)}(3,1,6) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,6)$$

$$Z^{(n)}(4,1,1) = cZ^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(4,1,2) = Z^{(n)}(1,4) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(2,2,1) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}(2,2,2) = a^2c^2 Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(2,2,3) = c Z^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}(2,2,4) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,4)$$

$$Z^{(n)}(2,2,5) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,5)$$

$$Z^{(n)}(2,2,6) = cZ^{(n)}(2,2) Z^{(n)}(2,6)$$

$$Z^{(n)}(3,2,1) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}(3,2,2) = cZ^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(3,2,3) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}(3,2,4) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,4)$$

$$Z^{(n)}(3,2,5) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,5)$$

$$Z^{(n)}(3,2,6) = Z^{(n)}(2,3) Z^{(n)}(2,6)$$

$$Z^{(n)}(4,2,1) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}(4,2,2) = cZ^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}(4,2,3) = Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,3)$$

$$\begin{aligned}
Z^{(n)}(4,2,4) &= Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,4) & Z^{(n)}(3,3,2) &= cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,2) \\
Z^{(n)}(4,2,5) &= Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,5) & Z^{(n)}(3,3,3) &= a^2c^2Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3) \\
Z^{(n)}(4,2,6) &= Z^{(n)}(2,4) Z^{(n)}(2,6) & Z^{(n)}(3,3,4) &= cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,4) \\
Z^{(n)}(5,2,1) &= cZ^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,1) & Z^{(n)}(3,3,5) &= cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,5) \\
Z^{(n)}(5,2,2) &= cZ^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,2) & Z^{(n)}(3,3,6) &= cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,6) \\
Z^{(n)}(5,2,3) &= Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,3) & Z^{(n)}(4,3,1) &= Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,1) \\
Z^{(n)}(5,2,4) &= Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,4) & Z^{(n)}(4,3,2) &= Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,2) \\
Z^{(n)}(5,2,5) &= Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,5) & Z^{(n)}(4,3,3) &= cZ^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,3) \\
Z^{(n)}(5,2,6) &= Z^{(n)}(2,5) Z^{(n)}(2,6) & Z^{(n)}(4,3,4) &= Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,4) \\
Z^{(n)}(1,3,1) &= Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) & Z^{(n)}(4,3,5) &= Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,5) \\
Z^{(n)}(1,3,2) &= Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) & Z^{(n)}(4,3,6) &= Z^{(n)}(3,4) Z^{(n)}(3,6) \\
Z^{(n)}(1,3,3) &= cZ^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) & Z^{(n)}(5,3,1) &= Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,1) \\
Z^{(n)}(1,3,4) &= Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,4) & Z^{(n)}(5,3,2) &= Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,2) \\
Z^{(n)}(1,3,5) &= Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,5) & Z^{(n)}(5,3,3) &= cZ^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,3) \\
Z^{(n)}(1,3,6) &= Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,6) & Z^{(n)}(5,3,4) &= Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,4) \\
Z^{(n)}(2,3,1) &= cZ^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) & Z^{(n)}(5,3,5) &= Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,5) \\
Z^{(n)}(2,3,2) &= Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) & Z^{(n)}(5,3,6) &= Z^{(n)}(3,5) Z^{(n)}(3,6) \\
Z^{(n)}(2,3,3) &= cZ^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) & Z^{(n)}(6,3,1) &= Z^{(n)}(3,6) Z^{(n)}(3,1) \\
Z^{(n)}(2,3,4) &= Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,4) & Z^{(n)}(6,3,2) &= Z^{(n)}(3,6) Z^{(n)}(3,2) \\
Z^{(n)}(2,3,5) &= Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,5) & Z^{(n)}(6,3,3) &= cZ^{(n)}(3,6) Z^{(n)}(3,3) \\
Z^{(n)}(2,3,6) &= Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,6) & Z^{(n)}(6,3,4) &= Z^{(n)}(3,6) Z^{(n)}(3,4) \\
Z^{(n)}(3,3,1) &= cZ^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,1) & Z^{(n)}(6,3,5) &= Z^{(n)}(3,6) Z^{(n)}(3,5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^{(n)}(6,3,6) &= Z^{(n)}(3,6) Z^{(n)}(3,6) & Z^{(n)}(4,4,4) &= a^2 c^2 Z^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(3,4) \\
Z^{(n)}(1,4,1) &= Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,1) & Z^{(n)}(4,4,5) &= c Z^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,5) \\
Z^{(n)}(1,4,2) &= Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,2) & Z^{(n)}(4,4,6) &= c Z^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,6) \\
Z^{(n)}(1,4,3) &= Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,3) & Z^{(n)}(5,4,1) &= Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,1) \\
Z^{(n)}(1,4,4) &= c Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,4) & Z^{(n)}(5,4,2) &= Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,2) \\
Z^{(n)}(1,4,5) &= Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,5) & Z^{(n)}(5,4,3) &= Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,3) \\
Z^{(n)}(1,4,6) &= Z^{(n)}(4,1) Z^{(n)}(4,6) & Z^{(n)}(5,4,4) &= c Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,4) \\
Z^{(n)}(2,4,1) &= Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,1) & Z^{(n)}(5,4,5) &= Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,5) \\
Z^{(n)}(2,4,2) &= Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,2) & Z^{(n)}(5,4,6) &= Z^{(n)}(4,5) Z^{(n)}(4,6) \\
Z^{(n)}(2,4,3) &= Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,3) & Z^{(n)}(6,4,1) &= Z^{(n)}(4,6) Z^{(n)}(4,1) \\
Z^{(n)}(2,4,4) &= c Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,4) & Z^{(n)}(6,4,2) &= Z^{(n)}(4,6) Z^{(n)}(4,2) \\
Z^{(n)}(2,4,5) &= Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,5) & Z^{(n)}(6,4,3) &= Z^{(n)}(4,6) Z^{(n)}(4,3) \\
Z^{(n)}(2,4,6) &= Z^{(n)}(4,2) Z^{(n)}(4,6) & Z^{(n)}(6,4,4) &= c Z^{(n)}(4,6) Z^{(n)}(4,4) \\
Z^{(n)}(3,4,1) &= Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,1) & Z^{(n)}(6,4,5) &= Z^{(n)}(4,6) Z^{(n)}(4,5) \\
Z^{(n)}(3,4,2) &= Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,2) & Z^{(n)}(6,4,6) &= Z^{(n)}(4,6) Z^{(n)}(4,6) \\
Z^{(n)}(3,4,3) &= Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,3) & Z^{(n)}(1,5,1) &= Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,1) \\
Z^{(n)}(3,4,4) &= c Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,4) & Z^{(n)}(1,5,2) &= Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,2) \\
Z^{(n)}(3,4,5) &= Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,5) & Z^{(n)}(1,5,3) &= Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,3) \\
Z^{(n)}(3,4,6) &= Z^{(n)}(4,3) Z^{(n)}(4,6) & Z^{(n)}(1,5,4) &= c Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,4) \\
Z^{(n)}(4,4,1) &= c Z^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,1) & Z^{(n)}(1,5,5) &= c Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,5) \\
Z^{(n)}(4,4,2) &= c Z^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,2) & Z^{(n)}(1,5,6) &= Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,6) \\
Z^{(n)}(4,4,3) &= c Z^{(n)}(4,4) Z^{(n)}(4,3) & Z^{(n)}(2,5,1) &= Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z^{(n)}(2,5,2) &= Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,2) & Z^{(n)}(5,5,5) &= a^2 c^2 Z^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,5) \\
Z^{(n)}(2,5,3) &= Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,3) & Z^{(n)}(5,5,6) &= c Z^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,6) \\
Z^{(n)}(2,5,4) &= c Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,4) & Z^{(n)}(6,5,1) &= Z^{(n)}(5,6) Z^{(n)}(5,1) \\
Z^{(n)}(2,5,5) &= c Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,5) & Z^{(n)}(6,5,2) &= Z^{(n)}(5,6) Z^{(n)}(5,2) \\
Z^{(n)}(2,5,6) &= Z^{(n)}(5,2) Z^{(n)}(5,6) & Z^{(n)}(6,5,3) &= Z^{(n)}(5,6) Z^{(n)}(5,3) \\
Z^{(n)}(3,5,1) &= Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,1) & Z^{(n)}(6,5,4) &= Z^{(n)}(5,6) Z^{(n)}(5,4) \\
Z^{(n)}(3,5,2) &= Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,2) & Z^{(n)}(6,5,5) &= c Z^{(n)}(5,6) Z^{(n)}(5,5) \\
Z^{(n)}(3,5,3) &= Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,3) & Z^{(n)}(6,5,6) &= Z^{(n)}(5,6) Z^{(n)}(5,6) \\
Z^{(n)}(3,5,4) &= Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,4) & Z^{(n)}(1,6,1) &= Z^{(n)}(6,1) Z^{(n)}(6,1) \\
Z^{(n)}(3,5,5) &= c Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,5) & Z^{(n)}(1,6,2) &= Z^{(n)}(6,1) Z^{(n)}(6,2) \\
Z^{(n)}(3,5,5) &= c Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,5) & Z^{(n)}(1,6,3) &= Z^{(n)}(6,1) Z^{(n)}(6,3) \\
Z^{(n)}(3,5,6) &= Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(5,6) & Z^{(n)}(1,6,4) &= Z^{(n)}(6,1) Z^{(n)}(6,4) \\
Z^{(n)}(4,5,1) &= Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,1) & Z^{(n)}(1,6,5) &= Z^{(n)}(6,1) Z^{(n)}(6,5) \\
Z^{(n)}(4,5,2) &= Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,2) & Z^{(n)}(1,6,6) &= c Z^{(n)}(6,1) Z^{(n)}(6,6) \\
Z^{(n)}(4,5,3) &= Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,3) & Z^{(n)}(2,6,1) &= Z^{(n)}(6,2) Z^{(n)}(6,1) \\
Z^{(n)}(4,5,4) &= Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,4) & Z^{(n)}(2,6,2) &= Z^{(n)}(6,2) Z^{(n)}(6,2) \\
Z^{(n)}(4,5,5) &= c Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,5) & Z^{(n)}(2,6,3) &= Z^{(n)}(6,2) Z^{(n)}(6,3) \\
Z^{(n)}(4,5,6) &= Z^{(n)}(5,4) Z^{(n)}(5,6) & Z^{(n)}(2,6,4) &= Z^{(n)}(6,2) Z^{(n)}(6,4) \\
Z^{(n)}(5,5,1) &= c Z^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,1) & Z^{(n)}(2,6,5) &= Z^{(n)}(6,2) Z^{(n)}(6,5) \\
Z^{(n)}(5,5,2) &= c Z^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,2) & Z^{(n)}(2,6,6) &= c Z^{(n)}(6,2) Z^{(n)}(6,6) \\
Z^{(n)}(5,5,3) &= c Z^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,3) & Z^{(n)}(3,6,1) &= Z^{(n)}(6,3) Z^{(n)}(6,1) \\
Z^{(n)}(5,5,4) &= c Z^{(n)}(5,5) Z^{(n)}(5,4) & Z^{(n)}(3,6,2) &= Z^{(n)}(6,3) Z^{(n)}(6,2)
\end{aligned}$$

$$Z^{(n)}(3,6,3) = Z^{(n)}(6,3) Z^{(n)}(6,3)$$

$$Z^{(n)}(3,6,4) = Z^{(n)}(6,3) Z^{(n)}(6,4)$$

$$Z^{(n)}(3,6,5) = Z^{(n)}(5,3) Z^{(n)}(6,5)$$

$$Z^{(n)}(4,6,2) = Z^{(n)}(6,4) Z^{(n)}(6,2)$$

$$Z^{(n)}(4,6,3) = Z^{(n)}(6,4) Z^{(n)}(6,3)$$

$$Z^{(n)}(4,6,4) = Z^{(n)}(6,4) Z^{(n)}(6,4)$$

$$Z^{(n)}(4,6,5) = Z^{(n)}(6,4) Z^{(n)}(6,5)$$

$$Z^{(n)}(4,6,6) = cZ^{(n)}(6,4) Z^{(n)}(6,6)$$

$$Z^{(n)}(5,6,1) = Z^{(n)}(6,5) Z^{(n)}(6,1)$$

$$Z^{(n)}(5,6,2) = Z^{(n)}(6,5) Z^{(n)}(6,2)$$

$$Z^{(n)}(5,6,3) = Z^{(n)}(6,5) Z^{(n)}(6,3)$$

$$Z^{(n)}(5,6,4) = Z^{(n)}(6,5) Z^{(n)}(6,4)$$

$$Z^{(n)}(5,6,5) = Z^{(n)}(6,5) Z^{(n)}(6,5)$$

$$Z^{(n)}(5,6,6) = cZ^{(n)}(6,5) Z^{(n)}(6,6)$$

$$Z^{(n)}(6,6,1) = cZ^{(n)}(6,6) Z^{(n)}(6,1)$$

$$Z^{(n)}(6,6,2) = cZ^{(n)}(6,6) Z^{(n)}(6,2)$$

$$Z^{(n)}(6,6,3) = cZ^{(n)}(6,6) Z^{(n)}(6,3)$$

$$Z^{(n)}(6,6,4) = cZ^{(n)}(6,6) Z^{(n)}(6,4)$$

$$Z^{(n)}(6,6,5) = cZ^{(n)}(6,6) Z^{(n)}(6,5)$$

$$Z^{(n)}(6,6,6) = a^2 c^2 Z^{(n)}(6,6) Z^{(n)}(6,6)$$

olarak hesaplanır.

Bu 216 ayrışım fonksiyonundan birbirinden bağımsız 5 tane ayrışım fonksiyonunu (4.1.4)'deki gibi seçebiliriz. Bu bağımsız değişkenler aşağıdaki gibidir;

$$Z^{(n)}(1,1,1)$$

$$Z^{(n)}(2,1,2)$$

$$Z^{(n)}(1,2,1)$$

$$Z^{(n)}(2,2,2)$$

$$Z^{(n)}(3,2,3)$$

(4.1.5)' de kullanılan notasyonu tekrar kullanacak olursak;

$$u_1^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(1,1,1)}$$

$$u_2^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(2,1,2)}$$

$$u_3^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(1,2,1)}$$

$$u_4^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(2,2,2)}$$

$$u_5^{(n)} = \sqrt{Z^{(n)}(3,2,3)}$$

olur. Uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinin hesabı için ilk olarak $u_1^{(n)}$ ' in hesabı yapılacaktır, bunun için etkileşim $Z^{(n)}(1,1,1)$ ayrışım fonksiyonun belirttiği dal üzerine inşa edilecektir. O halde $u_1^{(n)}$ denklemi;

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} = ac & [b^2 Z^{(n)}(1,1,1) + 2b Z^{(n)}(1,1,2) + 2b Z^{(n)}(1,1,3) + 2b Z^{(n)}(1,1,4) \\ & + 2b Z^{(n)}(1,1,5) + 2b Z^{(n)}(1,1,6) + Z^{(n)}(2,1,2) + 2Z^{(n)}(2,1,2) + 2Z^{(n)}(2,1,3) \\ & + 2Z^{(n)}(2,1,4) + 2Z^{(n)}(2,1,4) + 2Z^{(n)}(2,1,5) + 2Z^{(n)}(2,1,6) + Z^{(n)}(3,1,3) + 2Z^{(n)}(3,1,4) \\ & + 2Z^{(n)}(3,1,5) + 2Z^{(n)}(3,1,5) + 2Z^{(n)}(3,1,6) + Z^{(n)}(4,1,4) + 2Z^{(n)}(4,1,5) + 2Z^{(n)}(4,1,6) \\ & + Z^{(n)}(5,1,5) + 2Z^{(n)}(5,1,6) + Z^{(n)}(6,1,6)] \end{aligned}$$

bu denklemde bağımsız değişkenlerin eşitlikleri yerine yazılırsa;

$$u_1^{(n)} = ac [b^2(u_1^{(n)})^2 + 10ba^{-1} u_1^{(n)}u_2^{(n)} + 25(u_2^{(n)})^2]$$

bulunur.

Uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinin hesabında ikinci olarak $u_2^{(n)}$ ' in hesabı yapılırsa;

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} = & [b^2Z^{(n)}(1,2,1) + 2bZ^{(n)}(1,2,2) + 2bZ^{(n)}(1,2,3) + 2bZ^{(n)}(1,2,4) + 2bZ^{(n)}(1,2,5) \\ & + 2bZ^{(n)}(1,2,6) + Z^{(n)}(2,2,2) + 2Z^{(n)}(2,2,3) + 2Z^{(n)}(2,2,4) + 2Z^{(n)}(2,2,5) + 2Z^{(n)}(2,2,6) \\ & + Z^{(n)}(3,2,3) + 2Z^{(n)}(3,2,4) + 2Z^{(n)}(3,2,5) + 2Z^{(n)}(3,2,6) + Z^{(n)}(4,2,4) + 2Z^{(n)}(4,2,5) \\ & + 2Z^{(n)}(4,2,6) + Z^{(n)}(5,2,5) + 2Z^{(n)}(5,2,6) + Z^{(n)}(6,2,6)] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayrışım fonksiyonlarının eşitlikleri hesaplanırsa;

$$u_2^{(n)} = [b^2(u_3^{(n)})^2 + 2ba^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 8bu_3^{(n)}u_5^{(n)} + (u_4^{(n)})^2 + 8a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 16(u_5^{(n)})^2]$$

$u_3^{(n)}$ denkleminin hesabında $Z^{(n)}(1,2,1)$ üzerine inşa edilen dal üzerindeki etkileşimler hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} u_3^{(n)} = & [Z^{(n)}(1,1,1) + 2bZ^{(n)}(1,1,2) + 2Z^{(n)}(1,1,3) + 2Z^{(n)}(1,1,4) + 2Z^{(n)}(1,1,5) \\ & + 2Z^{(n)}(1,1,6) + b^2Z^{(n)}(2,1,2) + 2bZ^{(n)}(2,1,3) + 2bZ^{(n)}(2,1,4) + 2bZ^{(n)}(2,1,5) \\ & + 2bZ^{(n)}(2,1,6) + Z^{(n)}(3,1,3) + 2Z^{(n)}(3,1,4) + 2Z^{(n)}(3,1,5) + 2Z^{(n)}(3,1,5) + Z^{(n)}(4,1,4) \\ & + 2Z^{(n)}(4,1,5) + 2Z^{(n)}(4,1,6) + Z^{(n)}(5,1,5) + 2Z^{(n)}(5,1,6) + Z^{(n)}(6,1,6)] \end{aligned}$$

$u_3^{(n)}$ ' ün içindeki ayrışım fonksiyonlarının eşitlikleri hesaplanacak olursa;

$$u_3^{(n)} = [(u_1^{(n)})^2 + 2ba^{-1} u_1^{(n)}u_2^{(n)} + 8a^{-1} u_1^{(n)}u_2^{(n)} + (b+4)^2(u_2^{(n)})^2]$$

olarak bulunur.

$u_4^{(n)}$ ' ün denkleminde $Z^{(n)}(2,2,2)$ ' nin oluşturduğu dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinin hesabı yapılırsa;

$$\begin{aligned}
u_4^{(n)} = & ac [Z^{(n)}(1,2,1) + 2bZ^{(n)}(1,2,2) + 2Z^{(n)}(1,2,3) + 2Z^{(n)}(1,2,4) + 2Z^{(n)}(1,2,5) \\
& + 2Z^{(n)}(1,2,6) + b^2Z^{(n)}(2,2,2) + 2bZ^{(n)}(2,2,3) + 2bZ^{(n)}(2,2,4) + 2bZ^{(n)}(2,2,5) \\
& + 2bZ^{(n)}(2,2,6) + Z^{(n)}(3,2,3) + 2Z^{(n)}(3,2,4) + 2Z^{(n)}(3,2,5) + 2Z^{(n)}(3,2,6) + Z^{(n)}(4,2,4) \\
& + 2Z^{(n)}(4,2,5) + 2Z^{(n)}(4,2,6) + Z^{(n)}(5,2,5) + 2Z^{(n)}(5,2,6) + Z^{(n)}(6,2,6)]
\end{aligned}$$

bulunur. Denklem içindeki eşitliklerin hesapları yapılacak olursa;

$$u_4^{(n)} = ac [(u_3^{(n)})^2 + 2ba^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 8u_3^{(n)}u_5^{(n)} + b^2(u_4^{(n)})^2 + 8ba^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 16(u_5^{(n)})^2]$$

olarak bulunur.

Son olarak $Z^{(n)}(3,2,3)$ 'ün belirttiği dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinden meydana gelen $u_5^{(n)}$ denklemi;

$$\begin{aligned}
u_5^{(n)} = & [Z^{(n)}(1,3,1) + 2bZ^{(n)}(1,3,2) + 2Z^{(n)}(1,3,3) + 2Z^{(n)}(1,3,4) + 2Z^{(n)}(1,3,5) \\
& + 2Z^{(n)}(1,3,6) + b^2Z^{(n)}(2,3,2) + 2bZ^{(n)}(2,3,3) + 2bZ^{(n)}(2,3,4) + 2bZ^{(n)}(2,3,5) \\
& + 2bZ^{(n)}(2,3,6) + Z^{(n)}(3,3,3) + 2Z^{(n)}(3,3,4) + 2Z^{(n)}(3,3,5) + 2Z^{(n)}(3,3,6) + Z^{(n)}(4,3,4) \\
& + 2Z^{(n)}(4,3,5) + 2Z^{(n)}(4,3,6) + Z^{(n)}(5,3,5) + 2Z^{(n)}(5,3,6) + Z^{(n)}(6,3,6)].
\end{aligned}$$

Denklemdeki eşitlikler hesaplanacak olursa $u_5^{(n)}$ denklemi;

$$\begin{aligned}
u_5^{(n)} = & [(u_3^{(n)})^2 + 2a^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 2bu_3^{(n)}u_5^{(n)} + 6u_3^{(n)}u_5^{(n)} + b^2(u_5^{(n)})^2 + 2ba^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} \\
& + 6b(u_5^{(n)})^2 + (u_4^{(n)})^2 + 6a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 9(u_5^{(n)})^2]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Burada, $a = \exp(\frac{J_T}{2T})$; $b = \exp(\frac{J_P}{T})$; $c = \exp(\frac{J}{T})$ ' dir. Ayrıca (4.1.1) de belirtilen toplam ayrışım fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
Z^{(n)} = & [(u_1^{(n)})^2 + 5(u_3^{(n)})^2 + 10a^{-1}u_1^{(n)}u_2^{(n)} + 25(u_2^{(n)})^2 + 11a^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 5(u_4^{(n)})^2 \\
& + 40u_3^{(n)}u_5^{(n)} + 39a^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} + 80(u_5^{(n)})^2]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$x = \frac{2u_2 + u_3 + u_5}{u_1 + u_4}, y_1 = \frac{u_1 - u_4}{u_1 + u_4}$$

$$y_2 = \frac{u_2 - u_3}{u_1 + u_4}, y_3 = \frac{u_2 - u_5}{u_1 + u_4}$$

yukarıdaki ifadelerden aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$x' = \frac{A_1(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}, y_1' = \frac{A_2(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}$$

$$y_2' = \frac{A_3(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}, y_3' = \frac{A_4(x, y_1, y_2, y_3)}{D(x, y_1, y_2, y_3)}$$

yukarıdaki denklemlerdeki A_1, A_2, A_3, A_4 ve D yinelemeli denklemleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} A_1 = & 2[b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 4(1-y_1)^2 + 16a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\ & + 16(x+y_3-3y_2)^2 + 8b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)] + [4(1+y_1)^2 \\ & + 4(b+4)a^{-1}(1+y_1)(x+y_2+y_3) + (b+4)^2(x+y_2+y_3)^2] + [(x+y_3-3y_2)^2 \\ & + 2(b+3)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4a^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + b^2(x+y_2-3y_3)^2 \\ & + 4(b+3)a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + (b+3)^2(x+y_2-3y_3)^2] \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & ac[4b^2(1+y_1)^2 + 20ba^{-1}(x+y_3+y_2)(1+y_1) + 25(x+y_3+y_2)^2] - ac[(x+y_3-3y_2)^2 \\ & + 4ba^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) + 8(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 \\ & + 16ba^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 16(x+y_2-3y_3)^2] \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} A_3 = & [b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 8b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\ & + 16a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 16(x+y_2-3y_3)^2] - [4(1+y_1)^2 + 4(b+4)a^{-1}(1+y_1)(x+y_3+y_2) \\ & + (b+4)^2(x+y_2+y_3)^2] \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} A_4 = & [b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 8b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\ & + 16a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 16(x+y_2-3y_3)^2] - [(x+y_3-3y_2)^2 \\ & + 2(b+3)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4a^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) + 4a^{-1}(b+3)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\ & + 4(1-y_1)^2 + (b+3)^2(x+y_2-3y_3)^2] \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

$$\begin{aligned}
D = & ac[4b^2(1+y_1)^2 + 20ba^{-1}(x+y_3+y_2)(1+y_1) + 25(x+y_3+y_2)^2] + ac[(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 4ba^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) + 8(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 \\
& + 16ba^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 16(x+y_2-3y_3)^2] \quad (4.1.18)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$\bar{\sigma}^{(n)} \left(\frac{V}{V_n} \right) \equiv 1$ sınır şartına karşılık gelen başlangıç koşulları hesaplanırsa $q=5$ durumundaki başlangıç değerleri elde edilir ve

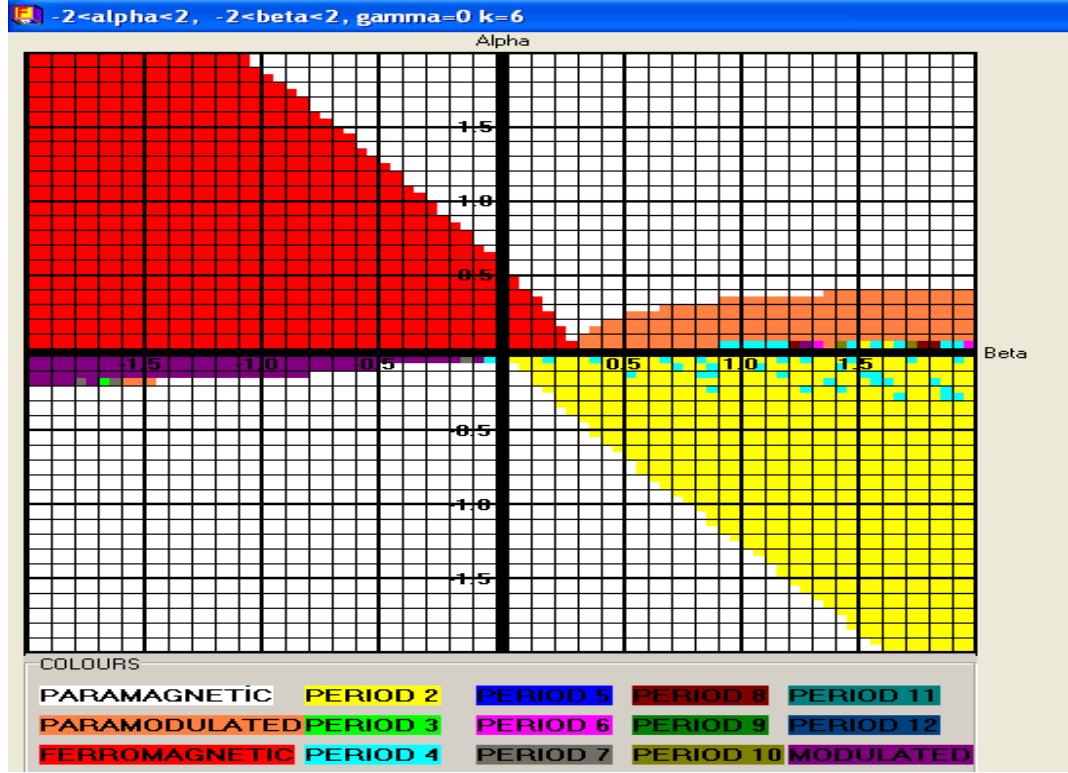
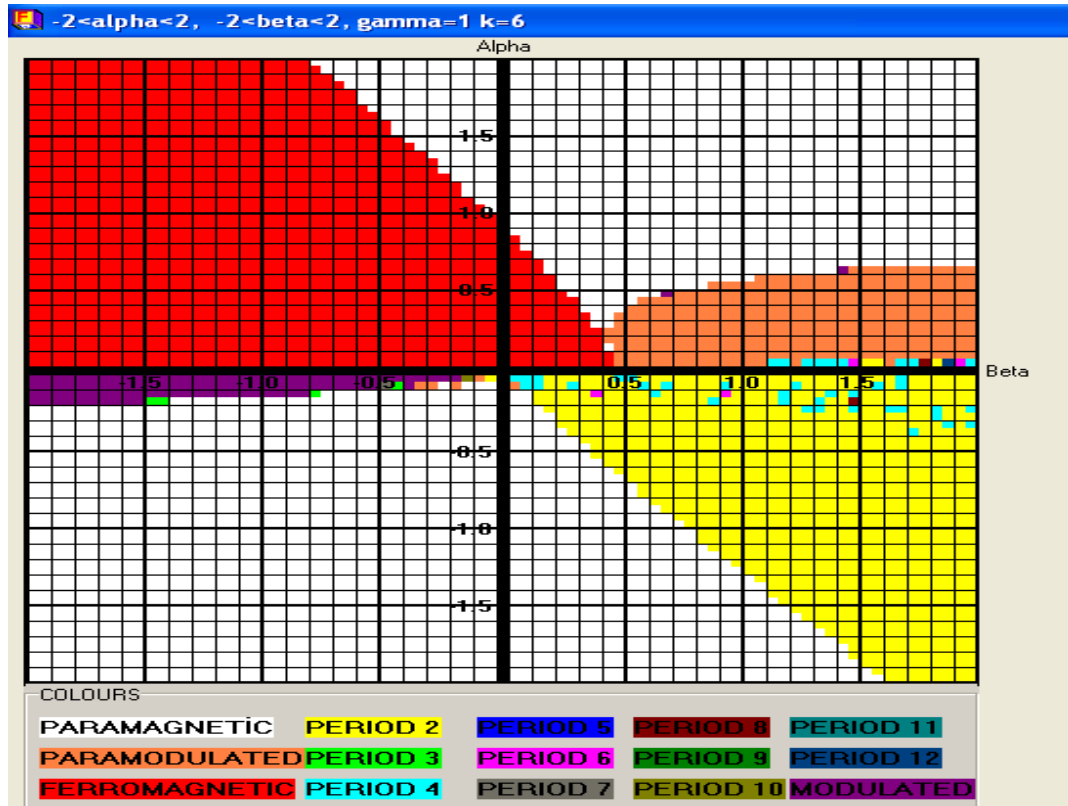
$$x^{(1)} = \frac{2b^2 + a^2c^2 + 1}{a^3c^3b^2 + ac}$$

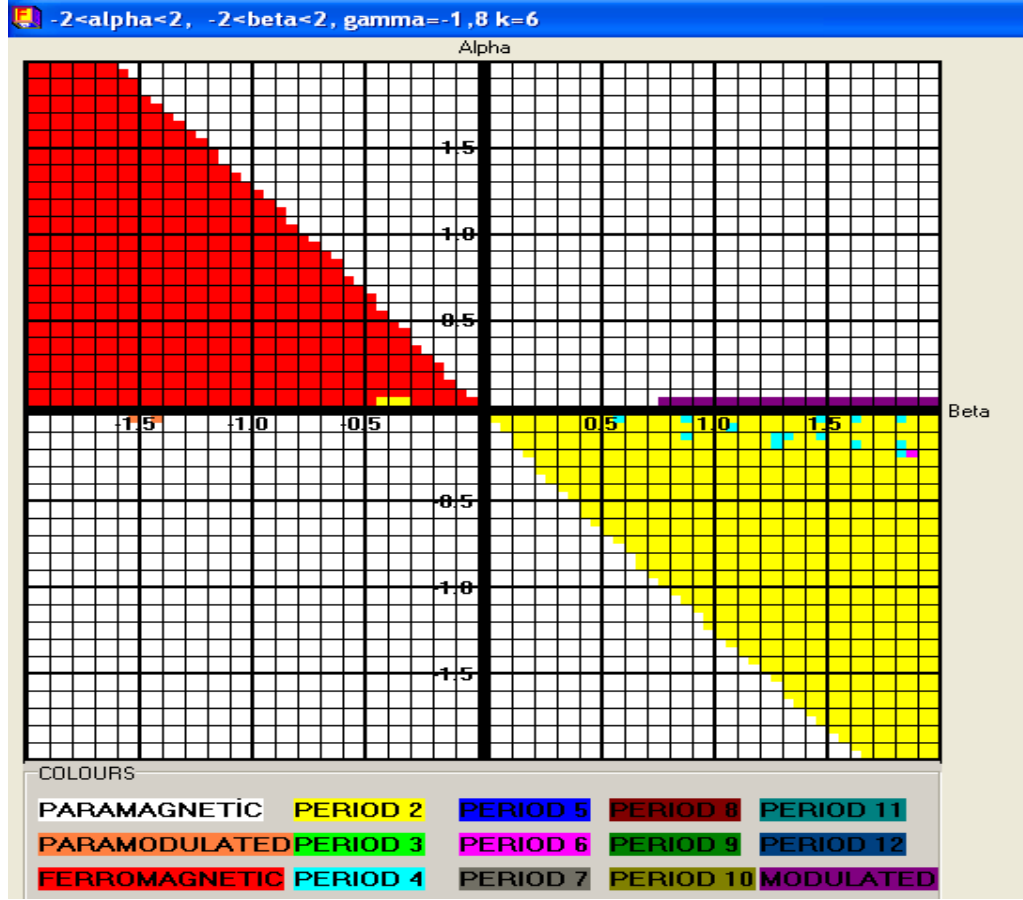
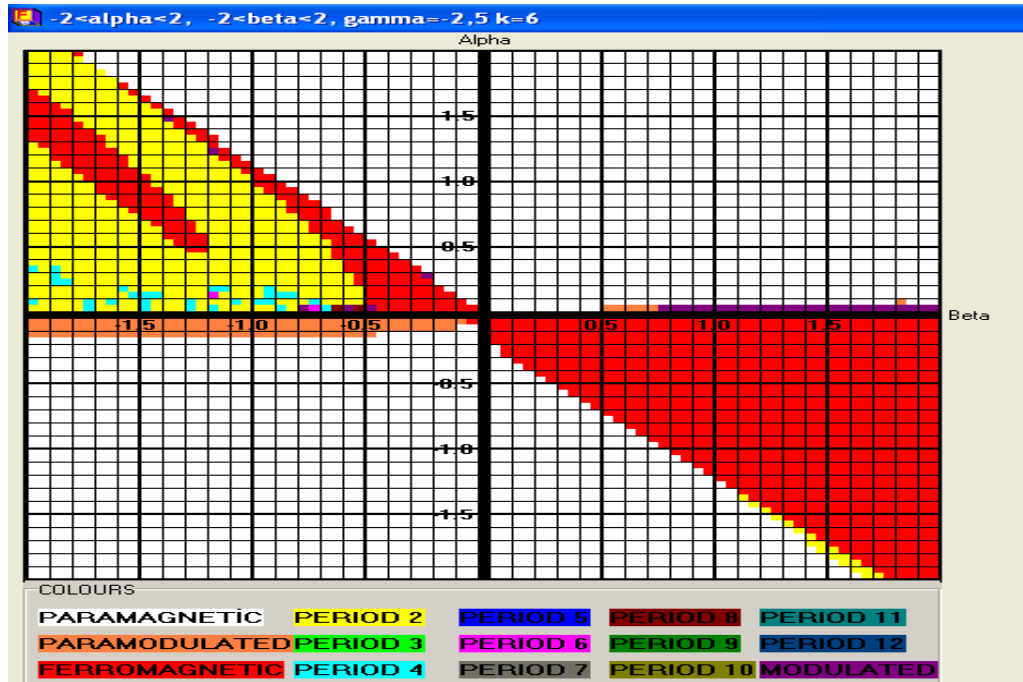
$$y_1^{(1)} = \frac{a^2c^2b^2 - 1}{a^2c^2b^2 + 1}$$

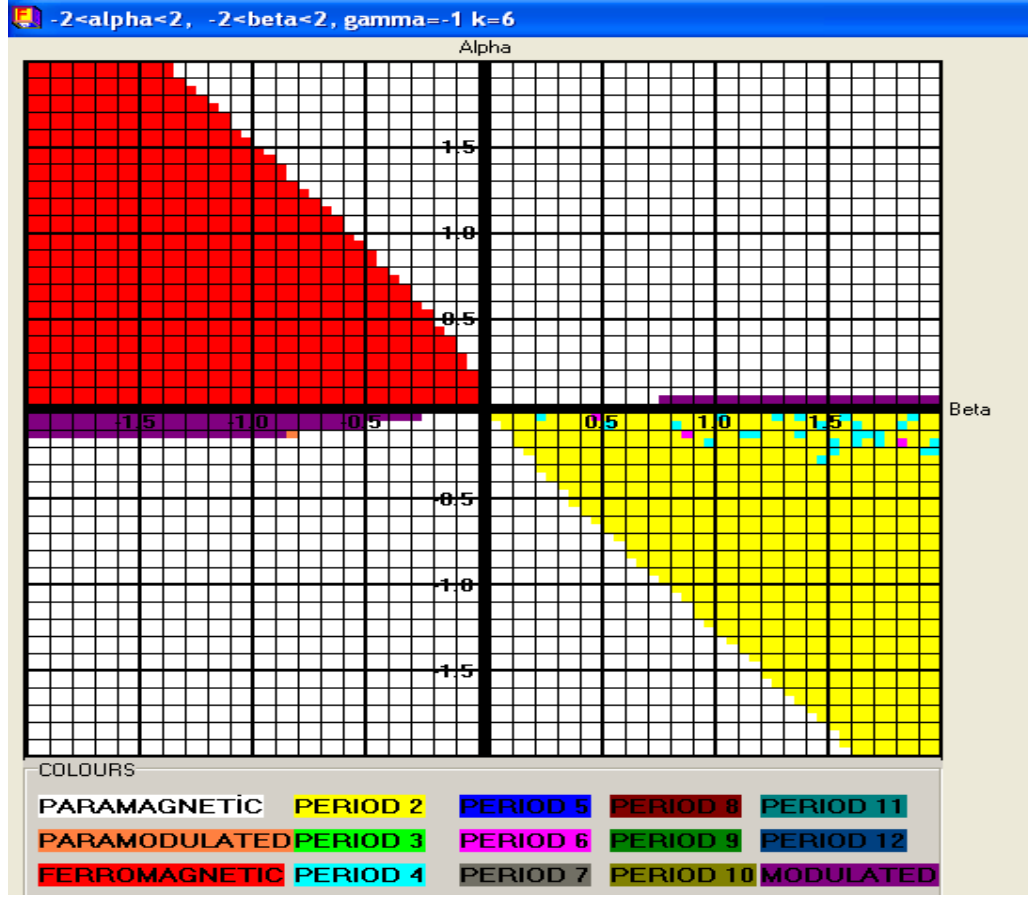
$$y_2^{(1)} = \frac{b^2 - a^2c^2}{a^3c^3b^2 + ac}$$

$$y_3^{(1)} = \frac{a^2c^2 - 1}{a^3c^3b^2 + ac}$$

dir. Aşağıda (4.1.14-4.1.18)'deki yinelemeli denklemlerin yukarıdaki başlangıç koşullarına göre belirttiği faz diyagramları;

Şekil 4.13. $q=6$ ve $\gamma = 0$ için faz diyagramıŞekil 4.14. $q=6$ ve $\gamma = 1$ için faz diyagramı

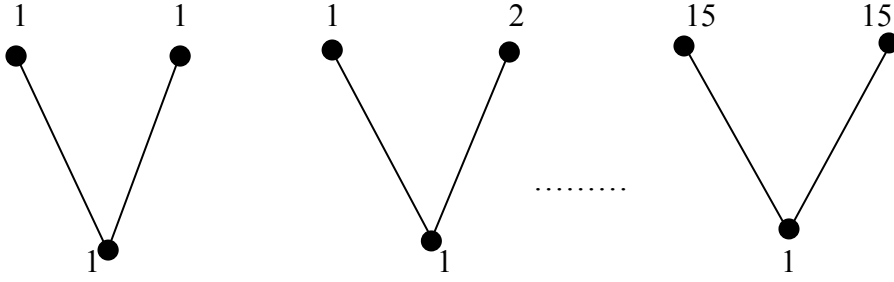
Şekil 4.15. $q=6$ ve $\gamma = -1.8$ için faz diyagramıŞekil 4.16. $q=6$ ve $\gamma = -2.5$ için faz diyagramı

Şekil 4. 17. $q=6$ ve $\gamma = -1$ için faz diyagramı

Yukarıdaki faz diyagramlarının çizdirilmesinde (4.1.2) Hamiltonyen denklemi ve $q=5$, $q=6$ durumlu Potts modelinin yinelemeli denklemleri kullanılmıştır. Şimdi ise faz diyagramlarının q ' nun büyük değerlerinde nasıl bir davranış sergileyeceğini anlamak için bu kısımda $q=15$ durumlu Potts modelinin aynı Hamiltonyen denklemi tarafından belirlenen faz diyagramlarını çözümleneceğiz.

Bu hesaplamada ilk olarak, ayrışım fonksiyonları hesaplanılacaktır. Burada toplam ayrışım fonksiyonu sayısı 15^3 adettir. Bunları tek tek yazmak zor olacağı için aşağıdaki şekilde kısaltmamız mümkündür.

İlk olarak kök değeri $i_0 = 1$ olan ayrışım fonksiyonlarına bakacağız. Bu kök noktasının belirlediği ayrışım fonksiyonu sayısı 225 tanedir.

Şekil 4.18. $i_0 = 1$ kök noktasının belirlediği 225 farklı olasılık

$$Z^{(n)}(1,1,1) = a^2 c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(1,1,2) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(1,1,3) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(1,1,15) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,15)$$

$$Z^{(n)}(2,1,1) = c Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(2,1,2) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(2,1,3) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}(2,1,4) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,4)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(2,1,15) = Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,15)$$

$$Z^{(n)}(3,1,1) = c Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}(3,1,2) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}(3,1,3) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(3,1,15) = Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,15)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(1,5,1) = Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,1)$$

$$Z^{(n)}(1,5,2) = Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(1,5,15) = Z^{(n)}(5,1) Z^{(n)}(5,15)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(10,10,10) = a^2 c^2 Z^{(n)}(10,10) Z^{(n)}(10,10)$$

$$Z^{(n)}(10,10,11) = c Z^{(n)}(10,10) Z^{(n)}(10,11)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(15,10,15) = Z^{(n)}(10,15) Z^{(n)}(10,15)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$Z^{(n)}(15,15,15) = a^2 c^2 Z^{(n)}(15,15) Z^{(n)}(15,15)$$

şeklinde 15^3 tane ayrışım fonksiyonu hesaplanabilir. (4.1.4)' de olduğu gibi bulunan bu ayrışım fonksiyonlarından birbirinden bağımsız olarak aşağıdaki 5 ayrışım fonksiyonunu seçebiliriz, bunlar;

$$Z^{(n)}(1,1,1)$$

$$Z^{(n)}(2,1,2)$$

$$Z^{(n)}(1,2,1)$$

$$Z^{(n)}(2,2,2)$$

$$Z^{(n)}(3,2,3)$$

dır. Burada da (4.1.5)' de kabul ettiğimiz notasyonları kullanacağız. Diğer adımda bu ayrışım fonksiyonlarının belirlediği dal üzerinden $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, $u_3^{(n)}$, $u_4^{(n)}$, $u_5^{(n)}$ denklemleri bulunacaktır.

İlk olarak $u_1^{(n)}$ denklemini $Z^{(n)}(1,1,1)$ ayrışım fonksiyonun oluşturduğu dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerini hesaplayacağız.

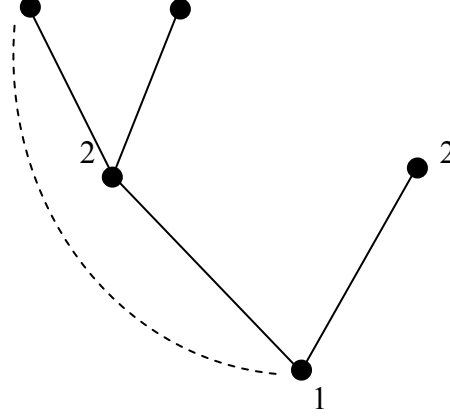
$$\begin{aligned} u_1^{(n)} = ac[& b^2 Z^{(n)}(1,1,1) + 2bZ^{(n)}(1,1,2) + 2bZ^{(n)}(1,1,3) + \dots + 2bZ^{(n)}(1,1,15) \\ & + Z^{(n)}(2,1,2) + 2Z^{(n)}(2,1,3) + 2Z^{(n)}(2,1,4) + \dots + 2Z^{(n)}(2,1,15) + Z^{(n)}(3,1,3) \\ & + 2Z^{(n)}(3,1,4) + \dots + 2Z^{(n)}(3,1,15) + Z^{(n)}(4,1,4) + 2Z^{(n)}(4,1,5) + \dots + 2Z^{(n)}(4,1,15) \\ & + \dots + Z^{(n)}(15,1,15)] \end{aligned}$$

şeklinde kısaltılmış olarak yazabiliriz. Burada denklem içindeki ayrışım fonksiyonlarının eşitliklerini yazarsak;

$$u_1^{(n)} = ac[b^2(u_1^{(n)})^2 + 28ba^{-1} u_1^{(n)}u_2^{(n)} + 196(u_2^{(n)})^2]$$

olarak bulunur.

$u_2^{(n)}$ denklemi ise $Z^{(n)}(2,1,2)$ ayrışım fonksiyonunun oluşturduğu dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinden meydana gelir.

Şekil 4.19. $Z^{(n)}(2,1,2)$ üzerine inşa edilen dallar

Burada etkileşimler hesaplanırsa;

$$u_2^{(n)} = [b^2 Z^{(n)}(1,2,1) + 2b Z^{(n)}(1,2,2) + 2b Z^{(n)}(1,2,3) + \dots + 2b Z^{(n)}(1,2,15) + Z^{(n)}(2,2,2) \\ + 2Z^{(n)}(2,2,3) + 2 Z^{(n)}(2,2,4) + \dots + 2Z^{(n)}(2,2,15) + Z^{(n)}(3,2,3) + 2Z^{(n)}(3,2,4) \\ + \dots + 2 Z^{(n)}(3,2,15) Z^{(n)}(4,2,4) + 2Z^{(n)}(4,2,5) + 2Z^{(n)}(4,2,6) + \dots + 2Z^{(n)}(4,2,15) \\ + \dots + Z^{(n)}(15,2,15)]$$

eşitlikler yerlerine yazılırsa;

$$u_2^{(n)} = [b^2 (u_3^{(n)})^2 + 2ba^{-1} u_3^{(n)} u_4^{(n)} + 26b u_3^{(n)} u_5^{(n)} + (u_4^{(n)})^2 + 26a^{-1} u_4^{(n)} u_5^{(n)} + 169 (u_5^{(n)})^2]$$

olarak bulunur.

$Z^{(n)}(1,2,1)$ ayrışım fonksiyonunun oluşturduğu dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinin belirlediği $u_3^{(n)}$ denklemini hesaplırsak;

$$u_3^{(n)} = [Z^{(n)}(1,1,1) + 2bZ^{(n)}(1,1,2) + 2Z^{(n)}(1,1,3) + \dots + 2Z^{(n)}(1,1,15) + b^2Z^{(n)}(2,1,2) \\ + 2bZ^{(n)}(2,1,3) + 2bZ^{(n)}(2,1,4) + \dots + 2bZ^{(n)}(2,1,15) + Z^{(n)}(3,1,3) + 2Z^{(n)}(3,1,4) \\ + Z^{(n)}(3,1,5) + \dots + 2Z^{(n)}(3,1,15) + Z^{(n)}(4,1,4) + 2Z^{(n)}(4,1,5) + \dots + Z^{(n)}(4,1,15) \\ + \dots + Z^{(n)}(15,1,15)]$$

buradan eşitlikler hesaplanıp yerlerine yazılırsa;

$$u_3^{(n)} = [(u_1^{(n)})^2 + 2a^{-1}(b+13)u_1^{(n)}u_2^{(n)} + (b+13)^2(u_2^{(n)})^2]$$

olarak bulunur.

$Z^{(n)}(2,2,2)$ ayrışım fonksiyonunun oluşturduğu dal üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimlerinin belirlediği $u_4^{(n)}$ denklemi hesaplanırsa;

$$u_4^{(n)} = ac [Z^{(n)}(1,2,1) + 2bZ^{(n)}(1,2,2) + 2Z^{(n)}(1,2,3) + \dots + 2Z^{(n)}(1,2,15) + b^2Z^{(n)}(2,2,2) \\ + 2bZ^{(n)}(2,2,3) + 2bZ^{(n)}(2,2,4) + \dots + 2bZ^{(n)}(2,2,15) + Z^{(n)}(3,2,3) + 2Z^{(n)}(3,2,4) \\ + \dots + 2Z^{(n)}(3,2,15) + Z^{(n)}(4,2,4) + 2Z^{(n)}(4,2,5) + \dots + 2Z^{(n)}(4,2,15) + \dots + Z^{(n)}(15,2,15)]$$

buradan eşitlikler hesaplanıp yerlerine yazılırsa;

$$u_4^{(n)} = ac [(u_3^{(n)})^2 + 2ba^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 26u_3^{(n)}u_5^{(n)} + b^2(u_4^{(n)})^2 + 26ba^{-1}u_4^{(n)}u_5^{(n)} \\ + 169(u_5^{(n)})^2] \text{ olarak bulunur.}$$

Son olarak $u_5^{(n)}$ denklemini hesaplırsak;

$$u_5^{(n)} = [Z^{(n)}(1,3,1) + 2bZ^{(n)}(1,3,2) + 2Z^{(n)}(1,3,3) + \dots + 2Z^{(n)}(1,3,15) + b^2Z^{(n)}(2,3,2) \\ + 2bZ^{(n)}(2,3,3) + \dots + 2bZ^{(n)}(2,3,15) + Z^{(n)}(3,3,3) + 2Z^{(n)}(3,3,4) + \dots + 2Z^{(n)}(3,3,15) \\ + Z^{(n)}(4,3,4) + 2Z^{(n)}(4,3,5) + \dots + 2Z^{(n)}(4,3,15) + Z^{(n)}(15,3,15)] \quad \text{ve eşitlikler}$$

yerine yazılırsa,

$$u_5^{(n)} = [(u_3^{(n)})^2 + 2a^{-1}u_3^{(n)}u_4^{(n)} + 2(b+12)u_3^{(n)}u_5^{(n)} + (u_4^{(n)})^2 + 2a^{-1}(b+12)u_4^{(n)}u_5^{(n)} \\ + (b+12)^2(u_5^{(n)})^2]$$

olarak bulunmuş olur.

(4.1.6) ve (4.1.7)'de var olan eşitlikler burada da geçerli olacağından sistemin yinelemeli denklemleri olan A_1, A_2, A_3, A_4 ve D 'yi aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz;

$$\begin{aligned} A_1 = & 2[b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 4(1-y_1)^2 + 52a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) \\ & + 169(x+y_3-3y_2)^2 + 26b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)] + [4(1+y_1)^2 \\ & + 4b(b+13)a^{-1}(1+y_1)(x+y_2+y_3) + (b+13)^2(x+y_2+y_3)^2] + [(x+y_3-3y_2)^2 \\ & + 2(b+12)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4a^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + b^2(x+y_2-3y_3)^2 \\ & + 4(b+12)a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + (b+12)^2(x+y_2-3y_3)^2] \end{aligned}$$

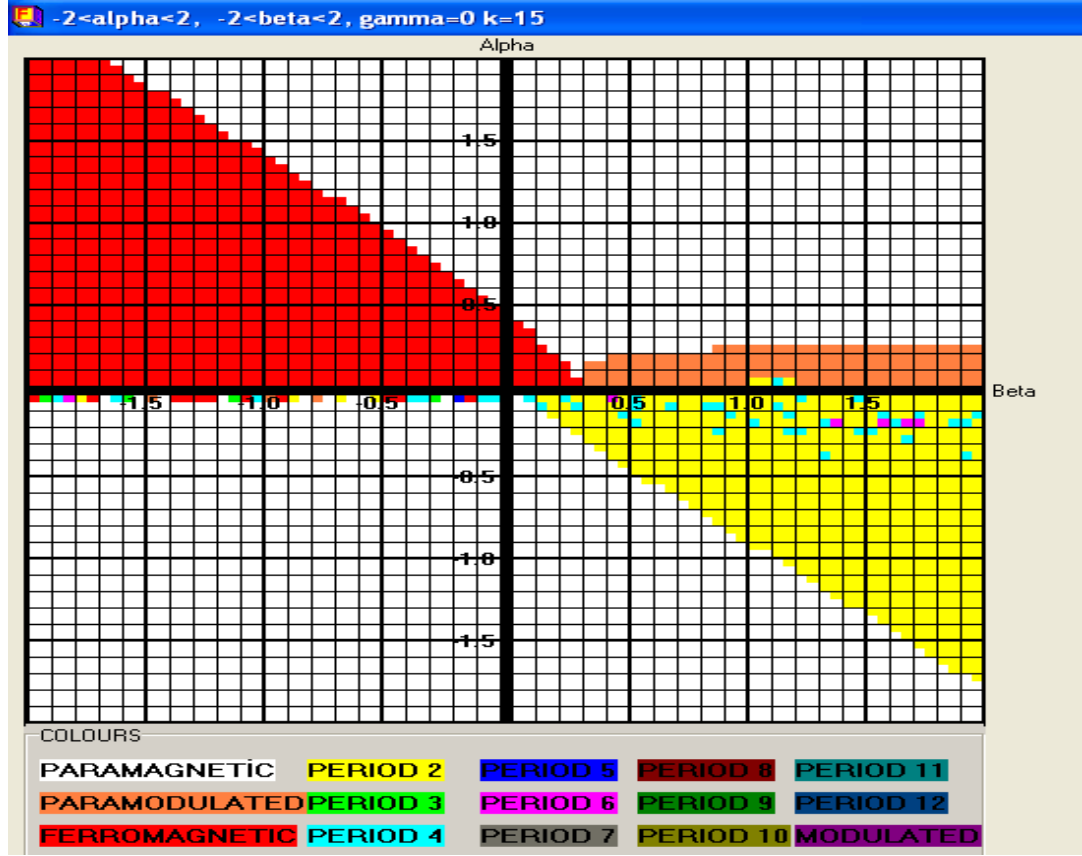
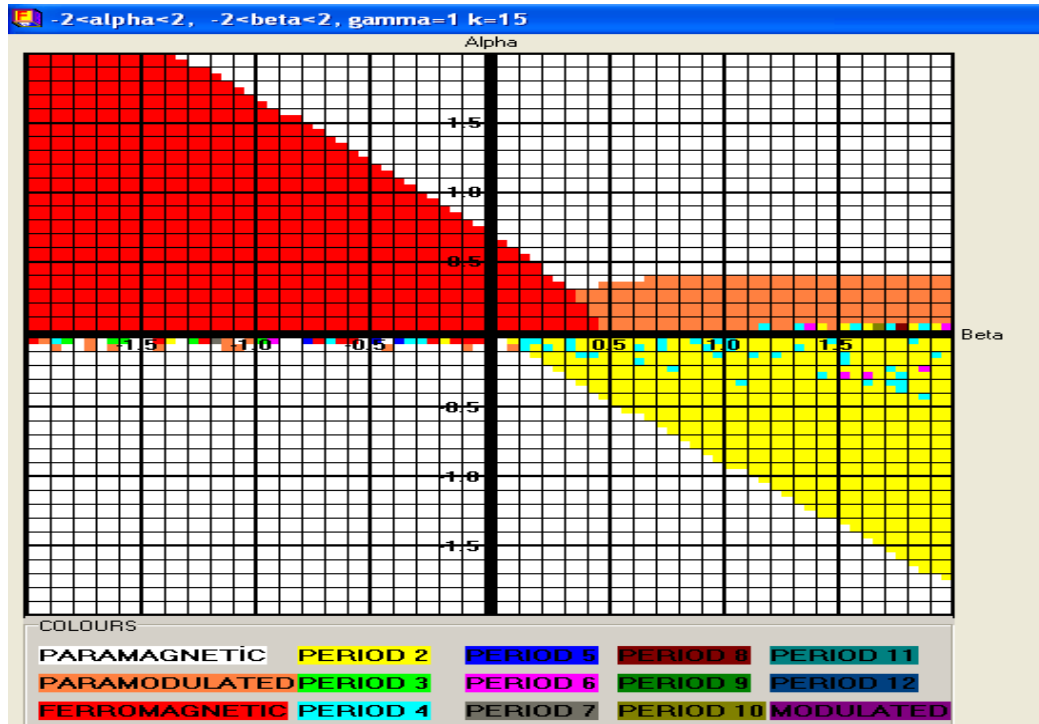
$$\begin{aligned} A_2 = & ac[4b^2(1+y_1)^2 + 56ba^{-1}(x+y_3+y_2)(1+y_1) + 196(x+y_3+y_2)^2] - ac[(x+y_3-3y_2)^2 \\ & + 4ba^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) + 26(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 \\ & + 52ba^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 169(x+y_2-3y_3)^2] \end{aligned}$$

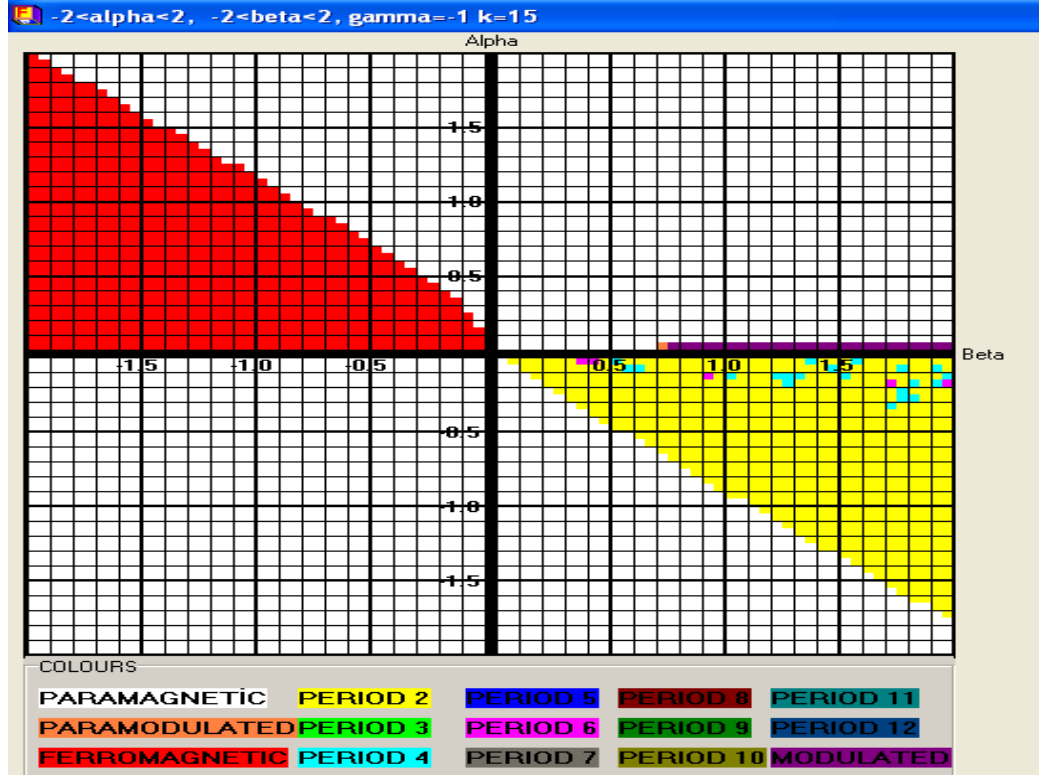
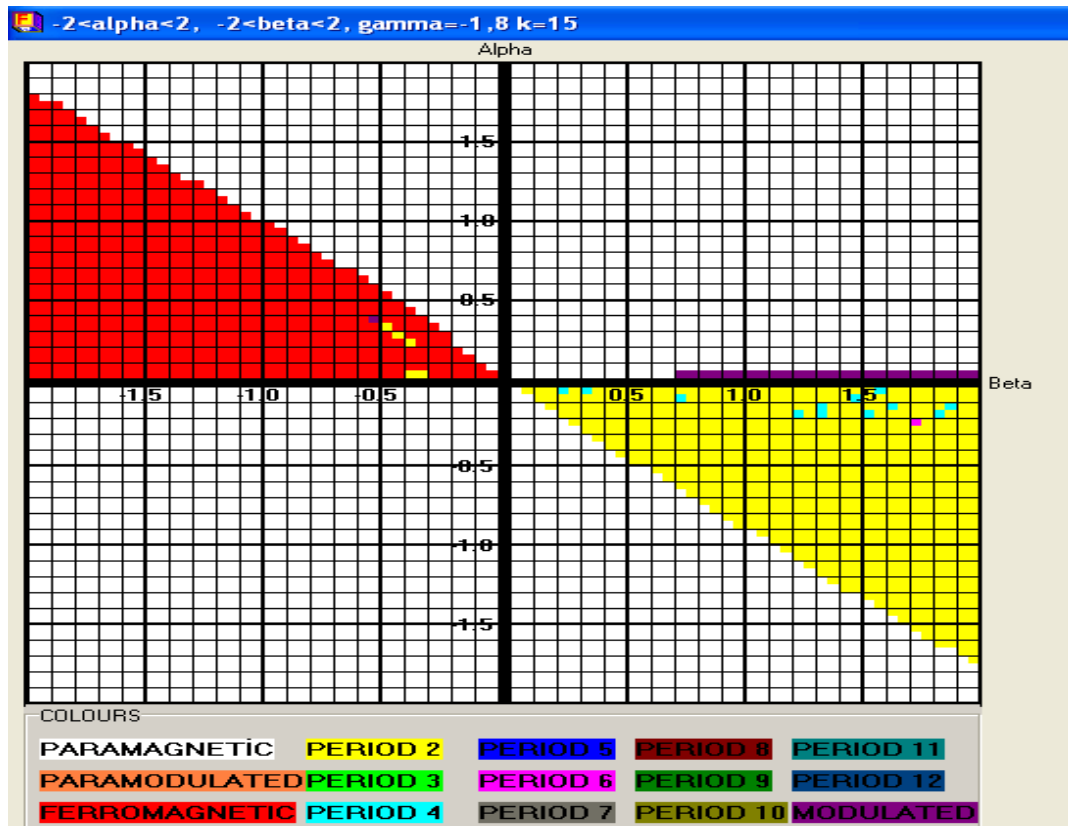
$$\begin{aligned} A_3 = & [b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 26b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\ & + 52a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 169(x+y_2-3y_3)^2] - [4(1+y_1)^2 + 4(b+13)a^{-1}(1+y_1)(x+y_3+y_2) \\ & + (b+13)^2(x+y_2+y_3)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 = & [b^2(x+y_3-3y_2)^2 + 4ba^{-1}(x+y_3-3y_2)(1-y_1) + 26b(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 \\ & + 52a^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 169(x+y_2-3y_3)^2] - [(x+y_3-3y_2)^2 \\ & + 2(b+12)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4a^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) \\ & + 4a^{-1}(b+12)(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 4(1-y_1)^2 + (b+12)^2(x+y_2-3y_3)^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = & ac[4b^2(1+y_1)^2 + 56ba^{-1}(x+y_3+y_2)(1+y_1) + 196(x+y_3+y_2)^2] - ac[(x+y_3-3y_2)^2 \\ & + 4ba^{-1}(1-y_1)(x+y_3-3y_2) + 26(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 4b^2(1-y_1)^2 \\ & + 52ba^{-1}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 169(x+y_2-3y_3)^2] \end{aligned} \text{ olarak bulunur. (4.1.13)' de}$$

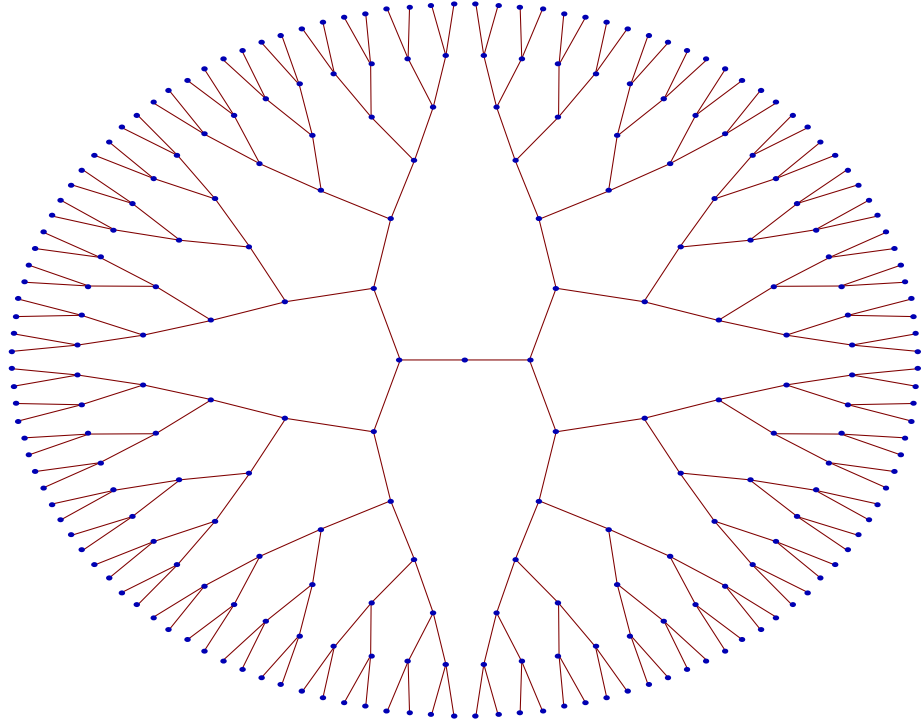
hesaplanan başlangıç koşulları ve (4.1.2) Hamiltonyen denkleminin belirlediği $q=15$ durumlu Potts modelinin faz diyagramları;

Şekil 4.20. $q = 15$ ve $\gamma = 0$ için modelin faz diyagramıŞekil 4.21. $q = 15$ ve $\gamma = 1$ için modelin faz diyagramı

Şekil 4.22. $q=15$ ve $\gamma = -1$ için modelin faz diyagramıŞekil 4.23. $q= 15$ ve $\gamma = -1.8$ için modelin faz diyagramı

4.2. Üçüncü mertebeden Potts modelinin temel denklemleri

(4.1)'in temel denklemleri için (4.1.2) Hamiltonyen denkleminin belirlediği $q=5$, $q=6$ ve $q=15$ durumlu Potts modelinin yinelemeli denklemleri ve bunların belirlediği faz diyagramları bilgisayar programlama dili ile çözümlenmesi incelenmiştir. Bu bölümde ise (4.2.1)'de belirtilen Hamiltonyen denkleminin belirlemiş olduğu farklı bir modelin faz diyagramlarını çözümleneceğiz. Ayrıca bu kısımda Cayley ağacının mertebesi olan $k, 3$ olarak alınacaktır. Cayley ağacı üzerindeki komşuluk etkileşimleri (4.1)'in temel denklemleri için alınan etkileşimlerden farklı olacaktır. Aşağıda ikinci mertebeden bir Cayley ağacının genel şekli görülmektedir.



Şekil 4.24. İkinci mertebeden bir Cayley ağacının genel görünümü

(Mathematica ile üretilmiştir)

Bu kısımda en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve aynı seviye üçlü komşuluk etkileşimli 3-durumlu Potts modelinin Hamiltonyen denklemi;

$$H(\sigma) = -J_T \sum_{\langle x,y,z \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} - J_P \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_1 \sum_{\langle x,y \rangle} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \quad (4.2.1)$$

şeklindedir.

Toplam ayrışım fonksiyonu;

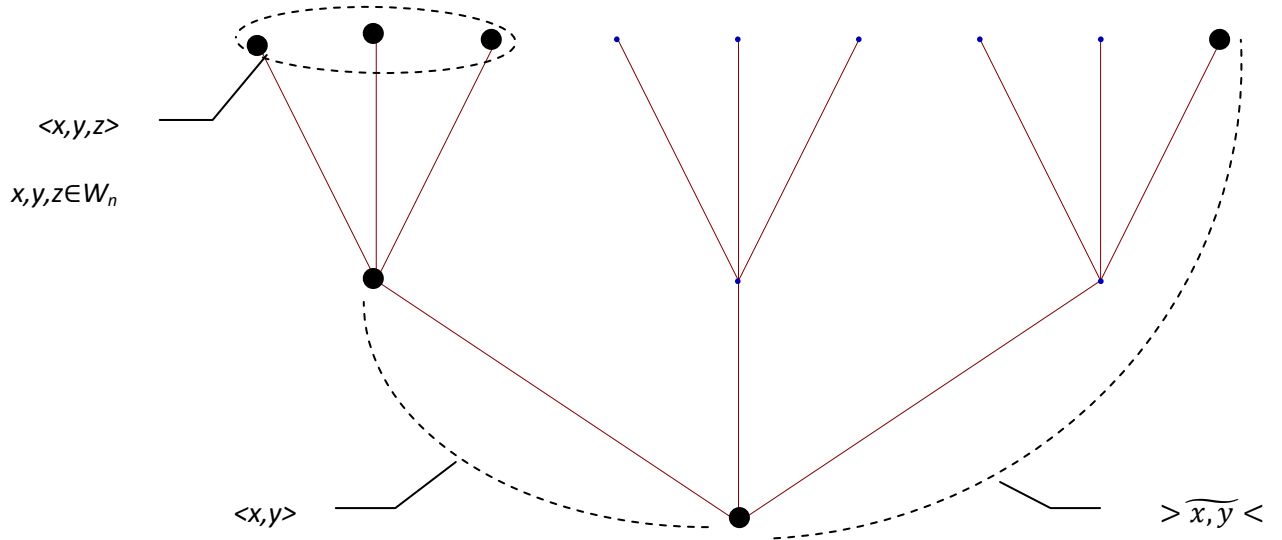
$$Z^{(n)} = \sum_{i_0, i_1, i_2, i_3=1}^3 Z^{(n)}(i_1, i_2, i_3, i_0) \quad (4.2.2)$$

Kronecker deltası ;

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)} = \begin{cases} 1, & \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(z) \\ 0, & \text{aksitakdirde} \end{cases} \quad (4.2.3)$$

biçiminde tanımlıdır.

Bu modeldeki sistem elemanları arasındaki komşuluk etkileşimleri ise aşağıdaki şekilde gibidir:



Şekil 4.25. (4.2.1) Hamiltonyen denklemine belirtilen komşuluklar

Bu modelde (4.1) temel denklemlerinde olduğu gibi ilk olarak ayrışım fonksiyonları hesaplanılacaktır. Fakat burada $k=3$ olduğu için denklem sayısı k ve q değerine bağlı olarak değişecektir. (4.2.1) modelinin toplam ayrışım fonksiyonu sayısı 81 adettir, bunlar;

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = a^3 c^3 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(1,1) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 \end{matrix}\right) = a^3 Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2) Z^{(n)}(1,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 3 \\ & & 1 \end{array}\right) = Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right) = cZ^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ & & 1 \end{array}\right) = Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 3 \\ & & 1 \end{array}\right) = Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right) = c^2Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}\right) = cZ^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3 \\ & & 1 \end{array}\right) = cZ^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right) = cZ^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 2 \\ & & 1 \end{array}\right) = Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 3 \\ & & 1 \end{array}\right) = Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right) = cZ^{(n)}(1,1)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ & & 1 \end{array}\right) = Z^{(n)}(1,2)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ & & 1 \end{array}\right) = a^3Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)Z^{(n)}(1,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right) = a^3Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ & & 2 \end{array}\right) = cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ & & 2 \end{array}\right) = Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = c^2Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = cZ^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = c^2Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = cZ^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = c^2Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = a^3c^3Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = c^2Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = cZ^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 \end{matrix}\right) = c^2Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 \end{matrix}\right) = cZ^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 \end{matrix}\right) = Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = c^2Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(2,2)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = a^3Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)Z^{(n)}(2,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = a^3Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = cZ^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 \end{matrix}\right) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 \end{matrix}\right) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 \end{matrix}\right) = Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 \end{matrix}\right) = a^3 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,1) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 \end{matrix}\right) = c Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{matrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 \end{matrix}\right) = c^2 Z^{(n)}(3,2) Z^{(n)}(3,3) Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 1 \\ & & 3 \end{array}\right) = c^2 Z^{(n)}(3,1)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 2 \\ & & 3 \end{array}\right) = c^2 Z^{(n)}(3,2)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ & & 3 \end{array}\right) = a^3 c^3 Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)Z^{(n)}(3,3)$$

olarak hesaplanır. Şimdi bu 81 ayrışım fonksiyonu içinden bir birinden bağımsız ayrışım fonksiyonlarını seçmeliyiz.

Bu işlemi yapmak için $\sigma^{-(n)}\left(\frac{V}{V_n}\right) \equiv 1$ sınır şartı ve (4.2.1) Hamiltonyen denklemleri üzerindeki komşuluk tipleri göz önüne alınırsa aşağıdaki 5 bağımsız ayrışım fonksiyonuna sadeleşmiş olur. Bunlar;

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ & & 1 \end{array}\right)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ & & 2 \end{array}\right)$$

$$Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ & & 2 \end{array}\right)$$

şeklinindedir. Bu fonksiyonları (4.1.5)' de kullanılan notasyon biçiminde kullanırsak;

$$u_1^{(n)} = \sqrt[3]{Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right)}$$

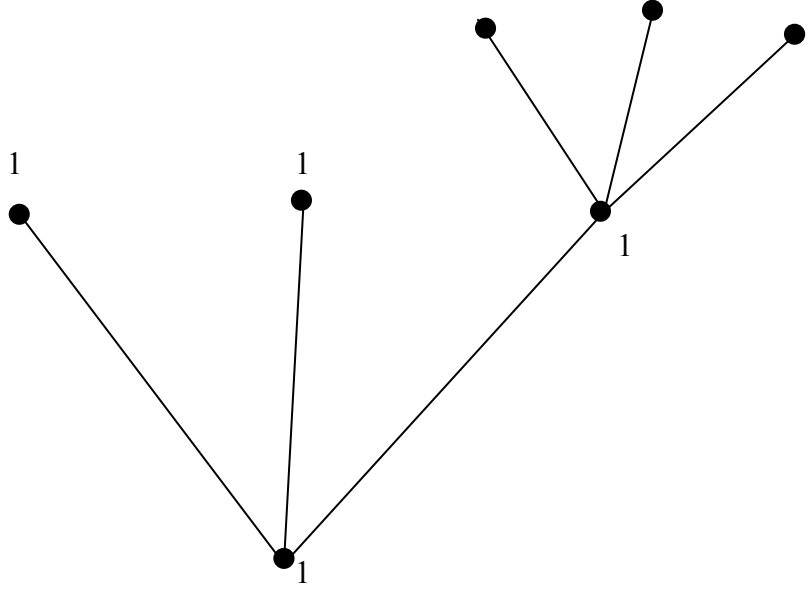
$$u_5^{(n)} = \sqrt[3]{Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 3 \\ & & 2 \end{array}\right)}$$

$$u_2^{(n)} = \sqrt[3]{Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ & & 1 \end{array}\right)}$$

$$u_3^{(n)} = \sqrt[3]{Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right)}$$

$$u_4^{(n)} = \sqrt[3]{Z^{(n)}\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ & & 2 \end{array}\right)}$$

şekline dönüşmüş olur. Bu $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}, u_5^{(n)}$ denklemlerini hesaplamak için Ağaç üzerindeki uzatılmış (prolonged) komşuluk etkileşimlerine bakacağız. İlk olarak $u_1^{(n)}$ denkleminin hesaplanması için $Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ üzerine inşa edilen etkileşim olasılıklarını düşüneceğiz.



Şekil 4.26. $Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ üzerine kurulmuş olan dallar

Tüm olasılıklar düşünülür ise $u_1^{(n)}$ denklemi;

$$u_1^{(n)} = ac \left[b^3 Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 3b^2 Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 3b^2 Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 3b Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right. \\ \left. + 6b Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 3b Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 3Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 3Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right. \\ \left. + Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right]$$

olarak elde edilir.

Denklem içindeki ayrışım fonksiyonları (4.1)'in temel denklemlerinde olduğu gibi hesaplanırsa;

$$u_1^{(n)} = ac \left[b^3 (u_1^{(n)})^3 + 6b^2 a^{-3} (u_1^{(n)})^2 u_2^{(n)} + 12ba^{-3} u_1^{(n)} (u_2^{(n)})^2 + (6a^{-3} + 2)(u_2^{(n)})^3 \right]$$

olarak bulunur.

$u_2^{(n)}$ denklemi, $Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ayrışım fonksiyonu üzerindeki uzatılmış ikinci komşuluk etkileşimleriyle hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} = & a \left[b^3 Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3b^2 Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3b^2 Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3b Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right. \\ & + 6b Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3b Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \\ & \left. + Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ayrışım fonksiyonlarının eşitlikleri yerine yazılacak olursa;

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} = & a \left[b^3 (u_3^{(n)})^3 + 6b^2 a^{-3} u_4^{(n)} (u_3^{(n)})^2 + 3b a^{-3} u_3^{(n)} (u_4^{(n)})^2 + 6b a^{-3} u_3^{(n)} u_4^{(n)} u_5^{(n)} \right. \\ & \left. + 3b a^{-3} u_3^{(n)} (u_5^{(n)})^2 + 3a^{-3} u_5^{(n)} (u_4^{(n)})^2 + 3a^{-3} u_4^{(n)} (u_5^{(n)})^2 + (u_4^{(n)})^3 + (u_5^{(n)})^3 \right] \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanmış olur.

$Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $Z^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ üzerlerine inşa edilen dallardaki komşuluk etkileşimleri hesaplanırsa $u_3^{(n)}$, $u_4^{(n)}$, $u_5^{(n)}$ denklemleri;

$$\begin{aligned} u_3^{(n)} = & a \left[(u_1^{(n)})^3 + 3b a^{-3} ((u_2^{(n)})^3 + 2u_1^{(n)} (u_2^{(n)})^2 + u_2^{(n)} (u_1^{(n)})^2) + 3a^{-3} (u_1^{(n)} (u_2^{(n)})^2 \right. \\ & \left. + u_2^{(n)} (u_1^{(n)})^2) + 3b^2 a^{-3} ((u_2^{(n)})^3 + u_1^{(n)} (u_2^{(n)})^2) + (b+1)^3 (u_2^{(n)})^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_4^{(n)} = & a c \left[(u_3^{(n)})^3 + 3b a^{-3} (u_3^{(n)} (u_4^{(n)})^2 + u_4^{(n)} (u_3^{(n)})^2) + 3a^{-3} (u_3^{(n)} (u_5^{(n)})^2 + u_5^{(n)} (u_3^{(n)})^2) \right. \\ & \left. + 3b^2 a^{-3} (u_5^{(n)} (u_4^{(n)})^2 + u_3^{(n)} (u_4^{(n)})^2) + (u_5^{(n)})^3 + 6b a^{-3} u_3^{(n)} u_4^{(n)} u_5^{(n)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_5^{(n)} = & a \left[(u_3^{(n)})^3 + 3b a^{-3} (u_5^{(n)} (u_3^{(n)})^2 + 2u_3^{(n)} u_4^{(n)} u_5^{(n)} + u_5^{(n)} (u_4^{(n)})^2) + 3a^{-3} (u_4^{(n)} (u_3^{(n)})^2 \right. \\ & \left. + u_3^{(n)} (u_4^{(n)})^2) + 3b^2 a^{-3} (u_3^{(n)} (u_5^{(n)})^2 + u_4^{(n)} (u_5^{(n)})^2) + b^3 (u_5^{(n)})^3 + (u_4^{(n)})^3 \right] \end{aligned}$$

olarak bulunmuş olur.

(4.1.6) ve (4.1.7)'de kullanılan eşitlikler burada da geçerli olacağından sistemin yinelemeli denklemleri olan A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ve D ;

$$\begin{aligned}
A_1 = & 2a[b^3(x+y_3-3y_2)^3 + 12b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(1-y_1) + 8(1-y_1)^3 \\
& + 12ba^{-3}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) + 12ba^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) \\
& + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 12a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 6a^{-3}(x+y_2-3y_3)^2(1-y_1) \\
& + (x+y_2-3y_3)^3] + a[8(1+y_1)^3 + 12ba^{-3}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + 12ba^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + 3ba^{-3}(x+y_2+y_3)^3 + 12a^{-3}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + 6a^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + 6b^2a^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 + 3b^2a^{-3}(x+y_2+y_3)^3 + (b^3+1)(x+y_2+y_3)^3] + a[(x+y_3-3y_2)^3 \\
& + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) + 12ba^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) \\
& + 12ba^{-3}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 6a^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 + 12a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) \\
& + 3b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 6b^2a^{-3}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + 8(1-y_1)^3 \\
& + b^3(x+y_2-3y_3)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & ac[8b^3(1+y_1)^3 + 24b^2a^{-3}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + 24ba^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + 6a^{-3}(x+y_2+y_3)^3 + 2(x+y_2+y_3)^3] - ac[(x+y_3-3y_2)^3 + 6ba^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 6ba^{-3}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) \\
& + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 12b^2a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 12b^2a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + (x+y_2-3y_3)^3 + 12ba^{-3}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)(x+y_3-3y_2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & a[b^3(x+y_3-3y_2)^3 + 12b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(1-y_1) + 8(1-y_1)^3 + 12ba^{-3}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) \\
& + 12ba^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 \\
& + 12a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 6a^{-3}(x+y_2-3y_3)^2(1-y_1) + (x+y_2-3y_3)^3] - a[8(1+y_1)^3 \\
& + 12ba^{-3}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + 12ba^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 + 3ba^{-3}(x+y_2+y_3)^3 \\
& + 12a^{-3}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + 6a^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 + 6b^2a^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + 3b^2a^{-3}(x+y_2+y_3)^3 + (b^3+1)(x+y_2+y_3)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & a[b^3(x+y_3-3y_2)^3 + 12b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(1-y_1) + 8(1-y_1)^3 + 12ba^{-3}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) \\
& + 12ba^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 \\
& + 12a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 6a^{-3}(x+y_2-3y_3)^2(1-y_1) + (x+y_2-3y_3)^3] - a[(x+y_3-3y_2)^3 \\
& + 3ba^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) + 12ba^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3) \\
& + 12ba^{-3}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + 6a^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 + 12a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2) \\
& + 3b^2a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 6b^2a^{-3}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)^2 + 8(1-y_1)^3 \\
& + b^3(x+y_2-3y_3)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & ac[8b^3(1+y_1)^3 + 24b^2a^{-3}(1+y_1)^2(x+y_2+y_3) + 24ba^{-3}(1+y_1)(x+y_2+y_3)^2 \\
& + 6a^{-3}(x+y_2+y_3)^3 + 2(x+y_2+y_3)^3] - ac[(x+y_3-3y_2)^3 + 6ba^{-3}(1-y_1)(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 6ba^{-3}(1-y_1)(x+y_2-3y_3) + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)^2(x+y_2-3y_3) \\
& + 3a^{-3}(x+y_3-3y_2)(x+y_2-3y_3)^2 + 12b^2a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_3-3y_2)^2 \\
& + 12b^2a^{-3}(1-y_1)^2(x+y_2-3y_3) + (x+y_2-3y_3)^3 + 12ba^{-3}(1-y_1)(x+y_2-3y_3)(x+y_3-3y_2)]
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu kısımda Cayley ağacının mertebe sayısı olan $k=3$ olduğu için,

$$a = \exp\left(\frac{I_T}{3T}\right); b = \exp\left(\frac{I_P}{T}\right); c = \exp\left(\frac{I}{T}\right) \text{ olacaktır.}$$

$\bar{\sigma}^{(n)}\left(\frac{V}{V_n}\right) \equiv 1$ sınır şartına karşılık gelen başlangıç koşulları ise;

$$x^{(1)} = \frac{2b^3 + ac^3 + 1}{ac^4b^3 + ac}$$

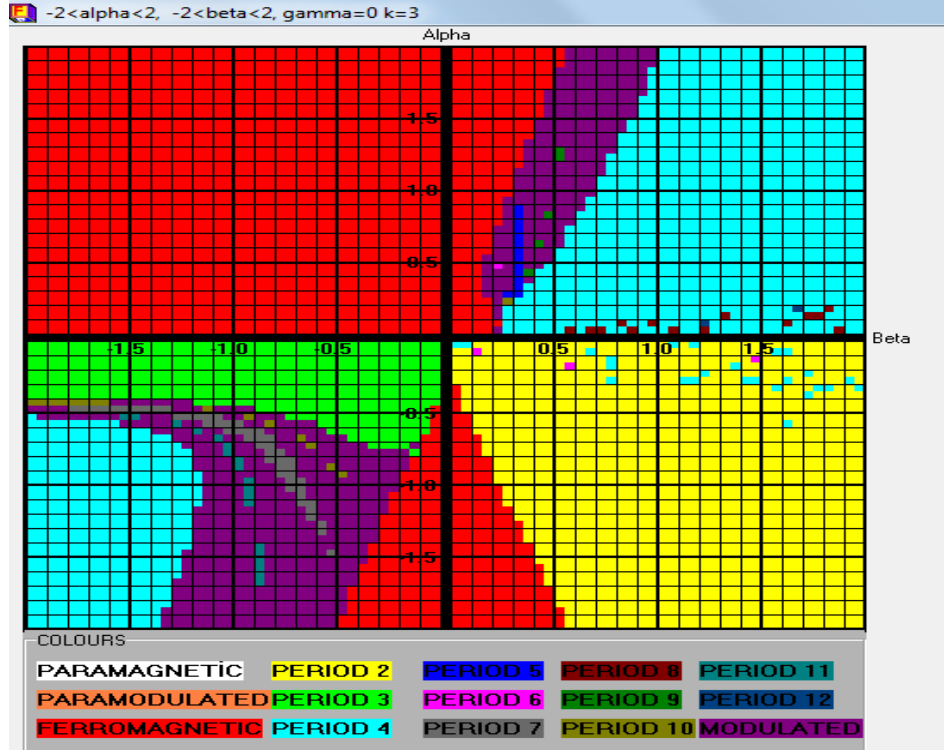
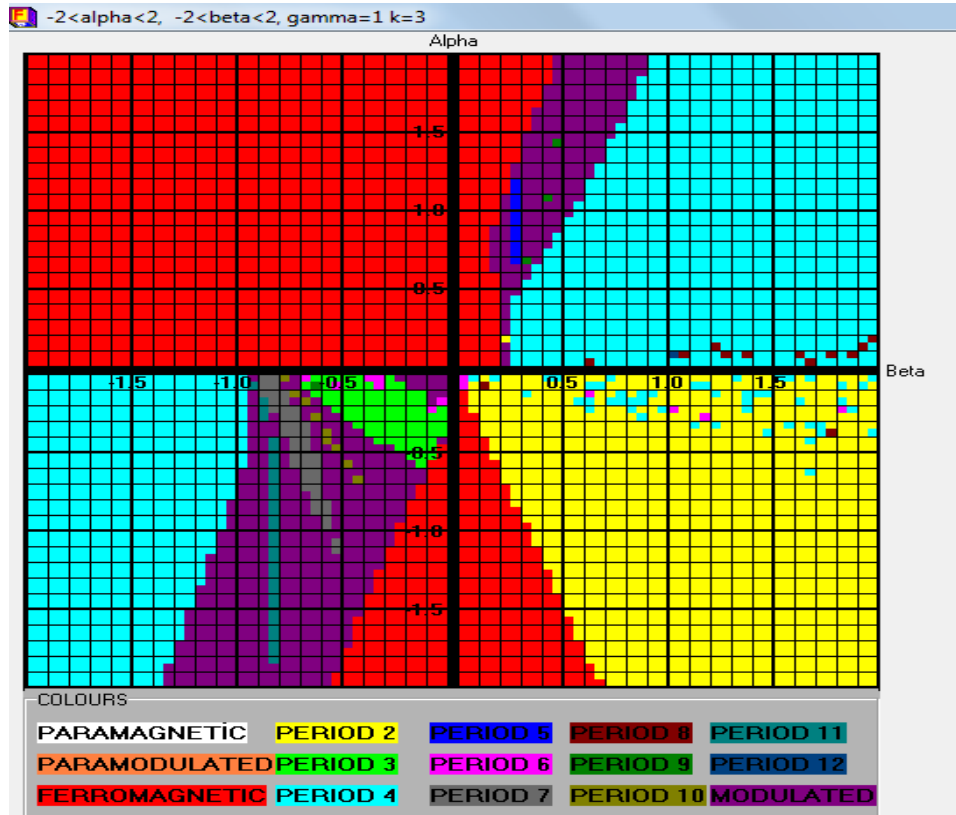
$$y_1^{(1)} = \frac{c^3b^3 - 1}{c^3b^3 + 1}$$

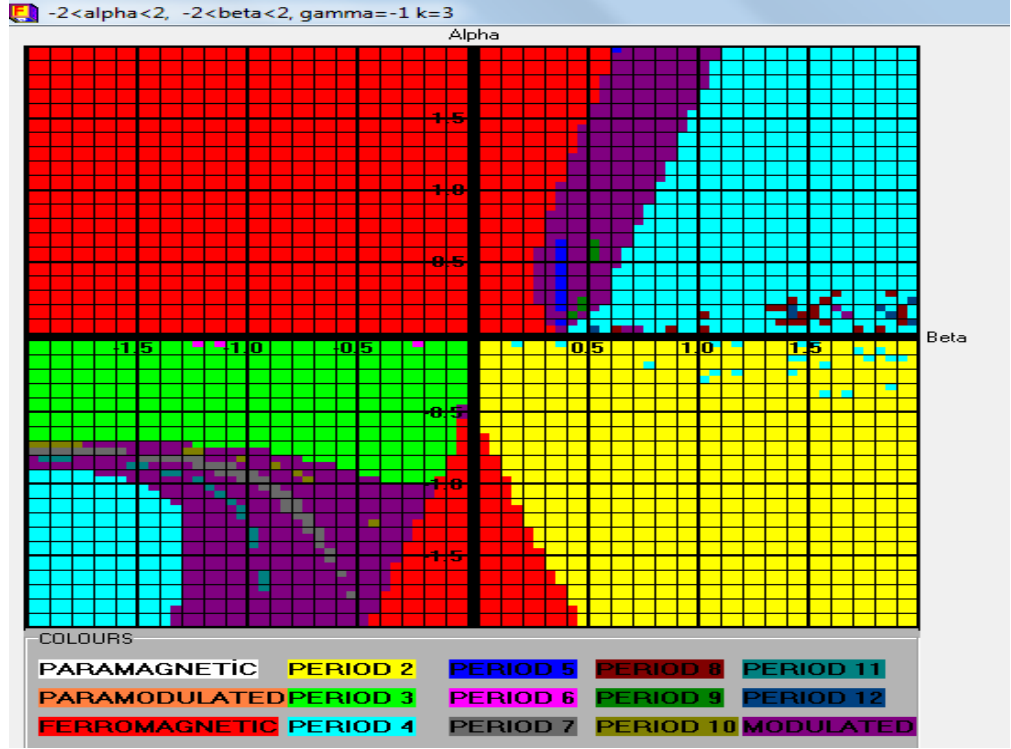
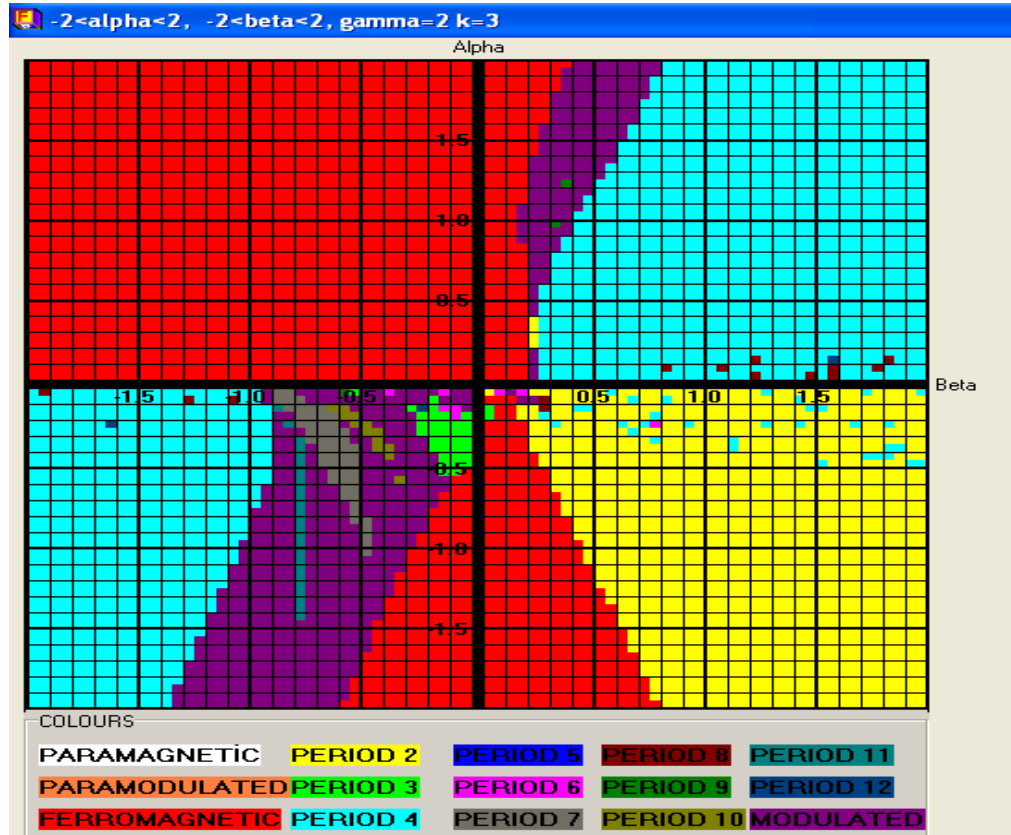
$$y_2^{(1)} = \frac{b^3 - ac^3}{ac^4b^3 + ac}$$

$$y_3^{(1)} = \frac{b^3 - 1}{ac^4b^3 + ac}$$

şeklinde hesaplanır.

(4.2.1) Hamiltonyen denklemi üzerindeki komşuluk etkileşimlerinin belirlediği A_1, A_2, A_3, A_4 ve D yinelemeli denklemleri ve bu denklemler ile başlangıç koşullarının belirlediği $\gamma=0,1,-1,-2$ için faz diyagramları;

Şekil 4.27. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma=0$ için modelin faz diyagramıŞekil 4.28. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma=1$ için modelin faz diyagramı

Şekil 4.29. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma=-1$ için modelin faz diyagramıŞekil 4.30. $k=3$, $q=3$ ve $\gamma=2$ için modelin faz diyagramı

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

4. bölümün birinci kısmında ikinci mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde $q=5$, $q=6$ ve $q=15$ durumlu Potts modellerinin en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve iki seviye üçlü komşuluk etkileşimleriyle meydana gelen faz diyagramları analiz edilmiştir. $q=5$ durumlu Potts modelinde $\gamma = \{0, 1, 2\}$ için Şekil 4.8-4.10 da 6 tane faz meydana gelmektedir. ferromanyetik, paramanyetik, antiferromanyetik faza karşılık gelen 2 periyotlu faz, antifaza karşılık gelen 4 periyotlu faz, modüle edilmiş faz ve paramodüle edilmiş fazlar gözlemlenmiştir. $\gamma = \{-1, -2\}$ için 4 faz gözlemlenmiş olup, ferromanyetik, paramanyetik, antiferromanyetik faza karşılık gelen 2 periyotlu faz ve modüle edilmiş faz görülmektedir. $q=6$ durumunda Şekil 4.13-4.14' de birinci bölgede modüle edilmiş fazın kaybolduğu ve paramodüle edilmiş fazın alanının genişlediği görülmektedir. 3. bölgedeki modüle edilmiş fazın $q=5$ durumuna göre azaldığı gözlemlenmiştir. $\gamma = \{-1.8, -2.5\}$ için birinci bölgedeki paramodüle edilmiş fazın görülmediği, modüle edilmiş fazın ise 3. bölgeden hemen hemen gözden kaybolduğu ortaya çıkmaktadır.

$q=15$ durumunda, Şekil 4.20-4.21' de $\gamma = \{0, 1\}$ için 4 tane faz gözlemlenmiştir. Burada, ferromanyetik, paramanyetik, periyot 2 ve paramodüle edilmiş faz görülmektedir. $\gamma = \{-1, -1.8\}$ için birinci bölgedeki paramodüle edilmiş fazın kısmen gözden kaybolduğu gözlemlenmiştir.

4. bölümün 2. kısmında ise üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde 3-durumlu Potts modellerinin en yakın komşuluk, uzatılmış ikinci komşuluk ve aynı seviye üçlü komşuluk etkileşimleriyle (4.2.1)' de belirtilen Hamiltonyen denkleminin belirlemiş olduğu farklı bir modelin faz diyagramlarını çözümlenmiştir. Ayrıca bu kısımda Cayley ağacının mertebesi olan k , 3 olarak alınmıştır. Bu kısımda, Cayley ağacı üzerindeki komşuluk etkileşimleri, (4.1)'in temel denklemleri için alınan etkileşimlerden farklıdır.

(4.2) kısmında 3-durumlu Potts modelinde $\gamma=\{0,1,2\}$ değerlerinde ferromanyetik, modüle edilmiş faz, periyot 2, periyot 4 ve periyot 3 şeklinde toplam 5 faz gözlemlenmiştir. Şekil 4.28-4.29' da 3. bölgede γ değeri büyüdükçe modüle edilmiş faz bölgesi genişlediği ve periyot 3' ün belirlemiş olduğu alanın ise daraldığı gözlemlenmektedir.

5.2. Öneriler

Bu tezde yapılan çalışmaların ışığında, 4.1.1' de belirtilen Hamiltonyen denkleminin sonlu bir q durumlu ve k mertebeli Potts modeli için genellemesi yapılarak faz diyagramları incelenebilir. 4.2.1' de verilen Hamiltonyen denkleminin benzer keyfi k ve sonlu bir q durumlu Potts modelinin faz diyagramları incelenebilir.

KAYNAKLAR

BAK, P., BOEHM, J., 1980. Ising model with solitons, phasons, and the 'devil's staircase'. *Physics Review B*, 27; 5297-5308.

BAK, P., 1982. Commensurate phases, incommensurate phases and the 'devil's staircase'. *Rep. Prog. Phys*, 45; 587-629.

BAXTER, R.J., 1982. Exactly solved models in statistical mechanics. *Journal of statistical physics*, London/ NewYork.

BEAUDIN, L., 2007. A Review of the Potts model: Its connection to the Tutte polynomial and its application to complex experiments. pp.1-25.

DOROGOVTSEV, S.N., GOLTSEV, A.V, MENDES, J.F.F., 2004. Potts model on complex Networks. *Eur. Phys. J. B*, 38;1-177.

ELLIOT, R.J., 1981. Phenomenological discussion of magnetic ordering in the heavy rare-earth metals, *Phys. Rev.*, 124; 346-353.

FISHER, M.E., SELKE, W., 1980. *Physics Review Letters*, 44; 1502-1505.

FOULADVAND, EBRAHIM, M., AMIR, H., 2005. Potts- like model for Ghetto formation in multi- cultural societies. *International Journal of Modern Physics C: Computational Physics and Physical computation*, 16(3); 351-355.

GANIKHODJAEV, N.N., 1990. On pure phases of the three state ferromagnetic Potts model on the second- order Bethe lattice. *Theor. Math. Phys.*, 85; 1125.

GANIKHODJAEV, N.N., TEMIR, S., AKIN, H., 2005. The exact solution of the Potts models with external magnetic field on the Cayley tree. *Cubo. A mathematical journal*, 7(4); 39-48.

GANIKHODJAEV, N.N., AKIN, H., TEMIR, S., 2007. Potts models with two competing binary interactions. *Turkish journal of mathematics*, 31(3); 229-238.

GANIKHODJAEV, N.N., MUKHAMEDOV, F.M., PAH., C.H., 2008. Phase diagram of the three states Potts model with next-nearest-neighbor interactions on the Bethe lattice, *Physics Letters A*, 373; 33-38.

GANIKHODJAEV, N.N., TEMIR, S., AKIN, H., 2009. Modulated phase of a Potts model with competing binary interactions on a Cayley tree. *Journal of statistical Physics*, 137(4); 701-715.

GEORGI, H.O., 1988. Gibbs measures and phase transitions. *Walter de Gruyter*, Berlin.

HUSE, D.A., 1981. Simple three- state model with infinitely many phases. *Phys. Rev. B*, 24; 5180-5194.

- ISING, E., 1925. Beitrag sur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeit. Fur Physik*, 31;253-258.
- JAYNES, E.T., 1957. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev.*, 106; 620-630.
- INAWASHIRO, S., THOMPSON, C.J., 1983. Competing Ising iterations and chaotic glass-like behaviour on a Cayley tree. *Physical Letters*, 97(A); 245-248.
- JIANG, YI., GLAZIER, JAMES, A., 1996. Extended large-Q model simulation of foam drainage. *Philosophical magazine letters*, 74(2); 119-128.
- KATSURA, S., TAKIZAWA, W., 1974. Bethe lattice and the Bethe approximation. *Prog. Theorem Physics*, 51; 82-98.
- KINDERMANN, R., SNEEL, J.L, 1980. *Markov Random Fields and their Applications: Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, Vol. 1; 141.*
- LYONS, R., 2000. Phase transitions on nonamenable graphs. *J. Math. Phys.*, 41; 1099.
- MARIZ, A.M., TSALLIS, C., ALBUQUERQUE, A.L., 1985. Phase diagram of the Ising model on a Cayley tree in the presence of competing interactions and magnetic field. *J. Stat. Phys.*, 40; 577-592.
- OSTLUND, S., 1981. Incommensurate and commensurate phases in asymmetric clock models, *Phys. Rev. B.*, 124; 398-405.
- PERUGGI, F., 1984. Probability measures and Hamiltonian models on Bethe lattices. I. Properties and construction of MRT probability measures. *J. Math. Phys.*, 25; 3303.
- PERUGGI, F., 1984. Probability measures and Hamiltonian models on Bethe lattices. II. The solution of thermal and configurational problems. *J. Math. Phys.*, 25; 3316.
- PERUGGI, F., DI LIBERTO, F., MONROY, G., 1983. Potts model on Bethe lattices. I. General results. *J. Phys. A*, 16: 811.
- PERUGGI, F., DI LIBERTO, F., MONROY, G., 1987. Phase diagrams of the q-state Potts model on Bethe lattices. *J. Phys. A*, 141: 151.
- PRESTON, C., 1974. *Gibbs states on countable sets. Cambridge University Press, London.*
- POTTS, R.B., 1952. Some generalized order-disorder transformations. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 48; 106.
- SANYAL, S., GLAZIER, J.A., 2006. Viscous instabilities in flowing foams: A cellular Potts model approach. *Journal of statistical mechanics*.

- SCHELLING, T.C., 1971. Dynamic models of segregation. *Journal of Sociology*, (1); 143-186.
- SINAI, YA G., 1982. *Theory of phase transitions*. Oxford, Pergamon
- SPITZER, F., 1971. *Random fields and interacting particle systems*. M. A. A. Summer Seminar notes.
- SUN, L., CHANG, F.Y., CAI, X., 2004. A discrete simulation of tumor growth concerning nutrient concentration. *International Journal of modern physics B: condensed matter Physics; Statistical Physics; Applied Physics*, 18(17-19); 2651-2657.
- TEMIR, S., GANIKHODJAEV, N.N., AKIN, H., UĞUZ, S., 2010. Phase diagrams of a Potts model with competing binary and ternary interactions. *AIP. Conf. Proc.* Vol. 1281; 2069-2073.
- TIMONIN, P.N., 2004. Inhomogeneity-induced second order phase transitions in the Potts models on hierarchical lattices. *JETP*, 99; 1044.
- TUCKER, A., 2002. *Applied combinatorics*. Hoboken, Forth Edition, N.J.
- VANNIMENUS, J., 1981. Modulated phase of a Ising system with competing interactions on a Cayley tree. *Z. Physics B*, 43; 141-148.
- WEIDLICH, W., 1971. The statistical description of polarization phenomena in society. *Br. J. Math Statist. Psychol.*, 251-266.
- WU, F.Y., 1982. The Potts model. *Rev. Mod. Physics*, 54; 235-268.

ÖZGEÇMİŞ

10.09.1987 yılında Adana’da doğdu. İlk ve Ortaokulu Seyhan ilçesine bağlı Adnan Menderes ilköğretim okulunda, Lise öğrenimini Turgut Özal Lisesinde tamamladı. 2005 ÖSS’ de Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. Bu bölümü 2009 yılında bitirerek aynı yıl içinde Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü’nde yüksek lisansa başladı. Bu bölümde ayrıca “ Cayley ağacı üzerindeki örgü modellerinin dinamik sistemlerinin limit davranışları ve faz diyagramları” adlı TÜBİTAK projesine bursiyer olarak kabul edildi.

ÖZET

Birinci bölümde, genel olarak ihtiyaç duyulan tanımlar çok fazla detaya girilmeden verilmiştir.

İkinci bölümde, Potts modeli ve faz diyagramları için yapılan önceki çalışmalar hakkında literatür taraması verilmiştir.

Üçüncü bölümde bu tezde kullanılan modellerin analizi için uygulanan metotlar hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ikinci mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde bazı spin durumlu, ikili ve üçlü etkileşimli Potts modelinin faz diyagramları Temir ve ark. (2010) da yapılan sonuçlara göre genelleştirilmiştir. Dördüncü bölümde ayrıca 3. mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde üç durumlu bir Potts modelinin faz diyagramları analiz edilmiştir.

Bu tezde sonuç olarak, ikinci ve üçüncü mertebeden bir Cayley ağacı üzerinde bazı spin durumlu Potts modellerinin meydana getirdiği faz diyagramları hakkında daha genel sonuçlar elde edilmiştir.

SUMMARY

In the first chapter, basic definitions have been introduced without going into details.

In the second chapter, literature screening of the previous studies concerning the phase diagrams of the Potts model have been given.

In the third chapter, information about the methods which are applied for analyse of the models have been given.

In the fourth chapter, the phase diagrams of some spin states Potts models with competing binary and ternary interactions on a two order Cayley tree have been generalized according to some results of Temir et al. (2010). In addition to, the phase diagrams of the Potts model on a two and three order Cayley tree have been analysed.

In this thesis consequently, the phase diagrams of some spins states Potts models with competing interactions on a two and three order Cayley tree have been obtained more general results.