T.C
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

[-1,1] ARALIĞINDA BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

İbrahim KAHVECİBAŞI

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ŞANLIURFA

2014

Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, İbrahim KAHVECİBAŞI'nın hazırladığı "[-1,1] aralığında Bernstein-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özellikleri" konulu bu çalışma 21/02/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ

Üye: Prof. Dr. Hasan AKIN

Üye: Doç. Dr. Selman UĞUZ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Sinan UYANIK

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

[-1,1] ARALIĞINDA BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

İbrahim KAHVECİBAŞI

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2014, Sayfa: 54

Bu çalışmada $K_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Lineer pozitif operatörler dizisinin tanımı verilerek, temel özellikleri tanıtılmıştır. Ayrıca Korovkin teoremi ispatıyla birlikte verilmiştir. Lineer pozitif operatörleri ile ilgili yapılan önceki bazı çalışmalara değinilmiştir. Korovkin teoremi yardımıyla $K_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. $K_n(f;x)$ operatörünün sürekli f fonkiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. $K_n(f;x)$ operatörü için Voronowskaja teoremi tipinde bir teorem de ispat edilmiştir. $K_n(f;x)$ operatörünün merkezcil momentleri bulunmuştur. Süreklilik modulü yardımıyla $K_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızı incelenmiştir. Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar kullanılarak $K_n(f;x)$ operatörü için bir teorem ispat edilmiştir. $K_n(f;x)$ operatörünün farklı iki fonksiyona yaklaşımı grafikte gösterilmiştir. Seçilen bir fonksiyon için $K_n(f;x)$ operatörünün bu fonksiyona yaklaşımının, "n" ve "x"in bazı değerleri için nümerik değerler tablosu hazırlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein ve Kantorovich polinomları, Korovkin teoremi, yaklaşım hızı, lineer pozitif operatör

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF THE BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATORS ON THE INTERVAL [-1,1]

İbrahim KAHVECİBAŞI

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematich

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2014, Page: 54

In this study approximation properties of the operator $K_n(f;x)$ are investigated. Positive linear operators are defined and some basic properties of them are introduced. Also the Korovkin theorem is given with the proof. Related some previous studies about the positive linear operators are mentioned. Approximation properties of the operator $K_n(f;x)$ are investigated with the help of the Korovkin theorem. Uniform approximation of the operator $K_n(f;x)$ to continuous function f is shown. Also for the operator $K_n(f;x)$, a theorem like Voronowskaja is proved. Centripetal moments of this operator is estimated. Rate of approximation of the operator $K_n(f;x)$ is examined with the help of the modul of continuity. With the use of the functions which satisfy the Lipschitz condition, a theorem is proved for the operator $K_n(f;x)$. Approximation of the operator $K_n(f;x)$ to two function is demonstrated in a graphical. For the chosen function, numeric values chart is given about the some values of the "n" and "x" for the approximation of the operator $K_n(f;x)$ to the function.

KEY WORDS: Bernstein and Kantorovich polynomials, Korovkin theorem, rate of approximation, linear positive operators

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında her türlü yardımını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Aydın İZGİ'ye ve derslerini aldığım, tecrübelerinden ve bilgilerinden yararlandığım sayın Prof. Dr. Seyit TEMİR, sayın Yrd. Doç. Dr Abdullah YILDIRIM, sayın Yrd. Doç. Dr. Haydar ALICI, sayın Doç. Dr. Selman UĞUZ'a ve Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye sonsuz şükranlarımı arz ederim. Ayrıca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$C[a,b]$	$\{f: f:[a,b] \to \mathbb{R}\ süreklidir\}$
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\sum_{j=0}^{n} a_j$	$a_0 + \ a_1 + \ a_2 + \ldots a_n$
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
$B_n(f;x)$	f fonksiyonunun n-inci Bernstein polinomu
$K_n(f;x)$	f fonksiyonunun n-inci $K_n(f;x)$ polinomu
$\rightrightarrows$	Düzgün yakınsama
$\aleph_{n,k}(x)$	k-ıncı merkezi moment
$\Vert \ \Vert_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayındaki $\Vert \ \Vert_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} \vert \ \vert$ ile tanımlı olan norm

1. GİRİŞ

Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklığı incelenirken matematiğin birçok alanından faydalanılır. Özellikle yaklaşım teorisinde fonksiyonel analizden çokça faydalanılır. Kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceği, yaklaşım teorisinin üzerinde çalışılan temel çalışmalardan biridir.

İlk defa 1885 Weierstrass, kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bu teoremin ispatı birçok kişi tarafından yapılmıştır. Bu ispatlar içerisinde en önemli olanlardan biri, 1912 yılında Bernstein tarafından yapılmıştır. 1912 yılında Rus Matematikçi Bernstein, Weierstrass'ın bu polinomun nasıl olacağı üzerinde çalışmış ve toplamsal biçimde bir polinomlar dizisini aşağıdaki gibi tanımlamış.

$x \in [0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k}$$

(Lorentz, 1953).

$x \in [0,1],\ 0 \le \alpha_{k,n} \le 1$ olduğunda

$$L_n(f\,;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x), \qquad P_{k,n}(x) \ge 0$$

pozitif operatör dizisinin $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşulları üç tanedir. Bohman bunları;

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$$
$$L_n(t;x) \rightrightarrows x$$
$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

şeklinde ifade etmiştir. Aşikardır ki Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0, 1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında Korovkin, Bohman'ın koşullarının genel halde de geçerli olduğunu görmüş ve genel bir teorem ispatlamıştır (Korovkin, 1953; Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995). Daha sonraki yıllarda Bernstein polinomları üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan biri de Lorentz'in yazdığı (1953) "Bernstein Polynomials" adlı kitabıdır.

Bernstein polinomları üzerine sistematik yaklaşımlar, 1990'lı yıllardan sonra hızlanmıştır. Bu konuyla ilgili birçok makaleler yayınlanmakta ve her geçen gün yeni uygulamalar ve genellemeler keşfedilmektedir. Bu konuda en önemli ilerlemeyi Lupaş yapmıştır. 1987'de Lupaş Bernstein polinomlarının q-anologunu geliştirmiştir ve polinomların yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Dikmen, 2009).

Yaklaşımlar teorisinde, klasik yakınsaklık kavramı ile ilgili çalışmalar devam ederken, günümüzde "istatistiksel yakınsaklık" kavramı da önemli çalışma alanlarından biri olarak karşımıza çıkmaktadır. İlk olarak 1950 yılında Fast tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramını Gadjiev ve Orhan (2002) lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin tipli yaklaşım teoremi elde etmek için kullanmışlardır. Bu teoremle birlikte birçok operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir (Doğru ve Duman 2006).

Biz bu çalışmamızda,

$x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ ve

$$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \text{ olmak üzere;}$$

$$K_n(f;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)\,dt$$

şeklinde tanımladığımız operatörün lineer pozitif olduğunu, Korovkin teoremi şartlarını sağladığını, $[-1,1]$ simetrik aralığı üzerinde düzgün yakınsadığını gösterilecektir. Süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Bu operatör için bazı teoremler ispat edilecektir. Ayrıca bu operatörün merkezcil momentleri yardımı ile asimptotik yaklaşımı hesaplanacaktır. $K_n(f;x)$ operatörünün f fonnksiyonuna yaklaşımı grafikler ile gösterilecektir. Son olarak seçilen bazı fonksiyonlara operatörün yaklaşımı bazı n ve x değerleri için nümerik tablosu hazırlanacaktır.

1.1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız bazı tanımlar ve teoremler verilecektir. Ayrıca burada vereceğimiz tanımlar genel tanımlar olduğu için bazılarında kaynak belirtilmemiştir.

Tanım 1.1.1.

X ve Y aynı $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere; $L: X \to Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere *operatör* adı verilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.2.

X ve Y aynı $\boldsymbol{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $L: X \to Y$ operatörü her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$ için;

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliği sağlanıyorsa o takdirde L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 1.1.3.

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olsun ve kabul edelim ki

$$X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\},\ Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\} \text{ olsun.}$$

Eğer X'ten Y'ye tanımlanmış L operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonu Y^+ kümesindeki bir elemana dönüştürüyor ise o takdirde L operatörüne *pozitif operatör* denir. Hem lineerlik ve hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatöre *lineer pozitif operatör* denir.

Teorem 1.1.1.

Lineer pozitif operatör monoton artandır. Yani;

$$f(x) \leq g(x) \implies L(g; x) \geq L(f; x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 1.1.1.

L lineer pozitif operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur. O halde her x için, $f(x) \leq g(x)$ olduğunda, $g(x) - f(x) \geq 0$ olur; L operatörü pozitif olduğundan;

$L((g-f);x) \geq 0$ olur. L operatörü lineer olduğundan;

$$L(g;x) - L(f;x) \ \geq \ 0 \ \Rightarrow \ L(g;x) \geq L(f;x)$$

sağlanır ve ispat tamamlanmış olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.2.

L bir lineer pozitif operatör olmak üzere $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat 1.1.2.

Herhangi bir f fonksiyonu için;

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{1.1}$$

dir. L operatörü lineer pozitif olduğundan (Teorem 1.1)'den dolayı monoton artandır. O halde;

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazabiliriz. L lineer olduğundan;

$$L(-|f|) = -\,L(|f|)$$

dir. Elde edilen bu eşitlik (1.1)'de yerine yazılırsa;

$$-L|f| \leq L(f) \leq L(|f|) \Rightarrow |L(f)| \leq L(|f|)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.4.

$l = \{ L : C[a,b] \rightarrow C[a,b] : L$ lineer pozitif operatör$\}$ $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ olsun. $L : \mathbb{N} \rightarrow l$ şeklinde tanımlı L fonksiyonuna *lineer pozitif operatör dizisi* adı verilir ve (L_n) şeklinde gösterilir, $L(\mathbb{N}) = (L_1, L_2, L_{3,} \ldots)$.

Tanım 1.1.5.

$X \subset \mathbb{R}$ ve X üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$ olsun.

$$d : \mathbb{N} \ \rightarrow \ F(X)$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonuna bir *fonksiyon dizisi* denir ve terimleri f_1, f_2, f_3 ile gösterilir, dizi ise (f_n) ile gösterilir.

Tanım 1.1.6.

Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm gerçel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir.

$f \in C[a,b]$ olmak üzere $C[a,b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.1.7.

N bir lineer uzay olsun. $\| \ \| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonun x'deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için;

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \boldsymbol{F})$

N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N de norm denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.8.

$A \subset \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir, (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.9.

$X \subset \mathbb{R},\ f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_1, x_2 \in X$ noktaları için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε na bağlı $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir, (Musayev ve arkadaşları, 2007).

Tanım 1.1.10.

X boş olmayan bir cümle olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetri özelliği)

M3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X'e metrik uzay denir ve genellikle (X,d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.11.

(f_n) $C[a,b]$ fonksiyon uzayında tanımlı bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere; (f_n) fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsak olması için;

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = 0$$

ya da başka bir ifade ile;

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliklerinin sağlanması demektir.
Düzgün yakınsama $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.12.

(f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ için ve her bir $x \in X$ için $\exists n_0$ öyleki $\forall n > n_0$ olduğunda $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon, x)$ sayısı vardır (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.13.

(f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyleki $\forall n > n_0$ ve $\forall x \in X$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.14.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f de (a,b) den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. $t, x \in (a,b)$ için

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = A(x)$$

sonlu limiti varsa, bu $A(x)$ sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$ veya $Df(x)$ yada $\frac{df(x)}{dx}$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir (Musayev ve arkadaşları, 2007).

Tanım 1.1.15.

$n \geq 1$ olmak üzere P_n , n-inci dereceden bir polinom ve f ile g de $x = 0$ noktasında n'inci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

olmak üzere;

$$f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$$

Yazılabiliyorsa, P_n , $x = 0$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen *Taylor polinomudur* denir.

Tanım 1.1.16.

f fonksiyonu a noktasını ilave eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen *Taylor serisi* denir.

Tanım 1.1.17.

Lineer L operatörü X uzayından Y uzayına dönüşüm yapıyorsa ve $\forall f \in X$ için $\|L(f;x)\|_Y \leq C\|f\|_X$ eşitsizliğini gerçekleştiriyorsa L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en küçüğüne L operatörünün normu denir ve $\|L\|$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.18.

$f(n)$ ve $g(n)$ reel sayılarda tanımlı iki fonksiyon olmak üzere her $n > n_0$ olacak şekilde bir n vardır öyleki $|f(n)| \leq C|g(n)|$ dir ve $f(n) = O(g(n))$ şeklinde gösterilir. Burada C ve n_0 sabit sayılardır.

Tanım 1.1.19.

f bir I aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, her $x_1, x_2 \in I$ için;

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha$$

olacak şekilde $M > 0$ varsa, f'ye Lipschitz sınıfındandır, denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Bir I aralığında

1. $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f fonksiyonu bu aralıkta süreklidir.
2. $\alpha > 1$ için $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f sabit fonksiyondur.

Tanım 1.1.20.

$[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için;

a)

$$\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonlara L_1 sınıfındandır denir. Bu fonksiyon sınıfı üzerindeki norm $\| \ \|_1$ ile gösterilir. $f \in L_1$ ise

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

yazılır.

b) $1 \leq p < \infty$ için

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonlara L_p sınıfındandır denir. Bu fonksiyon sınıfı üzerindeki norm $\| \ \|_p$ ile gösterilir. $f \in L_p$ ise

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılır.

Teorem 1.1.3.

$p > 1\ ve\ q > 0$ reel sayıları

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şartını sağlasın. Bu durumda $\forall (a_k) \in l_p$ $\forall (b_k) \in l_q$ dizileri için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ b_k \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\,a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği *Hölder eşitsizliği* denir. Burada $p = q = 2$ için bu eşitsizlik Cauchy-Schwartz eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 1.1.4. (Korovkin Teoremi):

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \qquad (1.2)$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \qquad (1.3)$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \qquad (1.4)$$

Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında (1.2), (1.3) ve (1.4) koşullarını gerçekliyorsa o takdirde $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \qquad a \le x \le b$$

olur. Ya da bu ifadeye eşdeğer olarak aşağıdaki gösterimi de kullanabiliriz.

$$\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

İspat 1.1.4.

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir $M > 0$ sayısı bulabiliriz ki; tüm x' ler için

$$|f(x)| \le M \tag{1.5}$$

sağlanır. Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ bulabilirizki $t \in (-\infty, +\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|t-x| < \delta$$

olduğunda;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.6}$$

sağlanır.

(1.6) eşitsizliği; $x, t \in [a,b]$ olduğunda f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğu için, $x \in [a,b], t \notin [a,b]$ olduğunda ise f fonksiyonu a ve b noktalarında, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir.

$$\forall x \in [a,b];\ f(x) \le M \quad M > 0$$

vardır.

$$|t-x| \ge \delta \Rightarrow \frac{|t-x|}{\delta} \ge 1 \Rightarrow \quad 1 \le \frac{|t-x|}{\delta} \le \frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

$|t-x| \ge \delta$ olduğunda ise (1.5) ve üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(t) - f(x)| \le |f(t)| + |f(x)| \le 2M \le 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

olur. O halde;

$$|t-x| < \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t-x| \ge \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| \le 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \tag{1.7}$$

dir. Şimdi (1.2), (1.3) ve (1.4) koşullarını gerçekleyen (L_n) lineer operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f)-f\|_{C[a,b]}=0$$

eşitliğini sağladığını göstermelidir.

(L_n) operatörünün lineerliğinden;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|=|L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)|$$
$$=|L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|$$
$$=|L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)|$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğini kullanılarak;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\le|L_n(f(t)-f(x);x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1| \qquad (1.8)$$

elde edilir. (1.1)'den

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\le|L_n(f(t)-f(x);x)|$$

olur, operatör pozitif ve

$$|f(t)-f(x)|\ge 0$$

olduğundan;

$$|L_n(f(t)-f(x);x)|\le L_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (1.2) yardımıyla (1.8) eşitsizliği;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\le L_n(|f(t)-f(x)|;x)+M|L_n(1;x)-1|$$

olarak yazılabilir.

(L_n) monoton artan olduğundan (1.7)'den;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\le L_n\left(\left(\varepsilon+2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right);x\right)+M|L_n(1;x)-1|$$

elde edilir.

Öte yandan (L_n) lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa;

$$L_n\left(\left(\varepsilon+2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right);x\right)=L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)$$
$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}L_n(t^2-2xt+x^2;x)$$
$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x)-x^2-x^2+2x^2-2x\,L_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\}$$
$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x)-x^2+2x^2-2x\,L_n(t;x)+x^2L_n(1;x)-x^2\}$$
$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x)-x^2)-2x\,(L_n(t;x)-x)+x^2(L_n(1;x)-1)\}$$

elde edilir.

Bu ifadenin (1.8)' de yerine yazılmasıyla;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon L_n(1;x)$$
$$+ 2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) - 2x\,(L_n(t;x) - x) + x^2(L_n(1;x) - 1\,)\} + M|L_n(1;x) - 1\,|$$

elde edilen bu ifade de (1.2), (1.3) ve (1.4) koşullarının kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon 2\frac{M}{\delta^2} = \varepsilon\left(1 + 2\frac{M}{\delta^2}\right)$$

elde edilen bu ifadeyi her ε' için

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| < \varepsilon'$$

sağlanır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur (Korovkin, 1953; Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Yaklaşım teorisi alanındaki çalışmalar; ilk olarak Rus matematikçi Chebyshev'in mekanizmaların yapıları kapsamında buhar makineleri ile ilgili incelemeler yaparken; $n > 0$ ve bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonu verilsin. Bu f fonksiyonunu herhangi bir noktasında maksimum hata kontrol edilebilecek şekilde n dereceli (n yeterince büyük) bir

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

polinomu ile temsil edebilir mi? sorusunun cevabını aramasıyla başlamıştır.

1885 yılında Alman matematikçi Weierstrass, cebirsel ve trigonometrik polinomlarla sürekli fonksiyonlara yaklaşılabileceğini ifade ve ispat etmiştir. Yaklaşım teorisinin temel teoremini oluşturan bu ifade aşağıda belirtilmiştir.

$C[a, b]$ sınıfından verilen her f fonksiyonu için keyfi bir $\varepsilon > 0$ cebirsel sayısı ve her $x \in [a, b]$ için;

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

polinomu vardır (Pinkus, 2005).

1912 yılında Rus Matematikçi Bernstein, Weierstrass'ın bu polinomun $x \in [0,1]$ için;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \qquad (2.1)$$

biçiminde olduğunu göstermiştir. Bernstein, tanımladığı ve kendi adıyla anılan bu polinomlarla $[0,1]$ aralığında tanımlı ve sürekli her f fonksiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Aynı zamanda Bernstein polinomları $[0,1]$ aralığında sınırlı f fonksiyonunun her bir x_0 süreklilik noktasında

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f; x_0) = f(x_0)$$

bağıntısını sağladığını, ayrıca f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ise (2.1)'in bu aralıkta düzgün olarak sağlandığını göstermiştir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995; Lorentz, 1953).

Sonraki yıllarda da Bernstein polinomları üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bernstein polinomlarının; sayısal analiz, fonksiyonlar teorisi, geometri, fizik, jeodezi, mühendislik, tıp (görüntüleme sistemleri ve protez) bilimleri gibi bir çok uygulama alanı mevcuttur.

Stancu (1968) $0 \leq \alpha \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan αve β reel sayıları için Bernstein operatörlerinin bir modifikasyonu olan

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ olmak üzere}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

operatörünü tanımlamış ve bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

$K_m: L_1([0,1]) \to C([0,1])$, her $f \in L_1([0,1])$ ve negatif olmayan herhangi m için;

$$(K_m f)(x) = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}} \binom{m}{k} s^k (1-s)^{m-k} f(s)ds$$

lineer pozitif operatörünü Kantorovich tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Kantorovich, 1930). Bu operatör Kantorovich operatörü olarak bilinir.

Barbosu (2004), Kantorovich- Stancu tipi operatörleri çalışmıştır. Barbosu,

$f \in L_1([0,1])$ $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$K_n^{(\alpha,\beta)}: L_1([0,1]) \to C[0,1]$$

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \text{ olmak üzere;}$$

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) = (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(s)ds$$

şeklinde bir lineer pozitif operatör tanımlamıştır.

Durmeyer, $[0,1]$ aralığında Bernstein polinomlarının bir modifikasyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$D_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{m-k} \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t)dt$$

Bu operatör Bernstein Durmeyer operatörleri olarak bilinir. Bu operatörlerin düzgün fonksiyonlara yaklaşımı pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Durmeyer, 1967).

1932 yılında Voronowskaja tarafından f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve belli bir x noktasında 2. türeve sahip ise;

$$\lim_{n\to\infty} n[f(x) - B_n(f;x)] = \frac{-x(1-x)}{2} f''(x)$$

eşitliğinin sağlandığı (asimptotik yaklaşım) gösterilmiştir (Lorentz, 1953).

1935 yılında Popoviciu tarafından $w(f;\delta)$ ile f fonksiyonunun süreklilik modülü gösterilmek üzere;

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq cw\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olduğu gösterilmiştir (Popoviciu, 1935).

1937 yılında Chlodovsky tarafından $[0,\infty]$'a genişleyen aralıklarda Bernstein polinomlarını genelleştirmiş ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Chlodovsky, 1937).

1938 yılında Kac tarafından Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlara Bernstein polinomlarıyla yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bu teoreme göre;
$f \in Lip\alpha$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq L\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

dır (Kac, 1938).

1946 yılında Herzog ve Hill tarafından f fonfsiyonunun sağdan ve soldan limitleri olmak şartıyla ve $x_0 \in (0,1)$ için bu fonksiyonun süreksizlik noktası

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x_0)] = \frac{1}{2}(f(x_0+) + f(x_0-))$$

olduğunu ispatlamıştır (Herzog ve Hill, 1946).

Hildebrant, Schoenberg ve Butzer tarafından Bernstein polinomlarının k boyutlu uzaya genişletilebileceği ifade edilmiştir.
Yani; $0 \leq x_i \leq 1,\ \ i = 1,2,\ldots\ldots,k$ olmak üzere k boyutlu küpte tanımlı ve sınırlı $f(x_1,x_2,\ldots x_k)$ fonksiyonuna

$$B_{n_1\ldots n_k}(f;x_1,x_2,\ldots x_k) = \sum_{v_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{v_k=0}^{n_k}\binom{n_1}{v_1}\ldots\binom{n_k}{v_k}f\left(\frac{v_1}{n_1},\ldots\frac{v_k}{n_k}\right){x_1}^{v_1}(1-x)^{n_1-v_1}\ldots{x_k}^{v_k}(1-x)^{n_k-v_k}$$

polinomu ile fonksiyonun herhangi bir süreklilik noktasında $n_i \to \infty$ iken yaklaşılabileceğini ispatlamıştır (Hildebrandt ve Schoenberg, 1933).

Bernstein operatörlerinin teorileri hakkında sistemli yaklaşımlar 1990'lı yıllardan sonra yayınlanmaya başlanmıştır. Bu konuyla ilgili düzenli olarak bilimsel çalışmalar ve makaleler yayınlanmakta ve her geçen gün yeni uygulamalar ve genellemeler keşfedilmektedir. Bu konudaki ilk ilerlemeyi Lupas yapmıstır. 1987'de Bernstein polinomlarının q-anologunu geliştirmistir ve polinomların yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Dikmen, 2009). Daha sonraki yıllarda da Bernstein operatörleri ve Bernstein polinomları üzerinde birçok matematikçi araştırma yapmıştır. Bu çalışmalar genellikle f fonksiyonuna $B_n(f;x)$ polinomuyla yaklaşım hızının bulunması üzerinedir. Son yıllarda Bernstein polinomlarının sayılar teorisi ile olan ilişkisine ilgi artmakta ve bu konuda önemli çalışmalar yapılmaktadır. Simsek ve Açıkgöz (2010) Bernstein polinomları icin üreteç fonksiyonu tanımlamışlar ve bu fonksiyon sayesinde Bernstein polinomlarının Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Genocchi polinomları, Hermit polinomları ve ikinci çesit Stirling sayıları ile ilişkilerini bulmuşlardır (Açıkgöz ve Aracı, 2010).

1994 yılında Taberska tarafından bazı koşullar altında mutlak sürekli f fonksiyonuna $B_n(f;x)$ Bernstein polinomuyla yaklaşım hızı gösterilmiştir (Pych-Taberska, 1997).

2000 yılında Neammanee tarafından $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyona $\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerinde Bernstein polinomlarıyla yaklaşılabileceğini göstermiştir. Bu teoreme göre $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ Lipschitz fonksiyonu olsun. Yani, C pozitif sabit ve her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için;

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$$

dir. R^n deki her kompakt D kümesi ve $B_n: D \to \mathbb{R}^p,\, n \in \mathbb{N}$ polinomu için;

$$\|f - B_n(f)\| \leq K\sqrt{\frac{\ln(n+1)}{n}}$$

her $x \in D$ dir. Burada K, f'ye bağlı bir sabittir (Neammanee, 2001).

Cao, aşağıdaki şekilde tanımlı Bernstein operatörlerinin bir genellemesini yapmıştır. Doğal sayılar kümesi üzerinde s_n bir dizi $s_n \geq 1$ olsun.

$$C_n(f;x) = \frac{1}{s_n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{s_n-1} f\left(\frac{k+j}{n+s_n-1}\right)P_{n,k}(x)$$

Bu operatörde $s_n = 1$ yazarsak $C_n(f;x) = B_n(f;x)$ olduğu açıkça görülür. Cao bu operatörün yakınsaklık şartlarını incelemiş ve yakınsaklık hızını süreklilik modülünü kullanarak hesaplamıştır (Cao, 1997).

Aksop, $\left[\frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^n}\right]$ aralığı üzerinde aşağıda gösterilen lineer pozitif bir operatör tanımlamıştır.

$$L_n(f;x) = \frac{n}{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x - \frac{1}{2^n}\right)^k \left(1 - x + \frac{1}{2^n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(Aksop, 2009).

Duchon, m boyutlu Bernstein operatörlerini ve bu operatörlerin $[0,1]^m$ üzerinde $m-1$ boyutunun yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Duchon, 2011).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışma oluşturulurken, konu ile ilgili kitap ve makalelere kütüphanelerden veya internet ortamında ulaşılmıştır.

3.2.Yöntem

Makaleler gözden geçirilmiş ve kullanılan yöntemler incelenmiştir. Bu çalışmada tanımlanan ve çalışmanın orijinal operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. İncelediğimiz çalışmaların sonuçları, bu çalışmada tanımlanan operatörler dizisine uygulanmıştır.

Ayrıca çalışma, Mapple bilgisayar programı yardımı ile grafik ve nümerik değer tablosu ile desteklenmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde $K_n(f;x)$ operatörü tanıtılarak Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecektir. $K_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentleri hesaplanacaktır. Voronowskaja'nın Bernstein polinomu için yaptığı asimptotik yaklaşım hesabı $K_n(f;x)$ operatörü için yapılacaktır. $K_n(f;x)$ operatörü için yaklaşım hızı hesaplanacak ve bu operatör için bazı teoremler ispat edilecektir.

Tanım 4.1.

Kabul edelim ki $x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ olsun.

$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$ olmak üzere

$$K_n(f;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $K_n(f;x)$ operatörü denir.

Öncelikle $K_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

Lineerlik;

Her $f,g \in [-1,1]$ ve her $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
K_n(\alpha f(t)+\beta g(t));x) &= \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt \\
&= \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\alpha f(t)\,dt + \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\beta g(t)\,dt \\
&= \alpha\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)\,dt + \beta\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} g(t)\,dt \\
&= \alpha\ K_n(f(t);x) + \beta\ K_n(g(t);x)
\end{aligned}$$

olduğundan $K_n(f;x)$ lineer bir operatördür.

Pozitiflik;

$k, n \in \mathbb{N}$ için ve $x \in [-1,1]$ için

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \geq 0$$

dır.

$$f \geq 0 \text{ ise}$$

$$\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)\,dt \geq 0$$

dır. Dolayısıyla $K_n(f;x)$ pozitif bir operatördür.

Şimdi;

$$K_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{4.1}$$

$$K_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{4.2}$$

$$K_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{4.3}$$

$$K_n(t^3;x) \rightrightarrows x^3 \tag{4.4}$$

$$K_n(t^4;x) \rightrightarrows x^4 \tag{4.5}$$

olduğunu gösterelim.

$K_n(1;x) = 1$ olduğunu gösterelim;

$$K_n(1;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} 1dt = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)-\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)\right)$$

$$= \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\frac{2}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}(1+x+1-x)^n = 1$$

$$K_n(1;x) = 1 \tag{4.6}$$

$$\|K_n(1;x)-1\|_{C[-1,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n(1;x)-1\|_{C[-1,1]} = 0$$

elde edilir. Yani $n \to \infty$ iken;

$$K_n(1;x) \rightrightarrows 1$$

gerçeklendiği görülür.

$K_n(t;x) \rightrightarrows x$ olduğunu gösterelim;

$$K_n(t;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} t\,dt = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\frac{1}{2}\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^2-\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^2\right)$$

$$= \frac{n+1}{4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\frac{2}{n+1}\left(\frac{4k+2}{n+1}-2\right) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\left(\frac{2k+1}{n+1}-1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\frac{2k}{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\frac{1}{n+1} - \sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)$$

$$= \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}\frac{n(n-1)!\,k}{k(k-1)!\,(n-k)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x) \quad -1$$

$$= \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1} + \frac{1}{n+1}-1$$

$$= \frac{n(1+x)}{(n+1)2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1} + \frac{1}{n+1}-1$$

$$= \frac{n(1+x)}{(n+1)2^{n-1}}\,2^{n-1} + \frac{1}{n+1}-1$$

$$= \frac{n(1+x)}{(n+1)} + \frac{1}{n+1}-1 = \frac{nx}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}-1 = \frac{nx}{n+1} = x-\frac{x}{n+1}$$

$$K_n(t;x) = x-\frac{x}{n+1} \tag{4.7}$$

$$\|K_n(t;x)-x\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1}\left|x-\frac{x}{n+1}-x\right| = \max_{-1\le x\le 1}\left|-\frac{x}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n(t;x)-x\|_{C[-1,1]} = 0$$

$$K_n(t;x) \rightrightarrows x$$

olduğu görülür.

$K_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ olduğunu gösterelim.

$$K_n(t^2;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} t^2\,dt = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\frac{1}{3}\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^3-\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^3\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\frac{2}{n+1}\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^2+\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)+\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^2\right.$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\left(\frac{4k^2+8k+4}{(n+1)^2}-\frac{4k+4}{n+1}+1+\frac{4k^2+4k}{(n+1)^2}-\frac{2k+2}{n+1}-\frac{2k}{n+1}+1\right.$$

$$\left.+\frac{4k^2}{(n+1)^2}-\frac{4k}{n+1}+1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)\left(\frac{12k^2+12k+4}{(n+1)^2} - \frac{12k+6}{n+1} + 3\right)$$

$$= \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)\,k^2 + \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)\,k + \frac{4}{3(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)$$

$$-\frac{4}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)k - \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x) + \sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)$$

$$= \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)\,(k(k-1)+k) + \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)k + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$-\frac{4}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)k - \frac{2}{n+1} + 1$$

$$= \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=2}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)\,k(k-1) + \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)\,k$$

$$+\frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)k + \frac{4}{3(n+1)^2} - \frac{4}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \varphi_{n}^{k}(x)\,k + \frac{n-1}{n+1}$$

$$= \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^n}\,\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,k(k-1)$$

$$+\left(\frac{4}{(n+1)^2} + \frac{4}{(n+1)^2} - \frac{4}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n}\,\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}k + \frac{n-1}{n+1} + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$= \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,k(k-1)$$

$$+\frac{4-4n}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!\,(k-1)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k} + \frac{n-1}{n+1} + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$= \frac{4n(n-1)(1+x)^2}{(n+1)^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{(4-4n)n(1+x)}{(n+1)^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1} + \frac{n-1}{n+1} + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$= \frac{4n(n-1)(1+x)^2}{(n+1)^2}\frac{1}{2^n}\,2^{n-2} + \frac{(4-4n)n(1+x)}{(n+1)^2}\frac{1}{2^n}\,2^{n-1} + \frac{n-1}{n+1} + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$= \frac{n(n-1)(1+2x+x^2)}{(n+1)^2} + \frac{(2-2n)n(1+x)}{(n+1)^2} + \frac{n^2-1}{(n+1)^2} + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}(x^2-1) + \frac{n^2-1}{(n+1)^2} + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2x^2-nx^2}{(n+1)^2} + \frac{n-1}{(n+1)^2} + \frac{4}{3(n+1)^2}$$

$$= x^2 - \frac{3x^2n+x^2}{(n+1)^2} + \frac{n-1}{(n+1)^2} + \frac{4}{3(n+1)^2} = x^2 - \frac{3x^2n+x^2-n-\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$$

$$K_n(t^2;x) = x^2 - \frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} \tag{4.8}$$

$$\| K_n(t^2;x) - x^2\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1}\left| x^2 - \frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} - x^2 \right|$$

$$= \max_{-1\le x\le 1}\left| -\frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} \right| = \max_{-1\le x\le 1}\left| \frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} \right| = \frac{\mathrm{n} + \frac{1}{3}}{(n+1)^2} = \frac{3\mathrm{n}+1}{3(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\| K_n(t^2;x) - x^2\|_{C[-1,1]} = 0$$

$K_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ olduğu görülür.

$K_n(t^3;x) \rightrightarrows x^3$ olduğunu gösterelim.

$$K_n(t^3;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} t^3 dt$$

$$= \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)\frac{1}{4}\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^4 - \left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^4\right)$$

$$= \frac{n+1}{8}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)\frac{2}{n+1}\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^3 + \left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^2\right.$$

$$\left. + \left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^2\left(2\frac{k}{n+1}-1\right) + \left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^3\right)$$

$$+\left(\frac{8k^3+8k^2}{(n+1)^3} - \frac{8k^2+8k}{(n+1)^2} + \frac{2k+2}{n+1} - \frac{4k^2}{(n+1)^2} + \frac{4k}{n+1} - 1 + \frac{8k^3+16k^2+8k}{(n+1)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{4k^2+8k+4}{(n+1)^2} - \frac{8k^2+8k}{(n+1)^2} + \frac{4k+4}{n+1} + \frac{2k}{n+1} - 1 - \frac{12k^2}{(n+1)^2} + \frac{6k}{n+1} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)\frac{32k^3+48k^2+32k+8}{(n+1)^3} - \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)\frac{48k^2+48k+16}{(n+1)^2} + \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)\frac{24k+12}{n+1} - 4\right)$$

$$= \frac{8}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)k^3 + \frac{12}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)k^2$$

$$+\frac{8}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)k + \frac{2}{(n+1)^3} - \frac{12}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)k^2$$

$$-\frac{12}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)k - \frac{4}{(n+1)^2} + \frac{6}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) + \frac{3}{n+1} - 1$$

$$= \frac{8}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)\left(k(k-1)(k-2) + 3k^2 - 2k\right) + \frac{12}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x)k^2$$

$$+\frac{8}{(n+1)^3}\sum_{k=1}^{n}\varphi_n^k(x)k-\frac{12}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)k^2-\frac{12}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_n^k(x)k-$$

$$+\frac{6}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\varphi_n^k(x)k+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{8}{(n+1)^3}\sum_{k=3}^{n}\varphi_n^k(x)k\,(k-1)(k-2)$$

$$+\left(\frac{24}{(n+1)^3}+\frac{24}{(n+1)^3}-\frac{12}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\,(k(k-1)+k)$$

$$+\left(-\frac{16}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^3}-\frac{12}{(n+1)^2}+\frac{6}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\varphi_n^k(x)k+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{8}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{k(k-1)(k-2)(k-3)!\,(n-k-3)!}(1+x)^{k+3}(1-x)^{n-k-3}k\,(k-1)(k-2)$$

$$+\frac{24-12n}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!\,(n-k-2)!}(1+x)^{k+2}(1-x)^{n-k-2}\,k(k-1)$$

$$+\frac{24-12n}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k-1)!}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1}k$$

$$+\frac{6n^2-14}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k-1)!}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1}k+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}$$

$$+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{8}{(n+1)^3}\frac{1}{2^n}n(n-1)(n-2)(1+x)^3 2^{n-3}+\frac{24-12n}{(n+1)^3}\frac{1}{2^n}\,n(n-1)(1+x)^2 2^{n-2}$$

$$+\frac{24-12n}{(n+1)^3}\frac{1}{2^n}n(1+x)2^{n-1}+\frac{6n^2-14}{(n+1)^3}\frac{1}{2^n}n(1+x)2^{n-1}+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(1+x)^3}{(n+1)^3}+\frac{6-3n}{(n+1)^3}n(n-1)(1+x)^2+\frac{12-6n}{(n+1)^3}n(1+x)$$

$$+\frac{3n^2-7}{(n+1)^3}n(1+x)+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{n(1+x)}{(n+1)^3}\left((n^2-3n+2)+(6-3n)(n-1)(1+x)+12-6n+3n^2-7\right)+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}$$

$$+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{n(1+x)}{(n+1)^3}(n^2+2n^2x+n^2x^2-3n-6nx-3nx^2-3n^2-3n^2x+9n+9nx-6-6x+12$$

$$-6n+3n^2-7)+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$=\frac{n(1+x)}{(n+1)^3}(n^2-n^2x+n^2x^2+3nx-3nx^2-1-6x)+\frac{2-n}{n+1}-\frac{4}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3x^3 - 3n^2x^3 + 3n^2x - 2n - 7nx - 6nx^2 + 2}{(n+1)^3} - \frac{4}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^3}$$

$$= x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3}{(n+1)^3} + \frac{3n^2x - 2n - 7nx - 6nx^2 + 4}{(n+1)^3} - \frac{4}{(n+1)^2}$$

$$= x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3}$$

$$K_n(t^3;x) = x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3} \tag{4.9}$$

$$\| K_n(t^3;x) - x^3 \|_{C[-1,1]}$$

$$= \max_{-1\le x\le 1} \left| x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3} - x^3 \right|$$

$$= \max_{-1\le x\le 1} \left| -\frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3} \right|$$

$$= \max_{-1\le x\le 1} \left| \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3} \right|$$

$$= \max_{-1\le x\le 1} \left| \frac{(6n^2 + 3n + 1)x^3 + 6nx^2 + x(7n - 3n^2) + 6n}{(n+1)^3} \right|$$

$$\le \max_{-1\le x\le 1} \left(\frac{(6n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3}|x^3| + \frac{6n}{(n+1)^3}x^2 + \frac{|7n - 3n^2|}{(n+1)^3}|x| \right)$$

$$\le \left(\frac{(6n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3} + \frac{6n}{(n+1)^3} + \frac{|7n - 3n^2|}{(n+1)^3} \right)$$

($n \ge 3$ için $7n < 3n^2$ olacağından;)

$$\le \left(\frac{(6n^2 + 3n + 1)}{(n+1)^3} + \frac{6n}{(n+1)^3} + \frac{3n^2 - 7n}{(n+1)^3} \right) \le \frac{9n^2 + 2n}{(n+1)^3} \le \frac{9n^2 + 9n}{(n+1)^3} \le \frac{9n}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| K_n(t^3;x) - x^3 \|_{C[-1,1]} = 0$$

$K_n(t^3;x) \rightrightarrows x^3$ olduğu görülür.

$K_n(t^4;x) \rightrightarrows x^4$ olduğunu gösterelim.

$$K_n(t^4;x) = \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} t^4 dt$$

$$= \frac{n+1}{2} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \frac{1}{5} \left(\left(2\frac{k+1}{n+1} - 1\right)^5 - \left(2\frac{k}{n+1} - 1\right)^5 \right)$$

$$= \frac{n+1}{10} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \frac{2}{n+1} \left(\left(2\frac{k+1}{n+1} - 1 \right)^4 + \left(2\frac{k+1}{n+1} - 1 \right)^3 \left(2\frac{k}{n+1} - 1 \right) \right.$$

$$+ \left(2\frac{k+1}{n+1} - 1 \right) \left(2\frac{k}{n+1} - 1 \right)^3 + \left(2\frac{k}{n+1} - 1 \right)^2 \left(2\frac{k+1}{n+1} - 1 \right)^2$$

$$\left. + \left(2\frac{k}{n+1} - 1 \right)^4 \right)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\left(2\frac{k+1}{n+1} \right)^4 - 4\left(2\frac{k+1}{n+1} \right)^3 + 6\left(2\frac{k+1}{n+1} \right)^2 - 4\left(2\frac{k+1}{n+1} \right)^4 + 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\left(2\frac{k+1}{n+1} \right)^3 - 3\left(2\frac{k+1}{n+1} \right)^2 + 3\left(2\frac{k+1}{n+1} \right) - 1 \right) \left(2\frac{k}{n+1} - 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\left(2\frac{k}{n+1} \right)^3 - 3\left(2\frac{k}{n+1} \right)^2 + 6\frac{k}{n+1} - 1 \right) \left(2\frac{k+1}{n+1} - 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\left(2\frac{k+1}{n+1} \right)^2 - 2\left(2\frac{k+1}{n+1} \right) + 1 \right) \left(\frac{4k^2}{(n+1)^2} - \frac{4k}{n+1} + 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(2\frac{k}{n+1} \right)^4 - 4\left(2\frac{k}{n+1} \right)^3 + 6\left(2\frac{k}{n+1} \right)^2 - 8\frac{k}{n+1} + 1 \Bigg)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\frac{16k^4 + 64k^3 + 96k^2 + 64k + 16}{(n+1)^4} - \frac{32k^3 + 96k^2 + 96k + 32}{(n+1)^3} + \frac{24k^2 + 48k + 24}{(n+1)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{8k+8}{n+1} + 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\frac{8k^3 + 24k^2 + 24k + 8}{(n+1)^3} - \frac{12k^2 + 24k + 12}{(n+1)^2} + \frac{6k+6}{n+1} - 1 \right) \left(2\frac{k}{n+1} - 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\frac{8k^3}{(n+1)^3} - \frac{12k^2}{(n+1)^2} + \frac{6k}{n+1} - 1 \right) \left(2\frac{k+1}{n+1} - 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\frac{4k^2 + 8k + 4}{(n+1)^2} - \frac{4k+4}{n+1} + 1 \right) \left(\frac{4k^2}{(n+1)^2} - \frac{4k}{n+1} + 1 \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\frac{16k^4}{(n+1)^4} - \frac{32k^3}{(n+1)^3} + \frac{24k^2}{(n+1)^2} - \frac{8k}{n+1} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\frac{16k^4 + 64k^3 + 96k^2 + 64k + 16}{(n+1)^4} - \frac{32k^3 + 96k^2 + 96k + 32}{(n+1)^3} \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(\frac{24k^2 + 48k + 24}{(n+1)^2} - \frac{8k+8}{n+1} + 1 + \frac{16k^4 + 48k^3 + 48k^2 + 16k}{(n+1)^4} \right)$$

$$+ \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \left(-\frac{24k^3 + 48k^2 + 24k}{(n+1)^3} + \frac{12k^2 + 12k}{(n+1)^2} - \frac{2k}{n+1} \right)$$

$$+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(-\frac{8k^3+24k^2+24k+8}{(n+1)^3}+\frac{12k^2+24k+12}{(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(-\frac{6k+6}{n+1}+1+\frac{16k^4+16k^3}{(n+1)^4}-\frac{24k^3+24k^2}{(n+1)^3}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(\frac{12k^2+12k}{(n+1)^2}-\frac{2k+2}{n+1}-\frac{8k^3}{(n+1)^3}+\frac{12k^2}{(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(-\frac{6k}{n+1}+1+\frac{16k^4+32k^3+16k^2}{(n+1)^4}-\frac{16k^3+16k^2}{(n+1)^3}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(\frac{4k^2}{(n+1)^2}-\frac{16k^3+32k^2+16k}{(n+1)^3}+\frac{16k^2+16k}{(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(-\frac{4k}{n+1}+\frac{4k^2+8k+4}{(n+1)^2}-\frac{4k+4}{n+1}+1+\frac{16k^4}{(n+1)^4}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(-\frac{32k^3}{(n+1)^3}+\frac{24k^2}{(n+1)^2}-\frac{8k}{n+1}+1\right)$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(\frac{80k^4+160k^3+160k^2+80k+16}{(n+1)^4}-\frac{160k^3+240k^2+160k+40}{(n+1)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{120k^2+120k+40}{(n+1)^2}-\frac{40k+20}{n+1}+5\right)$$

$$=\frac{16}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^4+\frac{32}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^3$$

$$+\frac{32}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^2+\frac{16}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k+\frac{16}{5(n+1)^4}$$

$$-\frac{32}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^3-\frac{48}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^2-\frac{32}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k$$

$$-\frac{8}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)+\frac{24}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^2+\frac{24}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k$$

$$+\frac{8}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)-\frac{8}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)k-\frac{4}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)+1$$

$$=\frac{16}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\left(k(k-1)(k-2)(k-3)+6k^3-11k^2+6k\right)$$

$$+\frac{32}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^3-\frac{32}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^3+\frac{32}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^2$$

$$-\frac{48}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^2+\frac{24}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k^2+\frac{16}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k$$

$$-\frac{32}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k+\frac{24}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)\,k$$

$$-\frac{8}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)k+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}-\frac{4}{n+1}+1$$

$$=\frac{16}{(n+1)^4}\sum_{k=4}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)(\,k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$$+\left(\frac{96}{(n+1)^4}+\frac{32}{(n+1)^4}-\frac{32}{(n+1)^3}\right)\sum_{k=3}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)(\,k(k-1)(k-2)+3k^2-2k)$$

$$+\left(-\frac{176}{(n+1)^4}+\frac{32}{(n+1)^4}-\frac{48}{(n+1)^3}+\frac{24}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=2}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)(\,k(k-1)+k)$$

$$+\left(\frac{96}{(n+1)^4}+\frac{16}{(n+1)^4}-\frac{32}{(n+1)^3}+\frac{24}{(n+1)^2}-\frac{8}{n+1}\right)\sum_{k=3}^{n}\varphi_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}(x)k+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}$$

$$+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$

$$=\frac{16}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-4}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-k-4)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}(1+x)^{k+4}$$

$$\times(1-x)^{n-k-4}\,k(k-1)(k-2)(k-3)$$

$$+\frac{96-32n}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k-3)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}(1+x)^{k+3}(1-x)^{n-k-3}\,k(k-1)(k-2)$$

$$+\frac{288-96n}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^{k+2}(1-x)^{n-k-2}\,k(k-1)$$

$$+\frac{288-96n}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!\,k(k-1)!}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1}k$$

$$-\frac{192-64n}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!\,k(k-1)!}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1}k\,k(k-1)$$

$$+\frac{24n^2-168}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!\,k(k-1)(k-2)!}(1+x)^{k+2}(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{24n^2-168}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!\,k(k-1)!}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1}k$$

$$+\frac{96-8n-8n^3}{(n+1)^4}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^n}\,\frac{n(n-1)!}{(n-k-1)!\,k(k-1)!}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1}k$$

$$+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(1+x)^4}{(n+1)^4}+\frac{(12-4n)n(n-1)(n-2)(1+x)^3}{(n+1)^4}$$

$$+\frac{(72-24n)n(n-1)(1+x)^2}{(n+1)^4}+\frac{(144-48n)n(1+x)}{(n+1)^4}$$
$$-\frac{(96-32n)n(1+x)}{(n+1)^4}+\frac{(6n^2-42)n(n-1)(1+x)^2}{(n+1)^4}$$
$$+\frac{(12n^2-84)n(1+x)}{(n+1)^4}+\frac{(48-4n-4n^3)n(1+x)}{(n+1)^4}+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$
$$=\frac{n(1+x)}{(n+1)^4}(12n^2-84+48-4n-4n^3-96+32n+144-48n)$$
$$+\frac{n(n-1)(1+x)^2}{(n+1)^4}\big((n-2)(n-3)(1+x)^2+(12-4n)(n-2)(1+x)\big)$$
$$+72-4n+6n^2-42+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$
$$=\frac{n(1+x)}{(n+1)^4}(12n^2-4n^3-20n+8)+\frac{n(n-1)(1+x)^2}{(n+1)^4}(n^2-5n+6)(1+2x+x^2)$$
$$+(-4n^2+20n-24)(1+x)+6n^2-24n+30+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$

$$=\frac{12n^3-4n^4-20n^2+8n+12n^3x-4n^4x-20n^2x+8nx}{(n+1)^4}$$
$$+\frac{(n^2-n)(1+2x+x^2)}{(n+1)^4}(n^2+2n^2x+n^2x^2-5n-10nx-5nx^2+6+12x+6x^2-4n^2$$
$$-4n^2x+20n+20nx-24-24x+6n^2-24n+30)$$
$$+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$
$$=\frac{12n^3-4n^4-20n^2+8n+12n^3x-4n^4x-20n^2x+8nx}{(n+1)^4}$$
$$+\frac{(n^2+2n^2x+n^2x^2-n-2nx-nx^2)}{(n+1)^4}(3n^2-2n^2x+n^2x^2-9n+10-5nx^2-12x+12$$
$$+6x^2)$$
$$+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$
$$=\frac{1}{(n+1)^4}(12n^3-4n^4-20n^2+8n+12n^3x-4n^4x-20n^2x+8nx+3n^4-2n^4x+n^4x^2$$
$$-9n^3+10n^3x-5n^3x^2-12n^2x+12n^2+6n^2x^2+6n^4x-4n^4x^2+2n^4x^3$$
$$-18n^3x+20n^3x^2-10n^3x^3-24n^2x^2)$$
$$=\frac{1}{(n+1)^4}(+24n^2x+12n^2x^3+3n^4x^2-2n^4x^3+n^4x^4-9n^3x^2+10n^3x^3-5n^3x^4-12n^2x^3$$
$$+12n^2x^2+6n^2x^4-3n^3+2n^3x-n^3x^2+9n^2-10n^2x+5n^2x^2+12nx$$
$$-12n-6nx^2-6n^3x+4n^3x^2-2n^3x^3+18n^2x-20n^2x^2+10n^2x^3+24nx^2$$
$$-24nx-12nx^3-3n^3x^2+2n^3x^3-n^3x+9n^2x^2-10n^2x^3+5n^2x^4+12nx^3$$
$$-12nx^2-6nx^4)+\frac{16}{5(n+1)^4}-\frac{8}{(n+1)^3}+\frac{8}{(n+1)^2}+\frac{n-3}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^4}\left(-n^4 + n^2 - 4n - 4nx + 6n^3x^2 - 10n^2x^2 + n^4x^4 + 11n^2x^4 - 6\,nx^4 + 6\,nx^2 - 6n^3x^4\right) + \frac{16}{5(n+1)^4} - \frac{8}{(n+1)^3} + \frac{8}{(n+1)^2} + \frac{n-3}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^4}\left(-n^4 + n^2 - 4n - 4nx + 6n^3x^2 - 10n^2x^2 + n^4x^4 + 11n^2x^4 - 6\,nx^4 + 6\,nx^2 - 6n^3x^4 + n^4 - 6n^2 - 8n - 3\right) + \frac{16}{5(n+1)^4} - \frac{8}{(n+1)^3} + \frac{8}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^4}\left(n^4x^4 - 6n^3x^4 + 6n^3x^2 - 6\,nx^4 + 6\,nx^2 + 11n^2x^4 - 10n^2x^2 - 4nx - 5n^2 - 12n - 3\right) + \frac{16}{5(n+1)^4} - \frac{8}{(n+1)^3} + \frac{8}{(n+1)^2}$$

$$= x^4 - \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6\,nx^2}{(n+1)^4} + \frac{10n^2x^2 + 4nx + 5n^2 + 12n + 3}{(n+1)^4} + \frac{16}{5(n+1)^4} - \frac{8}{(n+1)^3} + \frac{8}{(n+1)^2}$$

$$= x^4 - \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6\,nx^2}{(n+1)^4} + \frac{10n^2x^2 + 4nx - 3n^2 - 4n - \frac{1}{5}}{(n+1)^4}$$

$$K_n(t^4;x) = x^4 - \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6\,nx^2}{(n+1)^4} + \frac{10n^2x^2 + 4nx - 3n^2 - 4n - \frac{1}{5}}{(n+1)^4}$$

$$\| K_n(t^4;x) - x^4 \| = \max_{-1\le x\le 1}\left| x^4 - \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6\,nx^2}{(n+1)^4} + \frac{10n^2x^2 + 4nx - 3n^2 - 4n - \frac{1}{5}}{(n+1)^4} - x^4 \right| \tag{4.10}$$

$$= \max_{-1\le x\le 1}\left| \frac{-6\,nx^2 + 10n^2x^2 + 4nx - 3n^2 - 4n - \frac{1}{5}}{(n+1)^4} - \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2}{(n+1)^4} \right|$$

$$= \max_{-1\le x\le 1}\left| \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2}{(n+1)^4} + \frac{6\,nx^2 - 10n^2x^2 - 4nx + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4} \right|$$

$$\le \max_{-1\le x\le 1}\left| \frac{10n^3x^4 + 10nx^4 + 6n^3x^2 + 6\,nx^2 + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4} \right|$$

$$\le \max_{-1\le x\le 1}\left(\frac{10n^3 + 10n}{(n+1)^4}x^4 + \frac{6n^3 + 6\,n}{(n+1)^4}x^2 + \frac{3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4} \right)$$

$$\le \frac{10n^3 + 10n}{(n+1)^4} + \frac{6n^3 + 6\,n}{(n+1)^4} + \frac{3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4} \le \frac{16n^3 + 3n^2 + 21n}{(n+1)^4} \le \frac{21n(n^2 + 2n + 1)}{(n+1)^4}$$

$$\leq \frac{21n}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| K_n(t^4;x) - x^4 \|_{C[-1,1]} = 0$$

$K_n(t^4;x) \rightrightarrows x^4$ olduğu görülür.

Tanım 4.1.

$$\aleph_{n,m}(x) = L_n((t-x)^m;x), \quad m = \{1,2,\dots\}$$

ile tanımlanan ifadelere L_n operatör dizisinin m-inci merkezi momentleri denir.

Teorem 4.1.

(Tanım 4.1)'de tanımladığımız merkezi momentlerin ilk dördünü $K_n(t;x)$ operatörü için hesaplayalım.

İspat 4.1.

$$K_n((t-x)^0;x) = K_n(1;x)$$

olduğundan ve (4.6)'den dolayı;

$$\aleph_{n,0}(x) = 1 \tag{4.11}$$

olur.

$$K_n((t-x)^1;x) = K_n(t;x) + K_n(-x;x) = K_n(t;x) - x\,K_n(1;x)$$

yazılabilir. (4.6) ve (4.7)'den dolayı;

$$K_n((t-x)^1;x) = x - \frac{x}{n+1} - x = -\frac{x}{n+1}$$

$$\aleph_{n,1}(x) = -\frac{x}{n+1} \tag{4.12}$$

olur.

$$K_n((t-x)^2;x) = K_n\left((t^2 - 2xt + x^2);x\right) = K_n(t^2;x) - 2x\,K_n(t;x) + x^2\,K_n(1;x)$$

yazılabilir (4.6), (4.7) ve (4.8)'den dolayı;

$$K_n((t-x)^2;x) = x^2 - \frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} + (-2x)\left(x - \frac{x}{n+1}\right) + x^2$$

$$= x^2 - \frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} - 2x^2 + \frac{2x^2}{n+1} + x^2$$

$$= -\frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} + \frac{2x^2}{n+1} = \frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}$$

olduğundan;

$$\aleph_{n,2}(x) = \frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2} \tag{4.13}$$

olur.

$$K_n((t-x)^3;x) = K_n\left((t^3 - 3t^2x + 3tx^2 - x^3);x\right)$$
$$= K_n(t^3;x) - 3x\ K_n(t^2;x) + 3x^2\ K_n(t;x) - x^3\ K_n(1;x)$$

yazılabilir.

(4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9)'dan dolayı;

$$K_n((t-x)^3;x) = x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3}$$
$$-3x\left(x^2 - \frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2}\right) + 3x^2\left(x - \frac{x}{n+1}\right) - x^3$$
$$= x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3} - 3x^3$$
$$+\frac{9x^3n + 3x^3 - 3xn - x}{(n+1)^2} + 3x^3 - \frac{3x^3}{n+1} - x^3$$
$$= -\frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3} + \frac{9x^3n + 3x^3 - 3xn - x}{(n+1)^2} - \frac{3x^3}{n+1}$$
$$= -\frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3}$$
$$+\frac{9x^3n + 3x^3 - 3xn - x + 9x^3n^2 + 3x^3n - 3xn^2 - xn}{(n+1)^3} + \frac{-3x^3n^2 - 6x^3n - 3x^3}{(n+1)^3}$$
$$= \frac{3x^3n - x^3 - 6nx^2 - 6n - 11nx - x}{(n+1)^3}$$

olduğundan;

$$\aleph_{n,3}(x) = \frac{3x^3n - x^3 - 6nx^2 - 6n - 11nx - x}{(n+1)^3} \tag{4.14}$$

olur.

$$K_n((t-x)^4;x) = K_n\left((t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4);x\right)$$
$$= K_n(t^4;x) - 4x\ K_n(t^3;x) + 6x^2\ K_n(t^2;x) - 4x^3\ K_n(t;x) + x^4\ K_n(1;x)$$

(4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9) ve (4.10)'dan dolayı,

$$K_n((t-x)^4;x) = x^4$$
$$-\frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6\,nx^2 - 10n^2x^2 - 4nx + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4}$$
$$-4x\left(x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3}\right) + 6x^2\left(x^2 - \frac{3x^2n + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2}\right)$$
$$-4x^3\left(x - \frac{x}{n+1}\right) + x^4$$
$$= x^4 - \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6\,nx^2 - 10n^2x^2 - 4nx + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4} - 4x^4$$
$$+\frac{4x^4 + 24n^2x^4 + 12nx^4 - 12n^2x^2 + 24nx + 28nx^2 + 24nx^3}{(n+1)^3} + 6x^4$$
$$-\frac{18x^4n + 6x^4 - 6x^2n - 2x^2}{(n+1)^2} - 4x^4 + \frac{4x^4}{n+1} + x^4$$
$$= -\frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6nx^2 - 10n^2x^2 - 4nx + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4}$$
$$+\frac{4x^4 + 24n^2x^4 + 12nx^4 - 12n^2x^2 + 24nx + 28nx^2 + 24nx^3}{(n+1)^3}$$
$$-\frac{18x^4n + 6x^4 - 6x^2n - 2x^2}{(n+1)^2} + \frac{4x^4}{n+1}$$
$$= \frac{n^2x^4 + 8nx^4 + x^4 + 44nx^2 + 20n^2x^2 + 24n^2x}{(n+1)^4}$$
$$+\frac{24n^2x^3 + 24nx^3 + 20nx + 2x^2 + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4}$$

olduğundan;

$$\aleph_{n,4}(x) = \frac{n^2x^4 + 8nx^4 + x^4 + 44nx^2 + 20n^2x^2 + 24n^2x + 24n^2x^3}{(n+1)^4}$$
$$+\frac{24nx^3 + 20nx + 2x^2 + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4} \tag{4.15}$$

olur. Böylece $K_n(f;x)$ operatörünün 4 tane merkezcil momentleri hesaplanmış olur.

Şimdi de $K_n(f;x)$ operatörünün düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

Teorem 4.2.

$K_n(f;x)$ operatörü $[-1,1]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan f fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \| K_n(f;x) - f(x)\|_{C[-1,1]} = 0$$

İspat 4.2.

$K_n(f;x)$ operatörünün düzgün yakınsaklığını gösterelim;

$$|K_n(f;x)-f(x)| = \left|\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)dt - f(x)\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} dt\right|$$

$$= \left|\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)dt - \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(x)dt\right|$$

$$= \left|\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \big(f(t)-f(x)\big)dt\right|$$

$x \in [-1,1]$ olduğundan

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \geq 0$$

dır.

Üçgen eşitsizliğinden;

$$|K_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} |f(t)-f(x)|dt$$

$$\leq \frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|<\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} |f(t)-f(x)|dt + \frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} |f(t)-f(x)|dt$$

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir M pozitif sayısı bulabiliriz ki tüm $x \in [-1,1]$ için

$$|f(x)| \leq M \tag{4.16}$$

sağlanır. $f \in C[-1,1]$ olduğunda her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon \tag{4.17}$$

sağlanır.

$x,t \in [-1,1]$ olduğunda (4.17) eşitsizliği f fonksiyonu $[-1,1]$ de sürekli olduğu için gerçeklenir.

$x \in [-1,1], t \notin [-1,1]$ olduğunda ise (4.17) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarından sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir.

(4.16) ve (4.17) eşitsizliklerinden dolayı tüm $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [-1,1]$ için,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \qquad (4.18)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t - x| < \delta$ olduğunda, (4.18) eşitsizliği (4.17) eşitsizliğinden dolayı $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır.

$|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ olduğu için (4.16) eşitsizliğinden (4.18) eşitsizliği elde edilir.

Böylece;

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq K_n(|f(t) - f(x)|;x) \leq K_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$\leq \varepsilon + 2M\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}dt \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt$$

yazabiliriz. Böylece (4.13)'ten

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left(\frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}\right)$$

elde edilir.

$x \in [-1,1]$ olduğundan;

$$\max_{-1\leq x\leq 1}(3x^2 - 3x^2n + 3n + 1) = 3n + 1$$

o halde;

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{6Mn + 2M}{3\delta^2(n+1)^2}$$

yazılabilir. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}\max_{-1\leq x\leq 1}|K_n(f;x) - f(x)| = 0 \qquad (4.19)$$

olur. Böylece $K_n(f;x)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiş olur.

1932 yılında Voronowskaja, Bernstein polinomları için bir teorem ifade ve ispat etmiştir. Bu ifadenin benzerini $K_n(f;x)$ operatörü için ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.3.

f fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında sınırlı ve $(-1,1)$ aralığının bir x noktasında ikinci türevi mevcut olsun. Bu takdirde;

$$\lim_{n\to\infty} n\big(K_n(f;x) - f(x)\big) = -xf'(x) + (1-x^2)\frac{f''(x)}{2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat 4.3.

Bir f fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımı;

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2 + R_n(t-x) \qquad (4.20)$$

$$R_n(t-x) = \frac{1}{3!}f'''(x)(t-x)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(x)(t-x)^4 + \cdots$$

olup buna kalan terim denir.

Ayrıca;

$$R_n(t-x) = (t-x)^2\mu(t-x)$$

yazılabilir. Burada R_n kalan terim ve $\lim_{h\to 0}\mu(h) = 0$ dır. Dolayısıyla sınırlıdır. O halde her bir h sayısı için $H>0$ vardır ki;

$$|\mu(h)| \le H$$

yazılabilir.

Bu durumda (4.20) eşitliği

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2 + (t-x)^2\mu(t-x)$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafı $\left[\left(2\frac{k}{n+1}-1\right),\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)\right]$ aralığına integrale alıp ve her iki tarafı

$$\frac{n+1}{2}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

ile çarpar ve her iki tarafı $\sum_{k=0}^{n}$ toplamını alırsak;

$$K_n(f;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(x)dt + \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f'(x)(t-x)dt$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2dt + \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt$$

$$K_n(f;x) = f(x)\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} dt + f'(x)\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)dt$$

$$+\frac{1}{2}f''(x)\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2dt + \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt$$

$$K_n(f;x) = f(x)\,K_n(1;x) + f'(x)\aleph_{n,1}(x) + \frac{f''(x)}{2}\aleph_{n,2}(x)$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt$$

(4.6), (4.12) ve (4.13)' den dolayı,

$$K_n(f;x) = f(x) - f'(x)\frac{x}{n+1} + \frac{f''(x)}{2}\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt \qquad (4.21)$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki 4. ifadeyi

$$B_n(x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt$$

şeklinde yazalım. Bu durumda;

$$B_n(x) = \frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|<\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt$$

$$+\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} (t-x)^2\mu(t-x)dt \qquad (4.22)$$

olur. $|t-x|<\delta$ iken $|\mu(t-x)|<\varepsilon$ olur. Bu ifade ve $|\mu(h)|\leq H$ (4.22)'de yerine yazılırsa;

$$|B_n(x)|\leq \varepsilon\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|<\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt$$

$$+H\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt \qquad (4.23)$$

$$|B_n(x)|\leq \varepsilon\aleph_{n,2}(x)+H\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt$$

$\aleph_{n,2}(x)$ yerine yazılırsa;

$$|B_n(x)|\leq \varepsilon\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)+H\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt$$

$$M=\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt$$

diyelim.

$$|t-x|\geq\delta\ ise\quad \frac{(t-x)^2}{\delta^2}\geq 1$$

$$M\leq\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2\frac{(t-x)^2}{\delta^2}dt$$

yazabiliriz. Böylece;

$$M\leq\frac{1}{\delta^2}\frac{n+1}{2}\sum_{|t-x|\geq\delta}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^4dt=\frac{1}{\delta^2}\varphi_{n,4}(x)$$

dir. Bulunan bu ifadeyi (4.23)'te kullanırsak;

$$|B_n(x)|\leq\varepsilon\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)+\frac{H}{\delta^2}\aleph_{n,4}(x)$$

$\aleph_{n,4}(x)$ eşitliğini yerine yazarsak;

$$|B_n(x)\ |\leq\varepsilon\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{H}{\delta^2}\left(\frac{n^2x^4+8nx^4+x^4+44nx^2+20n^2x^2+24n^2x+24n^2x^3}{(n+1)^4}\right)$$

$$+\frac{H}{\delta^2}\left(\frac{24nx^3+20nx+2x^2+3n^2+4n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\,B_n(x) \le \lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(\frac{n^2(3-3x^2)+3x^2+1}{3(n+1)^2}\right)$$

$$+\frac{H}{\delta^2}\left(\frac{n^3(x^4+20x^2+24x+24x^3+3)}{(n+1)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{n^2(8x^4+44x^2+24x^3+20x+4)+n\left(x^4+2x^2+\frac{1}{5}\right)}{(n+1)^4}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\varepsilon(1-x^2)$$

$x\in[-1,1]$ olduğundan;

$\lim_{n\to\infty} n\,B_n(x)=0$ dır.

$$K_n(f;x)=f(x)-f'(x)\frac{x}{n+1}+\frac{f''(x)}{2}\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)+B_n(x)$$

şeklinde idi. O halde;

$$n\big(K_n(f;x)-f(x)\big)=-f'(x)\frac{nx}{n+1}+\frac{f''(x)}{2}\left(\frac{3nx^2-3x^2n^2+3n^2+n}{3(n+1)^2}\right)+nB_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} n\big(K_n(f;x)-f(x)\big)$$

$$=-f'(x)\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+1}+\frac{f''(x)}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3nx^2-3x^2n^2+3n^2+n}{3(n+1)^2}\right)+\lim_{n\to\infty}nB_n(x)$$

$$=-xf'(x)+(1-x^2)\frac{f''(x)}{2}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de; $K_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızını hesaplayalım. Bunun için öncelikle süreklilik modülünün tanım ve özelliklerini verelim.

Tanım 4.2. (Süreklilik Modülü)

$[a,b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. $[0,b-a]$ aralığında tanımlı $\omega(\delta)\coloneqq\omega(f;\delta)=\{sup|f(x_2)-f(x_1)|\colon |x_2-x_1|\le\delta, x_1, x_2\epsilon[a,b]\}$ fonksiyonuna f 'nin süreklilik modülü denir (Shevchuk, 1992).

Süreklilik Modülünün Özellikleri

1. $w(f;\delta)\ge 0$

2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$

3. $m \in \mathbb{N}$ için $w(f;m\delta) \leq m w(f;\delta)$

4. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $w(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\, w(f;\delta)$

5. $\lim_{\delta\to\infty} w(f;\delta) = 0$

6. $|f(t) - f(x)| \leq w(|f(t) - f(x)|)$

7. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) w(f;\delta)$

(Campiti ve Altomare, 1994).

Şimdi süreklilik modülü yardımı ile $K_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızını veren bir teorem ispatlayacağız.

Teorem 4.4.

$f \in C[-1,1]$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük n'ler için

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq 2w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 4.4.

$$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$K_n(f;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} f(t)\,dt$$

şeklinde idi.

$K_n(1;x) = 1$ olduğundan ve operatörün lineerliğinden;

$$|K_n(f;x) - f(x)| = |K_n(f;x) - f(x)K_n(1;x)| = |K_n(f;x) - K_n(f(x);x)|$$
$$\leq \left|K_n\big(f(t) - f(x)\big);x\right| \leq (K_n|f(t) - f(x)|;x) \qquad (4.24)$$

Süreklilik modülünün (7) özelliğini kullanırsak;

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) w(f;\delta)$$

Bu ifadeyi (4.24)'de yerine yazarsak;

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq K_n\left(\left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right)w(f;\delta);x\right) = w(f;\delta)K_n(1;x) + \frac{w(f;\delta)}{\delta}K_n(|t-x|;x)$$

bulunur.Yani;

$$|K_n(f;x)-f(x)| \leq w(f;\delta)\left(K_n(1;x)+\frac{1}{\delta}K_n(|t-x|;x)\right) \qquad (4.25)$$

(4.1)'in (4.25)'de kullanılmasıyla

$$|K_n(f;x)-f(x)| \leq w(f;\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}K_n(|t-x|;x)\right) \qquad (4.26)$$

bulunur, bulunan bu ifadede;

$$A = K_n(|t-x|;x)$$

diyelim.

Cauchy-Schwartz Bungakowsky eşitsizliğinden;

$$A = K_n(|t-x|;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}|t-x|\,dt$$

$$\leq \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}1dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\varphi_n^k(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}} = K_n((t-x)^2;x)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Öte taraftan;

$$K_n((t-x)^2;x) = \frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde;

$$A \leq \left(\frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadenin (4.26)'da yerine yazılmasıyla;

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq w(f;\delta)\left(1 + \frac{1}{\delta}\left(\frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1}\left(\frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{3(n+1)}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

olur. Bu durumda;

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq w(f;\delta)\left(1 + \frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

yazabiliriz. $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olarak seçilirse;

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq 2w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar kullanılarak $K_n(f;x)$ operatörü için bir teorem ispat edelim.

Teorem 4.5.

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa; bu takdirde

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{C[-1,1]} = O\left(\left(\frac{3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

dır.

İspat 4.5.

$K_n(1;x) = 1$ olduğundan ve operatörün lineerliğinden;

$$|K_n(f;x) - f(x)| = |K_n(f;x) - f(x)K_n(1;x)| = |K_n(f;x) - K_n(f(x);x)|$$

$$\leq (K_n|f(t) - f(x)|;x) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_n^k(x) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} |f(t) - f(x)|dt \qquad (4.27)$$

yazılabilir.

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından;

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^{\alpha}$$

Bu ifade $(4.27)'$de yerine yazılırsa;

$$|K_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} M|t-x|^{\alpha}dt$$

$$= M\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} |t-x|^{\alpha}dt = MK_n(|t-x|^{\alpha};x) \qquad (4.28)$$

Hölder eşitsizliğinden;

$$K_n(|t-x|^{\alpha};x) \leq K_n((t-x)^2;x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Bu ifade ve (4.13) $(4.28)'$de yerine yazılırsa;

$$|K_n(f;x)-f(x)| \leq M\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\max_{-1\leq x\leq 1}(3x^2-3x^2n+3n+1) = 3n+1$$

O halde;

$$|K_n(f;x)-f(x)| \leq M\left(\frac{3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Böylece;

$$\|K_n(f;x)-f(x)\|_{C[-1,1]} \leq M\left(\frac{3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

olur. Yani;

$$\|K_n(f;x)-f(x)\|_{C[-1,1]} = O\left(\left(\frac{3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi de türevlenebilen fonksiyonlar kullanılarak $K_n(f;x)$ operatörü için bir teorem ispat edelim.

Teorem 4.6.

f türevlenebilir ve türevi $[-1,1]$ aralığında, sürekli ve tüm reel eksende sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda; belirli bir n den sonra

$$\sqrt{n}|K_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{n}} + 2w(f';\frac{1}{\sqrt{n}})$$

dır.

İspat 4.6.

f türevlenebilir ve türevi $[-1,1]$ aralığında, sürekli ve tüm reel eksende sınırlı bir fonksiyon olduğundan, $t,x \in [-1,1]$ için ortalama değer teoreminden t ile x arasında öyle bir u vardır ki

$$f'(u) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

olur. Eşitliğin sol tarafına $-f'(x) + f'(x)$ eklenirse;

$$f(t) - f(x) = (t - x)f'(x) + (t - x)\big(f'(u) - f'(x)\big) \tag{4.29}$$

elde edilir. O halde (4.29)'un $K_n(f;x)$ operatörü altındaki görüntüsü alınırsa ve

$$K_n(t;x) \quad = x - \frac{x}{n+1}$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} K_n(f;x) - f(x) &= f'(x)K_n(t - x;x) + K_n\Big((t - x)\big(f'(u) - f'(x)\big);x\Big) \\ &= f'(x)\left(x - \frac{x}{n+1} - x\right) + K_n\Big((t - x)\big(f'(u) - f'(x)\big);x\Big) \\ &= \frac{-xf'(x)}{n+1} + K_n\Big((t - x)\big(f'(u) - f'(x)\big);x\Big) \end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. u, t ile x arasında olduğundan;

$$|u - x| \le |t - x|$$

olacaktır. Süreklilik modülü özelliğinden;

$$|f'(u) - f'(x)| \le w(f';|u - x|) \le w(f';|t - x|) \le \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta_n}\right)w(f';\delta_n)$$

elde edilir. Bu son ifade (4.30)' da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} |K_n(f;x) - f(x)| &\le \frac{|-xf'(x)|}{n+1} + K_n(|t - x||f'(u) - f'(x)|;x) \\ &\le \frac{|-xf'(x)|}{n+1} + K_n\left(|t - x|\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta_n}\right);x\right)\ w(f';\delta_n) \\ &\le \frac{|-xf'(x)|}{n+1} + K_n\left(|t - x| + \frac{1}{\delta_n}(t - x)^2;x\right)\ w(f';\delta_n) \end{aligned}$$

Cauchy Schwartz eşitsizliğinden;

$$|K_n(f;x) - f(x)| \le \frac{|-xf'(x)|}{n+1} + \left[\big(K_n((t - x)^2;x)\big)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\delta_n}\big(K_n((t - x)^2;x)\big)\right]w(f';\delta_n)$$

Öte taraftan;

$$K_n((\mathrm{t} - \mathrm{x})^2;x) = \frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\max_{-1\le x\le 1}\left(\frac{3x^2-3x^2n+3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\frac{3(n+1)}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$$

olur. Bu durumda;

$$|K_n(f;x)-f(x)|\le\frac{|-xf'(x)|}{n+1}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\delta_n}\right)w(f';\delta_n)$$

$$|K_n(f;x)-f(x)|\le\frac{|x|}{n+1}|f'(x)|+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\delta_n}\right)w(f';\delta_n)$$

f' bütün reel eksende sınırlı olduğundan;

$$|f'(x)|\le M$$

olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır.

$$|K_n(f;x)-f(x)|\le\frac{M}{n+1}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\delta_n}\right)w(f';\delta_n)\le\frac{M}{n}+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\delta_n}\right)w(f';\delta_n)$$

$$\delta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

olarak seçilirse;

$$|K_n(f;x)-f(x)|\le\frac{M}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}w\left(f';\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

bulunur. Eşitliğin iki tarafı $\sqrt{n}$ ile çarpılırsa

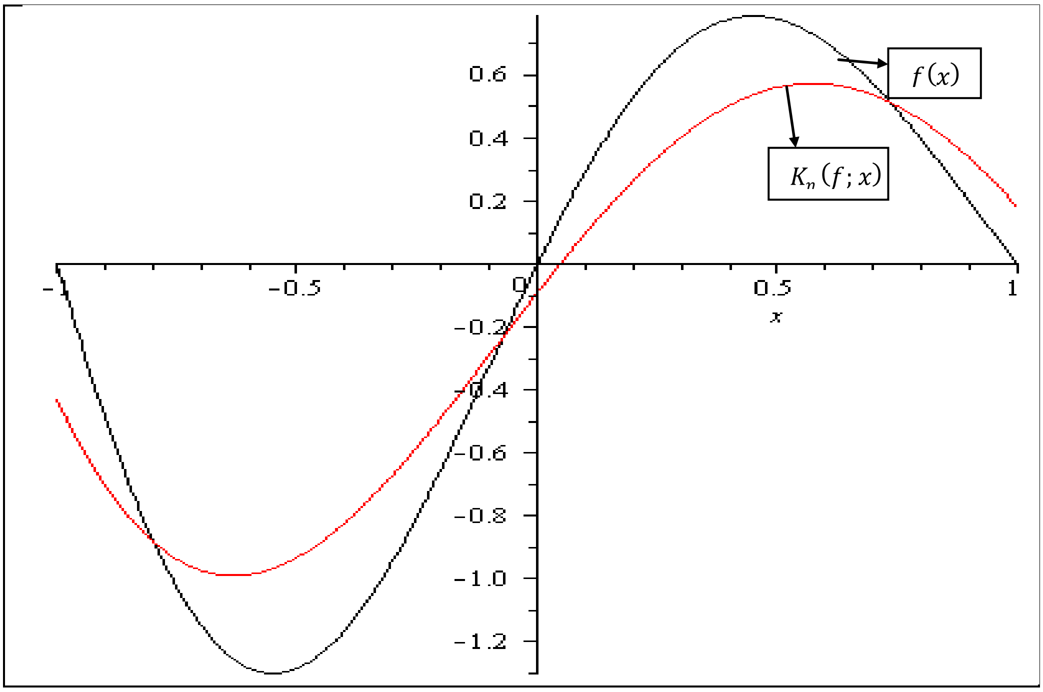
$$\sqrt{n}|K_n(f;x)-f(x)|\le\frac{M}{\sqrt{n}}+2w(f';\frac{1}{\sqrt{n}})$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

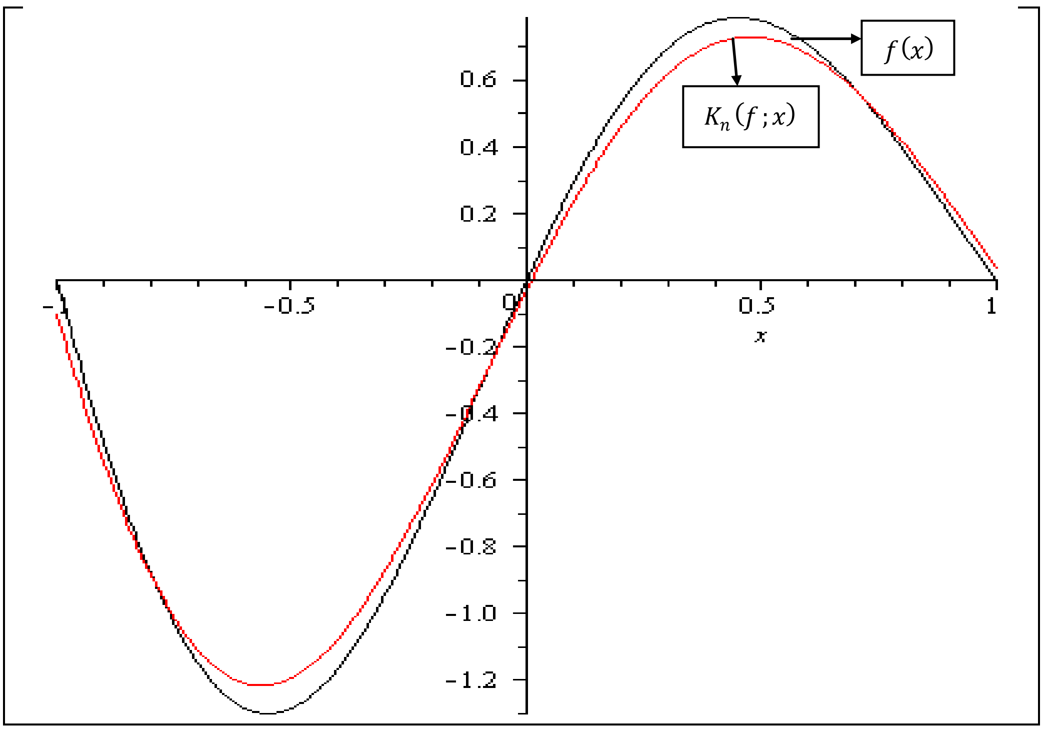
Şimdi de üzerinde çalıştığımız $K_n(f;x)$ operatörünün; $f(x)=\sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ ve $g(x)=\sin(\pi x)\ln(x+2)$ fonksiyonlarına ait yaklaşımını karşılaştıran grafikleri çizelim.

$K_n(f;x)$ operatörünün $f(x)=\sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.1. , Şekil 4.2. , Şekil 4.3. , ve Şekil 4.4. te görüleceği gibi n değeri yeterince büyük seçildiğinde operatörün fonksiyona daha iyi yaklaştığı görülecektir.

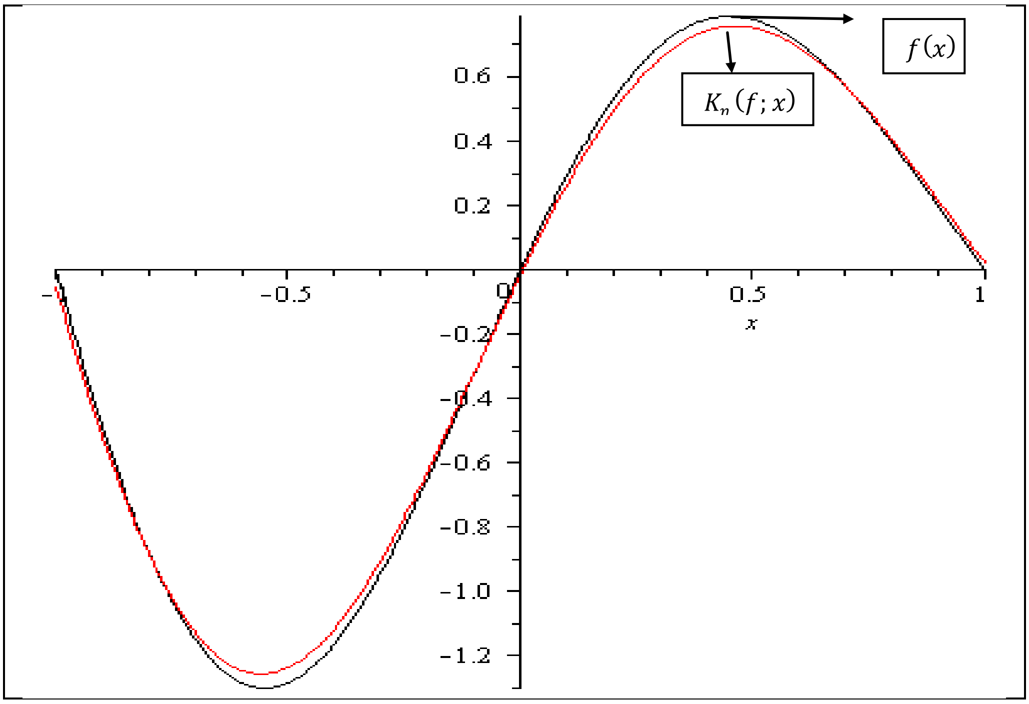
Aynı şekilde $K_n(f;x)$ operatörünün $g(x)=\sin(\pi x)\ln(x+2)$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.5. , Şekil 4.6. , Şekil 4.7. , ve Şekil 4.8. te görüleceği gibi n değeri yeterince büyük seçildiğinde operatörün fonksiyona daha iyi yaklaştığı görülecektir.



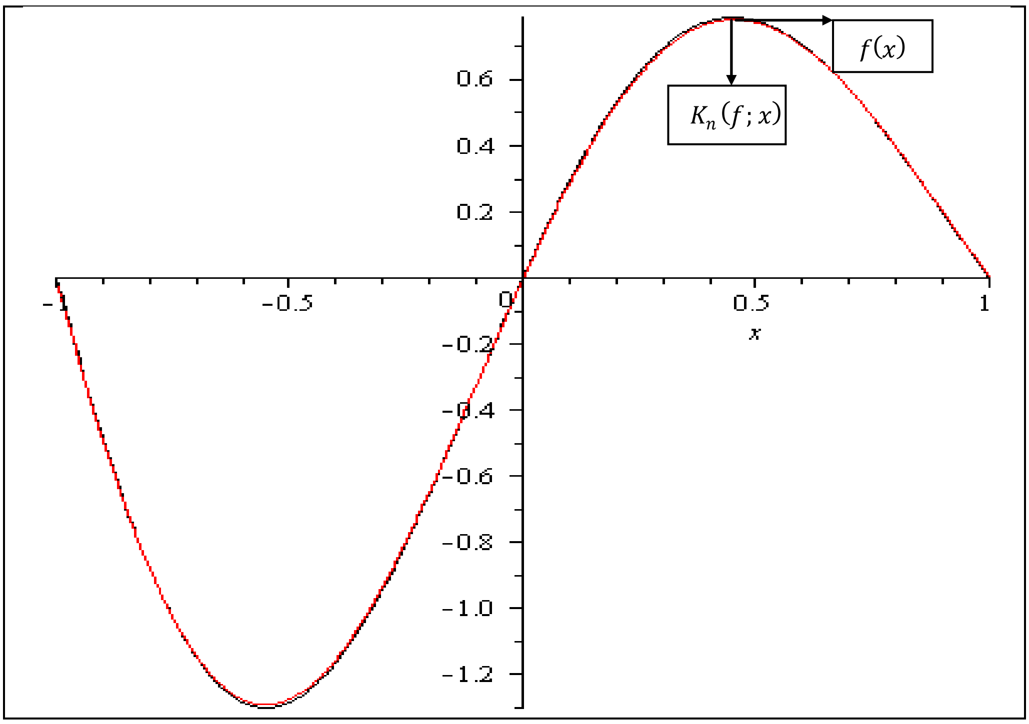
Şekil 4.1. $f(x) = \sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 10$ için yaklaşım grafiği



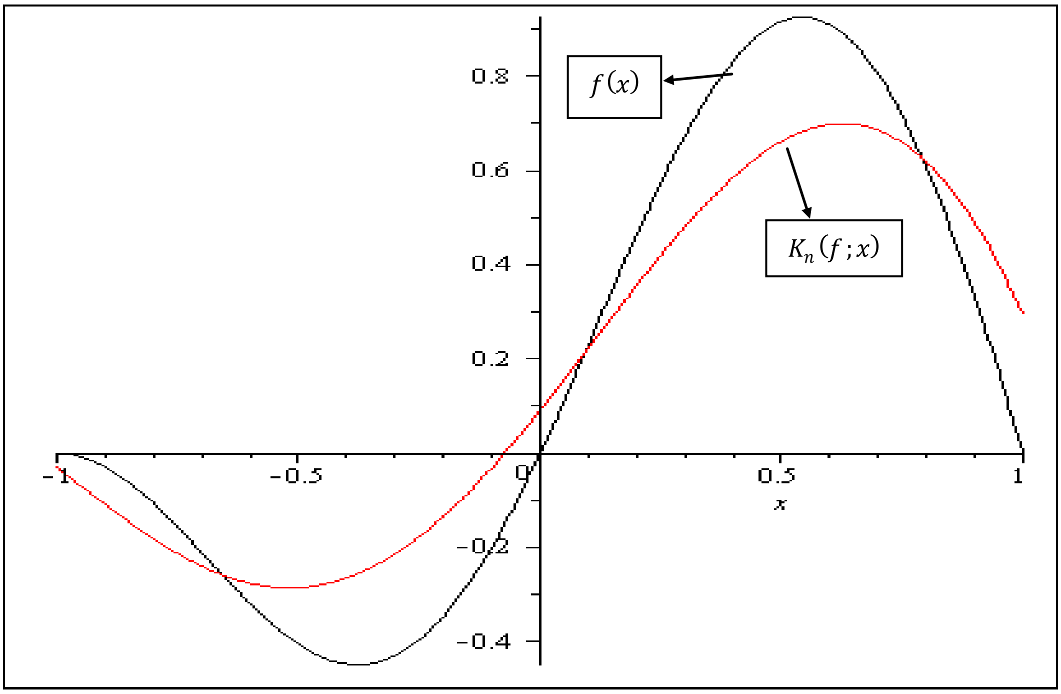
Şekil 4.2. $f(x) = \sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 50$ için yaklaşım grafiği



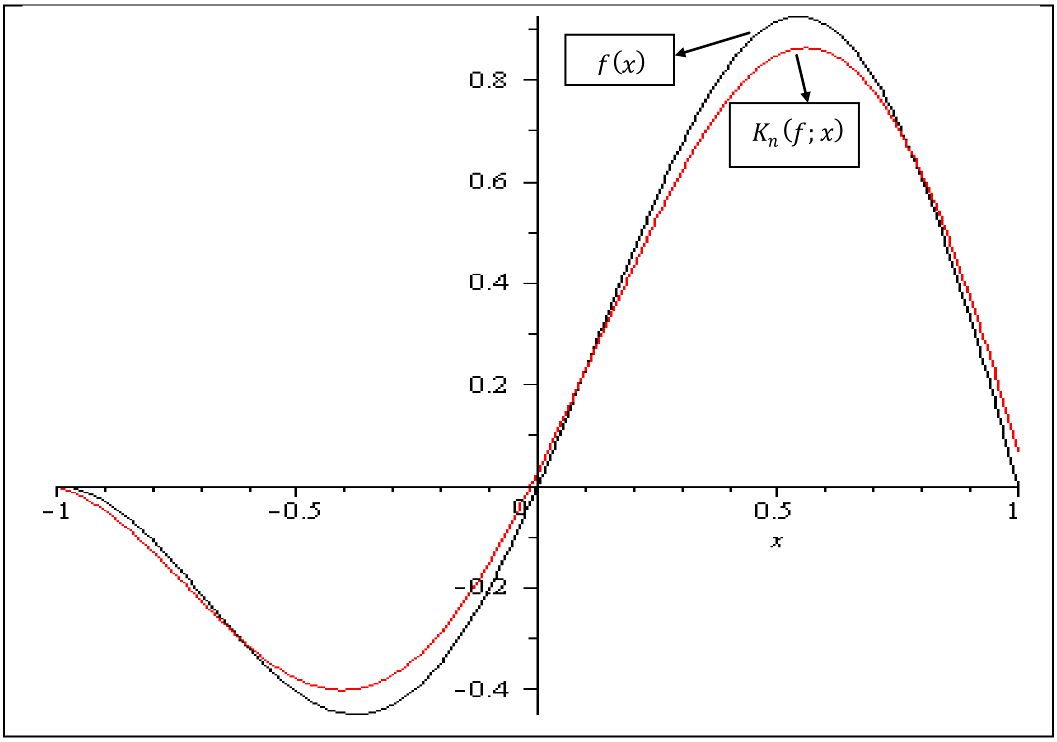
Şekil 4.3. $f(x) = \sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 100$ için yaklaşım grafiği



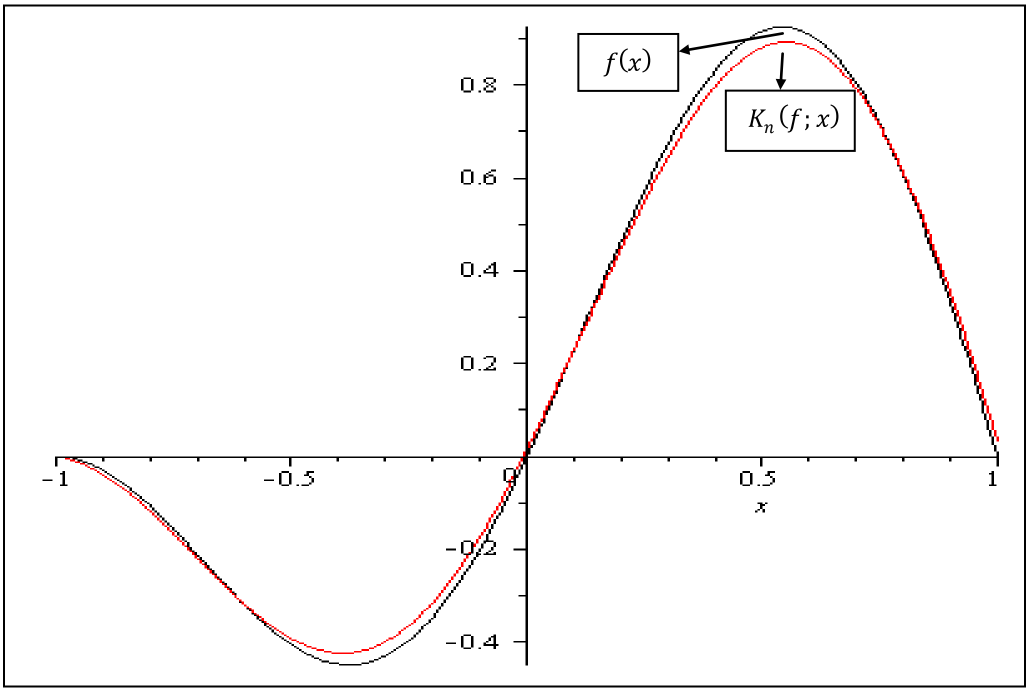
Şekil 4.4. $f(x) = \sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 500$ için yaklaşım grafiği



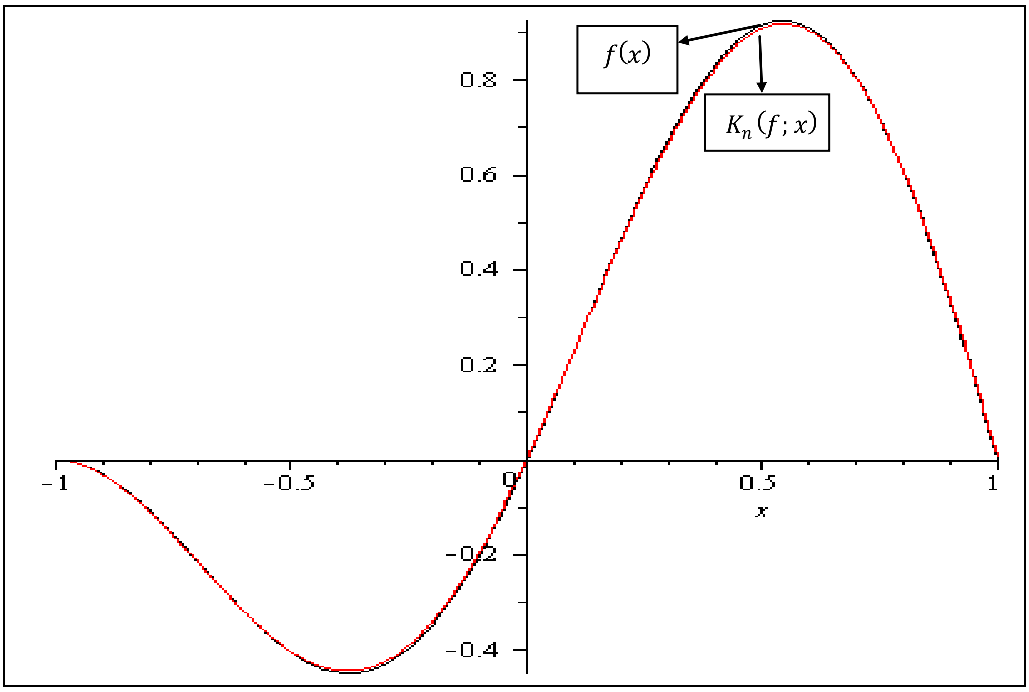
Şekil 4.5. $g(x) = \sin(\pi x)\ln(x+2)$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 10$ için yaklaşım grafiği



Şekil 4.6. $g(x) = \sin(\pi x)\ln(x+2)$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 50$ için yaklaşım grafiği



Şekil 4.7. $g(x) = \sin(\pi x)\ln(x+2)$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 100$ için yaklaşım grafiği



Şekil 4.8. $g(x) = \sin(\pi x)\ln(x+2)$ fonksiyonuna $K_n(f;x)$ ile $n = 500$ için yaklaşım grafiği

Şimdi de $f(x) = \sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ olmak üzere, n ve x'in bazı değerleri için $K_n(f;x)$ ile f fonksiyonuna yaklaşımının nümerik tablosunu çizelge halinde gösterelim.

Çizelge 4.1. $f(x) = \sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ olmak üzere, n ve x'in bazı değerleri için $K_n(f;x)$ ile f fonksiyonuna yaklaşımının nümerik tablosu

x \ n	n=10	n=50	n=100	n=500
-0.9	0.2180887022	0.0576604091	0.0299390318	0.0061743320
-0.8	0.0044432139	0.0070836148	0.0041455139	0.0009354300
-0.7	0.1750433210	0.039948488	0.020254937	0.004093531
-0.6	0.2975500442	0.074627197	0.038477685	0.007890249
-0.5	0.3524129071	0.091828800	0.047660836	0.009829063
-0.4	0.3403435224	0.090284532	0.047007417	0.009720750
-0.3	0.2715255098	0.0721696082	0.0375942944	0.0077777173
-0.2	0.1629210078	0.0422515531	0.0219235053	0.0045206777
-0.1	0.0351615273	0.0067756318	0.0033165051	0.0006489310
0.1	0.1955467178	0.2654574505	0.2922326138	0.2745386384
0.2	0.0555125000	0.0725003904	0.0767544268	0.0686335956
0.3	0.0291936203	0.0378923375	0.0398574450	0.0353475123
0.4	0.0060871828	0.0078597333	0.0082219665	0.0072404173
0.5	0.2176052369	0.0505652160	0.0257204513	0.0052125782
0.6	0.1322535834	0.0265226494	0.0131327619	0.0025994037
0.7	0.0333160267	0.0013011823	0.0001335168	0.0000637845
0.8	0.0623450903	0.0202915321	0.0107788606	0.0022625027
0.9	0.1379878830	0.0342105506	0.0175687320	0.0035893173

Çizelge 4.1 den görüldüğü gibi $|K_n(f;x) - f(x)|$ farkı x in $[-1,1]$ arasındaki farklı değerleri için n değeri büyüdükçe, sıfıra daha çok yaklaştığı görülmektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

$[-1,1]$ simetrik aralığı üzerinde tanımladığımız $K_n(f;x)$ operatörünün lineer pozitif operatör olduğu, Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı ve f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. Daha sonra $K_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentleri hesaplanmış ve aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir.

$$\aleph_{n,0}(x) = 1$$

$$\aleph_{n,1}(x) = -\frac{x}{n+1}$$

$$\aleph_{n,2}(x) = \frac{3x^2 - 3x^2n + 3n + 1}{3(n+1)^2}$$

$$\aleph_{n,3}(x) = \frac{3x^3n - x^3 - 6nx^2 - 6n - 11nx - x}{(n+1)^3}$$

$$\aleph_{n,4}(x) = \frac{n^2x^4 + 8nx^4 + x^4 + 44nx^2 + 20n^2x^2 + 24n^2x + 24n^2x^3}{(n+1)^4} + \frac{24nx^3 + 20nx + 2x^2 + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4}$$

Hesapladığımız merkezi momentler kullanılarak $K_n(f;x)$ operatörünün asimptotik yaklaşımı incelenmiş ve aşağıdaki eşitliğin sağlandığı gösterilmiştir.

$$\lim_{n\to\infty} n\big(K_n(f;x) - f(x)\big) = -xf'(x) + (1-x^2)\frac{f''(x)}{2}$$

Daha sonra süreklilik modülü yardımıyla $K_n(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızı hesaplanmış ve aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

$$|K_n(f;x) - f(x)| \le 2w\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa; $K_n(f;x)$ operatörü için aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir.

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{C[-1,1]} = O\left(\left(\frac{3n+1}{3(n+1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

f türevlenebilir ve türevi $[-1,1]$ aralığında, sürekli ve tüm reel eksende sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda; belirli bir n den sonra

$$\sqrt{n}|K_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{n}}+2w(f';\frac{1}{\sqrt{n}})$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

Son olarak $K_n(f;x)$ operatörünün $f(x)=\sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ ve $g(x)=\sin(\pi x)\ln(x+2)$ fonksiyonlarına ait farklı n değerleri için yaklaşımını karşılaştıran grafikler çizilmiş ve $f(x)=\sin(\pi x)e^{-\frac{x}{2}}$ fonksiyonu için hesaplanan nümerik değerler tablo halinde gösterilmiştir.

5.2. Öneriler

Sürekli fonksiyonlar incelenirken Bernstein operatörlerinden yararlanılabilir. Bernstein polinomları ile yapılan çalışmalar $[0,1]$ kapalı aralığı üzerindedir. Fakat kapalı aralık üzerinde sonsuz süreksiz noktaları olan fonksiyonlar incelenirken Bernstein polinomlarını kullanmak uygun değildir. Bu tür fonksiyonlar için Durmeyer operatörleri veya Kantorovich operatörlerinden yararlanılabilir. Tüm reel eksenin simetrik alt aralığı üzerinde çalışılmak istenildiğinde Bernstein polinomlarını kullanmak uygun değildir. Bu durumda bizim ele aldığımız operatörün kullanılması uygundur.

KAYNAKLAR

AÇIKGÖZ, M., and ARACI, S., 2010. New Generating Function of Bernstein Type Polynomial for Two Variables. ICNAAM, Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference. 1281: 1141-1143.

AKSOP, C., 2009. On a Modification of Operators. International Mathematic Forum, 45(4): 2211-2215.

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter De Gruyter Berlin- New York, 627s.

BALCI, M., 2012. Reel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 144s.

BARBOSU, D., 2004. Kantrovich-Stancu Type Operators. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5(3): 53-54.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara, 320s.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du Theoreme de Weierstrass Fondee Sur le Calcul Des Probabilites. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

BOHMAN. H., 1952. On Approximation of Continuous and Analytic Functions. Ark. Mat., 2: 43-56.

CAO, J. D., 1997. A Generalization of the Bernstein Polynomials. J. Math. Anal. Apply, 209(1): 140-146.

CHLODOVSKY, I., 1937. Sur Le Developpment Des Fonctions Definies Dans Un Interval Infini En Series De Polynomes De M. S. Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393.

DİKMEN, A. B., 2009**.** Bernstein Polinomlarının q-Analogu. Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale, 65s.

DOĞRU, O., and DUMAN, O., 2006. Statistical Approximation of Meyer-König and Zeller Operators Based on q-Integers. Publ. Math. Debrecen, 68: 1-2, 199-214.

DOĞRU, O., DUMAN, O., and ORHAN, C., 2003. Statistical Approximation by Generalized Meyer-König and Zeller Type Operators. Stud. Sci. Math. Hun., 40: 359-371.

DUCHON, M., 2011. A Generalized Bernstein Approximation Theorem. Mathematical Publications, 49: 99-109.

DURRMEYER, J. L., 1967. Une Formule D'inversion De La Transformee De Laplace Aplication A La Theorie Des Moments. These De 3e Cyele. Faculte Des Sciences de l'Universite de Paris, 4: 149-150.

GADJIEV, A.D., and ORHAN, C., 2002. Some Approximation Theorems via Statistical Convergence. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32: 129-138.

HACISALİHOĞLU, H., and HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

HERZOG, F., and HILL, J. D., 1946. The Bernstein Polynomials for Discontinuous Functions. Amer. J. Math., 68: 109-124.

HILDEBRANT, T. H., and SCHOENBERG, I. J., 1933. On Linear Functional Operations and the Moment Problem. Ann. of Math. 34(2): 317-328.

KAC, M., 1938. Une Remarque Sur Les Polynomes De M. S. Bernstein. Studia Math., **7**: 49-51.

KAC, M., 1939. Une remarque Sur Les Polynomes De M. S. Bernstein. Studia Math., 8: 170-171.

KANTOROVICH, L. V., 1930. Sur Certain Developpements Suivant Les Polynomes De La Forme De S. Bernstein. C. R. Acad. URSS, 2(1): 563-568, 595-600

KOROVKIN, P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions (Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.) 90: 961-964.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto, 8: 15-217.

LUPAŞ, A., 1987. A q-Analogue of the Bernstein Operator. University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9: 85-92

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N., and EKİNCİOĞLU, İ., 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 593s.

NEAMMANEE, K., 2001. Approximation of Lipschitz Functions on $\mathbb{R}^n$ by Bernstein Polynomials. Science Asia, 27: 63-66.

ÖZARSLAN, M. A., and DUMAN, O. A., 2009. New Approach In Obtaining A Beter Estimation In Approximation By Positive Linear Operators. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. 58: 17-22.

PINKUS, A., 2000. Weierstrass and Approximation Theory. J. Approx, Theory, 107: 1-66.

PINKUS, A., 2005. Weierstrass and Approximation Theory. Surveys in Approximation Theory, 1: 1-37.

POPOVICIU, T., 1998. On the Proof of Weierstrass Theorem Using Interpolation Polynomials. Lucraile Sesiunii Gen.Şt. Acad. Romane, 2: 2-12.

PYCH-TABERSKA, P., 1997. Rate of Pointwise Convergence of Bernstein Polynomials for Some Absolutely Continuous Functions. J. Math. Anal. Appl., 2: 212, 9-19.

STANCU, D. D., 1968. Approximation of Function by a New Class of Polynomial Operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8): 1173–1194.

SHEVCHUK, I. A., 1992. Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a Segment. Naukova Dymka, Kiev, 324s.

VORONOWSKJA, E., 1932. Determination De La Forme Asymplotique D' Approximation Des Fonctions Par Les Polynomes De M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 4: 79-85.

WEIERSTRASS, K., 1885. Über Die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willküricher 55 Funktionen Einer Reellen Veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1): 633-639, 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: İbrahim KAHVECİBAŞI
Uyruğu	: T. C.
Doğum Yeri ve Tarihi	: ŞANLIURFA 27/10/1987
Telefon	: 05356176936
e-mail	: kahvecibasi63@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Şanlıurfa Lisesi, Merkez, Şanlıurfa	2005
Üniversite	: Dicle Üniversitesi, Merkez, Diyarbakır	2010
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Merkez, Şanlıurfa	2014

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2010-2013	Belediye Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2013-2014	Süleymaniye Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI: Matematik

YABANCI DİLLER : İngilizce