T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞIRLIKLI UZAYLARDA KANTOROVİCH-CHLODOWSKY-SZÁSZ TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI VE YAKLAŞIM HIZI

Reşat ASLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2014

Doç. Dr. Aydın İZGİ'nin danışmanlığında, Reşat ASLAN'nın hazırladığı ''Ağırlıklı uzaylarda Kantorovich-Chlodowsky-Szász tipi operatörlerin yaklaşımı ve yaklaşım hızı" konulu bu çalışma ../../.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından …../….. ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Aydın İZGİ ………………………………….

Üye : ………………………………….

Üye : ...………………………………....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Sinan UYANIK

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AĞIRLIKLI UZAYLARDA KANTOROVİCH-CHLODOWSKY-SZÁSZ TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIMI VE YAKLAŞIM HIZI

Reşat ASLAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ

Yıl: 2014, Sayfa: 29

Bu çalışmada; polinomlar yardımıyla sürekli fonksiyonlara yaklaşılabileceği düşüncesinden yola çıkarak geliştirilen çalışmalardan bahsedilmiş olup bu tür bir polinom olan ve S.N.Bernstein tarafından tanımlanan Bernstein polinomlarının özellikleri verilmiştir. Bernstein'a benzer şekilde O.Szász pozitif yarı eksende tanımlı fonksiyonlar için bir polinom dizisini sürekli fonksiyonlar için bir modifikasyonunu ve Chlodowsky yine Bernstein polinomlar dizisini [0,∞) yarı eksenine genişleyen aralıklar üzerine bir genellemesini tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. O.Szász operatörlerininde benzer şekilde Kantorovich ve Chlodowsky modifikasyonları farklı araştırmacılar tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. $x \in [0, b_n]$ olmak üzere

$$R_n(f;x) = \frac{(n+1)^2}{nb_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{nx}{b_n}\right)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} f(t)dt$$

şeklinde tanımladığımız lineer pozitif operatörünün yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir. Ayrıca tanımladığımız $R_n(f;x)$ ve $S_n(f;x)$ Szász operatörlerinin aynı f fonksiyonuna yaklaşımları grafikler ve nümerik değer tabloları ile karşılaştırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatörler, Szász ve Kantorovich operatörleri, Süreklilik modülü, Ağırlıklı uzaylar, Korovkin teoremi.

ABSTRACT

Master Thesis

APPROXİMATİON AND RATE OF APPROXİMATİON OF KANTOROVİCH-CHLODOWSKY-SZÁSZ TYPE OPERATORS İN WEİGHTED SPACES

Reşat ASLAN

Harran University
Institute of Science and Technology
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2014, Page: 29

In this thesis, studies based on the idea that continuous functions can be approximated with the help of polynomials are discussed. These polynomials are defined by S.N. Bernstein and the approximation properties of his polynomials are given here. Similar to Bernstein O. Szasz studied on polynom sequences for functions defined on a positive semi-axis and on a modification for the continous functions. Chlodowsky also studied Bernstein polynom sequences and defined a generalization of this sequences semi-axis expanding ranges on [0,∞). The modifications of the Szasz operators as Kantorovich and Chlodowsky type has been defined and studied by different researchers. We investigate the convergence properties and convergence rate of the operatos where $x \in [0, b_n]$.

$$R_n(f;x) = \frac{(n+1)^2}{nb_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{nx}{b_n}\right)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} f(t)dt$$

In addition the convergence properties of our $R_n(f;x)$ and $S_n(f;x)$ operators to same function f are compared in numerical tables and figures.

KEY WORDS: Linear positive operators, Szász and Kantorovich operators, Modulus of continuity,Weighted spaces, Korovkin theorem.

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesi aşamasında ve çalışmalarım boyunca fikir ve yönlendirmeleriyle maddi-manevi desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam, sayın Doç. Dr. Aydın İZGİ' ye, eğitim hayatım boyunca maddi-manevi desteğini gördüğüm rahmetli annem Emine ALPFİDAN(ASLAN)'a babam Feyzullah ASLAN'a, ağabeyim Yrd. Doç. Dr. Ferhat ASLAN'a ve arkadaşım Psikolog Paul Van Der Spek'e ayrıca tez çalışmam boyunca bana gösterdikleri sonsuz anlayışlarından dolayı değerli mesai arkadaşlarım, İş ve Meslek Danışmanları Fatih BÜYÜKDAĞ, Olcay Emine BOYRAZ, Yıldız EMRE ve Fehmi ÖZEN'e teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

$L\ (f\ ;\ x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması.
$R_n(f;x)$	n$\in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, b_n]$ olmak üzere bir operatör dizisi.
$B_n(f;x)$	Bernstein polinom dizisi.
$\Vert\ \Vert$	Norm fonksiyonu.
$S_n(f;x)$	Szasz polinom dizisi.
$K_n(f;x)$	Kantoroviç polinom dizisi.
$C_n(f;x)$	Chlodowsky polinom dizisi.
$C[a,b]$	Bir $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı.
$f_n(x)$	n$\in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi.
$f_n \rightrightarrows f$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
ρ	$x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu.
$B\rho\ [0,\infty)$	$[0,\infty)$ da tanımlı ve $\forall\ x \in [0,\infty)$ için $\vert f\ (x\ )\vert \leq M_f(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı.
$C\rho\ [0,\infty)$	$B\rho\ [0,\infty)$ ‘ da tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı.
$C_\rho^0[0,\infty)$	$C\rho\ [0,\infty)$ da olan ve $\lim_{x\to\infty} \frac{\vert f\ (x)\vert}{\rho(x)} < \infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.
$\Omega(\ f\ ;\delta\ )$	$C_\rho^0[0,\infty)$ uzayındaki ağırlıklı süreklilik modülü.

1-GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi esasında fonksiyonel analizle ilgili bir konu olmakla birlikte bu teorinin amacı nitelikleri az bilinen bir fonksiyona özelliklerini iyi bildiğimiz başka fonksiyonlarla yaklaşarak daha basit ve kolay şekilde hesaplanabilmesine yardımcı olur. 19. yüzyıldan günümüze birçok matematikçi, çalışılması zor olan bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen yani çalışılması daha kolay olan, örneğin polinomlar gibi , daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşabilir miyiz ve bu yaklaşımı en iyi nasıl sağlarız sorularına cevap aramışlardır. Bu düşünceden yola çıkarak 1885 yılında Alman Matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, sonlu bir aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığını iddia ve ispat etmiştir (Pinkus, 2000).

1912 yılında Rus Matematikçi S.N.Bernstein, Weierstrass'ın bu polinomunun nasıl olacağı üzerinde çalışmış ve toplamsal biçimde bir polinomlar dizisini aşağıdaki gibi tanımlamıştır:
$x \in [0,1]$ için;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

biçimindedir. Bernstein kendi adıyla anılan bu polinomlarla [0,1] aralığında tanımlı ve sürekli f fonsiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır.(Bernstein,1912). H.Bohman 1951 yılında toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin [0,1] aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. Korovkin (1953), genel bir teorem ispatlamış ve göstermiş ki Bohman'ın koşulları genel halde de gerçeklenir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995). Bu buluştan sonra birçok matematikçi, Korovkin Teoremi'ni genişletmeye başlamıştır. Bernstein polinomlarını integrallenebilen fonksiyonlar için 1930 yılında Kantorovich modife etmiş ve yaklaşımlarını incelemiştir.
$K_n: L_1([0,1]) \to C([0,1])$, her$f \in L_1([0,1])$ ve negatif olmayan her hangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$(K_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(s)ds$$

lineer pozitif operatörünü tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Bu operatör Kantorovich operatörü olarak bilinir. Bernstein polinomlarının [0, ∞) aralığına genişletilmiş bir modifikasyonu 1932 yılında Chlodowsky tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$f \in [0,1]$, b_n pozitif artan bir dizi , $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n} b_n) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \quad , \qquad 0 \le x \le b_n$$

bu şekilde tanımlamış olan operatörler literatürde Bernstein-Chlodowsky veya Chlodowsky operatörleri olarak bilinir.

Otto Szász 1950' de Bernstein polinomlarından esinlenerek [0,∞) aralığında, kendi adıyla anılan aşağıdaki polinomlar dizisini tanımlamış ve $[0, A]$ aralığında yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

$S_n: C[0,\infty) \longrightarrow C[0,\infty)$

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Bu operatör literatürde Szász operatörleri olarak bilinir. Gadjieva ve Doğru 1998 yılında ağırlık uzaylarda szász tipinde operatörler dizisinin sürekli fonksiyonlara yaklaşımını incelemişlerdir. Lesniewicz ve Rempulska 1997 yılında Szász tipi operatörlerin yaklaşım özellikleri üstel ağırlıklı uzaylarda araştırılmış ve yaklaşım teoremi uzayın normunda değil supremum normunda verilmiş ve yaklaşım hızı noktasal olarak bulunmuştur.

Walzack 2000 yılında genelleştirilmiş Szász operatörleri ile $[0,\infty) \times [0,\infty)$' da sürekli fonksiyonlara ağırlıklı yaklaşım teoremlerini Lesniewicz ve Rempulska (1997) 'ya benzer olarak elde etmiştir.

Carmen ve Violeta Muraru 2006 yılında iki değişkenli Kantorovich-Szász tipli operatörlerin yaklaşım özelliklerini yakınsaklık hızını hesaplamışlardır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1. 1. Giriş

Bu bölümde tezimde kullanılacak olan tanımlar ve toeremler ve ayrıca lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı ve Korovkin Teoreminin ifadesi ve ispatı verilecektir.

Tanım 1.1.1.

Boş olmayan X$\subset \mathbb{R}$ kümesi, $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\alpha \in X$ olmak üzere. $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall\, x \in X$ için $|x-\alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu α noktasında *süreklidir* denir. (Balcı,1999).

Tanım 1.1.2.

X$\subset \mathbb{R}$, $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon > 0$ sayısı $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(\,x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için yalnızca ε na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X kümesi üzerinde *düzgün süreklidir* denir. (Balcı,1999).

Tanım 1.1.3.

$X \subset \mathbb{R}$, $f\colon \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|f(x)| \leq M, M > 0$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde *sınırlıdır* denir. (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.4.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f de (a,b) den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. $t, x\epsilon(a,b)$ olmak üzere $\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = A(x)$ sonlu limiti varsa, bu $A(x)$ sayısına f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$ (veya $Df(x)$ yada $\frac{df(x)}{dx}$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında *türevlenebilirdir* (veya türevlidir) denir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.5.

L boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye $\mathbb{F}$ üzerinde *lineer uzay* veya *vektör uzayı* denir .

L, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) Her $x, y \in L$ için $x + \ y \in L$dir (kapalılık özelliği).

G2) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir (birleşme özelliği).

G3) Her $x \in L$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde $0 \in L$ vardır (özdeş elemanın varlığı).

G4) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır (ters eleman varlığı).

G5) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir (değişme özelliği)

$x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \epsilon\ \mathbb{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1) $\alpha. x \epsilon\ L$ dir (skalerle çarpmaya göre kapalılık).

L2) $\alpha.(x + y) = \alpha. x + \alpha. y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta). x = \alpha. x + \beta. x$ dir.

L4) $(\alpha. \beta). x = \alpha.(\beta. x)$ dir.

L5) $1. x = x$ dir. (Burada 1, $\mathbb{F}$ 'nin birim elemanıdır.) (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.6.

N, $\mathbb{F}$ cismi ile bir lineer uzay olsun. $\| \ \|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyonu için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $(\alpha \epsilon \mathbb{F})$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa$\| \ \|$ fonksiyonuna N de *norm* denir. Normlu uzaylar genellikle $(N, \| \ \|)$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.7.

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. X den alınan f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonunu karşılık getiren kurala "*operatör*" denir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.8.

X, Y iki lineer uzay olsun. $T: X \to Y$operatörü,$\forall x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{F}$ için

$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ şartını sağlıyorsa T ye *lineer operatör* denir. (Bayraktar, 2006)

Tanım 1.1.9.

Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü bu uzayda tanımlı herhangi bir pozitif f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa L operatörüne

“ *lineer pozitif operatör* ” denir. Yani;

$f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur.

Benzer şekilde,

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$ olduğunda $-f(x) > 0$ olur.

L lineer pozitif operatör olduğunda,

$f(x) < 0$ için $0 < L(-f;x) = -L(f;x)$ sağlanır.

Dolayısıyla $f(x) < 0$ için $L(f;x) < 0$ elde edilir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Önerme 1.1.1

Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;

$f \geq g$ için$L(f;x) \geq L(g;x)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki $f \geq g$ olsun. Bu durumda $f - g \geq 0$ olur.

L operatörünün pozitifliğinden; $L(f-g;x) \geq 0$ yazılabilir. Diğer taraftan L operatörünün lineerliğinden; $L(f;x) - L(g;x) \geq 0$ olur. Yani f ≥ g için $L(f;x) \geq L(g;x)$ olduğu görülür ki bu da L operatörünün monoton artan olması demektir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev,1995).

Önerme 1.1.2. L lineer pozitif operatör olmak üzere

$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{1.1}$$

dir. Önerme 1.1.1. den dolayı L operatörünün monotonluğundan ve (1.1) den yararlanarak

$$L(-|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği yazılabilir. L operatörü lineer olduğundan;

$$-L(|f|;x) \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım1.1.10.

X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere $L: X \to Y$ ile tanımlanmış L operatörünü göz önüne alalım. Eğer $\forall\ f \in X$ için

$$\|Lf\| \leq M\|f\|_x$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sabitleri varsa L operatörüne ‘’*sınırlı operatör*’’ denir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım1.1.11.

$\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi normlu bir X uzayında f fonksiyonuna yakınsasın.

Yani $(n \to \infty)$ $için$ $\|f_n - f\|_x \to 0$

Yada $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ olsun. Bu şartı sağlayan tüm f_n fonksiyonları $(n \to \infty)$ için

$$\|Lf_n - Lf\|_y \to 0$$

oluyorsa L operatörüne “ *sürekli operatör* ” denir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım1.1.12.

$C[a,b]$; $[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlı bütün sürekli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının uzayını göstermek üzere, bu uzaydaki norm

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

şeklinde gösterilir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım1.1.13.

$f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun. Her bir $x \in [a,b]$ ve $\forall\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 vardır ki $\forall\, n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir. (Shevchuk, 1992).

Tanım 1.1.14.

$\forall\ x \in [a,b]$ ve $\forall\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 vardır ki $\forall n > n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

olacak şekilde n_0 varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir. (Shevchuk, 1992).

Tanım 1.1.15.

[a, b] aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. [0,b-a] aralığında tanımlı $\omega(\delta) := \omega(\delta) = sup\,\{|f(x_2) - f(x_1)|: |x_2 - x_1| \leq \delta, x_1,\ x_2 \epsilon [a, b]\}$ fonksiyonuna f'nin *süreklilik modülü* denir. (Shevchuk, 1992).

Teorem 1.1.1.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonunun süreklilik modülü,

i. $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$
ii. $0 < \delta_1 < \delta_2$ ise $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$
iii. $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$
iv. $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta), n \in \mathbb{Z}^+$
v. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|$
vi. $\omega(f; |t - x|) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$

özelliklerini sağlar. (Altomare ve Campiti, 1994).

Teorem 1.1.2 (Korovkin Teoremi) :

$f \in C[a, b]$ ve tüm reel eksende

$$|f(x)| \leq M_f \qquad (1.2)$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer L_n lineer pozitif operatör dizisi [a,b] üzerinde;

$L_n(\,1;\ x\,) \rightrightarrows 1 \qquad n \to \infty$

$L_n\,(\,t;\ x\,) \rightrightarrows\ x \qquad n \to \infty$

$L_n(\,t^2;\ x\,) \rightrightarrows x^2 \qquad n \to \infty$

özelliklerini sağlıyorsa bu durumda L_n operatör dizisi $[a, b]$ üzerinde $L_n(f;\,x\,) \rightrightarrows f(x)$ dir. Başka bir biçimde ifade edilecek olunursa;

$$\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

ya da buna eşdeğer olan

$$\lim_{n\to\infty} \underset{a\leq x\leq b}{maks} |L_n(f; x) - f(x)| = 0 \quad \text{dır.}$$

İspat. Kabul edelim ki, $f \in C[a, b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulunabilir ki, $|t - x| < \delta$ iken

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \qquad (1.3)$$

sağlanır. (1.2) den

$$|f(t) - f(x)| < |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f$$

yazılabilir. Öte yandan

$$|t-x| \geq \delta \text{ iken } \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$$

sağlanır. Böylece

$$|f(t)-f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{1.4}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall$ x $\in$ [a, b] için (1.3) ve (1.4) 'ten

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{1.5}$$

dir. Şimdi *(i), (ii), (iii)* koşullarını gerçekleyen (L_n) lineer operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f)-f\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığının gösterilmesi gerekmektedir.

Lineerlikten

$$\begin{aligned} |L_n(f(t);x)-f(x)| &= |L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)| \\ &= |L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)| \\ &= |L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq |L_n(f(t)-f(x);x)| + |f(x)||(L_n(1;x)-1)| \tag{1.6}$$

elde edilir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden ve her a∈R için a≤ ⎜a⎜ olduğundan

$$|L_n(f(t)-f(x);x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

yazılabilir. (1.1) göz önüne alınarak (1.6) eşitsizliği

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x);x|) + M_f|(L_n(1;x)-1)|$$

şekline dönüşecektir. (L_n) monoton artan olduğundan (1.5) den

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) + M_f|(L_n(1;x)-1)| \tag{1.7}$$

elde edilir. Diğer yandan L_n nin lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} L_n\left(\varepsilon + 2\tfrac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= L_n(\varepsilon;x) + L_n(2\tfrac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x) \\ &= \varepsilon L_n(1;x) + 2\tfrac{M_f}{\delta^2} L_n(t^2-2xt+x^2;x) \\ &= \varepsilon L_n(1;x) + 2\tfrac{M_f}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2 \\ &\quad -2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\} \end{aligned}$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;x)$$
$$+ x^2 L_n(1;x) - x^2\}$$
$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x)$$
$$+ x^2(L_n(1;x) - 1)\}$$

yazılabilir. Bu son ifadenin (1.7) da yerine yazılmasıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \le \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M_f}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x))$$
$$+x^2(L_n(1;x) - 1)\} + M_f|L_n(1;x) - 1| \qquad (1.8)$$

elde edilir. *(i), (ii), (iii)* koşulları (1.8) de kullanılırsa; $\forall\varepsilon' > 0$ için

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \le \varepsilon'$$

sağlanır. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0 \text{ dır.}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. (Korovkin,1953).

Teorem1.1.3 (Baskakov,1961)

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende $|f(x)| \le M_f(1 + x^2)$ olsun (L_n) lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere $\forall\, x \in [\mathrm{a,b}]$ ve $\mathrm{n} \to \infty$ için

$L_n(1;\, x) \rightrightarrows 1$

$L_n(t;\, x) \rightrightarrows \mathrm{x}$

$L_n(t^2;\, x) \rightrightarrows x^2$

koşullarının sağlanması için gerek ve yeter şart $[\mathrm{a,b}]$ ′ da ve $\mathrm{n} \to \infty$ iken

$L_n(f;\, x) \rightrightarrows f(x)$ olmasıdır.

Tanım 1.1.16.

Tüm reel eksende tanımlı ve $|f(x)| \le M_f\rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ *fonksiyon uzayı* denir. yani

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : |f(x)| \le M_f\rho(x)\}$$

dir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı sabir bir sayıdır.

$B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayına da $C_\rho(\mathbb{R})$ *fonksiyon uzayı* denir.yani $C_\rho(\mathbb{R}) = \{f : f \in B_\rho(\mathbb{R})\ ve\ f\ sürekli\}$ dir. $C_\rho(\mathbb{R}), B_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına *ağırlıklı uzaylar* denir. $C_\rho(\mathbb{R}) \subset B_\rho(\mathbb{R})$ olduğu açıktır ve bu uzaylardaki norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{\rho(x)} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Burada $\rho(x)$ monoton artan, sürekli, $\rho(x) \ge 1$ ve $\lim_{x\to\infty}\rho(x) = \infty$ şartını sağlayan bir fonksiyondur ve bu fonksiyona ‘’*ağırlık fonksiyonu*’’ denir. (Gadjiev,1974).

Önerme 1.1.3.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve A_n lineer pozitif operatörleri için

$A_n : C_\rho\,[0,\infty) \to B_\rho\,[0,\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$\| A_n(\rho\,;x) \|_\rho \leq M_\rho$ olmasıdır.

Burada $\rho(x) = 1 + x^2$ ve M_ρ bir pozitif sabittir . (Gadjiev,1974).

Teorem 1.1.4.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n : C_\rho\,[0,\infty) \to B_\rho\,[0,\infty)$ lineer pozitif operatörleri verilsin. Eğer

$\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere (A_n) lineer pozitif operatör dizisi için

$\lim_{n\to\infty} \|A_n(t^v; x) - x^v\|_\rho = 0 \quad v = 0,1,2$

şartı sağlanırsa bu durumda herhangi bir $f \in C_\rho^0[0,\infty)$ için

$\lim_{n\to\infty} \|A_n(f; x) - f(x)\|_\rho = 0$ olur. (Gadjiev,1976).

Tanım 1.1.17.

$f \in C_\rho^0[0,\infty)$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{|h|\leq\delta,\, x\in[0,b_n)} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

şeklinde tanımlı $\Omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun $f \in C_\rho^0[0,\infty)$ uzayında

ağırlıklı süreklilik modülü denir. (İspir,2001).

Lemma 1.1.1.

$f \in C_\rho^0[0,\infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i. $\Omega(f;\delta) \geq 0$

ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f;\delta_1) \leq \Omega(f;\delta_2)$

iii. $\lim_{\delta\to 0^+} \Omega(f;\delta) = 0$

iv. $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;m\delta) \leq 2m(1+\delta^2)\,\Omega(f;\delta)$

v. Herhangi $\lambda > 0$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)(1+\delta^2)\,\Omega(f;\delta)$

vi. $|f(t) - f(x)| \leq (1+x^2)(1+(t-x)^2)\,\Omega(f;|t-x|)$

vii. $|f(t) - f(x)| \leq 2(1+\delta^2)(1+x^2)(1+\frac{|t-x|}{\delta})(1+(t-x)^2)\,\Omega(f;\delta)$ (İspir,2001).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bernstein tarafından 1912 yılında ilk defa [0,1] aralığı üzerinde sürekli olan bir fonksiyona Bernstein Polinomları ile yaklaşılabileceğini göstermiştir.
Daha sonra birçok bilim adamı Bernstein operatörlerinin modifikasyonları ve genellemeleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Şimdi bu çalışmaların bazılarını verelim:
L.V.Kantorovich (1930) $K_n: L_1([0,1]) \to C([0,1])$, her $f \in L_1([0,1])$ ve negatif olmayan her hangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$(K_n f)(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(s)ds \qquad (2.1)$$

lineer pozitif operatörünü tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. (Kantrovich, 1930). Bu operatör Kantrovich operatörü olarak bilinir.

Bernstein polinomlarının [0, ∞) aralığına genişletilmiş bir modifikasyonu 1932 yılında Chlodowsky tanımlamış ve bu operatörler literatürde Chlodowsky operatörleri olarak bilinmektedir. Otto Szász 1950' de Bernstein polinomlarından esinlenerek [0, ∞) aralığında, kendi adıyla anılacak olan polinomlar dizisini tanımlamıştır.
$S_n: C[0,\infty) \longrightarrow C[0,\infty)$,

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlı olan lineer pozitif operatörleri Szász operatörleri olarak bilinmektedir.

Gadjieva ve Doğru 1998 yılında ağırlık uzaylarda szász tipinde operatörler dizisinin sürekli fonksiyonlara yaklaşımını incelemişlerdir.

Lesniewicz ve Rempulska 1997 yılında Szász tipi operatörlerin yaklaşım özellikleri üstel ağırlıklı uzaylarda araştırılmış ve yaklaşım teoremi uzayın normunda değil sup normunda verilmiş ve yaklaşım hızı noktasal olarak bulunmuştur.

Walzack 2000 yılında genelleştirilmiş Szász operatörleri ile $[0,\infty)\times\ [0,\infty)$' da sürekli fonksiyonlara ağırlıklı yaklaşım teoremlerini Lesniewicz ve Rempulska (1997) 'ya benzer olarak elde etmiştir.

Carmen ve Violeta Muraru 2006 yılında iki değişkenli Kantorovich-Szász tipli operatörlerin yaklaşım özelliklerini yakınsaklık hızını hesaplamışlardır.

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada incelediğimiz kaynaklar; konumuzla ilgili kitap ve dergiler YÖK dökümantasyon merkezi ve ODTÜ kütüphanesi taranmış, internet üzerinden makale taramaları yapılarak benzer konularda yüksek lisans ve doktora tezleri incelenerek konuyla ilgili çalışmalar indirilmiştir.

3.2.Yöntem

Kaynaklar kısmında verilen çalışmalar detaylı olarak incelenmiş ve bu sonuçlar $[0,\infty)$ aralığında ağırlıklı uzaylarda ve $[0,\infty)$ un kapalı ve sınırlı alt aralıklarında çalışılmıştır. Bu tezde tanımlamış olduğumuz yeni operatörlerin yaklaşımları Mapple bilgisayar yazılım programı desteğiyle sürekli bazı fonksiyonlara yaklaşım grafikleri çizdirilerek ve bu yaklaşımların nümerik farkları hesaplanmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu çalışmamızda Szász-Kantorovich ve Chlodowsky operatörlerinin terkibi olarak aşağıda tanımladığımız operatör dizilerini inceleyeceğiz. Önce operatörümüzün lineer ve pozitif olduğu gösterilmiştir. Keyfi bir $A > 0$ için [0,A] kapalı aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan fonksiyonlar için düzgün yaklaşımları incelenmiştir. [0,∞)'a genişleyen aralıklar üzerinde, ağırlıklı uzaylarda yaklaşımları ve yaklaşım hızları hesaplanmıştır. [0,∞)'da türevlenebilen ve türevi $C_\rho^0[0,\infty)$ da olan fonksiyonlar için türevinin ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Ayrıca çalışmamızda Mapple bilgisayar yazılım programı desteğiyle nümerik değerler tabloları hazırlanıp ve grafikler çizdirilecektir.

$$R_n(f;x) = \frac{(n+1)^2}{nb_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{nx}{b_n}\right)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} f(t)dt \tag{4.1}$$

$$x \in [0, b_n] \ , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{{b_n}^2}{n} = 0 \tag{4.2}$$

Şimdi $R_n(f;x)$ operatörünün pozitif ve lineer olduğunu görelim.

Pozitiflik;

Her $x \in [0, b_n]$ için. Eğer

$$f \geq 0 \Rightarrow \quad R_n(f;x) = \frac{(n+1)^2}{nb_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{nx}{b_n}\right)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} f(t)dt \ \geq 0 \Rightarrow \quad R_n(f;x) \geq 0$$

Lineerlik;

$$R_n(\alpha f + \beta g; x) = \frac{(n+1)^2}{nb_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{nx}{b_n}\right)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} (\alpha f + \beta g)(t)dt$$

$$= \frac{(n+1)^2}{nb_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{nx}{b_n}\right)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} f(t)dt$$

$$+ \frac{(n+1)^2}{nb_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{nx}{b_n}\right)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} g(t)dt$$

$$= \quad \alpha R_n(f;x) + \beta R_n(g;x)$$

Buradan da (4.1) ‘de tanımladığımız operatörün lineer ve pozitif olduğu görülür.

Lemma 4.1.1

(4.1) ‘de tanımlamış olduğumuz operatör; $\forall\ x \in [0, b_n]$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

a) $R_n(1;x) = 1$

b) $R_n(t;x) = \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)^2 x + \frac{1}{2}\frac{nb_n}{(n+1)^2}$

c) $R_n(t^2;x) = (1-\frac{1}{n+1})^4 x^2 + 2x\ \frac{n^3 b_n}{(n+1)^4} + \frac{1}{3}\frac{n^2 {b_n}^2}{(n+1)^4}$

d) $R_n(t^3;x) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^6 x^3 + \frac{9}{2}x^2\ \frac{n^5.b_n}{(n+1)^6} + \frac{7}{2}x\ \frac{n^4.{b_n}^2}{(n+1)^6} + \frac{1}{4}\ \frac{n^3.{b_n}^3}{(n+1)^6}$

e) $R_n(t^4;x) = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^8 x^4 + 8x^3\ \frac{n^7.b_n}{(n+1)^8} + 15\ x^2\ \frac{n^6.{b_n}^2}{(n+1)^8} + 6x\ \frac{n^5.{b_n}^3}{(n+1)^8} + \left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4$

İspat:

a) $$R_n(1;x) = \frac{(n+1)^2}{n.b_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{nx}{b_n})^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} 1.dt$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n.b_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{nx}{b_n})^k}{k!} . \frac{nb_n}{(n+1)^2} = 1$$

b) $$R_n(t;x) = \frac{(n+1)^2}{n.b_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_0^{\infty} \frac{(\frac{nx}{b_n})^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} t.dt$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n.b_n} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_0^{\infty} \frac{(\frac{nx}{b_n})^k}{k!} \frac{1}{2}.\frac{(nb_n)^2}{(n+1)^4}.[2k+1]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(nb_n)}{(n+1)^2} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_0^{\infty} \frac{(\frac{nx}{b_n})^k}{k!}\ 2.\frac{k}{n} + \frac{1}{2}\ \frac{nb_n}{(n+1)^2} e^{\frac{-nx}{b_n}} \sum_0^{\infty} \frac{(\frac{nx}{b_n})^k}{k!}$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)^2}.b_n.\frac{x}{b_n} + \frac{1}{2}.\frac{nb_n}{(n+1)^2} = \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)^2 x + \frac{1}{2}\frac{nb_n}{(n+1)^2} \tag{4.3}$$

c) $$R_n(t^2;x) = \frac{(n+1)^2}{n.b_n} e^{-a_n x} \sum_0^{\infty} \frac{(a_n x)^k}{k!} \int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}} t^2 dt \qquad (a_n = \frac{n}{b_n})$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n.b_n} e^{-a_n x} \sum_0^{\infty} \frac{(a_n x)^k}{k!} \frac{nb_n}{(n+1)^2}.\frac{1}{3}(\frac{nb_n}{(n+1)^2})^2.[3k^2+3k+1]$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{nb_n}{(n+1)^2})^2 e^{-a_n x} \sum_0^{\infty} \frac{(a_n x)^k}{k!} [3{a_n}^2.\frac{k^2}{{a_n}^2} + 3a_n\frac{k}{n} + 1]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^2.3{a_n}^2(x^2+\frac{x}{a_n}) + \frac{1}{3}.(\frac{nb_n}{(n+1)^2})^2.3a_n x + \left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^2$$

$$= \frac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4}.\frac{n^2}{{b_n}^2}\left(x^2+\frac{b_n x}{n}\right) + \frac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4}.\frac{n}{b_n}x + \frac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4}$$

$$= (\frac{n}{n+1})^4.x^2 + (\frac{n}{n+1})^4\frac{b_n}{n}x + \frac{n^3 b_n}{(n+1)^4}x + \frac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4}$$

$$=(\frac{n}{n+1})^4.x^2+2.\frac{n^3b_n}{(n+1)^4}x+\frac{1}{3}\frac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4}=(1-\frac{1}{n+1})^4x^2+2.\frac{n^3b_n}{(n+1)^4}x+\frac{1}{3}\frac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4} \quad (4.4)$$

d) $R_n(t^3;x)=\frac{(n+1)^2}{n.b_n}e^{-a_nx}\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}}t^3dt \qquad (a_n=\frac{n}{b_n})$

$$=\frac{(n+1)^2}{n.b_n}e^{-a_nx}\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{nb_n}{(n+1)^2}.\frac{1}{4}(\frac{nb_n}{(n+1)^2})^3.[4k^3+6k^2+4k+1]$$

$$=\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^3.e^{-a_nx}(\sum_{k=0}^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}.\frac{k.(k-1).(k-2)+3.k.(k-1)+3k-2k}{{a_n}^3})$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^3e^{-a_nx}(6\sum_{k=0}^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}k^2+4\sum_{k=0}^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}k+\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!})$$

$$=\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^3.e^{-a_nx}(\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}.\frac{k.(k-1).(k-2)}{{a_n}^3}3.\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}.\frac{k.(k-1)}{{a_n}^3}$$

$$+\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}.\frac{k}{{a_n}^3})+\frac{1}{4}\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^3.e^{-a_nx}(6.{a_n}^2(x^2+\frac{x}{a_n})+4.a_n.x+1)$$

$$=\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^3(x^3.{a_n}^3+3.x^2.{a_n}^2+a_n.x)+\frac{1}{4}\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^3.6.{a_n}^2(x^2+\frac{x}{a_n})$$

$$+4.a_n.x+1)$$

$$=x^3.\left(\frac{n}{n+1}\right)^6+\frac{9}{2}.x^2.\frac{n^5.b_n}{(n+1)^6}+\frac{7}{2}.x.\frac{n^4.{b_n}^2}{(n+1)^6}+\frac{1}{4}.\frac{n^3.{b_n}^3}{(n+1)^6} \quad (4.5)$$

e) $R_n(t^4;x)=\frac{(n+1)^2}{n.b_n}e^{-a_nx}\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\int_{\frac{knb_n}{(n+1)^2}}^{\frac{(k+1)nb_n}{(n+1)^2}}t^4dt$

$$=\frac{(n+1)^2}{n.b_n}e^{-a_nx}\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{nb_n}{(n+1)^2}.\frac{1}{5}(\frac{nb_n}{(n+1)^2})^4[5k^4+10k^3+10k^2+5k+1]$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4(5.{a_n}^4\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{k.(k-1).(k-2).(k-3)+6k^3-11k^2+6k}{{a_n}^4}$$

$$+10{a_n}^3\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{k.(k-1).(k-2)+3k^2-2k}{{a_n}^3}+10{a_n}^2\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{k.(k-1)+k}{{a_n}^3}$$

$$+5a_n\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{k}{a_n}+\sum_0^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!})$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4(5.(x^4{a_n}^4+6.x^3{a_n}^3+18x^2{a_n}^2-12xa_n-11x^2{a_n}^2$$

$$-11xa_n+6xa_n)+2.\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4(x^3{a_n}^3+3x^2{a_n}^2+3xa_n-2xa_n)$$

$$+2\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4(x^2{a_n}^2+xa_n)+\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4(xa_n)+\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4$$

$$=\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4(x^4{a_n}^4+6x^3{a_n}^3+7x^2{a_n}^2-17xa_n)$$

$$+2\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4x^3{a_n}^3+6.\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4x^2{a_n}^2$$

$$+2\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4 xa_n)+2\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4 xa_n+\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4 xa_n+\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4$$

$$=x^4\left(\frac{n}{n+1}\right)^8+8x^3\frac{n^7.b_n}{(n+1)^8}+15x^2\frac{n^6.{b_n}^2}{(n+1)^8}+6x\frac{n^5.{b_n}^3}{(n+1)^8}+\left(\frac{nb_n}{(n+1)^2}\right)^4 \qquad (4.6)$$

Teorem 4.1.1. $f \in C[0,A]$ olsun ve bütün reel eksende sınırlı olsun.

Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\|R_nf-f\|_{C[0,A]}=0$$

dır.

İspat 4.1.1

Teorem 1.1.2 den yararlanarak $n\to\infty$ için

- $R_n(1;x)\rightrightarrows 1$
- $R_n(t;x)\rightrightarrows x$
- $R_n(t^2;x)\rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$\|R_n1-1\|_{C[0,A]}=0$ olduğu açıktır. (4.3) ve (4.4) de elde ettiğimiz ifadelerini yerlerine yazarsak;

$$\|R_nt-x\|_{C[0,A]}=\max_{0\le x\le A}|R_n(t;x)-x|=\max_{0\le x\le A}\left|\left(\frac{2n+1}{(n+1)^2}\right)x+\frac{nb_n}{2(n+1)^2}\right|$$

$$=\left|\left(\frac{4n+2}{2(n+1)^2}\right)A+\frac{nb_n}{2(n+1)^2}\right| \text{ buradan}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{4n+2}{2(n+1)^2}\right)A+\frac{nb_n}{2(n+1)^2}\right|\to 0$$

$$\|R_nt^2-x^2\|_{C[0,A]}=\max_{0\le x\le A}|R_n(t^2;x)-x^2|$$

$$=\max_{0\le x\le A}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^4x^2+2\frac{n^3b_n}{(n+1)^4}x+\frac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4}-x^2\right|$$

$$=\max_{0\le x\le A}\left|[(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2-1)(\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+1)]x^2+(2\frac{n^3}{(n+1)^3}x+\frac{n^2b_n}{(n+1)^3})\frac{b_n}{n+1}\right|$$

$$\le\left|\frac{-2(2n+1)}{(n+1)^2}A^2+(2\frac{n^3}{(n+1)^3}A+\frac{n^2b_n}{(n+1)^3})\frac{b_n}{n+1}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2(2n+1)}{(n+1)^2}A^2+(2\frac{n^3}{(n+1)^3}A+\frac{n^2b_n}{(n+1)^3})\frac{b_n}{n+1}\right|\to 0$$

olur. Korovkin teoreminden dolayı

$$\lim_{n\to\infty}\|R_nf-f\|_{C[0,A]}=0$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. $f\in C_\rho^0[0,\infty)$ olsun, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\|R_n f - f\|_{\rho,[0,b_n]}= 0$$

İspat 4.1.2

$$\|R_n(f) - f\|_{\rho,[0,b_n]} = \sup_{x\in[0,b_n]} \frac{|R_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2}$$

olmak üzere; Teorem 1.1.4 den yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty}\|R_n 1 - 1\|_{\rho,[0,b_n]} = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,b_n]} \frac{|R_n(1;x) - 1|}{1+x^2} = 0$$

(4.3)'teki ifadeyi yerine yazarsak

$$\|R_n t - x\|_{\rho,[0,b_n]} = \sup_{x\in[0,b_n]} \frac{\left|\left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)x + \frac{nb_n}{2(n+1)^2}\right|}{1+x^2}$$

$$\leq \frac{2n+1}{2(n+1)^2} + \frac{nb_n}{2(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|R_n t - x\|_{\rho,[0,b_n]} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(n+1)^2} + \frac{nb_n}{2(n+1)^2} \to 0$$

(4.4)'deki ifadeyi de kullanırsak

$$\|R_n t^2 - x^2\|_{\rho,[0,b_n]} = \sup_{x\in[0,b_n]} \frac{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^4 x^2 + 2\frac{n^3 b_n}{(n+1)^4}x + \frac{n^2 {b_n}^2}{(n+1)^4} - x^2\right|}{1+x^2}$$

$\{0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1\}$ olduğundan

$$\leq \frac{4(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 4(n+1) + 1}{(n+1)^4} + 2.\frac{n^3 b_n}{(n+1)^4} + \frac{n^2 {b_n}^2}{(n+1)^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\|R_n t^2 - x^2\|_{\rho,[0,b_n]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 4(n+1) + 1}{(n+1)^4} + 2.\frac{n^3 b_n}{(n+1)^4} + \frac{n^2 {b_n}^2}{(n+1)^4} \to 0$$

dolayısıyla

Teorem 1.1.4′den $\quad \lim_{n\to\infty}\|R_n f - f\|_{\rho}= 0$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. $f \in C_\rho^0[0,\infty)$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\|R_n f - f\|_{\rho,[0,b_n]} \leq M\Omega\left(f; \sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\right)$$

burada $M = 1064$ dür.

İspat 4.1.3

Lineerlik ve monotonluk özelliğinden;

$|R_n(f;x) - f(x)| \leq R_n(|(f(t) - f(x)|; x)$ olur.

Lemma 1.1.1 de (vii) deki özellikleri kullanarak;

$$|f\,(\,t\,)\, - \,f\,(\,x\,)| \leq 2(1+{\delta_n}^2)(1+x^2)(1+\frac{|t-x|}{\delta_n})(1+(t-x)^2)\,\Omega(f;\delta_n)$$

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\left(1+{\delta_n}^2\right)(1+x^2)\Omega(f;\delta_n).S_n(t,x)$$

$$S_n(t,x) = \left(1+\frac{|t-x|}{\delta_n}\right)(1+(t-x)^2)\ dersek;$$

buradan ;

$$S_n(t,x) \leq \begin{cases} 2\left(1+{\delta_n}^2\right), & |t-x| < \delta_n \\ 2\left(1+{\delta_n}^2\right)\dfrac{(t-x)^4}{{\delta_n}^4}, & |t-x| \geq \delta_n \end{cases}$$

ve böylece

$$S_n(t,x) \leq 2\left(1+{\delta_n}^2\right)\left[1+\frac{(t-x)^4}{{\delta_n}^4}\right]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |R_n(f;x) - f(x)| &\leq R_n(|(f(t) - f(x)|;x) \\ &\leq 2\left(1+{\delta_n}^2\right)(1+x^2)\Omega(f;\delta_n).R_n(S_n(t,x);x) \\ &\leq 4\left(1+{\delta_n}^2\right)\Omega(f;\delta_n)(1+x^2)\left[1+\tfrac{1}{{\delta_n}^4}R_n((t-x)^4;x)\right]. \end{aligned}$$

(4.3), (4.4), (4.5) ve (4.6)' da ki ifadelerini dikkate alırsak;

$$\begin{aligned} R_n((t-x)^4;x) &= R_n(t^4;x) - 4xR_n(t^3;x) + 6x^2R_n(t^2;x) - 4x^3R_n(t;x) + x^4R_n(1;x) \\ &= x^4.\left(\tfrac{n}{n+1}\right)^8 + 8x^3.\tfrac{n^7.b_n}{(n+1)^8} + \ 15\,x^2.\tfrac{n^6.{b_n}^2}{(n+1)^8} - 4x[x^3.\left(\tfrac{n}{n+1}\right)^6 \\ &+\tfrac{9}{2}.x^2.\tfrac{n^5.b_n}{(n+1)^6} + \tfrac{7}{2}.x.\tfrac{n^4.{b_n}^2}{(n+1)^6} + \tfrac{1}{4}.\tfrac{n^3.{b_n}^3}{(n+1)^6}] \ + 6x^2[(1-\tfrac{1}{n+1})^4x^2 \\ &+2.\tfrac{n^3b_n}{(n+1)^4}x + \tfrac{1}{3}\tfrac{n^2{b_n}^2}{(n+1)^4}] \ - 4x^3[\left(1-\tfrac{1}{(n+1)}\right)^2 x + \tfrac{1}{2}.\tfrac{nb_n}{(n+1)^2}] + x^4 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{(16n^4+32n^3+24n^2+8n+1)}{(n+1)^8}\right)x^4$$

$$+\left(\frac{(24n^5b_n+8n^4b_n-18n^3b_n-12n^2b_n-2nb_n)}{(n+1)^8}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{(3n^6{b_n}^2-20n^5{b_n}^2-2n^4{b_n}^2+8n^3{b_n}^2+2n^2{b_n}^2)}{(n+1)^8}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{(5n^5{b_n}^3-2n^4{b_n}^3-n^3{b_n}^3)}{(n+1)^8}\right)x+\frac{n^4{b_n}^4}{(n+1)^8}$$

$$\leq \left(\frac{(16n^4+32n^3+24n^2+8n+1)}{(n+1)^8}\right)x^4+\left(\frac{(24n^5b_n+8n^4b_n)}{(n+1)^8}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{(3n^6{b_n}^2+8n^3{b_n}^2+2n^2{b_n}^2)}{(n+1)^8}\right)x^2+\left(\frac{(5n^5{b_n}^3)}{(n+1)^8}\right)x+\frac{n^4{b_n}^4}{(n+1)^8}$$

olur. Her iki tarafın $[0,b_n]$ üzerinde supremumu alınırsa

$$\sup_{x\in[0,b_n]} R_n((t-x)^4;x) \leq \frac{81n^4{b_n}^4+32n^5{b_n}^4+13n^6{b_n}^4+5n^5{b_n}^4+n^4{b_n}^4}{(n+1)^8}$$

$$\leq \frac{{b_n}^4}{(n+1)^2}\left(\frac{81n^4+32n^5+13n^6+5n^5+n^4}{(n+1)^6}\right)$$

$$\leq \frac{{b_n}^4}{(n+1)^2}\left(\frac{132n^6}{(n+1)^6}\right)\leq 132\frac{{b_n}^4}{(n+1)^2} \tag{4.7}$$

bulunur. Buradan

$$\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|R_n(f;x)-f(x)|}{(1+x^2)}$$

$$\leq 4(1+{\delta_n}^2)\Omega(f;\delta_n)\left[1+\frac{132}{{\delta_n}^4}\frac{{b_n}^4}{(n+1)^2}\right]$$

elde edilir. , $\delta_n=\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}$ alınırsa, $\delta_n\to 0$ olduğundan belirli bir n den sonra $\delta_n<1$ olur. Böylece M=1064 olmak üzere

$$\|R_n f-f\|_{\rho,[0,b_n]}\leq M\Omega\left(f;\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4. f, $[0,\infty)$ 'da türevlenebilir ve $f'\in C^0_\rho[0,\infty)$ olsun.

Bu taktirde

$$\|R_n f-f\|_{\rho,[0,b_n]}\leq K\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\,\Omega\left(f';\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\right)$$

İspat 4.1.4

f, $[0,\infty)$' da türevlenebilir ve $f' \in C_\rho^0[0,\infty)$ olduğundan t ile x arasında ortalama değer teoreminden

$$f'(u) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

olacak şekilde bir u vardır. Eşitliğin sol tarafına $-f'(x) + f'(x)$ eklersek

$$f(t)-f(x) = (t-x)\, f'(x) + (t-x)\left[\, f'(u) - f'(x)\right] \qquad (4.8)$$

elde edilir. $|u-x| \le |t-x|$ olduğunda $\Omega(f;|u-x|) \le \Omega(f;|t-x|)$ olur.

Lemma 1.1.1 den;

$$\left|\, f'(u) - f'(x)\right| \le 2(1+{\delta_n}^2)(1+x^2)(1+\frac{|u-x|}{\delta_n})(1+(u-x)^2)\,\Omega\left(f';\delta_n\right)$$

$$\le 2(1+\delta^2)(1+x^2)(1+\frac{|t-x|}{\delta_n})(1+(t-x)^2)\,\Omega\left(f';\delta_n\right)$$

$$= 2\left(1+{\delta_n}^2\right)(1+x^2)\left[\,1+\tfrac{|t-x|}{\delta_n}+(t-x)^2+\tfrac{|t-x|(t-x)^2}{\delta_n}\right]\Omega\left(f';\delta_n\right)$$

elde edilir.(4.8)'den görünen aşağıdaki çarpımı hesaplayalım.

$|t-x||\, f'(u) - f'(x)|$

$$\le 2\left(1+{\delta_n}^2\right)(1+x^2)\left[\,|t-x| + \frac{(t-x)^2}{\delta_n} + |t-x|(t-x)^2 + \frac{(t-x)^4}{\delta_n}\right]\Omega\left(f';\delta_n\right) \quad (4.9)$$

(4.8) eşitliğine operatör uygulanırsa

$$R_n(f;x) - f(x) = R_n\big((t-x);x\big)\, f'(x) + R_n\big((t-x)[\,f'(u)-f'(x)];x\big)$$

buradan

$$|R_n(f;x) - f(x)| \le R_n(|t-x|;x)|\, f'(x)| + R_n(|t-x|\,|f'(u) - f'(x)|;x)$$

$R_n(|t-x|;x)|\, f'(x)| = I_1$ ve $R_n(|t-x|\,|f'(u) - f'(x)|;x) = I_2$ dersek

$$|R_n(f;x) - f(x)| \le I_1 + I_2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$I_1 = R_n(|t-x|;x)|\, f'(x)| \le \sqrt{R_n((t-x)^2;x)}\;|\, f'(x)| \le \sqrt{A_n(x)}\; M_{f'}(1+x^2)$$

burada $M_{f'}$, f'-ne bağlı bir sabit ve

$$A_n(x) = -\frac{2n+1}{(n+1)^2}x^2 + \frac{nb_n}{(n+1)^2}\left(\frac{n^2-2n-1}{(n+1)^2}\right)x$$

dır. (4.9)' dan;

$$I_2 = R_n(|t-x|\,|f'(u) - f'(x)|;x)$$

$$\le\; 2\left(1+{\delta_n}^2\right)(1+x^2)[\sqrt{R_n((t-x)^2;x)}+\tfrac{1}{\delta_n}R_n((t-x)^2;x)$$

$$+\sqrt{R_n((t-x)^2;x)}\sqrt{R_n((t-x)^4;x)} + \frac{1}{\delta_n}R_n((t-x)^4;x)\Omega(\,f';\delta_n)$$

$R_n((t-x)^4;x) = B_n(x)$ dersek;

$$B_n(x) = \left(\frac{(16n^4+32n^3+24n^2+8n+1)}{(n+1)^8}\right)x^4$$
$$+\left(\frac{(24n^5b_n+8n^4b_n-18n^3b_n-12n^2b_n-2nb_n)}{(n+1)^8}\right)x^3$$
$$+\left(\frac{\left(3n^6{b_n}^2-20n^5{b_n}^2-2n^4{b_n}^2+8n^3{b_n}^2+2n^2{b_n}^2\right)}{(n+1)^8}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{\left(5n^5{b_n}^3-2n^4{b_n}^3-n^3{b_n}^3\right)}{(n+1)^8}\right)x+\frac{n^4{b_n}^4}{(n+1)^8}$$

$$I_{1+}I_2 \le \sqrt{A_n(x)}\,M_{f'}(1+x^2)+2\left(1+{\delta_n}^2\right)(1+x^2)[\sqrt{A_n(x)}+\frac{1}{\delta_n}A_n(x)$$
$$+\sqrt{A_n(x)}\sqrt{B_n(x)}+\frac{1}{\delta}B_n(x)]\Omega(f';\delta_n)$$

böylece

$$\frac{|R_n(f;x)-f(x)|}{1+x^2}$$
$$\le \sqrt{A_n(x)}\,M_{f'}+2\left(1+{\delta_n}^2\right)[\sqrt{A_n(x)}+\frac{1}{\delta_n}A_n(x)+\sqrt{A_n(x)}\sqrt{B_n(x)}+\frac{1}{\delta_n}B_n(x)]\Omega(f';\delta_n)$$

elde edilir.

her iki tarafın $[0,b_n]$ üzerinde supremumu alınırsa

$$\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|R_n(f;x)-f(x)|}{1+x^2} \le \sup_{x\in[0,b_n]}\left(\begin{array}{c}\sqrt{A_n(x)}\,M_{f'}+2\left(1+{\delta_n}^2\right)[\sqrt{A_n(x)}+\frac{1}{\delta_n}A_n(x)\\ +\sqrt{A_n(x)}\sqrt{B_n(x)}+\frac{1}{\delta_n}B_n(x)]\Omega(f';\delta_n)\end{array}\right)$$

$$\sup_{x\in[0,b_n]}A_n(x) \le \sup_{x\in[0,b_n]}(-\frac{2n+1}{(n+1)^2}{b_n}^2+\frac{nb_n}{(n+1)^2}\left(\frac{n^2-2n-1}{(n+1)^2}\right)b_n$$
$$=(-\frac{2n+1}{n+1}+\frac{n}{(n+1)^2}\left(\frac{n^2-2n-1}{n+1}\right)\frac{{b_n}^2}{n+1} \le (\frac{n^3}{(n+1)^3})\frac{{b_n}^2}{n+1} \le \frac{{b_n}^2}{n+1}$$

daha önceden elde ettiğimiz (4.7)'deki ifadeyi yerine uygularsak,

$\sup_{x\in[0,b_n]} B_n(x) \le 132\frac{{b_n}^4}{(n+1)^2}$ bulunur. Şimdi bu ifadeleri yerlerine yazarsak

$$\sup_{x\in[0,b_n]}\frac{|R_n(f;x)-f(x)|}{1+x^2}$$
$$\le\left(\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\,M_{f'}+2\left(1+{\delta_n}^2\right)\left[\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}+\frac{1}{\delta_n}\frac{{b_n}^2}{n+1}+\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\sqrt{132\frac{{b_n}^4}{(n+1)^2}}+\frac{1}{\delta_n}132\frac{{b_n}^4}{(n+1)^2}\right]\Omega(f';\delta_n)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\left(M_{f'} + 2\left(1+{\delta_n}^2\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}} + 2\sqrt{33}\frac{{b_n}^2}{n+1} + \frac{132}{\delta_n}\frac{{b_n}^3}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right]\Omega(f';\delta_n)\right)$$

$0 < a_n$ ve $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğunda belirli bir n'den sonra $a_n < 1$ olur.

Böylece ${a_n}^k < a_n$ $(k > 1)$ olur ve $\delta_n = \sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}$ seçilirse

$$\sup_{x\in[0,b_n]} \frac{|R_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2}$$

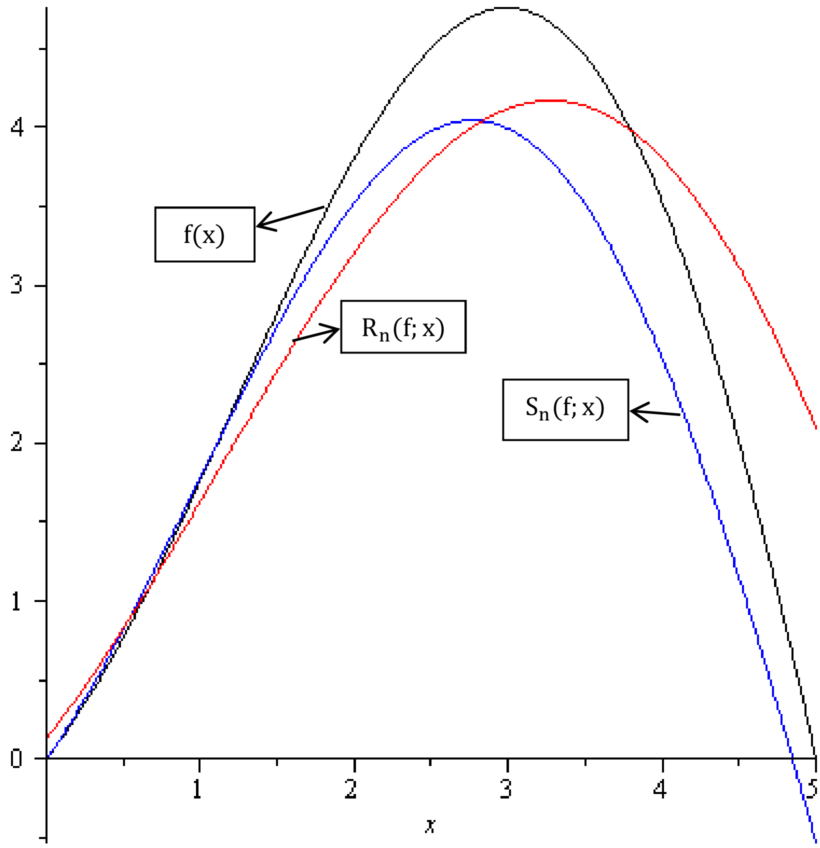
$$\leq \sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\left(M_{f'} + 4[1+1+12+132]\right)\Omega\left(f';\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\right)$$

$$\leq K\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\,\Omega\left(f';\sqrt{\frac{{b_n}^2}{n+1}}\right)$$

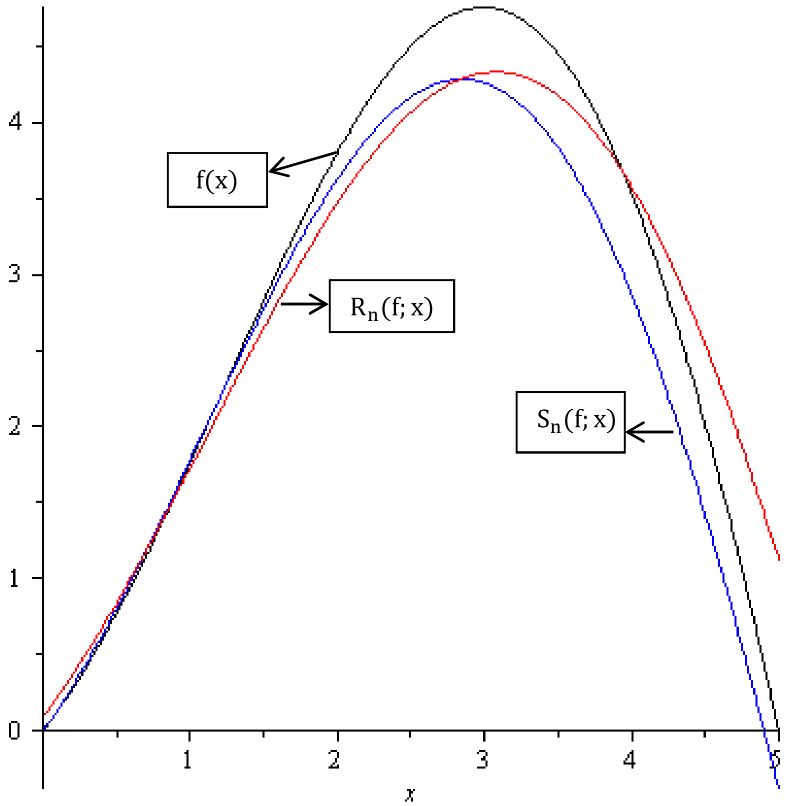
elde edilir. Burada $K = M_{f'} + 584$ dür.

Şimdide (2.2) ve (4.1)'de tanımlamış olduğumuz operatörlerinin farklı n değerleri için $f(x) = (\mathrm{x}+2)\sin(\frac{1}{5}\pi x)$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşımını grafik üzerinde görelim. Ayrıca bu yaklaşımları nümerik hesaplamalarla tablo üzerinde karşılaştıralım.

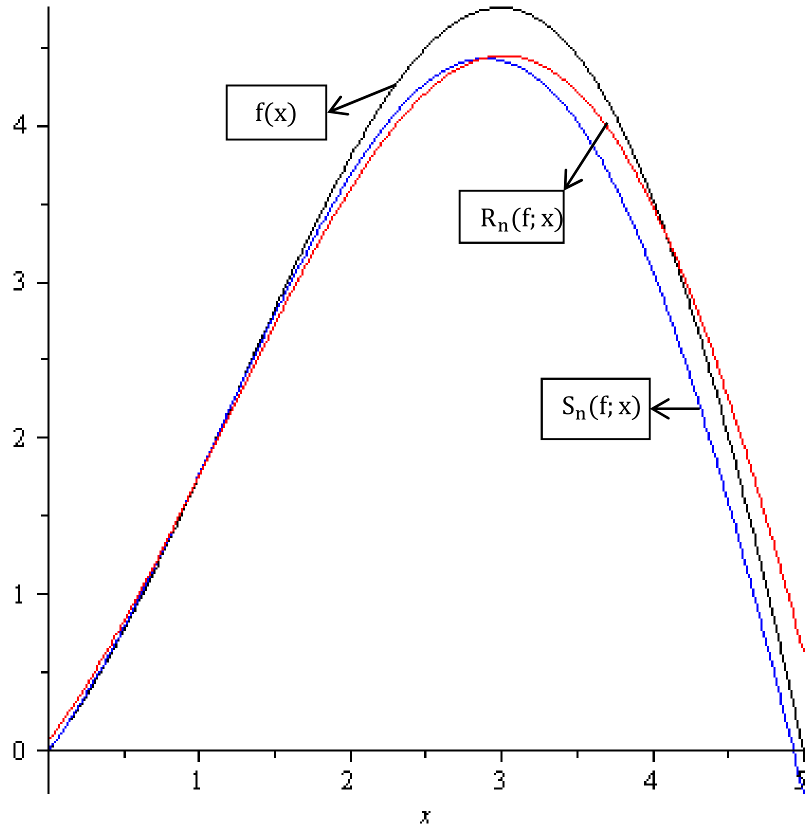
Öncelikle $n = 10$ için (2.2) ve (4.1) 'ü inceleyelim.



Şekil 4.1. (2.2) ve (4.1) in $n = 10$ için $f(x) = (x + 2)\sin(\frac{1}{5}\pi x)$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşımını karşılaştırılması



Şekil 4.2. (2.2) ve (4.1) in $n = 20$ için $f(x) = (x + 2)\sin(\frac{1}{5}\pi x)$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşımını karşılaştırılması



Şekil 4.3. (2.2) ve (4.1) in $n = 35$ için $f(x) = (x+2)\sin(\frac{1}{5}\pi x)$ şeklinde verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşımını karşılaştırılması

Grafik yardımıyla görüleceği üzere n sayısı büyüdükçe tanımlamış olduğumuz operatör f fonksiyona daha iyi yaklaşmaktadır.

Bunu bir de nümerik hesaplamalarla tablo üzerinde görelim.

$$F_1(x) = |R_n(f;x) - f(x)| \ , \ F_2(x) = |S_n(f;x) - f(x)|$$

$$F_3(x) = \frac{|R_n(f;x) - f(x)|}{|S_n(f;x) - f(x)|} \text{ olsun.}$$

Çizelge 4.1. (4.1) nin f fonksiyonuna yaklaşımının n=10, 20, 35 için karşılaştırılması

$F_1(x)$	1	2	3	4	5
n=10	0.13025395	0.59680140	0.63657794	0.27465187	2.09286202
n=20	0.03289516	0.33450766	0.42942117	0.10853642	1.11561868
n=35	0.00078058	0.20497074	0.30597492	0.04520140	0.62401076

Çizelge 4.2. (2.2) nin f fonksiyonuna yaklaşımının n=10, 20, 35 için karşılaştırılması

$F_2(x)$	1	2	3	4	5
n=10	0.02282404	0.28230939	0.76515716	0.99085894	0.52745302
n=20	0.01801037	0.17623009	0.49769429	0.66553826	0.38218593
n=35	0.01349529	0.11719948	0.33919463	0.46217788	0.27686157

Çizelge 4.3. (2.2) ile (4.1) in f fonksiyonuna yaklaşımının n=10, 20, 35 için karşılaştırılması

$F_3(x)$	1	2	3	4	5
n=10	5.70668748	2.11399767	0.83195711	0.27718564	3.96786430
n=20	1.82645667	1.89813018	0.86282115	0.16308066	2.91904697
n=35	0.05784134	1.74890476	0.69020629	0.09780088	2.25387279

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada sonuçlar 4. Bölümde verilmiştir. (4.1)'de tanımlanmış olan $R_n(f;x)$ operatörlerinin pozitifliği ve lineerliği gösterilmiştir. $1, t, t^2, t^3, t^4$ ... gibi test fonksiyonlarının operatör altındaki görüntüleri hesaplanmıştır. Sınırlı ve kapalı bir aralıkta sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan f fonksiyonlarının yaklaşımları incelenmiştir. $C_\rho^0[0,\infty)$ ağırlıklı uzayında olan fonksiyonların ağırlıklı normda yaklaşımları ve yaklaşım hızları hesaplanmıştır. Son olarak türevlenebilen ve türevi $C_\rho^0[0,\infty)$ dan olan fonksiyonlar için, türevinin ağırlıklı uzaylarda tanımlı süreklilik modülü kullanılarak yakınsaklık hızı hesaplanmıştır.

Önceki çalışmalarda incelediğimiz Szász operatörleri ile ağırlıklı uzaylarda tanımladığımız (4.1) deki operatörümüzün herhangi sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşımı Mapple bilgisayar yazılım programı desteğiyle $n = 10, 20, 35$ için yaklaşımları arasındaki fark grafik üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca $n = 10, 20, 35$ için yaklaşımları nümerik değerler hesaplanarak bir tablo halinde verilmiştir.

5.2. Öneriler

Kendisi ve türevi $C_\rho^0[0,\infty)$ da olan fonksiyonlar ele alındığında daha güzel bir yaklaşım elde etmek için (4.1)' de tanımlanmış olan operatörün kullanılması uygun olacaktır.

KAYNAKLAR

AGRANTİNİ, O., 2011. Statistical convergence of a non-positive approximation process. Chaos Solitons & Fractals, 44: 977-981.

ALTOMARE, F. and CAMPİTİ, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications.de Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin-New York.

BALCI, M., 1999. Analiz, Cilt 2. Ankara.

BASKAKOV, V.A., 1961. On a Construction of Converging Sequences of Linear Positive Operators, Studies of Modern Problems of Constructive Theory of Functions. Moscow, 314-318.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz. Ankara.

BERNSTEİN, S., 1912. Démonstration du théorémé de Weierstrass, fondee surla calcul des probabilities. Commun. Soc. Math. Kharkow ,13(2): 1-2.

CHLODOVSKY I., 1937. Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M. S. Bernstein. Compos Math,4:380-393.

GADJİEV, A.D., 1976. On P.P. Korovkin type theorems. Math. Zametki, 20(5):781-786, Math. Notes, 20(5):996-998.

GADJİEV, A.D., 1974. The convergence problem for a sequence of positive linear Operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P.Korovkin. Soviet Math. Dokl., 15(5):1433-1436.

HACISALİHOĞLU, H. and HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, Ankara.

İSPİR, N., 2001. On modified Baskakov operators on weighted spaces. Turk. J. Math., 25:355-365.

KANTOROVICH, L.V., 1930. Sur certain developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein, I, II, C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600.

KOROVKİN, P.P., 1953. On Convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl Akad Nauk SSSR, 90:961-964.

LESNİEWİCZ, M. and REMPULSKA, L., 1997. Approximation by some operators of the Szasz-Mirakjan type in exponential weight spaces. Glasnik Math., 35(52):57-69.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N. and EKİNCİOĞLU, İ., 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz1. Ankara.

PINKUS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J. Approx Theory, 107:1-66.

SHEVCHUK, I.A., 1992. Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a Segment. Naukova Dymka, Kiev, 324p.

SZASZ, O., 1950. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Research Nat. Bur. Standards, 45:239-245.

WALZACK, Z., 2000 . On certain Modified Szasz-Mirakjan operators for functions of two variables. Demonstratio Math., XXXIII(1), 91-100.

WEİERSTRASS, K., 1885. Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veränderlichen. Sitzungberichte der Akademie zu Berlin, 633-639, 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Reşat ASLAN

Uyruğu : T.C

Doğum Yeri ve Tarihi : Şanlıurfa/1983

e-mail : resat.aslan@iskur.gov.tr

EĞİTİM

Derece	Adı,İlçe,İl	Bitirme Yılı
Lise	: Murat Koleji,Merkez,Şanlıurfa	2002
Üniversite	: Akdeniz Üniversitesi,Merkez,Antalya	2008
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi,Merkez,Şanlıurfa	H. Devam

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2008-2010	M.E.B	Vekil Mat.Öğretmeni
2012-devam	Çalışma ve İş kurumu	İş ve Meslek Danışmanı

YABANCI DİLLER

İngilizce(orta düzey), Almanca(orta düzey), Hollandaca/Flemenkçe(iyi düzey)