T.C.

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKSEL BİYOLOJİDE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM MODELLERİ

Neriman AVCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2015

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Neriman AVCI'nın hazırladığı **"Matematiksel Biyolojide Gecikmeli Diferansiyel Denklem Modelleri"** konulu bu çalışma 24/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman	: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ	……………………………….
Üye	:Doç. Dr. Nayil KILIÇ	……………………………….
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Haydar ALICI	……………………………….

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. Sinan UYANIK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİKSEL BİYOLOJİDE GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEM MODELLERİ

Neriman AVCI

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
YIL: 2015, Sayfa:119

Bu tezin amacı, gecikmeye sahip denklemlerin salınımı ile ilgili gerekli analizi yapmak ve matematiksel biyolojideki gecikmeli diferansiyel denklem modellerini irdelemektir.

Anahtar Sözcükler:gecikmeli diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemler, salınım teorisi

ABSTRACT

MSc Thesis

DELAYED DİFFERENTİAL EQUATİONS İN MATHEMATİCAL BİOLOGY MODELS

Neriman AVCI

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Year: 2015, Page:119

In this thesis, the oscillation and nonoscilation theory of delay differantial equations are studied and examine the equation models in mathematical biology.

Keywords: delay differential equations, differantial equations, oscillation theory.

TEŞEKKÜR

Hazırladığım bu tezin her aşamasında değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yol gösteren ve yardımcı olan, çok değerli hocam Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye; kıymetli bilgi ve tecrübesini esirgemeyen sevgili babam Mehmet AVCI' ya tez jürisinde bulunan ve katkı sağlayan Doç. Dr. Nayil KILIÇ ve Yrd. Doç. Haydar ALICI'ya ve çalışma arkadaşlarım Mikail KARACA ve Abbas TUTAR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Biyolojik sistemleri modellemede bayağı ve kısmi diferansiyel denklemlerin kullanımı oldukça uzun bir geçmişe sahiptir. Bu alanda en ünlülerden bazıları: Malthus, Verhulst, Lotka ve Volterra'dır.

Tüm bu modeller daha komplike olayların (fenomenaların) anlaşılabilirliği için yazılmıştır. Basit modeller doğal sistemler dinamiğinin zengin yapısını tam olarak açıklayamamaktadır. Sistemlerin bu kompleks yapısını irdelemek için çok daha değişik yaklaşımlar mevcuttur. Bayağı diferansiyel denklemlere zaman gecikmesi eklenerek önemli başka bir yaklaşım elde edibilir. Gecikmeler veya gecikmeleri temsil eden zamanlar kuluçka süresi veya ulaşım gecikmelerini temsil edebilir. Bazı biyolojik sistemlerin ayrıntılı işleyişleri tam olarak bu geçmiş zamanda gizlidir.

Biyolojik modellerin birçok alanında gecikmeli diferansiyel denklemler yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, Bulaşıcı hastalık dinamiğinde: Hastalık kapma, bulaşma, mikrop, ilaç tedavisi, bağışıklık tepkisi ve benzerleri. Bunun yanında, Gecikmeli diferansiyel denklemler aynı zamanda, Kemostat modellerin çalışmasında kullanılır.

Günlük ritimlerde (veya yirmi dört saatlik ritimlerde), salgın hastalıklar biliminde (Epidemiyolojide), solunum sistemi hastalıklarında, tümör hücre büyümesinde, nöral ağlar (veya sinir ağları), ekolojik verilerin istatiksel analizinde ve bir çok türün popülasyon dinamiğinde gecikme parametresi önemli yer tutmaktadır.

Diferansiyel denklemler teorisi doğada gerçek hayat problemlerini formüle eden en temel enstrümanlardan biridir. Aynı zamanda, mekanik, fizik ve diğer sosyal bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir. Uygulamaların çoğunda ele alınan bir sistemin nedensellik ilkesi tarafindan yönetildiği kabul edilir veya düşünülür. Yani, sistemin geçmişe bağlı konumuyla değil de sadece şu anki konumu tarafindan idare edildiği düşünülür. Aynı zamanda, sistem konumun değişim oranı ve konumu içeren bir denklem tarafindan idare ediliyorsa sistemin modellemesi genellikle ya bayağı diferansiyel denklemler (BDD) ya da kısmi diferansiyel denklemler (KDD) ile ifade edilir. Buna rağmen, detaylı bir irdeleme yapıldığında nedensellik ilkesinin sadece mevcut konum için doğru bir yaklaşım olduğu ve genelde uygulamaların çoğunda doğru olmadığı düşünülür. Bunun yerine daha realist olan ve sistemin geçmişteki konumunu içeren modellemeler yapılır. Sistemin geçmişteki konumunu görmemezlikten gelmek sistemin modellemesini anlamsız kılabilir.

Bu modellemeleri analitik ve kalitatif olarak irdeleyen ve diferansiyel denklemlerin alt dalları olan gecikmeli diferansiyel denklemler (GDD), nötr gecikmeli diferansiyel denklemler (NGDD) ve fark diferansiyel denklemleridir (FDD).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

GDD, FDD ve NGDD ilk olarak, 18. yüzyılda bu alanın öncüleri arasında yer alan Volterra, Bernoulli, Laplace ve Condorcet tarafindan ele alındı. Geçmişten günümüze sistematik olarak araştırmacıların konuya olan ilgisi giderek artmakta ve hali hazırda bu konu hızlı bir gelişim göstermektedir. Konuya ilgi gittikçe artmaktadır. Bu konuda, yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır. Bu tip denklemlerin yaygın kullanım alanları kontrol teorisi, matematiksel biyoloji, matematiksel ekonomi, sistemler teorisi ve klasik analizdir.

İlk olarak, Volterra Predator-Prey modellerinde ve viskoelastisite problemlerinde gecikme parametresini kullanan ilk araştırmacılardandır. İletişim zamanını ignore etmeyen (göz ardı etmeksizin) basit geri dönüşümlü kontrol sistemlerinde modern zamanların ilk araştırmacısı Minorsky

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-r))$$

denklemini çalışmıştır. Bunun yanında, Minorsky geminin stabilite ve karışım problemlerinde geri dönüşüm mekanizmasında gecikme parametresinin önemine açıkça vurgu yapmıştır. Kontrol teorisine olan ilgiyle beraber gecikme parametresinin FDD lere olan katkısını ifade etmek gerekir.

Mishkis gecikmeli lineer diferansiyel denklemler ilgili genel teoriyi takdim eden ilklerdendir. Ayrıca, Bellman ve Danskin çeşitli denklemlerin uygulamalarında, örneğin, biyoloji ve ekonomi de geçmiş hafizanın (sistemin geçmişteki konumu) önemine vurgu yaptılar. Aynı zamanda, çok iyi organize edilmiş sabit katsayılı diferansiyel denklemler teorisi ve stabilite teorisinin başlangıçlarını takdim ettiler. Stabilite teorisine katkıları olan diğer araştırmacılar Cooke ve Liapunov'dır. Kayıpsız transmisyon (iletim) hatlarında (Kayıpsız iletim sistemlerinde) α, β ve μ sabit olmak üzere

$$v'(t) = \alpha v'(t-r) - \beta v(t) - \alpha\beta\mu v(t-r) + F(v(t), v(t-r)).$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

"1"3.1 Temel Kavramlar

3.1.1 Başlangıç değer problemi

ℓ sapmalı (argümanlı) n. mertebeden skaler diferansiyel denklemine bakalım.

$$f\left(t, x(t),..., x^{(m_0)}(t), x(t-\tau_1(t)),..., x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)),..., x(t-\tau_\ell(t)),..., x^{(m_\ell)}(t-\tau_\ell(t))\right)=0 \quad (3.1.1.1)$$

$\tau_i(t) > 0$ eğrilikleri (sapmaları) ve $\max\limits_{0\le i\le \ell} m_i = n$ olsun.

$$E_{t_0}^{(i)} = \{t_0\} \cup \{t-\tau_i(t) : t-\tau_i(t) < t,\ t \ge t_0\} \quad (3.1.1.2)$$

Burada, $\tau_i(t)$ eğriliği (3.1.1.2) ile ifade edilen $E_{t_0}^{(i)}$ başlangıç kümesi üzerinde tanımlıdır. $E_{t_0} = \bigcup\limits_{i=1}^{\ell} E_{t_0}^{(i)}$ ve $\mu = \max\limits_{1\le i\le \ell} m_i$, $k = 0, 1, 2,..., \mu$ için $\varphi_k(t)$ fonksiyonları t_0 üzerinde sürekli olduğu kabul edilir. Uygulamalarda, E_{t_0} genellikle

$$\varphi_k(t) = \varphi_0^{(k)}(t), k = 0, 1, 2,..., \mu \quad (3.1.1.3)$$

olarak göz önüne alınır fakat bu genelde gerekli değildir.

n.mertebeden bir diferansiyel denklemi $x_0^{(k)}$, $k = 0, 1,..., n-1$ başlangıç koşulları ile bellidir. $k = 0, 1,..., \mu$ için $x_0^{(k)} = \varphi_k(t_0)$ olsun. Eğer $\mu < n-1$ ise ek olarak $x_0^{(\mu+1)},..., x_0^{(n-1)}$ verilir. Eğer t_0 noktası E_{t_0} ın izole edilmiş bir noktası ise aynı zamanda $x_0^{(0)}, x_0^{(1)},..., x_0^{(n-1)}$ verilir. (3.1.1.1) denklemi irdelendiğinde (3.1.1.1) denklemi $t > t_0$ için $(n-1)$ defa sürekli olarak türevlenebilen temel bir başlangıç değer problemidir ve

"1" Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında çalışan lisans üstü öğrencileri Neriman AVCI, Mikail KARACA, Abbas TUTAR 'ın tezlerinde bu kısımda ifade edilen tüm sonuçların türkçesi ortaktır.

$$\left.\begin{array}{l} x^{(k)}(t_0+0)=x_0^{(k)},\ k=0,1,2,\dots,n-1 \\ t-\tau_i(t)<t_0,\ i=0,1,2,\dots,\ell,\ k=0,1,2,\dots,\mu \text{ ise } x^{(k)}(t-\tau_i(t))=\varphi_k(t-\tau_i(t)). \end{array}\right\} \quad (3.1.1.4)$$

şartlarına sahiptir. Genellikle $x^{(k)}(t)$ türevi $t_0+(k-1)\tau$ noktasında süreksizdir fakat daha alt mertebeden türevleri süreklidir.

Burada, $\lambda = m_0 - \mu$ olsun. Eğer $\lambda > 0$ ise (3.1.1.1) denklemine gecikmeli diferansiyel denklem, $\lambda = 0$ ise (3.1.1.1) denklemine Nötr (Neutral) diferansiyel denklem, $\lambda < 0$ ise (3.1.1.1) denklemine ileri (Advanced) diferansiyel denklem denir.

Örnek 3.1.1.1. (Erbe ve ark., 1995)

$\tau > 0$, a ve b sabit olmak üzere aşağıdaki (3.1.1.5) – (3.1.1.7) denklemlerini inceleyelim.

$$x'(t) + a\,x(t-\tau) = 0 \quad (3.1.1.5)$$

denklemi gecikmeli bir diferansiyel denklemdir. Çünkü, $m_0 = 1, \mu = 0$ olduğundan $\lambda = m_0 - \mu$ gereğince $\lambda > 0$ dır.

$$x'(t) + a\,x(t+\tau) = 0 \quad (3.1.1.6)$$

denklemi ileri (Advanced) bir denklemdir ve

$$x'(t) + a\,x(t) + b\,x'(t-\tau) = 0 \quad (3.1.1.7)$$

denklemi ise Nötr bir diferansiyel denklemdir. Kısaca, denklem nötr ve gecikmeli değilse denkleme ileri diferansiyel denklem denilir. Ayrıca, yukarıdaki sınıflandırmanın yeterli olmadığını söylemekte fayda vardır. Örneğin;

$$x'(t) + a\,x(t-\tau) + b\,x(t+\sigma) = 0 \quad (3.1.1.8)$$

denklemi yukarıdaki türlerin hiçbiri değildir. Bu tip denklemlere karışık tip diferansiyel denklemler denir.

Osilasyon (Salınım) teorisinde $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı çözümler ele alınır. Bundan dolayı, başlangıç değer problemi için gerekli varlık ve teklik teoremleri çalışılacaktır.

$$\frac{d}{dt}\left[x(t)+g\left(t,x(t-\tau_i(t)),...,x(t-\tau_\ell(t))\right)\right] \\ + f\left(t,x(t-\sigma_1(t)),...,x(t-\sigma_n(t))\right)=0 \tag{3.1.1.9}$$

$$g,\ f\in C\left(\left[\bar{t}_0,\infty\right)\times R^m\times R^m\times....\times R^m,R^m\right) \tag{3.1.1.10}$$

$$\tau_i,\sigma_j\in C\left(\left[\bar{t}_0,\infty\right),(0,\infty)\right) \tag{3.1.1.11}$$

Nötr diferansiyel denklemleri çalışılacaktır. Burada, $\bar{t}_0\in R$ ve m pozitif tamsayı olmak üzere,.

$i\in \mathrm{I}_\ell$, $j\in \mathrm{I}_n$ için $\lim\limits_{t\to\infty}\left(t-\tau_i(t)\right)=\infty, \lim\limits_{t\to\infty}\left(t-\sigma_j(t)\right)=\infty$ ve $\mathrm{I}_\ell=\left[1,2,....,n\right]$.

Bir $t_0\geq\bar{t}_0$ için

$$t_{-1}=\min_{t\,\geq\,t_0}\inf\left(t-\tau_i(t)\right) \tag{3.1.1.12}$$

(3.1.1.9) denkleminin başlangıç koşulu $t_{-1}\leq t\leq t_0$ için

$$x(t)=\varphi(t). \tag{3.1.1.13}$$

Burada, $\varphi:\left[t_{-1},t_0\right]\to R^m$.

Not 3.1.1.1. (Erbe ve ark., 1995)

$[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde (3.1.1.9) denkleminin çözümü olan x aşağıdaki şartlara haizdir.

(1) $t\in[t_0,\infty)$ için $x:[t_{-1},\infty)\to R^m$ sürekli ve $x(t)+g\left(t,t-\tau_1(t),...,t-\tau_\ell(t)\right)$ sürekli türevlenebilirdir.

(2) Her $t\in\left(t_0,\infty\right)$ için x, (3.1.1.9) denklemini sağlar.

$[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde x, (3.1.1.9) denkleminin çözümü ve (3.1.1.13) denklemini sağlarsa $[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde x fonksiyonuna (3.1.1.9) − (3.1.1.13) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür denir.

Şimdi de (3.1.1.9) sisteminin varlığı ve teklik çözümü için gerekli teoremi verelim.

Teorem 3.1.1.1. (Erbe ve ark., 1995)

(3.1.1.10) ve (3.1.1.11) ile beraber $t_0 \geq \bar{t}_0$ ve $\varphi \in C\left[(t_{-1}, t_0], R^m\right]$ verilsin. Bu halde, (3.1.1.9)–(3.1.1.13) başlangıç değer problemi $[t_0, \infty)$ yarı açık aralığında tam olarak bir çözüme sahiptir.

$[T_y, \infty)$ ve her $T \geq T_y$ için $\sup\{|\, y(t)\,| : t \geq T\} > 0$ şartlarını sağlayan (3.1.1.9) denkleminin y çözümleri tartışılacaktır.

3.1.2 Osilasyon ve osilasyon yapmayan denklemler

$$t \geq t_0 \text{ için } \left(x(t) + p(t)x(t-\tau)\right)' + Q(t)x(t-\sigma) = 0 \qquad (3.1.2.1)$$

skaler diferansiyel denklemi için çözümlerinin osilasyon (salınım) tanımını verelim.

Tanım 3.1.2.1. (Erbe ve ark., 1995)

(3.1.2.1) denkleminin triviyal olmayan çözümleri keyfi büyük sayıda köklere (sıfırlara) sahipse bu x çözümüne salınımlıdır veya osilasyon yapar denir.

Teknik olarak, $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $f(\{t_n\}) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\{t_n\} \to \infty$. Aksi halde, x çözümü salınımlı değildir denir. Denklem salınımlı değilse diğer bir deyişle $t > t_1$ için bir $t_1 > t_0$ vardır öyle ki $x(t) \neq 0$. Daha basit bir ifade ile salınım yapmayan çözüm eninde sonunda ya pozitiftir ya da negatiftir.

(3.1.2.1) denkleminin de her çözümü salınımlıdır dediğimizde her $t_1 \geq t_0$ başlangıç noktası için E_{t_1} başlangıç kümesi üzerinde her $\varphi \in C$ başlangıç fonksiyonu üzerindeki (3.1.2.1) başlangıç değer probleminin x biricik çözümü salınım yapar. Dolayısıyla, (3.1.2.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu ispat edebilmek için başlangıç koşullarını önemsemeyiz.

Eğer (3.1.2.1) denkleminin her çözümü salınımlı ise (3.1.2.1) denklemi salınımlıdır denir.

(3.1.2.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümünü ispat edebilmek için $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ noktası vardır öyle ki $[t_2, \infty)$ üzerinde x çözümdür ve tüm $t > t_2$ için $x(t) > 0$ veya $x(t) < 0$.

Eğer bileşenlerinden en az biri (her biri) salınımlı ise (3.1.1.9) denkleminin $x(t) = (x_1(t), x_2(t), .., x_m(t))^T$ çözümü salınımlıdır (Çok kuvvetli salınımlıdır).

Örnek 3.1.2.1. (Erbe ve ark., 1995)

$$y'(t) + y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (3.1.2.2)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi $y(t) = \sin t$ salınımlı çözümüne sahiptir.

Örnek 3.1.2.2. (Erbe ve ark., 1995)

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned} \qquad (3.1.2.3)$$

denkleminin her çözümü salınımlıdır fakat (3.1.2.3) denklemine gecikme eklersek (3.1.2.3) denkleminin salınımlı olmadığı görülebilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - y\left(t - \frac{1}{3}\ln 4\right) \\ y'(t) &= 2x\left(t - \frac{1}{3}\ln 4\right) + y(t) \end{aligned} \qquad (3.1.2.4)$$

sistemi için $x(t) = \exp((3/2)\,t)$, $y(t) = \exp((3/2)\,t)$ şaşırtıcı çözümleri elde edilir. Bundan dolayı, gecikmelerin osilasyon sistem üzerindeki etkileri incelenecektir.

Örnek 3.1.2.3. (Erbe ve ark., 1995)

$$x'(t) + p\,x(t-1) = 0, \; t \geq t_0, \; p > 0 \qquad (3.1.2.5)$$

denkleminin salınımlı olmayan çözümlere sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$pe \leq 1 \tag{3.1.2.6}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Ayrıca, $p > 0$ sabittir.

$x'(t) + p\,x(t-1) = 0$ denkleminin analizini yapalım. Aday çözüm $x = e^{\lambda t}$ olsun. Bu halde, $e^{\lambda t} \neq 0$ olduğundan

$$\lambda e^{\lambda t} + p\,e^{\lambda t} e^{-\lambda} = 0,\ e^{\lambda t}\left(\lambda + p\,e^{-\lambda}\right) = 0,\ \lambda + p\,e^{-\lambda} = 0. \tag{3.1.2.7}$$

$$f(\lambda) = \lambda + p\,e^{-\lambda} \tag{3.1.2.8}$$

denkleminin köklerini bulmak temel amacımızdır.

Lemma 3.1.2.1. (Smith, 2010)

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $p < 0$ ise f tam olarak bir reel köke sahiptir ve bu kök pozitiftir.

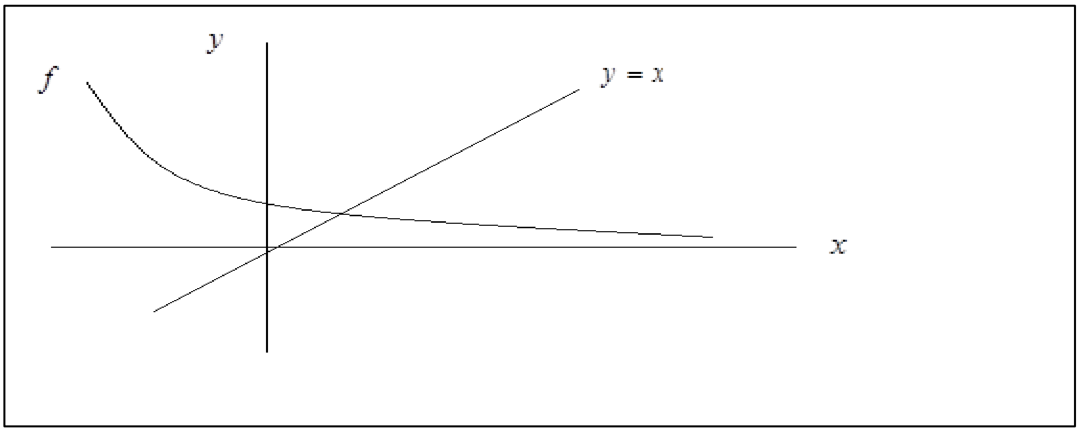
(2) $0 < p < e^{-1}$ ise f, $\lambda_1 < \lambda_2$ olacak şekilde tam olarak iki tane reel kök vardır ve bu kökler negatiftir. $p \to 0$ için $\lambda_1 \to -\infty$ ve $\lambda_2 \to 0$.

(3) $p = e^{-1}$ ise f nin tam olarak iki katlı bir kökü vardır ve bu kök $\lambda = -1$ dir.

(4) $p > e^{-1}$ ise reel kök yoktur (kökler komplekstir).

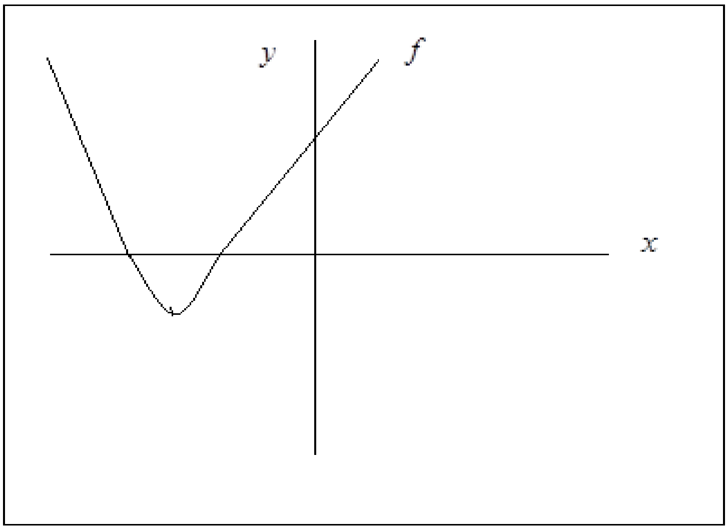
İspat: (Smith, 2010)

(1) $f(0) = p < 0$ ve uygun p değeri ve $\lambda > 0$ için $f(\lambda) > 0$. Ara değer teoremi gereğince f bir pozitif reel köke sahiptir. Ayrıca, bu kök grafiksel olarak tam yeri bilinmemekle birlikte aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1.2.1. f fonksiyonunun $p < 0$ durumundaki grafiği

(2) $f(\lambda) = \lambda + p\,e^{-\lambda}$, $f'(\lambda) = 1 - p\,e^{-\lambda}$ ve $f''(\lambda) = p\,e^{-\lambda} > 0$ olduğundan $f(\lambda)$ iki tane reel köke sahiptir.



Şekil 3.1.2.2. f fonksiyonun $0 < p < e^{-1}$ durumundaki grafiği

(3) $f'(\lambda) = 1 - p\,e^{-\lambda} = 0$ iken $p = e^{\lambda}$ bulunur bu değer fonksiyonda yerine yazılırsa $\lambda = -1$ bulunur. Yani $p = e^{-1}$ iken bir kök vardır.

(4) $p > e^{-1}$ olması halinde reel kök yoktur. $f(\lambda) = \lambda + p\,e^{-\lambda}$ denkleminde $\lambda = x + iy$ yazılırsa $f(x+iy) = x + iy + p\,e^{-(x+iy)} = 0$, $x + iy + p\,e^{-x}e^{-iy} = 0$. İki kompleks sayı eşitse karşılıklı reel ve sanal kısımları eşittir. Bu halde,

$$x = -p\,e^{-x}\cos y \ , \ y = p\,e^{-x}\sin y \qquad (3.1.2.9)$$

p nin pozitif olması halinde aşağıdaki önerme geçerlidir.

Önerme 3.1.2.1. (Smith, 2010)

(3.1.2.8) için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) $0 < p < \dfrac{\pi}{2}$ ise tüm kökler için $\mathrm{Re}(\lambda) \le -\delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

(2) $p = \dfrac{\pi}{2}$ olması halinde katlılıkları bir olacak şekilde (kökler basittir) $\lambda = \pm\dfrac{\pi}{2}i$.

(3) $p > \dfrac{\pi}{2}$ olması halinde, $x > 0$ ve $y \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere, kökler $\lambda = x \mp iy$ biçimindedir.

İspat: (Smith, 2010)

$p > 0$ olduğunda (3.1.2.9) denkleminin $x \ge 0, y > 0$ olacak şekilde $\lambda = x + iy$ biçiminde bir kök varsa $\cos y \le 0 < \sin y$ oluyorsa $y \in S \equiv \bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) + 2n\pi\right\}$.

Hatta, $\dfrac{\sin y}{y} = \dfrac{e^x}{p}$.

$F(x,y) = \dfrac{\sin y}{y} - \dfrac{e^x}{p}$ olsun. Burada, $x \ge 0$ sabit tutalım bu halde $y \in S$ olmak üzere $F_y < 0$. $y = \dfrac{\pi}{2}$ olduğunda $\dfrac{\sin y}{y} = \dfrac{2}{\pi}$. $y \in S$ için $\dfrac{\sin y}{y} \le \dfrac{2}{\pi}$. Ayrıca, S kümesi bağlantısızdır. $\dfrac{1}{p} \le \dfrac{\sin y}{y} = \dfrac{e^x}{p} \le \dfrac{2}{\pi}$ ise $\dfrac{1}{p} \le \dfrac{e^x}{p} \le \dfrac{2}{\pi}$ ifadesinden $p \ge \dfrac{\pi}{2}$.

Eğer $p < \dfrac{\pi}{2}$ ise her λ kökü için $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ dır. Böylece önermenin 1. şıkkı ispatlanmış olur.

Şimdi önermenin 3. şıkkını ispat edelim. $\lambda = re^{i\theta}$ olması hali $\lambda + pe^{-\lambda} = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $r[\cos(\theta-\pi)+i\sin(\theta-\pi)] = p\,e^{-x}[\cos(-y)+i\sin(-y)]$ veya buna denk olarak $r = pe^{-x}$ ve $\theta - \pi = -y + 2k\pi$ elde edilir. $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere birinci çeyrekte orjinden geçen ışın boyunca kökü bulmaya çalışalım. $k = 0$ ise $y(\theta) = \pi - \theta > 0$ ve böylece $x(\theta) > 0$ olur.

$$\begin{cases} x(\theta) = (\pi - \theta)\cot\theta \\ y(\theta) = \pi - \theta, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ p(\theta) = \dfrac{\pi - \theta}{\sin\theta} e^{x(\theta)} \end{cases} \tag{3.1.2.10}$$

denklemleri $x > 0$ ve $\frac{\pi}{2} < y < \pi$ olmak üzere (3.1.2.8) denklemini sağlayan tek parametreli eğri ailesidir. Açıkça $x(\theta), y(\theta), p(\theta)$ fonksiyonları $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ya sürekli olarak bağlıdır.

$\theta \to 0$ için $x(\theta) \to +\infty, y(\theta) \to \pi, p(\theta) \to +\infty$ ve

$\theta \to \frac{\pi}{2}$ iken $x(\theta) \to 0, y(\theta) \to \frac{\pi}{2}, p(\theta) \to \frac{\pi}{2}$. Buradan $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ iken $p(\theta)$ kesin olarak azalandır.

Not 3.1.2.1. (Smith, 2010)

$\theta = p(\theta)$ fonksiyonunun tersi vardır. $p \in \left(\frac{\pi}{2}, \infty\right)$ için tersi $\theta = k(p)$ dir ve kesin olarak azalandır. (3.1.2.10) denklemlerinde $\theta = k(p)$ yazılırsa $x(p) > 0, y(p) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $\lambda = \lambda(p) = x(p) + i\,y(p)$ köküne sahiptir ve bu durum $p > \frac{\pi}{2}$ ifadesine karşılık gelmektedir ve $p \to \frac{\pi}{2}^{+}$ için $\lambda(p) \to \frac{\pi\, i}{2}$.

Not 3.1.2.2. (Smith, 2010)

$n = 0, 1, 2, \ldots$ ve $p = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ için (3.1.2.9) sisteminde kökün $i\,(\frac{\pi}{2} + 2\pi\, n)$ olduğunu görmek kolaydır.

3.1.3 Çözümlerin osilasyonu

$$U'(t) = -p\,U(t-r) \tag{3.1.3.1}$$

denklemini ele alalım.

Teorem 3.1.3.1. (Smith, 2010; Györi ve Ladas, 1991; Gopalsamy, 1992)

Tüm reel β ve $r > 0$ için $p = r\beta$ olsun. Bu halde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.1.3.1) nin her çözümü salınımdır. Yani, (3.1.3.1) nin her çözümü osilasyonludur.

(b) $p = r\beta > \frac{1}{e}$ dir.

Not 3.1.3.1. (Smith, 2010)

Lemma 3.1.2.1 den (a) nın (b) yi gerektirdiği açıktır.

(i) Diğer durumda açıktır.

(ii) $p = e^{-1}$ olması halinde p nin büyük değerleri için çözümler salınımlıdır. p nin bu değeri için katlılığı iki olan $\lambda = -1$ değerine tekabül eder.

(iii) $p << e^{-1}$ den $p = \frac{\pi}{2}$ ye değişirken en büyük reel kökün varlığını gerektirir.

(iv) Bu son durum katlılığı iki olan $\lambda = -1$ kökünden $\lambda = x + i\,y$ kompleks kökle dallanır. Bu durum ise osilasyonu gerektirir.

(v) $p > \frac{1}{e}$ olması halini aşağıdaki lemma ile biraz daha açalım.

Lemma 3.1.3.1. (Smith, 2010)

Tüm $p \in \left(e^{-1}, \frac{\pi}{2}\right)$ için $f(\lambda) = \lambda + p\,e^{-\lambda}$ denkleminin, $-1 < x < 0$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\lambda = x \mp i\,y$ biçiminde iki tane kök vardır. Ayrıca, $p = p(x)$, $y = h(x)$ olmak üzere bu kökler $(\lambda = x + i\,y, p(x))$ parametrize edilebilir. Burada,

(i) $x \to -1^{+}$ için $\lambda \to -1$ ve $p \to e^{-1}$ ve

(ii) $x \to 0^{-}$ için ve $\lambda \to \frac{\pi}{2} i$ ve $p \to \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $p(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları düzgün, pozitif ve monotonik olarak artan fonksiyanlardır..

İspat: (Smith, 2010)

$\lambda = -1 - z$ ve $p = e^{-1-\mu}$ alınırsa $\lambda + e^{-\lambda} p = 0$ denklemi $z + 1 = e^{z-\mu}$ olur. Eğer $z = x + iy$ ise reel ve imajiner kısımlar sırasıyla

$$\begin{aligned} x + 1 &= e^{x-\mu}\cos y \\ y &= e^{x-\mu}\sin y \end{aligned} \tag{3.1.3.2}$$

Böylece $(\lambda, p) = (-1, e^{-1})$ noktasını $(z, \mu) = (0,0)$ noktasına öteledik. (3.1.2.10) denklemine denk aşağıdaki denklemler yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{\tan y}{y} &= \frac{1}{x+1} \\ e^{x-\mu} &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned} \tag{3.1.3.3}$$

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ için $g(y) = \frac{\tan y}{y}$ fonksiyonu çifttir. Global minimumunun $g(y=0) = 1$, $y \to \frac{\pi}{2}$, $g(y)$ kesin olarak monotonik artandır. Buradan, tüm $x \in (-1,0)$ için $\frac{\tan y}{y} = \frac{1}{x+1}$ denklemi $y = \mp h(x)$ çözümlerine sahiptir. Burada, h pozitif, artan ve $h(-1+) = \frac{\pi}{2}$ ve $h(0-) = 0$. $y = h(x)$ olmak üzere, $\mu = \mu(x)$ $e^{x-\mu} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ denklemlerinden elde edilir. $\mu(-1+) = -1 - \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ve $\mu(0-) = 0$ olduğu gözlemlenir. $\mu(x)$ in kesin olarak artan olduğunu gösterirsek ispat biter. Alternatif olarak $\mu(x)$, $e^{\mu(x)} = \dfrac{e^x \sinh(x)}{h(x)}$ denklemini sağlar. $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ için $\dfrac{\sin y}{y}$ kesin olarak azalan ve $h(x)$ kesin olarak azalan olduğundan bileşkeleri kesin olarak artandır ve böylece $e^{\mu(x)}$ kesin olarak artandır.

Sonuç 3.1.3.1. (Smith, 2010)

Lemma 3.1.3.1 ve Önerme 3.1.2.1 ifadelerinden $p = r\,\beta > e^{-1}$ ise

$$x(t) = e^{\frac{(x+iy)t}{r}} \tag{3.1.3.4}$$

olacak şekilde salınımlı (osilasyonlu) bir çözüm vardır.

Not 3.1.3.2. (Smith, 2010)

(1) $x'(t) = -\beta\, x(t-r)$, β reel $r \geq 0$

(2) $\tau = \eta\, t$, $\eta > 0$ olmak üzere $U(\tau) = x(t)$

$$\frac{dU}{d\tau} = \eta^{-1}\frac{dx}{dt} = -\beta\,\eta^{-1}x(t-r) = -\beta\,\eta^{-1}U(\tau - r\eta)$$

Eğer $\eta = \dfrac{1}{r}$ ve $p = r\beta$ ise $\dfrac{dU}{d\tau} = -p\,U(\tau - 1)$ elde edilir.

3.1.4 Adımlar metodu

En temel fonksiyonel diferansiyel denklem $t \geq 0$ için

$$x'(t) = a_1(\mathrm{t})\,x(t) + a_2(t)\,x(t-\tau) \tag{3.1.4.1}$$

denklemi lineer birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemdir.

(3.1.3.3) denklemine $t = 0$ zamanından önce eşlik eden bir başlangıç fonksiyonu (veya $t = 0$ anından önce bir geçmişi) vardır. Bu geçmişteki davranışa bazen “tarih fonksiyonu” denir.

(3.1.3.3) denkleminde $\tau > 0$, $[0, \tau]$ üzerinde a_1 ve $a_2 \in \mathrm{C}^1$, $[-\tau, 0]$ üzerinde $\phi(t) \in C^1$ ise

$$x'(t) = a_1(t)\,x(t) + a_2(t)\,y(t-\tau),\ t \in [0,\tau] \tag{3.1.4.2}$$

$$y(t) = \phi(t),\ t \in [-\tau, 0] \tag{3.1.4.3}$$

denklem sistemini sağlayan tek çözüm vardır.

İddia:

(3.1.4.2) − (3.1.4.3) Sistemi tek çözüme sahiptir.

İspat:

$u(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları (3.1.4.2) − (3.1.4.3) sistemini sağlayan iki çözüm olsun. $w = u - v$, (3.1.4.2) denklemini sağlar. Yani, $[0,\tau]$ üzerinde $w'(t) = a_1\, w(t) + a_2\, w(t-\tau)$. Fakat, $[-\tau, 0]$ için $u(t) = \phi(t)$ ve $v(t) = \phi(t)$ olduklarından (3.1.4.3) denklemi $[-\tau, 0]$ için $w = 0$. Diğer bir deyişle, $-\tau \le t \le 0$ için $w(t) = 0$. Böylece, $[0,\tau]$ için $w(t-\tau) = 0$. Buradan, (3.1.4.2) − (3.1.4.3) sistemi $w'(t) = a_1(t)\,w(t),\ w(0) = 0$ şeklinde yazılır. Bu sistemi sağlayan çözümün sıfır olduğunu görmek kolaydır.

Adımlar Metodu:

Bu metotla verilen aralık üzerinde geçmiş hafiza (tarih fonksiyonu) yardımıyla gecikmeli diferansiyel denklem bayağı diferansiyel denkleme dönüştürülür. Elde edilen denklem çözülür. Bu muhakeme yeni oluşturulan aralık üzerinde tekrar edilir. (3.1.4.2) − (3.1.4.3) sistemine aralık metodunun nasıl uygulandığını görelim.

1. Adım: $[-\tau, 0]$ kapalı aralığı üzerinde $x(t) = \phi(t)$ olarak biliniyor. Bu aralık üzerindeki çözüme $x_0(t)$ diyelim. ($x_0(t)$ fonksiyonu tarih fonksiyonu, geçmişteki hafiza veya başlangıç fonksiyonu olarak da bilinir.)

Not 3.1.4.1.

$t \in [-\tau, 0]$ olduğunda $t - \tau \in [-\tau, 0]$ olur. Böylece, $[0,\tau]$ kapalı aralığı üzerinde $x(t-\tau) = x_0(t-\tau)$ olur.

2. Adım: $[0,\tau]$ kapalı aralığı içinde (3.1.4.2) – (3.1.4.3) sistemi

$$x'(t)=a_1(t)\,x(t)+a_2(t)\,x_0(t-\tau),\qquad x(0)=\phi(0) \tag{3.1.4.4}$$

olur. Dikkat edilirse (3.1.4.4) denklemi bayağı diferansiyel denklemdir. Artık bir gecikmeli diferansiyel denklem değildir. Çünkü $x_0(t-\tau)$ bilinen bir fonksiyondur. Basitçe $x_0(t-\tau)=\phi(t-\tau)$. Böylece, $[0,\tau]$ üzerinde (3.1.4.4) bayağı diferansiyel denklemi $x(0)=\phi(0)$ alınarak çözülür. Bu yeni çözüm $x_1(t)$ olsun.

Not 3.1.4.2.

(3.1.4.4) bayağı diferansiyel denklemi

$$x'(t)-a_1(t)\,x(t)=a_2(t)\,\phi(t-\tau),t\in[0,\tau]\,x(0)=\phi(0)$$

homojen olmayan diferansiyel denklem gibi düşünülerek çözülür.

3. Adım: $[\tau,2\tau]$ aralığı üzerinde yeni bayağı diferansiyel denklem

$$x'(t)=a_1(t)\,x_1(t)+a_2(t)\,y_1(t-\tau),\ \ y(\tau)=y_1(\tau)$$

şeklinde bulunur. Bu denklem $y_1(\tau)$ başlangıç koşulu kullanılarak çözülür.

Bu adımlar veya muhakeme takip edilerek yeni aralıklar için devam ettirilir.

$$x'(t)+f(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t)))=0 \tag{3.1.4.5}$$

gecikmeli diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Burada, $\tilde{t}_0\in R$ ve m pozitif tam sayı olmak üzere $i=1,2,...,n$ için

$$\tau_i\in C\left[[\tilde{t}_0,\infty),R^+\right] \text{ ve } f\in C\left[[\tilde{t}_0,\infty)\times R^m\times R^m\times...\times R^m,R^m\right] \tag{3.1.4.6}$$

Ayrıca,

$$i=1,2,...,n \text{ için } \lim_{t\to\infty}[t-\tau_i(t)]=\infty \tag{3.1.4.7}$$

verilir. Her $t_0\geq\tilde{t}_0$ başlangıç koşulu için $t_{-1}=t_{-1}(t_0)$

$$t_{-1}=\min_{1\leq i\leq n}\left\{\inf_{t\geq t_0}\{t-\tau_i(t)\}\right\} \tag{3.1.4.8}$$

Ayrıca, son olarak başlangıç fonksiyonu (geçmişteki hafiza fonksiyonu)

$$t_{-1}\leq t\leq t_0 \text{ için } x(t)=\phi(t) \tag{3.1.4.9}$$

ile verilir. Burada, $\phi:[t_{-1},t_0]\to R^m$ geçmişteki hafiza fonksiyonudur.

$x = (x_1, x_2, ..., x_m)^T \in R^m$, $\|x\|$, x in normu olsun. A, $m \times m$ tipinde reel matris ve buna eşlik eden matrisin normu $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Lemma 3.1.4.1. (Gronwall Eşitsizliği)

$\mathrm{I} = [t_0, T) \subset R$ olsun. $c \in [0, \infty)$ ve $u, v \in C[\mathrm{I}, R^+]$ pozitif ve sürekli iki fonksiyon olsun. Bu halde,

$$u(t) \le c + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds,\ t \in \mathrm{I} \text{ için } u(t) \le c \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right)$$

Teorem 3.1.4.1. (Global Lipschitz Şartı)

$p \in C\left[[\tilde{t}_0, \infty), R^+\right]$ olsun. Her $t \ge \tilde{t}_0$ ve bütün $x_i, y_i \in R^m$, $i = 0,1,2,...,n$ için

$$\| f(t, x_0, x_1, ..., x_n) - f(t, y_0, y_1, ..., y_n) \| \le p(t) \sum_{i=0}^{n} \|x_i - y_i\| \qquad (3.1.4.10)$$

koşulu sağlanıyorsa f ye Global olarak Lipschitz denir.

Teorem 3.1.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.1.4.5) ve (3.1.4.9) problemleri bir tek çözüme sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$y : [t_{-1}, \infty) \to R^m$ sürekli fonksiyonları üzerinde T operatörü tanımlayalım.

$$(Ty)(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_{-1} \le t < t_0 \\ \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s), y(s - \tau_1(s)), ..., y(s - \tau_n(s)))ds, & t \ge t_0 \end{cases}$$

Açıkça, $(Ty)(t)$, $[t_{-1}, \infty)$ üzerinde süreklidir. $x_0(t)$ dizi olmak üzere

$$x_0(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_{-1} \le t < t_0 \\ \phi(t_0), & t \ge t_0 \end{cases}$$

ve $\ell = 0, 1, 2, ...$ için $x_{\ell+1} = Tx_\ell$ olsun. Ardışık yaklaşıklar veya Picard metodu yardımıyla (3.1.4.10) kullanılarak

$t \geq t_{-1}$ ve $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ için $\| x_{\ell+1}(t) - x_{\ell}(t) \| \leq M \dfrac{(t-t_0)^{\ell}}{\ell!}$. Burada,

$M = \max\limits_{t_0 \leq s \leq t} p(s)$. Buradan $x(t) = \lim\limits_{\ell \to \infty} x_{\ell}(t) = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} [x_{\ell+1}(t) - x_{\ell}(t)] + x_0(t)$.

Şimdi çözümün tek olduğunu gösterelim. (3.1.4.5) ve (3.1.4.9) denklemlerinin $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde x, y gibi iki çözümü olsun. Bu halde, $t_{-1} \leq t \leq t_0$ için $x(t) = y(t)$. $u(t) = \max\limits_{t_0 \leq s \leq t} \| x(s) - y(s) \|$ olsun. Açıkça, $t \geq t_0$ için

$u(t) \leq (n+1) \int\limits_{t_0}^{t} p(s) u(s)\, ds$ ve Gronwall eşitsizliğinden ($c = 0$ için) $u(t) = 0$.

Buradan, $t \geq t_0$ için $x(t) = y(t)$ ve ispat biter.

Sonuç 3.1.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$$x'(t) + P_0(t) x(t) + \sum_{i=1}^{n} P_i(t) x(t - \tau_i(t)) = 0 \qquad (3.1.4.11)$$

Otonom olamayan gecikmeli lineer sistem için bazı $\tilde{t}_0 \in R$ ve bazı pozitif m tamsayı $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ için $P_i \in C\left[\left[\tilde{t}_0, \infty\right], R^{m \times m}\right], \tau_i \in C\left[\left[\tilde{t}_0, \infty\right), R^{+}\right]$ ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\lim\limits_{t \to \infty} [t - \tau_i(t)] = \infty$, $t_0 \geq \tilde{t}_0$ ve $\phi \in C\left[\left[t_{-1}, t_0\right], R^m\right]$ verilsin. Bu halde, başlangıç değer problemi (3.1.4.11) ve (3.1.4.9), $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde tam bir çözüme sahiptir.

Sonuç 3.1.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$$x'(t) + P_0\, x(t) + \sum_{i=1}^{n} P_i\, x(t - \tau_i) = 0 \qquad (3.1.4.12)$$

Otonom gecikmeli lineer sistemdir. $i = 0, 1, \ldots, n$ için P_i ler reel değerli $m \times m$ tipinde matrisler ve τ_i gecikmeleri negatif olmayan sayılar olsun. Bu halde,

$t_0 \in R,\ t_{-1} = t_0 - \max\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ olmak üzere $\phi \in C\left[[t_{-1}, t_0], R^m\right]$ tanımlı sürekli fonksiyon için (3.1.4.12) ve (3.1.4.9) , $[t_o, \infty)$ aralığında tam bir çözüme sahiptir.

3.1.5 Çözümlerin eksponansiyel sınırlılığı

(Çözümlerin eksponansiyel fonksiyon tarafından kontrol edilebilirliği)

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) + \sum_{i=1}^{l} P_i\, x(t-\tau_i)\right] + Q_0\, x(t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j\, x(t-\sigma_j) = 0 \qquad (3.1.5.1)$$

lineer otonom sisteminin eksponansiyel olarak sınırlı olduğunu göstermek istiyoruz. Yani, $x(t)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde (3.1.5.1) denkleminin bir çözümü ise

$$t \geq 0 \quad \text{için} \quad \| x(t) \| \leq M\, e^{\alpha t} \qquad (3.1.5.2)$$

olacak şekilde M ve α pozitif reel sayıları vardır. Kısaca, $x(t)$, (3.1.5.2) denkleminin çözümü ise $x(t)$ nin laplace transformasyonu $\operatorname{Re} s > \alpha$ olmak şartıyla

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, x(t)\, dt .$$

Teorem 3.1.5.1. (Györi ve Ladas, 1991)

P_i ve Q_j katsayıları (3.1.5.1) denkleminin reel katsayılı $m \times m$ tipinde matrisler, τ_i ve σ_j gecikmeleri pozitif olsun. $x(t)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde (3.1.5.1) denkleminin çözümü ise M ve α pozitif sayıları vardır öyle ki (3.1.5.2) denklemi sağlanır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$r = \max\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l, \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ ve $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_l\}$ olsun.

(3.1.5.1) denkleminin 0 dan t ye integrali alınırsa $t \geq 0$ için

$$x(t) = x_0 - \sum_{i=1}^{l} P_i\, x(t-\tau_i) - \int_0^t \left[Q_0\, x(s) + \sum_{j=1}^{n} Q_j\, x(s-\sigma_j) \right] ds$$

elde edilir. Burada, $x_0 = x(0) + \sum_{i=1}^{l} P_i\, x(-\tau_i)$ ile verilir.

$t \geq -r$ için $u(t) = \max_{-r \leq s \leq t} \| x(s) \|$, $c = \|x_0\| + u(0)$,

$A = \sum_{i=1}^{l} \|P_i\|$ ve $B = 1 + \sum_{j=0}^{n} \|Q_j\|$

olsun. Bu halde, $u(t)$ azalamayan sürekli bir fonksiyon ve

$$\| x(t) \| \leq \|x_0\| + \sum_{i=1}^{l} \|P_i\| \| x(t-\tau_i) \| + \int_0^t \left[\|Q_0\| \| x(s) \| + \sum_{j=1}^{n} \|Q_j\| \left\| x(s-\sigma_j) \right\| \right] ds$$

$$\leq \|x_0\| + Au(t-\tau) + B\int_0^t u(s)\,ds, \qquad t \geq 0$$

sağlar. Buradan

$$u(t) \leq c + Au(t-\tau) + B\int_0^t u(s)\,ds, \; t \geq 0 \tag{3.1.5.3}$$

elde edilir. (3.1.5.3) nötr diferansiyel eşitsizliğinde $A = 0$ alınırsa nötr olmayan diferansiyel denklemi elde edilerek bilinen Gronwall eşitsizliği

$$u(t) \leq c + B\int_0^t u(s)\,ds$$

elde edilir. Buradan $u(t) \leq c\, e^{Bt}$ elde edilir. Bu ise çözümün gerçekten eksponansiyel sınırlılığını kanıtlar. $A \neq 0$ halinde ise (3.1.5.3) ifadesine genelleştirilmiş Gronwall eşitsizliği denir.

İspatın geri kalan kısmında (3.1.5.3) ifadesinde $u(t)$ nin eksponansiyel olarak sınırlı olduğunu vurgular. $F(\lambda) = \lambda A\, e^{-\lambda\tau} + B - \lambda$ olsun. $F(0)F(\infty) < 0$ olduğundan ara değer teoremi gereğince $F(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $\alpha \in (0, \infty)$ vardır. $c_\varepsilon = \max\left\{ (\varepsilon + c)\left(1 - A\, e^{-\alpha\tau}\right)^{-1}, \max_{-r \leq s \leq 0} e^{-\alpha s}\left[u(s) + \varepsilon\right] \right\}$ olsun.

$$t \geq -r \text{ için } u(t) < c_\varepsilon\, e^{\alpha t} \tag{3.1.5.4}$$

olduğunu görelim. Açıkça, $-r \leq t \leq 0$ için (3.1.5.4) doğrudur. $t_1 > 0$ için çelişki oluşturalım.

$$u(t) < c_\varepsilon\, e^{\alpha t}, -r \leq t \leq t_1 \text{ ve } u(t_1) = c_\varepsilon\, e^{\alpha t_1} \tag{3.1.5.5}$$

olsun. Bu halde, (3.1.5.3) denkleminden

$$\left.\begin{aligned} u(t_1) &< c + A c_\varepsilon\, e^{\alpha(t_1-\tau)} + B\int_0^{t_1} c_\varepsilon\, e^{\alpha s}\, ds \\ &= \left(c - \frac{B}{\alpha} c_\varepsilon\right) + c_\varepsilon\left(A e^{-\alpha\tau} + \frac{B}{\alpha}\right) e^{\alpha t_1} = \left(c - \frac{B}{\alpha} c_\varepsilon\right) + c_\varepsilon e^{\alpha t_1} \end{aligned}\right\} \tag{3.1.5.6}$$

elde edilir. α kök olduğundan $A e^{-\alpha\tau} + \frac{B}{\alpha} = 1$ dir. Ayrıca, $1 - A e^{-\alpha\tau} = \frac{B}{\alpha} > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} c - \frac{B}{\alpha} c_\varepsilon &\le c - \frac{B}{\alpha}\frac{\varepsilon + c}{1 - A e^{-\alpha\tau}} < c - \frac{B}{\alpha}\frac{c}{1 - A e^{-\alpha\tau}} \\ &= -\frac{c}{\alpha\left(1 - A e^{-\alpha\tau}\right)}\left(B - \alpha + \alpha A e^{-\alpha\tau}\right) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu halde, $u(t_1) < c_\varepsilon\, e^{\alpha t_1}$. Bu ise (3.1.5.5) denklemine çelişkidir. Böylece (3.1.5.4) denkleminin doğruluğu ispatlanmış olur. ε keyfi olduğundan $t \ge 0$ için $u(t) \le M\, e^{\alpha t}$. Burada $M = \max\left\{ c\left(1 - A e^{\alpha\tau}\right)^{-1}, \max\limits_{-r\le s\le 0} e^{-\alpha s} u(s)\right\}$. $t \ge 0$ için $u(t)$ nin tanımından $\| x(t) \| \le u(t)$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.1.6 $z-$transformasyonu

$n = 0, 1, 2, ...$ için $\{a_n\}$ reel sayılarda tanımlı bir dizi olsun. Bu dizinin $z-$transformasyonu $Z(a_n)$ ile belirtilir ve

$$Z(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \tag{3.1.6.1}$$

ile tanımlanır. $Z(a_n)$ dönüşümü yakınsak olacak şekilde tüm kompleks z değerleri için tanımlıdır. Açıkça, b ve c pozitif sayıları varsa

$$n = 0, 1, 2, ... \quad \text{için} \quad |a_n| \le b c^n \tag{3.1.6.2}$$

yazılır. O zaman, tüm $|z| > c$ için (3.1.6.1) serisi yakınsak ve z değişkeninin kompleks analitik bir fonksiyonudur.

$$a_{n+k} + P_1\, a_{n+k-1} + ... + P_k\, a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.1.6.3}$$

lineer fark denklemini göz önüne alalım. Burada, k pozitif tamsayı ve $P_1, P_2, ..., P_k$ katsayıları reel sayılardır. Bazı b ve c pozitif sabitleri için (3.1.6.3) denkleminin her $\{a_n\}$ çözümü (3.1.6.2) denklemini sağlar. (3.1.6.3) denkleminin çözümleri

$$\lambda^k + P_1 \lambda^{k-1} + ... + P_k = 0 \qquad (3.1.6.4)$$

karakteristik denkleminin kökleriyle açıklanabilir. (Finizio ve Ladas, 1982).

Açıkça, $z-$trasformasyonu lineer bir fonksiyondur. Eğer α ve β sabit ve $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ kompleks sayı dizileri ise o zaman

$$Z(\alpha\, a_n + \beta\, b_n) = \alpha\, Z(a_n) + \beta\, Z(b_n)$$

yazılır.

Lemma 3.1.6.1.

$k \in \{1, 2, 3, ...\}$ olsun. O halde

$$Z(a_{n+k}) = z^k\, Z(a_n) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n\, z^{k-n} \qquad (3.1.6.5)$$

yazılır.

İspat:

$z-$transformasyonunun tanımından

$$Z(a_{n+k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{z^n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{z^{n+k}} = z^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = z^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n} \right)$$

$$= z^k\, Z(a_n) - \sum_{n=0}^{k-1} a_n\, z^{k-n}$$

yazılır. (3.1.6.3) denkleminin iki tarafına $z-$transformasyonu uygulanarak ve $z-$transformasyonunun lineerliğinden ve (3.1.6.5) denkleminden

$$\sum_{i=0}^{k} P_i \left[z^{k-i}\, Z(a_n) - \sum_{j=0}^{k-i-1} a_j\, z^{k-i-j} \right] = 0$$

veya

$$\left(z^k + P_1 z^{k-1} + ... + P_k\right) Z(a_n) = \sum_{i=0}^{k} P_i \sum_{j=0}^{k-i-1} a_j\, z^{k-i-j} \qquad (3.1.6.6)$$

bulunur. Burada, $P_0 = 1$ dir.

Benzer olarak (3.1.6.3) denkleminde $P_1, P_2,..., P_k$ katsayıları $r \times r$ tipinde matrisler olsun. Bu halde, $\{a_n\} \in R^r$, (3.1.6.3) denkleminin çözümüdür. Eğer b *ve* c pozitif sayılar olmak üzere,

$$n = 0, 1, 2,... \text{ için } \quad \|a_n\| \le bc^n \qquad (3.1.6.7)$$

ise tüm $|z| > c$ bölgesinde $\{a_n\}$ nin $z-$transformasyonu yakınsaktır.

Aşağıdaki lemma katsayıları sabit matrislerden ibaret olan, (3.1.6.7) denklemini sağlayan lineer fark denkleminin çözümü hakkında basit bir ispattır.

Lemma 3.1.6.2. (Mickens, 1987)

$P_1, P_2,..., P_k$ tüm elemanları reel olan $r \times r$ tipinde matrisler ve $\{a_n\}$, (3.1.6.3) denkleminin çözümü olsun. Ayrıca, $b = \max\{\|a_0\|,..., \|a_k\|\}$ ve $c \in [1, \infty)$ olmak üzere

$$\|P_1\|c^{-1} + ... + \|P_k\| c^{-k} \le 1 \qquad (3.1.6.8)$$

denklemini sağlasın. Bu halde, (3.1.6.7) gerçekleşir.

İspat: (Mickens, 1987)

Açıkça, $n = 0, 1, 2,..., k$ için

$$\|a_n\| \le b \le bc^n \qquad (3.1.6.9)$$

denklemi sağlanır. (3.1.6.7) denklemi doğru olmasın. Bu halde,

$$n = 0,1,2,..., n_0 \text{ için } n_0 \ge k+1 \quad \text{olacak şekilde} \quad \|a_n\| \le b\, c^n \qquad (3.1.6.10)$$

ve

$$\|a_{n_0+1}\| > b\, c^{n_0+1}. \qquad (3.1.6.11)$$

$n = (n_0 - k) + 1$ için (3.1.6.3) denkleminden $a_{n_0+1} = -(P_1 a_{n_0} + ... + P_k a_{n_0+1-k})$ elde edilir.

(3.1.6.8) ve (3.1.6.10) ifadeleri

$$\|a_{n_0+1}\| \le \|P_1\|\, b\, c^{n_0} + ... + \|P_k\|\, b\, c^{n_0+1-k} = b\, c^{n_0+1}\left(\sum_{i=1}^{k} \|P_i\|\, c^{-i}\right) \le b\, c^{n_0+1}$$

gerektirir. Bu durum (3.1.6.11) ile çelişir. İspat biter.

"2"3.2 Osilasyon için Gerekli ve Yeterli Şartlar

3.2.1 Lineer otonom gecikmeli diferansiyel denklemlerin osilasyonu için gerekli ve yeterli şartlar

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i)=0 \tag{3.2.1.1}$$

Lineer otonom gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, p_i ve τ_i ler negatif olmayan reel sayılar.

$$\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda\tau_i}=0 \tag{3.2.1.2}$$

denklemi (3.2.1.1) denklemine karşılık gelen karakteristik denklemdir.

Lemma 3.2.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

p ve τ pozitif sabitler olsun. $x(t)$ eninde sonunda (veya nihayetinde)

$$x'(t)+p\,x(t-\tau)\le 0 \tag{3.2.1.3}$$

gecikmeli diferansiyel eşitsizliğinin bir pozitif bir çözümü ve $y(t)$ eninde sonunda

$$y'(t)-p\,y(t+\tau)\ge 0 \tag{3.2.1.4}$$

ileri diferansiyel eşitsizliğinin bir pozitif çözümü olsun. Bu halde, yeterince büyük t ler için

$$x(t-\tau)\le B\,x(t) \tag{3.2.1.5}$$

ve

$$y(t+\tau)\le B\,y(t) \tag{3.2.1.6}$$

Burada, $B=4/(p\tau)^2$.

"2" Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında çalışan lisans üstü öğrencileri Neriman AVCI, Mikail KARACA, Abbas TUTAR 'ın tezlerinde bu kısımda ifade edilen tüm sonuçların türkçesi ortaktır.

Lemma 3.2.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$[t_0,\infty)$ aralığı üzerinde $v(t)$ sürekli pozitif ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Yeterince büyük t ler için

$$v'(t)\le 0 \text{ ve } v(t-\alpha)< Av(t) \tag{3.2.1.7}$$

veya

$$v'(t)\ge 0 \text{ ve } v(t+\alpha)< Av(t) \tag{3.2.1.8}$$

sağlayacak şekilde A ve α pozitif sayıları olsun. Eğer (3.2.1.7) geçerli ise $\Lambda=\{\lambda\ge 0: \text{ yeterincebüyük } t \text{ leriçin} v'(t)+\lambda\, v(t)\le 0\}$ veya (3.2.1.8) geçerli ise $\Lambda=\{\lambda\ge 0: \text{yeterincebüyük } t \text{ ler için} -v'(t)+\lambda\, v(t)\le 0\}$. Bu halde,

$A>1$ ve $\lambda_0=\dfrac{\ln A}{\alpha}\notin\Lambda$.

Lemma 3.2.1.3. (Widder, 1971)

(a) $x\in C[[-\tau,\infty),R]$ ve $\sigma_0<\infty$ olsun. $x(t)$ nin Laplace transformasyonu $X(s)$ yakınsaktır. Bu halde, $x(t-\tau)$ nun da Laplace transformasyonuda yakınsaktır ve tüm s ler için $\operatorname{Re} s>\sigma_0$ olmak üzere

$$L[x(t-\tau)]=\int_0^{\infty} e^{-st}\, x(t-\tau)\,dt=e^{-s\tau}X(s)+e^{-s\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-st}x(t)\,dt \tag{3.2.1.9}$$

(Burada, $X(s)<\infty$ olacak şekilde bir σ_0 reel sayısı vardır.)

(b) $x\in C^1[[0,\infty),R]$ ve $\sigma_0<\infty$ olsun. $x(t)$ nin Laplace transformasyonu $X(s)$ yakınsaktır. Bu halde, $x'(t)$ nin Laplace transformasyonuda yakınsaktır ve tüm s için $\operatorname{Re} s>\sigma_0$ olmak üzere

$$L[x'(t)]=\int_0^{\infty} e^{-st}\, x'(t)\,dt=s\,X(s)-x(0) \tag{3.2.1.10}$$

Teorem 3.2.1.1. (Widder, 1971)

$x \in C\left[[0,\infty), R^+\right]$ ve $x(t)$ nin Laplace transformasyonu $X(s)$, $\sigma_0 < \infty$ olsun. Bu halde, $X(s)$, $s = \sigma_0$ noktasında singülerdir. Daha kesin bir ifade ile $n \geq 1$ pozitif tamsayısı için $\alpha_n \geq \alpha_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \sigma_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\left| X(s)\right| = \infty$ olacak şekilde $s_n = \alpha_n + i\beta_n$, dizisi vardır.

Teorem 3.2.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i = 1, 2,..., n$ için p_i reelsayı ve τ_i pozitif reelsayı (3.2.1.11)

olsun. Bu halde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.2.1.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(b) (3.2.1.2) karakteristik denkleminin reel kökü yoktur.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) $\Rightarrow$ (b): Elementerdir. Çünkü (3.2.1.1) denkleminin her çözümü salınımlı ise (3.2.1.2) karakteristik denklemi reel köke sahip değildir. Diğer bir deyişle (3.2.1.2) denklemi λ_0 reel köküne sahipse $e^{\lambda_0 t}$ salınım yapmayan bir çözümdür.

(b) $\Rightarrow$(a): Bunun doğruluğu için Laplace transformasyonunu kullanalım. (3.2.1.1) denkleminin eninde sonunda $x(t)$ gibi pozitif bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. (3.2.1.1) denklemi otonom olduğundan $t \geq -\tau, \tau = \max\limits_{1\leq i\leq n} \tau_i$ için $x(t) > 0$ olsun. Açıkça, τ pozitiftir aksi halde (3.2.1.2) denklemi bir reel köke sahip olacaktır. Teorem 3.1.5.1 den dolayı $t \geq -\tau$, $M > 0$ ve μ reel sayısı vardır öyle ki $\left| x(t)\right| \leq M\, e^{\mu t}$. Böylece, $\operatorname{Re} s > \mu$ için Laplace transformasyonundan

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, x(t)\, dt \tag{3.2.1.12}$$

yazılır.

$\sigma_0 = \inf\{\sigma \in R : X(\sigma) \text{ mevcut}\}$ olmak üzere bu halde, $i = 1, 2,..., n$ için $x(t-\tau_i)$ lerin Laplace tranformasyonu mevcut ve Lemma 3.2.1.3. ten $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ için

$$\int_0^\infty e^{-st}\, x'(t)\, dt = s\, X(s) - x(0)$$

yazılır. Ayrıca, $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\int_0^\infty e^{-st}\, x(t-\tau_i)\, dt = e^{-s\tau_i}\, X(s) + e^{-s\tau_i} \int_{-\tau_i}^0 e^{-st}\, x(t)\, dt, \ \operatorname{Re} s > \sigma_0$$

yazılır. Buradan hareketle, (3.2.1.1) denklemine Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$\operatorname{Re} s > \sigma_0 \text{ için } F(s)\mathrm{X}(\mathrm{s}) = \Phi(s) \tag{3.2.1.13}$$

denklemi elde edilir. Burada,

$$F(s) = s + \sum_{i=1}^n p_i\, e^{-s\tau_i} \tag{3.2.1.14}$$

$$\Phi(s) = x(0) - \sum_{i=1}^n p_i\, e^{-s\tau_i} \int_{-\tau_i}^0 e^{-st}\, x(t)\, dt \tag{3.2.1.15}$$

ile verilir. Açıkça, $F(s)$ ve $\Phi(s)$ fonksiyonları tamdır. Yani analitiktir. Tüm reel s için $F(s) \neq 0$ olduğundan (3.2.1.13) ten

$$X(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)}, \ \operatorname{Re} s > \sigma_0 \tag{3.2.1.16}$$

elde edilir.

İddia:

$\sigma_0 = -\infty$ olsun. Aksi halde, $\sigma_0 > -\infty$ olur ve Teorem 3.2.1.1 den dolayı $s = \sigma_0$, $\dfrac{\Phi(s)}{F(s)}$ nin bir singüler noktası olur fakat $\dfrac{\Phi(s)}{F(s)}$ reel eksen üzerinde hiçbir singüler noktaya sahip değildir (pay ve payda tam fonksiyon olduklarından hipotezden dolayı payda reel köklere sahip değildir.). Sonuç olarak,

$$\sigma_0 = -\infty \text{ ve tüm reel } s \text{ için } X(s) = \frac{\Phi(s)}{F(s)}. \tag{3.2.1.17}$$

$s \to -\infty$ gönderilirse (3.2.1.17) ifadesi bir çelişki oluşturur. Çünkü, eninde sonunda $\Phi(s)$ negatifken $X(s)$ ve $F(s)$ daima pozitiftir. Tüm $t \geq 0$ için $x(t) > 0$ ve (3.2.1.12) denkleminden $X(s)$ pozitiftir. $F(\infty) = \infty$ ve (3.2.1.14) denkleminde $F(s)$ de pozitiftir. Bununla beraber karakteristik denklemin hiçbir reel kökü yoktur.

Genelliği bozmaksızın (3.2.1.1) denkleminde gecikmelerin birbirinden farklı ve p_i katsayıları sıfırdan farklı olsun. τ_{i_0}, (3.2.1.1) denklemindeki gecikmelerin maksimumu olsun. Bu halde, buna karşılık gelen p_{i_0} katsayısı pozitif aksi halde $\lim_{s\to-\infty} F(s) = -\infty$ olur ve (3.2.1.15) deki baskın terim $s \to -\infty$ için $p_{i_0} e^{-s\tau_{i_0}}$ olur. Açıkça, $\lim_{s\to-\infty} \Phi(s) = -\infty$ olur. Bu durumda ispat biter.

Teorem 3.2.1.3. (Györi ve Ladas, 1991)

p, τ reel sayı olmak üzere (3.2.1.18)

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0 \qquad (3.2.1.19)$$

denklemi verilsin. Bu halde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.2.1.19) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(b) $\lambda + p\,e^{-\lambda\tau} = 0$ (3.2.1.20)

karakteristik denkleminin hiçbir reel kökü yoktur.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) $\Rightarrow$ (b): Açıktır.

(b) $\Rightarrow$(a): $F(\lambda) = \lambda + p\,e^{-\lambda\tau}$ olsun. $F(\lambda)$ hiçbir köke sahip olmadığından $\tau = 0$ olamaz. $\tau \neq 0$ dır.

1. Durum: $\tau < 0$ ise $F(-\infty) = -\infty$, buradan $F(0) = p < 0$ dır. Bu halde, $F(\infty) = -\infty$ ve (3.2.1.20) denklemi hiçbir reel köke sahip olmadığından λ reel sayısı için

$$\lambda + p\,e^{-\lambda\tau} \leq -m \qquad (3.2.1.21)$$

olacak şekilde bir m pozitif sayısı vardır. (3.2.1.19) denklemi pozitif bir çözüme sahip olsun. (Çelişki yoluyla çözelim.) Bu halde, eninde sonunda $x'(t) = -p\,x(t-\tau) > 0$.

$\Lambda = \{\lambda \geq 0 : \text{yeterince büyük } t \text{ ler için} - x'(t) + \lambda\, x(t) \leq 0\}$ kümesini ele alalım. Açıkça, $0 \in \Lambda$ ve Λ pozitif reel sayıların bir alt aralığıdır. Λ birbiriyle çelişkili aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(P1) $\lambda_1 \in \Lambda$ ve $\lambda_2 \notin \Lambda$ olacak şekilde λ_1 ve λ_2 pozitif sayıları vardır.

(P2) $\lambda \in \Lambda$ ise $\lambda + m \in \Lambda$, burada, m, (3.2.1.21) teki gibidir.

$x(t)$ artan ve $x'(t) + p\,x(t) \geq 0$. Bu ise $-p \in \Lambda$.

Lemma 3.2.1.2 ve (3.2.1.19) denkleminden $\lambda_2 = \ln\left[4/(\tau p)^2\right]/-\tau \notin \Lambda$ elde edilir.

(P2) nin doğruluğunu ispat edelim. $\lambda \in \Lambda$ ve $\phi(t) = e^{-\lambda t}\,x(t)$ olsun. Bu halde, $\phi'(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t}\, x(t) + e^{-\lambda t}\, x'(t) \geq 0$. Bu ise $\phi(t)$ nin artan olduğunu gerektirir. Şimdi

$$\begin{aligned}
-x'(t) + (\lambda + m)\,x(t) &= p\,x(t-\tau) + (\lambda + m)\,x(t) \\
&= p\,\phi(t-\tau)\,e^{\lambda(t-\tau)} + (\lambda + m)\,\phi(t)\,e^{\lambda t} \\
&\leq \phi(t)\,e^{\lambda t}\left(p\,e^{-\lambda\tau} + \lambda + m\right) \\
&\leq \phi(t)\,e^{\lambda t}(-m + m) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(P2) ispatlanmış olur. O halde, teoremin $\tau < 0$ hali ispatlanmış oldu.

2. Durum : $\tau > 0$ olsun. Teorem 3.2.1.2 kullanılarak bu durum ispat edilebilir. $F(\infty) = \infty$ buradan $F(0) = p > 0$. Bu halde, $F(-\infty) = \infty$ ve (b) varsayımından

$$\lambda \text{ reel sayısı } \lambda + p\,e^{-\lambda\tau} \geq m \qquad (3.2.1.21')$$

olacak şekilde m pozitif tam sayısı vardır. (3.2.1.19) denklemine çelişki oluşturmak için (3.2.1.19) denklemi eninde sonunda pozitif bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun.

$\Lambda = \{\lambda \geq 0 : \text{yeterince büyük } t \text{ ler için } x'(t) + \lambda\,x(t) \leq 0\}$. 1. Durumdaki gibi Λ pozitif reel sayıların boştan farklı bir alt kümesidir. **(P1)** ve **(P2)** durumlarına çelişki teşkil edilirse teorem ispatlanmış olur.

$x'(t) + p\,x(t) \leq 0$ olduğu açıktır. Bu ise $\lambda_1 = p \in \Lambda$ olduğunu gösterir. Lemma 3.2.1.1, Lemma 3.2.1.2 ve (3.2.1.19) denkleminden $\lambda_2 = \ln\left[4/(\tau p)^2\right]/\tau \notin \Lambda$ bulunur. $\lambda \in \Lambda$ ve $\phi(t) = e^{\lambda t}\,x(t)$ olsun. Bu halde, $\phi'(t) \leq 0$ dır. Bu ise $\phi(t)$ nin artan olmadığını gerektirir.

Buradan,

$$\begin{aligned} x'(t)+(\lambda+m)x(t) &= -p\,x(t-\tau)+(\lambda+m)x(t) \\ &= -p\,e^{-\lambda(t-\tau)}\,\phi(t-\tau)+(\lambda+m)e^{-\lambda t}\,\phi(\mathrm{t}) \\ &\le e^{-\lambda t}\,\phi(t)\left[-p\,e^{\lambda\tau}+\lambda+m\right] \\ &\le e^{-\lambda t}\,\phi(t)\left[-m+m\right]=0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda+m\in\Lambda$ bulunur.

3.2.2 Osilasyon(lar) için tam şartlar

$i=1,2,...,n$ için p_i reel sayı ve τ_i pozitif reel sayı olmak üzere

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\,x(t-\tau_i)=0 \tag{3.2.2.1}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. (3.2.2.1) denklemine karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i\,e^{-\lambda\tau_i}=0. \tag{3.2.2.2}$$

Teorem 3.2.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ için $p_i,\ \tau_i\ge 0$ olsun. Bu halde,

(a) $$\sum_{i=1}^{n} p_i\,\tau_i>\frac{1}{e} \tag{3.2.2.3}$$

(b) $$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{1/n}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_{\mathrm{i}}\right)>\frac{1}{e} \tag{3.2.2.4}$$

eşitsizliklerinin her biri (3.2.2.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınım yapması için yeterli şartlardır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) Tüm $x\ge 0$ için

$$e^{x}\ge e\,x \tag{3.2.2.5}$$

eşitsizliği kullanılırsa $\lambda<0$ için

$$\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda\tau_i} \geq \lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i\,(-\lambda\,\tau_i)e=-\lambda\, e\left(-\frac{1}{e}+\sum_{i=1}^{n} p_i\,\tau_i\right)>0$$

elde edilir. Bu ise (3.2.2.2) nin hiçbir negatif köke sahip olmadığını gösterir. Hatta hiçbir pozitif köke de sahip değildir. Böylece, sonuca Teorem 3.2.1.1 den ulaşılır.

(b) $\lambda<0$ için çok bilinen $\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$ eşitsizliği ve (3.2.2.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda\tau_i} &\geq \lambda+n\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda\tau_i}\right)^{1/n}=\lambda+n\left(\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}\right)\exp\left(-\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)\\ &\geq \lambda+n\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{1/n}\left(-e\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)\\ &=-\lambda\, e\left[-\frac{1}{e}+\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{1/n}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)\right]>0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.2.2.2) denkleminin hiçbir pozitif ve negatif köke sahip olmadığını gösterir. Teorem 3.2.1.1 kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ için $p_i\,,\tau_i \geq 0$ olsun. Bu halde,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\max_{1\leq i\leq n}\tau_i\right)\leq\frac{1}{e} \qquad (3.2.2.6)$$

ifadesi (3.2.2.1) denkleminin çözümünün salınım yapmaması için yeterli bir şarttır. Diğer yandan

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\min_{1\leq i\leq n}\tau_{\mathrm{i}}\right)>\frac{1}{e} \qquad (3.2.2.7)$$

denklemi (3.2.2.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınım yapması için bir yeterli şarttır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.2.6) doğru olsun. (3.2.2.2) denkleminin bir reel köke sahip olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\tau = \max_{1 \le i \le n} \tau_i$ ve $F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda \tau_i}$ olsun. Açıkça, $\tau = 0$ ise (3.2.2.2) denklemi $\lambda = -\sum_{i=1}^{n} p_i$ gibi bir reel köke sahiptir. Diğer taraftan

$\tau > 0$ ise

$$F(0)F\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(-\frac{1}{\tau} + \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{\tau_i/\tau}\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left(-\frac{1}{\tau} + \sum_{i=1}^{n} p_i\, e\right)$$
$$= \frac{e}{\tau}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\left[-\frac{1}{e} + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\tau\right] \le 0$$

yazılır. Bu durum, (3.2.2.2) denkleminin $\left[-\frac{1}{\tau}, 0\right]$ aralığında bir reel köke sahip olduğunu gösterir. (3.2.2.7) ifadesi (3.2.2.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için yeterli bir şart olduğundan Teorem 3.2.2.1 in (a) şıkkı ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.2.3. (Györi ve Ladas, 1991)

p, τ reel sayılar olmak üzere

$$x'(t) + p\, x(t-\tau) = 0 \tag{3.2.2.8}$$

denklemini ele alalım. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.2.2.8) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(b) $p\,\tau > \frac{1}{e}$ dir. (3.2.2.9)

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Teorem 3.2.1.2 den (b) ifadesi ile aynı olan

(c) $F(\lambda) = \lambda + p\, e^{-\lambda\tau} = 0$ (3.2.2.10)

denkleminin pozitif bir köke sahip olmadığını gösterirsek ispat biter. Yani, (3.2.2.10) denkleminin hiçbir reel köke sahip olmadığını göstermemiz gerekir. Ya (b) ifadesi ya da (c) ifadesi sağlanırsa ya $p > 0$ ve $\tau > 0$ ya da $p < 0$ ve $\tau < 0$ durumu gerçekleşir.

Şimdi $F(\lambda)$ nın kritik noktaları kolaylıkla bulunabilir. (b) nin (c) yi gerektirdiği durum: Eğer $p>0$ ve $\tau>0$ ise $F(-\infty)=F(\infty)=\infty$ ve $\min_{\lambda\in R} F(\lambda)=\ln(p\,\tau\, e)/\tau>0$. Diğer taraftan, $p<0$ ve $\tau<0$ ise $F(-\infty)=F(\infty)=-\infty$ ve $\max_{\lambda\in R} F(\lambda)=\ln(p\,\tau\, e)/\tau<0$ ispat biter.

Sonuç 3.2.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

p, q, τ reel olmak üzere

$$x'(t)+p\,x(t)+q\,x(t-\tau)=0 \tag{3.2.2.11}$$

denklemini ele alalım. Bu halde, (3.2.2.11) denkleminin tüm çözümlerinin salınım yapması için gerek ve yeter şart

$$q\,\tau\, e^{p\tau}>\frac{1}{e}$$

olmasıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$x(t)=e^{-pt}\,y(t)$ dönüşümü ile (3.2.2.11) denkleminin salınımlılığı değişmez. Bu halde, (3.2.2.11) ifadesinden

$$y'(t)+q\,e^{p\tau}\,y(t-\tau)=0$$

elde edilir. Bu ise ispatı yukarıda verilen Teorem 3.2.2.3 tür.

$$x'(t)+p\,x(t-\tau)-q\,x(t-\sigma)=0, \tag{3.2.2.12}$$

burada,

$$p, q, \tau, \sigma \text{ pozitif reel sayılardır.} \tag{3.2.2.13}$$

Teorem 3.2.2.4. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.2.13) olmak üzere (3.2.2.12) denklemini ele alalım. Bu halde, (3.2.2.12) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için gerekli şart

$$p>q \text{ ve } \tau\geq\sigma \tag{3.2.2.14}$$

ile verilir. Diğer taraftan, (3.2.2.12) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için yeterli şart

$$p > q, \tau \geq \sigma, q(\tau - \sigma) \leq 1 \text{ ve } (p-q)\tau > \frac{1}{e}[1 - q(\tau - \sigma)] \tag{3.2.2.15}$$

ile verilir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.2.12) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) = \lambda + p\,e^{-\lambda\tau} - q\,e^{-\lambda\sigma} = 0 \tag{3.2.2.16}$$

ile verilir.

(3.2.2.12) denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu halde, (3.2.2.16) denkleminin hiçbir reel kökü yoktur. $F(\infty) = \infty$ olduğundan $F(0) = p - q > 0,\ p > q.$ Aynı zamanda, $\tau \geq \sigma,$ aksi halde, $\tau < \sigma$ (ve $q > 0$) ise $F(-\infty) = -\infty$ olur.

(3.2.2.15) sağlansın. Çelişki oluşturmak için (3.2.2.16) denklemi λ_0 reel köküne sahip olsun. Bu halde karakteristik denklemden

$$\lambda_0\left(1 - q\int_\sigma^\tau e^{-\lambda_0 s}\,ds\right) = \lambda_0 + q\left(e^{-\lambda_0\tau} - e^{-\lambda_0\sigma}\right) = -(p-q)e^{-\lambda_0\tau} \tag{3.2.2.17}$$

elde edilir. $\lambda \geq 0$ için

$$1 - q\int_\sigma^\tau e^{-\lambda s}ds \geq 1 - q\int_\sigma^\tau ds = 1 - q(\tau - \sigma) \geq 0$$

elde edilir ve (3.2.2.17) den $\lambda_0 < 0$ olduğu görülür. Bu halde,

$$0 < 1 - q\int_\sigma^\tau e^{-\lambda_0 s}ds < 1 - q\int_\sigma^\tau ds = 1 - q(\tau - \sigma)$$

ve (3.2.2.17) den

$$\lambda_0[1 - q(\tau - \sigma)] + (p-q)e^{-\lambda_0\tau} < 0$$

elde edilir. Yani,

$$1 - q(\tau - \sigma) > 0 \text{ ve } \lambda_0 + \frac{(p-q)}{1 - q(\tau - \sigma)}e^{-\lambda_0\tau} < 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\lambda + \frac{(p-q)}{1 - q(\tau - \sigma)}e^{-\lambda\tau} = 0$$

$(\lambda_0, 0)$ aralığında bir reel köke sahip olur. Teorem 3.2.2.3 ten

$$(p-q)\tau \le \frac{1}{e}\left[1-q(\tau-\sigma)\right]$$

elde edilir. Bu ise (3.2.1.15) ifadesinin son eşitsizliğine çelişki teşkil eder. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3.2.3 Salınımlı ve salınımlı olmayan çözümler için yeterli şartlar (Otonom olmayan durumlar için)

$t \ge t_0$ için otonom olmayan

$$x'(t) + P(t)x(t-\tau) = 0 \tag{3.2.3.1}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım.

Teorem 3.2.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$\tau > 0$ olmak üzere

$$P \in C\left[[t_0, \infty), R^+\right] \tag{3.2.3.2}$$

ve

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_{t-\tau}^{t} P(s)ds > \frac{1}{e} \tag{3.2.3.3}$$

olsun. Bu halde, (3.2.3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.2.3.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$\tau > 0$ olmak üzere

$$P \in C\left[[t_0-\tau, \infty), R^+\right] \tag{3.2.3.2$'$}$$

ve

$$\int_{t-\tau}^{t} P(s)ds \le \frac{1}{e},\ t \ge t_0 \tag{3.2.3.4}$$

olsun. Bu halde, (3.2.3.1) denklemi pozitif bir çözüme sahiptir.

Dikkat edilmelidir ki yukarıdaki sonuçlar net olup diğer bir ifadeyle alt sınır $1/e$ geliştirilemez. Üstelik, $P(t)$ sabit p ye eşit olduğunda (3.2.3.3), $p\tau e > 1$ ye indirgenir. Bu ise Teorem 3.2.2.3 de gösterdiğimiz gibi

$$x'(t) + p\,x(t-\tau) = 0 \tag{3.2.3.5}$$

denkleminin bütün çözümlerinin salınımı için gerekli ve yeterlidir. Benzer bir şekilde, (3.2.3.4) $p\tau e \le 1$ ye indirgenir ki bu (3.2.3.5) in varolan pozitif çözümü için gerekli ve yeterlidir.

Teorem 3.2.3.1 in İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturmak için (3.2.3.1) denklemi nihayetinde bir $x(t)$ pozitif çözümüne sahip olsun. Bu halde, $t^* \ge t_0 + \tau$ vardır öyle ki $t \ge t^*$ için

$$x(t) > 0,\ x(t-\tau) > 0,\ x'(t) \le 0 \ \text{ ve } \ x(t-\tau) \ge x(t)$$

sağlanır. Aynı zamanda, (3.2.3.3) ifadesinden

$$\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds \ge c > 1/e\,,\ t \ge t_1 \tag{3.2.3.6}$$

sağlanacak şekilde bir $t_1 \ge t^*$ ve $c > 0$ vardır. Bu halde, $t \ge t_1$ için $x'(t) + p(t)x(t) \le 0$ veya $\dfrac{x'(t)}{x(t)} + p(t) \le 0$ elde edilir. $t-\tau$ den t ye integre edilir ve (3.2.3.6) kullanılırsa $t \ge t_1 + \tau$ için $\ln\dfrac{x(t)}{x(t-\tau)} + c \le 0$ veya $e^c x(t) \le x(t-\tau)$ elde edilir. Tüm c reel sayıları için $e^c \ge e\,c$ olduğu görülebilir ve böylece $t \ge t_1 + \tau$ için $(ec)x(t) \le x(t-\tau)$ elde edilir. Bu muhakemeye devam edilirse herhangi bir pozitif k sayısı için tümevarımdan

$t \ge t_1 + k\,\tau$ için

$$(ec)^k\, x(t) \le x(t-\tau) \tag{3.2.3.7}$$

elde edilir. (3.2.3.6) ifadesinden ve $e\,c > 1$ olduğundan

$$(2/c)^2 < (ec)^k \tag{3.2.3.8}$$

olacak şekilde bir k seçilebilir. Şimdi $\tilde{t} \ge t_1 + k\tau$ olsun. Bu halde (3.2.3.6) ifadesinden

$$\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)ds \geq \frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)ds \geq \frac{c}{2} \tag{3.2.3.9}$$

olacak şekilde bir $\xi \in (\tilde{t}, \tilde{t}+\tau)$ vardır. (3.2.3.1) ifadesi $[\tilde{t}, \xi]$ ve $[\xi, \tilde{t}+\tau]$ aralıkları üzerinde integre edilirse

$$x(\xi) - x(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)\,x(s-\tau)ds = 0 \tag{3.2.3.10}$$

ve

$$x(\tilde{t}+\tau) - x(\xi) + \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)\,x(s-\tau)ds = 0 \tag{3.2.3.11}$$

elde edilir.

(3.2.3.10) ve (3.2.3.11) ifadelerinin ilk terimleri atılırsa $x(t)$ nin azalanlığından ve (3.2.3.9) dan

$$-x(\tilde{t}) + x(\xi-\tau)\frac{c}{2} < 0 \quad \text{ve} \quad -x(\xi) + x(\tilde{t})\frac{c}{2} < 0$$

veya

$$x(\xi) > \frac{c}{2}x(\tilde{t}) > \left(\frac{c}{2}\right)^2 x(\xi-\tau)$$

elde edilir. Bu ve (3.2.3.7) ifadesinden

$$(ec)^k \leq \frac{x(\xi-\tau)}{x(\xi)} < \left(\frac{2}{c}\right)^2$$

elde edilir. Bu ise (3.2.3.8) ifadesine çelişkidir. Bu ise teoremi ispatlar.

Teorem (Schauder's Fixed Nokta Teoremi): (Schauder, 1930)

X bir Banach uzayı olsun. M boştan farklı X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun ve TM , X in rölatif (relatively) kompakt (compact) bir alt kümesi olacak şekilde $T: M \to M$ sürekli bir fonksiyon ise T , M kümesi içinde en az bir fixed (sabit) noktaya sahiptir. Yani, $x \in M$ olmak üzere $Tx = x$.

(**Rölatif Kompakt:** $\overline{T}(M)$ kompakttır. Yani, kapalı ve sınırlıdır.)

Teorem 3.2.3.2 nin İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

İspat için Schauder Teoremi kullanılacak. $\|f\| = \sup_{T \le x < \infty} |f(x)|$ olmak üzere X, $[t_0 - \tau, \infty)$ aralığı üzerinde reel değerli, sürekli, sınırlı fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. $x(t) \in M \subset X$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlansın.

(1) $t \ge t_0$ için $x(t)$ artmayan ve $t_0 - \tau \le t \le t_0$ için $x(t) = 1$.

(2) $t \ge t_0$ için $\exp\left(-e\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right) \le x(t) \le 1.$

(3) $t \ge t_0$ için $x(t-\tau) \le e\, x(t).$

$t \ge t_0 - \tau$ için $x(t) = 1$, $(1)-(3)$ şartlarını sağlayan bir fonksiyondur. M üzerinde

$$(Tx)(t) = \begin{cases} 1, & t_0 - \tau \le t \le t_0 \\ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{P(s)x(s-\tau)}{x(s)} ds\right) & , \ t \ge t_0 \end{cases} \tag{3.2.3.12}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Gerçekten, $(Tx)(t)$ artan olmayan sürekli bir fonksiyondur. $t \ge t_0$ için (3) den dolayı

$$(Tx)(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{P(s)x(s-\tau)}{x(s)} ds\right) \ge \exp\left(-e\int_{t_0}^{t} P(s)ds\right)$$ elde edilir. Aynı zamanda, $t \ge t_0$ için (3.2.3.4) ve (3) ifadesi kullanılırsa

$$(Tx)(t-\tau) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t-\tau} \frac{P(s)x(s-\tau)}{x(s)} ds\right) = (Tx)(t)\exp\left(\int_{t-\tau}^{t} \frac{P(s)x(s-\tau)}{x(s)} ds\right)$$

$$\le (Tx)(t)e^{e\left(\frac{1}{e}\right)} = e(Tx)(t)$$

elde edilir.

Yani, sonuç olarak $T: M \to M$ dir. Açıkça, M kapalı, X in konveks bir alt kümesi ve $T: M \to M$ sürekli bir fonksiyondur. Aynı zamanda, TM nin kapanışı kompakttır. Çünkü, TM eş sürekli (sürekli fonksiyonlar dizisi) ve düzgün olarak sınırlıdır. Dolayısıyla, Schauder Fixed Nokta teoreminin tüm şartları sağlanmıştır.

Böylece T bir x fixed noktasına sahiptir. Bir $x \in M$ vardır öyle ki $Tx = x.$ (3.2.3.12) den

$$t_0 - \tau \le t \le t_0 \text{ için } x(t) = 1 \text{ ve } t \ge t_0 \text{ için } x(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{P(s)\,x(s-\tau)}{x(s)} ds \right)$$

yazılır.

Dolayısıyla, $x(t)$ pozitif ve

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{P(t)\,x(t-\tau)}{x(t)} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{P(s)\,x(s-\tau)}{x(s)} ds \right) \\ &= -\frac{P(t)\,x(t-\tau)}{x(t)} x(t) = -P(t)\,x(t-\tau). \end{aligned}$$

yazılır. Yani, $x(t)$, (3.2.3.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.2.3.1 in ispatı $t \ge t_0$ için

$$x'(t) + P(t)\,x(t-\tau) \le 0 \tag{3.2.3.13}$$

$$x'(t) + P(t)\,x(t-\tau) \ge 0 \tag{3.2.3.14}$$

eşitsizliklerine aynen uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.3.3. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.3.2) ve (3.2.3.3) şartları sağlansın $t \ge t_0$ için (3.2.3.13) nihayetinde pozitif bir çözüme sahip ve (3.2.3.14) ifadesi de nihayetinde negatif bir çözüme sahip değildir.

$$y'(t) - P(t)\,y(t+\tau) = 0 \tag{3.2.3.15}$$

$$y'(t) - P(t)\,\mathrm{y}(\mathrm{t}+\tau) \ge 0 \tag{3.2.3.16}$$

$$y'(t) - P(t)\,\mathrm{y}(\mathrm{t}+\tau) \le 0 \tag{3.2.3.17}$$

ileri gecikmeli diferansiyel denklemleri ve eşitsizlerini ele alalım.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Teorem 3.2.3.1 in ispatındaki benzer işlemler (3.2.3.15) – (3.2.3.17) ifadelerine uygulanırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.3.4. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.3.2) ve (3.2.3.3) şartları sağlansın. Bu halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(1) (3.2.3.16) eşitsizliği nihayetinde pozitif bir çözüme sahip değildir.

(2) (3.2.3.17) ifadesi nihayetinde negatif bir çözüme sahip değildir.

(3) (3.2.3.15) ifadesinin her çözümü nihayetinde salınımlıdır.

3.2.4 Sabit katsayılı lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin asimtotik salınımları

$$t \geq t_0,\ j = 1, 2, \dots, n \quad \text{için} \quad x'(t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(t)\, x(t - \tau_j) = 0 \tag{3.2.4.1}$$

$$Q_j \in C\left[[t_0, \infty), R^+\right],\ \ \tau_j \geq 0 \ \ \text{ve} \ \ \lim_{t \to \infty} Q_j(t) \equiv q_j \tag{3.2.4.2}$$

olsun.

Teorem 3.2.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(a) (3.2.4.2) doğru ve

$$z'(t) + \sum_{j=1}^{n} q_j\, z(t - \tau_j) = 0 \tag{3.2.4.3}$$

limit denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu halde, (3.2.4.1) denkleminin her çözümü aynı zamanda salınımlıdır.

(b) (3.2.4.2) ye ek olarak yeterince büyük t ler ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$Q_j(t) \leq q_j \tag{3.2.4.4}$$

olsun. Bu halde, (3.2.4.1) denkleminin her çözümünün salınımı için gerek ve yeter şart (3.2.4.3) ifadesinin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) Teorem 3.2.1.1 den hiçbir reel köke sahip olmayan (3.2.4.3) ifadesinin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) \equiv \lambda + \sum_{j=1}^{n} q_j \, e^{-\lambda \tau_j} = 0 \tag{3.2.4.5}$$

ile verilir. $F(\infty) = \infty$ olduğundan $\lambda \in R$ için $F(\lambda) > 0.$ Özel olarak, $F(0) = \sum_{j=1}^{n} q_j > 0$ olur. Bundan dolayı q_j katsayılarından en az biri pozitiftir. Aynı zamanda, bazı q_{j_0} pozitif katsayısına karşılık gelen τ_{j_0} gecikmesi de pozitif olacaktır (Aksi halde $\lambda = -\sum_{j=1}^{n} q_j$ ifadesi (3.2.4.5) denkleminin bir kökü olacaktır.). Bu halde, $F(-\infty) = \infty$ ve $m = \min_{\lambda \in R} F(\lambda)$ mevcut ve pozitiftir. Böylece, $\lambda \in R$ için $\lambda + \sum_{j=1}^{n} q_j \, e^{-\lambda \tau_j} \geq m$ yazılır veya buna denk olarak

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \, e^{\lambda \tau_j} \geq \lambda + m \tag{3.2.4.6}$$

yazılır. Çelişki oluşturmak için nihayetinde (3.2.4.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu halde, $q_{j_0} > 0$ ve $\tau_{j_0} > 0$ olacak şekilde j_0 indeksli

$$x'(t) + Q_{j_0}(t)\, x\left(t - \tau_{j_0}\right) \leq 0 \tag{3.2.4.7}$$

denklemi yazılır. Açıkça yeterince büyük t ler için

$$x'(t) + \frac{1}{2} q_{j_0} x\left(t - \tau_{j_0}\right) \leq 0 \tag{3.2.4.8}$$

yazılır.

$\Lambda = \{\lambda \geq 0 : x'(t) + \lambda \, x(t) \leq 0 \text{ ve nihayetinde yeterincebüyük } t \text{ ler için}\}$ olsun.

Açıkça, Λ, R^+ nın boştan farklı bir alt aralığıdır. (3.2.4.1) ifadesinin her çözümünün salınımlı olduğunu söyleyebilmemiz için Λ nin aşağıdaki ters özelliklere sahip olduğunu göstermemiz yeterlidir.

(P$_1$) Λ yukardan sınırlıdır.

(P$_2$) $\lambda \in \Lambda$ ise $(\lambda + m/2) \in \Lambda$ dır. Burada, m, (3.2.4.6) yı sağlayan pozitif bir sabittir.

(P_1) in ispatı (3.2.4.8) ve Lemma 3.2.1.2 den elde edilir. **(P_2)** yi ispat etmek için $\lambda \in \Lambda$ ve $\psi(t) = e^{\lambda t} x(t)$. Buradan, $\psi'(t) = e^{\lambda t}[x'(t) + \lambda x(t)] \leq 0$. Burada, $\psi(t)$ azalandır.

Şimdi de $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki tüm j ler için $q_j > 0$ ve yeterince büyük t ler için $Q_j(t) \geq q_j - \varepsilon > 0$ ve $\varepsilon \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda \tau_j} \leq m/2$ ve tüm $j = 0, 1, 2, ..., n$ için

$$
\begin{aligned}
x'(t) + (\lambda + m/2)\, x(t) &= -\sum_{j=1}^{n} Q_j(t)\, x(t - \tau_j) + (\lambda + m/2)\, x(t) \\
&\leq e^{-\lambda t}\left[-\sum_{j=1}^{n} Q_j(t)\, e^{\lambda \tau_j} \psi(t - \tau_j) + (\lambda + m/2)\, \psi(t) \right] \\
&\leq e^{-\lambda t} \psi(t) \left[-\sum_{j=1}^{n} Q_j(t)\, e^{\lambda \tau_j} + \lambda + m/2 \right] \\
&\leq e^{-\lambda t} \psi(t) \left[-\sum_{j=1}^{n} (q_j - \varepsilon)\, e^{\lambda \tau_j} + \lambda + m/2 \right] \\
&\leq e^{-\lambda t} \psi(t)(-\lambda - m + m/2 + \lambda + m/2) = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda, **(P_2)** ispatlanır. (a) nın ispatı tamamlanır.

(b) (a) ifadesinden eğer (3.2.4.3) ün her çözümü salınımlı ise (3.2.4.1) in de her çözümü salınımlıdır. Bunun tersinin de doğru olduğunu ispat edebilmek için eğer (3.2.4.3) denklemi μ (negatif) reel köküne sahipse (3.2.4.1) denkleminin de salınım yapmayan bir $x(t)$ çözümüne sahip olduğunu göstermemiz yeterlidir. Keyfi bir pozitif x_0 için $\tau = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \tau_j$ olmak üzere (3.2.4.1) denklemi pozitif $x(t)$ çözümüne sahip ise

$$t \geq t_0 \text{ için } x_0\, e^{\mu(t - t_0)} \leq x(t) \leq x_0 \text{ ve } t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \text{ için } x(t) = x_0\, e^{\mu(t - t_0)}$$

yazılır.

X, $[t_0 - \tau, \infty)$ aralığı üzerinde sınırlı, sürekli, $\|f\| = \sup\limits_{T \leq x < \infty} |f(x)|$ normuna göre, reel değerli bir Banach uzayı olsun. $x(t) \in M$ olmak üzere M aşağıdaki şartları sağlayan X in bir alt kümesi olsun.

(1) $t \geq t_0$ için $x(t)$ artmayan ve $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için $x(t) \equiv x_0\, e^{\mu(t-t_0)}$

(2) $t \geq t_0$ için $x_0\, e^{\mu(t-t_0)} \leq x(t) \leq x_0$

(3) $t \geq t_0$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için $x(t-\tau_j) \leq e^{-\mu\tau_j} x(t)$.

$$T : M \to M$$

$$(Tx)(t) = \begin{cases} x_0\, e^{\mu(t-t_0)}, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \\ x_0 \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{Q_j(s)\, x(s-\tau_j)}{x(s)} ds \right), & t \geq t_0 \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Şimdi de Schauder Teoreminin şartlarını sağlamaya çalışalım. Açıkça, $(Tx)(t)$ artmayan sürekli bir fonksiyon ve $t \geq t_0$ için ve $(Tx)(t) \leq x_0$. Aynı zamanda, $t \geq t_0$ için ve (3.2.4.4) denkleminden

$$(Tx)(t) \geq x_0 \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} q_j \int_{t_0}^{t} \frac{x(s-\tau_j)}{x(s)} ds \right) \geq x_0 \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} q_j\, e^{-\mu\tau_j} \int_{t_0}^{t} ds \right) = x_0\, e^{\mu(t-t_0)}$$

yazılır. Burada, son adımda μ, (3.2.4.5) karakteristik denkleminin bir köküdür gerçeği kullanıldı. Tekrar (3.2.4.4) kullanılır ve μ, (3.2.4.5) denkleminin bir kökü olduğundan hareketle her $k = 1, 2, ..., n$ ve $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} (Tx)(t-\tau_k) &= x_0 \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t-\tau_k} \frac{Q_j(s)\, x(s-\tau_j)}{x(s)} ds \right) \\ &= (Tx)(t) \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \int_{t-\tau_k}^{t} \frac{Q_j(s)\, x(s-\tau_j)}{x(s)} ds \right) \\ &\leq (Tx)(t) \exp\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \int_{t-\tau_k}^{t} e^{-\mu\tau_j} ds \right) \\ &= (Tx)(t) \exp\left(\tau_k \sum_{j=1}^{n} q_j\, e^{-\mu\tau_j} \right) = (Tx)(t)\, e^{-\mu\tau_k}. \end{aligned}$$

Yani, $T : M \to M$ bir fonksiyondur. (T, M yi M nin içine götüren bir dönüşümdür.)

Açıkça, M boştan farklı (çünkü, $e^{\mu(t-t_0)} \in M$.), kapalı, sürekli ve konvekstir. Son olarak, TM nin X içerisinde rölatifli kompakt olduğunu gösterebilmek için $\frac{d}{dt}[(Tx)(t)]$ düzgün olarak sınırlı olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\frac{d}{dt}[(Tx)(t)] = -\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j(t)\,x(t-\tau_j)}{x(t)}\right](Tx)(t)$$

ve böylece

$$\left|\frac{d}{dt}[(Tx)(t)]\right| = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j(t)\,x(t-\tau_j)}{x(t)}\right](Tx)(t) \le \left[\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{x(t-\tau_j)}{x(t)}\right] x_0$$

$$\le x_0 \sum_{j=1}^{n} q_j\, e^{-\mu\tau_j} = -\mu\, x_0 .$$

Böylece Schauder fixed nokta teoreminin tüm koşulları gerçekleşmiştir. $x \in M$ olmak üzere T bir fixed noktaya sahiptir. Açıkça, $x(t)$, (3.2.4.1) denkleminin pozitif bir çözümüdür.

Not 3.2.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$$x'(t) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(t)\,x(t-\tau_j) \le 0, \quad t \ge t_0 \tag{3.2.4.9}$$

Diferansiyel eşitsizliğini ele alalım. Burada, katsayılar ve τ_j gecikmeleri (3.2.4.2) denklemini sağlar. Teorem 3.2.4.1 in ispatındaki (a) ifadesi aynen uygulanırsa eğer (3.2.4.3) ün her çözümü salınımlı ise (3.2.4.9) eşitsizliğinin de nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olmadığını gördük. Yani, buna denk olarak eğer (3.2.4.9) nihayetinde pozitif bir çözüme sahip ise (3.2.4.3) ifadesi de nihayetinde pozitif bir çözüme sahiptir.

Sonuç 3.2.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$$j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{için} \quad q_j \in (0,\infty) \text{ ve } \tau_j \in [0,\infty) \tag{3.2.4.10}$$

ve

$$x'(t) + \sum_{j=1}^{n} q_j\, x(t-\tau_j) \le 0$$

diferansiyel eşitsizliği nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olsun. Bu halde,

$$y'(t)+\sum_{j=1}^{n} q_j\, y(t-\tau_j)=0$$

denklemi de nihayetinde pozitif bir çözüme sahiptir.

Sonuç 3.2.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.4.10) doğru ve

$$x'(t)-\sum_{j=1}^{n} q_j\, x(t+\tau_j)\geq 0$$

diferansiyel eşitsizliği nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olsun. Bu halde,

$$y'(t)-\sum_{j=1}^{n} q_j\, y(t+\tau_j)=0$$

denklemi de nihayetinde pozitif bir çözüme sahiptir.

3.2.5 Nicholson modeli

Nicholson' ın modellediği sineklerin dinamiği ile ilgili

$$N'(t)=-\delta\, N(t)+PN(t-\tau)e^{-\alpha\, N(t-\tau)},\ t\geq 0 \qquad (3.2.5.1)$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. P sinek başına düşen günlük maxsimum yumurta oranı, $\frac{1}{\alpha}$ ise bu popülasyonun maxsimum oranında yeniden üreme büyüklüğüdür, δ ise günlük yetişkin sinek başına düşen ölüm oranı, τ oluşum (üretim) süresi ve $N(t)$, t zamanında popülasyon büyüklüğüdür.

(3.2.5.1) denklemine eşlik eden koşullar

$$-\tau\leq t\leq 0,\ \phi\in C\big[[-\tau,0],R^{+}\big] \text{ ve } \phi(0)>0 \text{ ile } N(t)=\phi(t). \qquad (3.2.5.2)$$

Açıkça, (3.2.5.2) şartını sağlayan (3.2.5.1) denklemi tüm $t\geq 0$ için bir tek çözüme sahiptir. $P>\delta$ için (3.2.5.1) denkleminin pozitif N^{*} denge noktası

$$N^{*}=\frac{1}{\alpha}\ln(P/\delta) \qquad (3.2.5.3)$$

ile verilir. $N(t)=N^{*}+\frac{1}{\alpha}x(t)$ alınırsa $x(t)$,

$$x'(t)+\delta\, x(t)+\alpha\,\delta\, N^{*}\left[1-e^{-x(t-\tau)}\right]-\delta\, x(t-\tau)\,e^{-x(t-\tau)}=0 \qquad (3.2.5.4)$$

gecikmeli diferansiyel denklemini sağlar. $N(t)$ nin bu kritik N^{*} civarında salınım yapması için gerek ve yeter koşul $x(t)$ nin sıfır civarında salınım yapmasıdır.

Teorem 3.2.5.1. (Györy ve Ladas, 1980; Gurney ve ark., 1980)

(a) δ, P, τ, α , $P \geq \delta\, e$ (3.2.5.5)

ve

$$\delta\,\tau\, e^{\delta\tau}\left[\ln(P/\delta)-1\right]>\frac{1}{e} \qquad (3.2.5.6)$$

denklemlerini sağlayacak şekilde pozitif reeller olsun. Bu halde, (3.2.5.1) ve (3.2.5.2) denklemlerinin $N(t)$ çözümü N^{*} kritik noktası civarında salınım yapar.

(b) $P > \delta\, e^{2}$ $(3.2.5.5')$

sağlayacak şekilde δ, P, τ, α pozitif reel sayılar olsun. Bu halde, (3.2.5.1) ve (3.2.5.2) denkleminin $N(t)$ çözümünün N^{*} civarında salınm yapması için gerek ve yeter şart (3.2.5.6) denkleminin sağlanmasıdır.

İspat: (Györy ve Ladas, 1980; Gurney ve ark., 1980)

(a) (3.2.5.5) ve (3.2.5.6) sağlansın. Çelişki oluşturabilmek için $N(t)$ nin N^{*} civarında salınım yapmadığını kabul edelim. Bu halde, (3.2.5.4) denklemi salınım yapmayan (osilasyon yapmayan) bir $x(t)$ çözümüne sahiptir. Nihayetinde $x(t)$ pozitif olsun. $x(t)$ nin nihayetinde negatif olması durumu benzer olduğundan ispatı yapılmayacaktır. (3.2.5.4) denklemi otonom olduğundan $t \geq -\tau$ için $x(t) > 0$ olduğunu kabul edelim.

İddia:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0 \qquad (3.2.5.7)$$

İspat edebilmek için

$$u(t)=x(t)+\delta\int_{t-\tau}^{t} x(s)\,ds+\alpha\,\delta\, N^{*}\int_{0}^{t}\left[1-e^{-x(s-\tau)}\right]ds,\quad t\geq 0 \qquad (3.2.5.8)$$

olsun. $t \geq 0$ için $u(t) > 0$ ve

$u'(t) = -\delta\, x(t-\tau)\left[1 - e^{-x(t-\tau)}\right] \leq 0$ yazılır. Dolayısıyla, $u(t)$ azalan ve (3.2.5.8) denklemi göz önüne alınırsa $x(t)$ sınırlı ve

$$\int_0^\infty \left[1 - e^{-x(s-\tau)}\right] ds < \infty \tag{3.2.5.9}$$

denklemini sağlar.

$t \geq 0$ için $0 < x(t) \leq M$ sağlanacak şekilde $M > 0$. Açıkça, $0 \leq x \leq M$ için $x \leq e^M \left(1 - e^{-x}\right)$ elde edilir. (3.2.5.9) ifadesinden

$$\int_0^\infty x(s)\, ds \leq e^M \int_0^\infty \left[1 - e^{-x(s-\tau)}\right] ds < \infty \tag{3.2.5.10}$$

elde edilir. Aynı zamanda,

$$\int_0^\infty x(s-\tau) e^{-x(s-\tau)} ds \leq \int_0^\infty x(s-\tau)\, ds < \infty \tag{3.2.5.11}$$

yazılır. (3.2.5.4) ifadesi göz önüne alınırsa (3.2.5.9), (3.2.5.10) ve (3.2.5.11) ifadelerinden $x' \in L^1[0,\infty)$ ve böylece $\lim_{t\to\infty} x(t)$ mevcuttur. Aynı zamanda, x in kendiside $L^1[0,\infty)$ dır. Burada, (3.2.5.7) yazılır. Şimdi (3.2.5.4) denklemini

$$x'(t) + \delta\, x(t) + Q(t)\, x(t-\tau) = 0, \quad t \geq 0 \tag{3.2.5.12}$$

formatında yazalım. Burada,

$$Q(t) = \frac{\alpha\, \delta\, N^* \left[1 - e^{-x(t-\tau)}\right]}{x(t-\tau)} - \delta\, e^{-x(t-\tau)}$$

(3.2.5.7) denkleminden

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \alpha\, \delta\, N^* - \delta = \delta\left[\ln(P/\delta) - 1\right] > 0\,.$$

(3.2.5.12) denkleminin limit denklemi

$$z'(t)+\delta\, z(t)+\delta\left[\ln(P/\delta)-1\right]z(t-\tau)=0 \qquad (3.2.5.13)$$

ile verilir. (3.2.5.6) ve Sonuç 3.2.2.1 den (3.2.5.3) ün her çözümü salınımlıdır. Teorem 3.2.4.1 (a) ifadesinden (3.2.5.12) denkleminin her çözümü veya buna denk olan (3.2.5.4) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Bu ise $x(t)>0$ durumuna çelişkidir. Böylece (a) ispatlanmış olur.

(b) Açıkça, $(3.2.5.5')$ ve (3.2.5.6) ifadelerinden $N(t)$, N^* civarında salınım yapar. Tersine $(3.2.5.5')$ doğru olsun ve $N(t)$, N^* civarında salınım yapsın. (3.2.5.6) denkleminin doğru olduğunu ispat etmemiz veya buna denk olan (3.2.5.13) ün her çözümünün salınım yaptığını göstermemiz gerekir. Böylece, Teorem 3.2.4.1 (b) ifadesinden yeterince büyük t ler için

$$Q(t)\le\delta\left[\ln(P/\delta)-1\right] \qquad (3.2.5.14)$$

yazılır. Bunu sonlandırmak için yeterince büyük t ler için $u\equiv x(t-\tau)$ yeterince küçüktür. Fakat yeterince küçük u lar için

$$\frac{\alpha\,\delta\,N^*\left(1-e^{-u}\right)}{u}-\delta\, e^{-u}\le\delta\left[\ln(P/\delta)-1\right]$$

olduğunu görmek kolaydır.

3.2.6 Katsayılara göre otonom olmayan denklemlerde salınımlar

$$y'(t)+P(t)\,y(t-\tau)-Q(t)\,y(t-\sigma)=0 \qquad (3.2.6.1)$$

ve

$$P,Q\in C\left[[t_0,\infty),R^+\right] \quad \text{ve} \quad \tau,\sigma\in[0,\infty) \qquad (3.2.6.2)$$

denklemlerini ele alalım.

Lemma 3.2.6.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.6.2) denklemi doğru olsun.

$$\tau\ge\sigma \qquad (3.2.6.3)$$

$$t\ge t_0+\tau-\sigma \ \text{ için } \ P(t)\ge Q(t+\sigma-\tau) \ \text{ ve } \ P(t)\not\equiv Q(t+\sigma-\tau) \qquad (3.2.6.4)$$

ve

$$t \geq t_0 + \tau \text{ için } \int_{t-\tau}^{t-\sigma} Q(s)\,ds \leq 1 \tag{3.2.6.5}$$

doğru olsun.

Ayrıca, $y(t)$, (3.2.6.1) denkleminin nihayetinde pozitif bir çözümü ve

$$t \geq t_0 + \tau - \sigma \text{ için } z(t) = y(t) - \int_{t-\tau}^{t-\sigma} Q(s+\sigma)\,y(s)\,ds \tag{3.2.6.6}$$

olsun. Bu halde, nihayetinde $z(t)$ artmayan ve pozitif bir fonksiyondur.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$t_1 \geq t_0 + \tau$ olduğunda $t \geq t_1 - \tau$ için $y(t) > 0$ olacak şekilde seçelim. Bu halde,

$$t \geq t_1 + \tau \text{ için } z'(t) = -[P(t) - Q(t+\sigma-\tau)]\,y(t-\tau) \leq 0 \tag{3.2.6.7}$$

yazılır. Üstelik, $t \geq t_0 + \tau - \sigma$ için $P(t) \not\equiv Q(t+\sigma-\tau)$ ve $y(t)$ nihayetinde pozitif olduğundan (3.2.6.7) denkleminden $n \to \infty$, $s_n \to \infty$ tüm $n \geq 1$ için $z'(s_n) < 0$ olacak şekilde $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

Şimdi de $z(t)$ nihayetinde pozitiftir. Aksi halde bir $t_2 \geq t_1$ vardır öyle ki $z(t_2) \leq 0$. Çünkü tüm $t \geq t_1 + \tau$ için $z'(t) \leq 0$ ve $[t_1 + \tau, \infty)$ aralığı üzerinde $z'(t) \not\equiv 0$ oluğundan $t_3 \geq t_2$ vardır öyle ki $z(t_3) < 0$ ve tüm $t \geq t_3$ için $z(t) \leq z(t_3)$. Böylece $t \geq t_3$ için (3.2.6.6) denkleminden

$$y(t) = z(t) + \int_{t-\tau}^{t-\sigma} Q(s+\sigma)\,y(s)\,ds \leq z(t_3) + \int_{t-\tau}^{t-\sigma} Q(s+\sigma)\,ds\left(\max_{t-\tau \leq s \leq t-\sigma} y(s)\right)$$

elde edilir. (3.2.6.5) kullanılırsa $y(t) \leq z(t_2) + \max_{t-\tau \leq s \leq t} y(s)$ tüm $t \geq t_3$ için yazılır. Burada, $z(t_2) < 0$. Sonuç olarak, Lemma 3.2.6.2 ten $y(t)$, $[t_3, \infty)$ aralığı üzerinde negatif olmayan bir fonksiyondur. Bu çelişki Lemmanın ispatını tamamlar.

Lemma 3.2.6.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$a \in (-\infty, 0), \tau \in (0, \infty), t_0 \in R$ ve $x \in C[[t_0 - \tau, \infty), R]$

olmak üzere

$t \geq t_0$ için $x(t) \leq a + \max\limits_{t-\tau \leq s \leq t} x(s)$

olsun. Bu halde, x negatif olmayan bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.6.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.2.6.2) − (3.2.6.5) doğru ve

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\tau}^{t} [P(s) - Q(s + \sigma - \tau)] ds > \frac{1}{e} \tag{3.2.6.8}$$

olsun. (3.2.6.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için (3.2.6.1) denklemi nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olsun. Lemma 3.2.6.1 den (3.2.6.6) denklemiyle tanımlı $z(t)$ fonksiyonu da nihayetinde pozitif bir fonksiyondur. Aynı zamanda (3.2.6.7) ve nihayetinde $0 < z(t) \leq y(t)$ gerçeği kullanılırsa nihayetinde

$$z'(t) + [P(t) - Q(t + \sigma - \tau)] z(t - \tau) \leq 0 \tag{3.2.6.9}$$

olduğu görülür ve yazılır. Fakat (3.2.6.8) ve Teorem 3.2.3.3 göz önüne alınırsa (3.2.6.9) eşitliği nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olmaz. Bu durum nihayetinde $z(t) > 0$ olduğuna çelişki oluşturur.

"3"3.3 Karakteristik Denklem ve Pozitif Çözümleri

$$\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{-\lambda \tau_i} = 0 \tag{3.3.0.1}$$

denklemi

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \, x(t - t_i) = 0 \,, \quad t_0 \le t < T \tag{3.3.0.2}$$

otonom gecikmeli diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi olduğu bilinmektedir.

3.3.1 Genelleştirilmiş karakteristik denklem

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \, x(t - \tau_i(t)) = 0, \quad t_0 \le t < T \tag{3.3.1.1}$$

otonom olmayan lineer gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım.

Burada, $t_0 < T \le \infty$ ve $i = 1, 2, 3, ..., n$ için

$$p_i \in C\,[\,[t_0, T), R] \text{ ve } \tau_i \in C[\,[t_0, T), R^+]. \tag{3.3.1.2}$$

$$t_{-1} = \min_{1 \le i \le n} \left\{ \inf_{t_0 \le t < T} \{ t - \tau_j(t) \} \right\} \tag{3.3.1.3}$$

olsun. (3.3.1.1) denkleminin başlangıç değer şartı

$$x(t) = \phi(t), \quad t_{-1} \le t \le t_0 \text{ ile } \phi \in C[\,[t_{-1}, t_0], R] \tag{3.3.1.4}$$

ile verilir. (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer probleminin tek çözümü $t_0 \le t < T$ aralığı boyunca mevcut ve $x(\phi)(t)$ ile gösterilir. Her $t \in [t_0, T)$ ve

$$i = 1,2,...,n \text{ için } h_i(t) = \min\{t_0, t - \tau_i(t)\} \text{ ve } H_i(t) = \max\{t_0, t - \tau_i(t)\} \tag{3.3.1.5}$$

olsun. (3.3.1.1) denkleminin genelleştirilmiş karakteristik denklemine karşılık gelen integral denklemi

"3" "Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında çalışan lisans üstü öğrencileri Neriman AVCI, Mikail KARACA, Abbas TUTAR 'ın tezlerinde bu kısımda ifade edilen tüm sonuçların türkçesi ortaktır.

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(\mathrm{t})\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0\ ,\ t_0\le t<T \tag{3.3.1.6}$$

ile verilir. Burada (3.3.1.1) denkleminin varlığı araştırılacaktır. (3.3.1.1) denkleminin katsayıları ve gecikmeleri sabit ise (3.3.1.1) denklemi lineer otonom gecikmeli denklem olan

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i)=0 \tag{3.3.1.7}$$

denklemine indirgeniyor. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda\,\tau_i}=0 \tag{3.3.1.8}$$

ile verilir. (3.3.1.7) denkleminde t yeterince büyük olduğunda (3.3.1.6) denklemi

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\,\exp\left(-\int_{t-\tau_i}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0 \tag{3.3.1.9}$$

denklemine indirgenir. Eğer $\alpha(t)=\lambda$ biçimindeki çözümleri araştırılacak ise (3.3.1.9) denklemi tam olarak (3.3.1.8) denklemini verir.

Teorem 3.3.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.1.2) doğru ve $\phi(t_0)>0$ olmak üzere $\phi\in C\,[\,[t_{-1},t_0],R\,]$ olsun. Bu halde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $t_0\le t<T$ aralığı üzerinde (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer probleminin çözümü pozitiftir.

(b) $t_0\le t<T$ aralığı üzerinde (3.3.1.6) genelleştirilmiş karakteristik denklem sürekli bir çözüme sahiptir.

(c) $$\beta(t)\le\gamma(t),\ t_0\le t<T, \tag{3.3.1.10}$$

sağlanacak şekilde $\beta,\gamma\in C\,[\,[t_0,T),R\,]$ yine

$$\beta(t)\le\delta(t)\le\gamma(t),\ t_0\le t<T, \tag{3.3.1.11}$$

sağlanacak şekilde β ve γ arasında bir $\delta\in C\,[\,[t_0,T),R\,]$ olsun. Bu halde,

$$\beta(t)\le(S\,\delta)(t)\le\gamma(t),\ t_0\le t<T, \tag{3.3.1.12}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada,

$$(S\,\delta)(t) \equiv -\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\delta(s)\,ds\right).$$

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) $\Rightarrow$(b): $x(t)=x(\phi)(t)$, (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. Hipotezden $t_0 \le t < T$ için $x(t)>0$. Şimdi de

$$\alpha'(t)=\frac{x'(t)}{x(t)},\ t_0 \le t < T \qquad (3.3.1.13)$$

tarafından tanımlanan $\alpha(t)$ nin $t_0 \le t < T$ aralığı üzerinde (3.3.1.6) nın bir çözümü olduğunu ispatlayalım. Gerçekten, (3.3.1.13) ifadesinden

$$x(t)=\phi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\,ds\right),\ t_0 \le t < T \qquad (3.3.1.14)$$

ve böylece

$$\frac{x(H_i(t))}{x(t)}=\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right),\ t_0 \le t < T \text{ ve } i=1,2,...,n \qquad (3.3.1.15)$$

elde edilir. (3.3.1.1) denkleminin her iki tarafi $x(t)$ ile bölünür ve (3.3.1.13) ve (3.3.1.15) kullanılırsa

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\frac{x(t-\tau_i(t))}{x(H_i(t))}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0,\ t_0 \le t < T$$

elde edilir. $\alpha(t)$ nin (3.3.1.6) ifadesinin bir çözümü olduğunu göstermek için

$$i=1,2,...,n \text{ ve } t_0 \le t < T \text{ için } \frac{x(t-\tau_i(t))}{x(H_i(t))}=\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu yapabilmek için eğer $t-\tau_i(t)\ge t_0$ ise $h_i(t)=t_0$ ve $H_i(t)=t-\tau_i(t)$ olduğu görülebilir. Böylece

$$\frac{x(t-\tau_i(t))}{x(H_i(t))}=\frac{x(H_i(t))}{x(H_i(t))}=1=\frac{\phi(t_0)}{\phi(t_0)}=\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}$$

elde edilir. Diğer taraftan, eğer $t-\tau_i(t)<t_0$ ise $h_i(t)=t-\tau_i(t)$ ve $H_i(t)=t_0$ ve yine

$$\frac{x(t-\tau_i(t))}{x(H_i(t))}=\frac{\phi(h_i(t))}{x(t_0)}=\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}$$

elde edilir. Bu ise (a) nın (b) yi gerektirdiğinin ispatıdır.

(b)$\Rightarrow$(c): Eğer $\alpha(t)$, (3.3.1.6) nın bir çözümü ise $t_0 \le t < T$ için $\beta(t) \equiv \gamma(t) \equiv \alpha(t)$ dır ve ispat açıktır. Çünkü, (3.3.1.6) dan $\alpha(t) = (S\,\alpha)(t)$.

(c) $\Rightarrow$(a) : İlk olarak (c) hipotezi altında (3.3.1.6) denkleminin $t_0 \le t < T$ üzerinde sürekli bir $\alpha(t)$ çözümü olduğunu ve ikinci olarak

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t_{-1} \le t < t_0 \\ \phi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\,ds\right), & t_0 \le t < T \end{cases} \tag{3.3.1.16}$$

nın (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer probleminin pozitif bir çözümü olduğunu göstermek gerekir.

(3.3.1.6) denkleminin sürekli bir çözümü ardışık yaklaşıklar yöntemiyle inşa edilecektir. Burada, $\alpha_0 \in C\,[\,[t_0, T), R]$ olmak üzere

$$\beta(t) \le \alpha_0 \le \gamma(t),\ t_0 \le t < T \tag{3.3.1.17}$$

ve

$$\alpha_{k+1}(t) = (S\,\alpha_k)(t),\ t_0 \le t < T \text{ ve } k = 0,1,... \tag{3.3.1.18}$$

sağlansın. (3.3.1.12) hipotezi ve tümevarım kullanılırsa tüm $k = 1, 2,...$ için

$$\beta(t) \le \alpha_k(t) \le \gamma(t),\ t_0 \le t < T \tag{3.3.1.19}$$

elde edilir ve açıkça $\alpha_k \in C\,[\,[t_0, T), R\,]$.

Şimdi de $\{\,\alpha_k(t)\}$ fonksiyon dizisinin $[t_0, T)$ aralığının kompakt bir alt aralığı olan $[t_0, T_1]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu görelim.

$$L = \max_{t_0 \le t \le T_1} \{\max\{|\,\beta(t)|, |\,\gamma(t)|\,\}\}$$

$$M = \max_{t_0 \le t \le T_1} \sum_{i=1}^{n} \left|\, p_i(t)\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)} \right|$$

$N = M\,e^{L(T_1 - t_0)}$ olsun. Bu halde, (3.3.1.19) dan $\max_{t_0 \le t \le T_1} |\,\alpha_k(t)| \le L$ olur. Tüm $i = 0, 1, 2,..., n$, $k = 0,1,2,...$ ve $t_0 \le t \le T_1$ için ara değer teoremi kullanılırsa

$$\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha_k(s)\,ds\right)-\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha_{k-1}(s)\,ds\right)=e^{-\mu_{k,i}(t)}\int_{H_i(t)}^{t}\left[\alpha_{k-1}(s)-\alpha_k(s)\right]ds$$

elde edilir. Burada, $\mu_{k,i}(t)$, $\int_{\mathrm{H}_i(t)}^{t}\alpha_k(s)\mathrm{ds}$ ve $\int_{H_i(t)}^{t}\alpha_{k-1}(s)\,ds$ arasındadır. Böylece

$H_i(t)\geq t_0$ olduğundan $|\mu_{k,1}(t)|\leq L(T_1-t_0)$ ve

$$\left|\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha_k(s)\,ds\right)-\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha_{k-1}(s)\,ds\right)\right|\leq e^{L(T_1-t_0)}\int_{t_0}^{t}\left|\alpha_k(s)-\alpha_{k-1}(s)\right|ds$$

elde edilir.

Sonuç olarak, tüm $k=0,1,2,...$ ve $t_0\leq t\leq T_1$ için

$$\left|\alpha_{k+1}(t)-\alpha_k(t)\right|\leq N\int_{t_0}^{t}\left|\alpha_k(s)-\alpha_{k-1}(s)\right|ds. \tag{3.3.1.20}$$

Tümevarımdan

$$k=0,1,2,...\text{ ve } t_0\leq t\leq T_1 \text{ için } \left|\alpha_{k+1}(t)-\alpha_k(t)\right|\leq 2L\frac{\left[N(t-t_0)\right]^k}{k!}$$

dır. (Finizio ve Ladas, 1982)

Weierstrass M−testinden $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\alpha_{k+1}(t)-\alpha_k(t)\right]$ serisi $t_0\leq t\leq T_1$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Bu sebeple,

$$t_0\leq t\leq T_1,\ \alpha_k(t)=\alpha_0(t)+\sum_{j=0}^{k-1}\left[\alpha_{j+1}(t)-\alpha_j(t)\right]$$

dizisi düzgün yakınsak ve böylece

$$\alpha(t)\equiv\lim_{k\to\infty}\alpha_k(t) \tag{3.3.1.21}$$

limit fonksiyonu süreklidir. Düzgün yakınsaklıktan dolayı, $t_0\leq t\leq T_1$ için

$$\alpha(t)=\lim_{k\to\infty}\alpha_{k+1}(t)=\lim_{k\to\infty}\left[-\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\,\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\,\exp\left(-\int_{\mathrm{H}_i(t)}^{t}\alpha_k(s)\,ds\right)\right]$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\,\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\,\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)$$

$\left[t_0, T_1\right]$ aralığında $\alpha(t)$, (3.3.1.6) nın bir çözümüdür. T_1, $\left[t_0, T\right)$ aralığında sabit bir nokta olduğunda (3.3.1.21) tarafından tanımlanan $\alpha(t)$, $t_0 \le t < T$ üzerinde (3.3.1.6) nın bir çözümüdür. Sonuç olarak, (3.3.1.16) tarafından tanımlanan $x(t)$ nin (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Açıkça, $x(t)$, $t_0 \le t \le T$ üzerinde pozitiftir. (a) $\Rightarrow$ (b) ifadesine benzer bir argüman kullanılırsa $t_0 \le t \le T$,

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \alpha(t)\, x(t) \\
&= -\,x(t) \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha(s)\, ds \right) \\
&= -\,x(t) \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, \frac{x(t-\tau_i(t))}{x(H_i(t))} \frac{x(H_i(t))}{x(t)} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x(t-\tau_i(t))
\end{aligned}
$$

olup teorem ispatlanmış oldu.

Sonuç 3.3.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$\phi(t_0) > 0$ olmak üzere (3.3.1.2) sağlansın. Bu halde, $t_0 \le t < T$ üzerinde (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer probleminin bir $x(\phi)(t)$ çözümü pozitif olması için gerek ve yeter şart $t_0 \le t < T$ için

$$
x(\phi)(t) = \phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, ds \right) \tag{3.3.1.22}
$$

olmasıdır. Burada, $\alpha(t)$, (3.3.1.6) nın sürekli bir çözümüdür. Üstelik, (3.3.1.10) sağlanacak şekilde bir $\beta,\ \gamma \in C\left[\left[t_0, T\right), R\right]$ ve herhangi bir $\delta \in C\left[\left[t_0, T\right), R\right]$ varsa (3.3.1.11), (3.3.1.12) gerektirir. Bu halde, (3.3.1.6) nın $\alpha(t)$ ve $x(\phi)(t)$ çözümleri sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar. $t_0 \le t < T$ için

$$
\beta(t) \le \alpha(t) \le \gamma(t) \tag{3.3.1.23}
$$

ve

$$
\phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds \right) \le x(\phi)(t) \le \phi(t_0)\, \exp\left(\int_{t_0}^{t} \gamma(s)\, ds \right). \tag{3.3.1.24}
$$

Not 3.3.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$\phi(t_0)>0$ olmak üzere her $\phi \in C\left[[t_0,T),R\right]$ için (3.3.1.6) denklemi $t_0 \le t < T$ aralığı üzerinde en fazla bir çözüme sahiptir. Bu doğrudur çünkü (3.3.1.6) nın farklı iki çözümü (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer probleminin pozitif iki çözümünün varlığına tekabül eder bu ise mümkün değildir. Eğer (3.3.1.1) ve (3.3.1.4) başlangıç değer problemi $t_0 \le t < T$ aralığı üzerinde $x(\phi)(t)$ pozitif çözümüne sahipse (3.3.1.6) aynı aralık üzerinde tam olarak sürekli bir çözüme sahiptir.

Not 3.3.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ için $T=\infty$ ve $\lim_{t\to\infty}(t-\tau_i(t))=\infty$ olsun. Bu halde, yeterince büyük t ler ve $i=1,2,...,n$ için $h_i(t)=t_0$ ve $H_i(t)=t-\tau_i(t)$ ise (3.3.1.6) denklemi

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0$$

denklemine indirgenir.

Sonuç 3.3.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$, $p_i \in C\left[[t_0,\infty),R\right]$, $\tau_i \in C\left[[t_0,\infty),R^+\right]$, $t \ge t_0$ ve

$\lim_{t\to\infty}(t-\tau_i(t))=\infty$ için $x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,x(t-\tau_i(t))=0$

gecikmeli diferansiyel denklemi nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olsun. Bu halde, $\tilde{t}_0 \ge t_0$ ve $\alpha \in C\left[[\tilde{t}_{-1},\infty),R\right]$ vardır ve burada

$\tilde{t}_{-1}=\min_{1\le i\le n}\left\{\inf_{t\ge \tilde{t}_0}\{t-\tau_i(t)\}\right\}$ olmak üzere $t \ge \tilde{t}_0$ için

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)=0 \qquad (3.3.1.25)$$

denklemi sağlanır.

3.3.2 Diferansiyel eşitsizlikler ve sonuçların mukayesesi

$$t_0 \le t < T \quad \text{için} \quad y'(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\, y(t - \tau_i(t)) = 0\,, \tag{3.3.2.1}$$

gecikmeli diferansiyel denkleminin ve

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x(t - \tau_i(t)) \le 0 \tag{3.3.2.2}$$

ve

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, z(t - \tau_i(t)) \ge 0 \tag{3.3.2.3}$$

eşitsizliklerinin pozitif çözümleri için ilgili sonuçlar karşılaştırılacaktır. Burada,

$$i = 1, 2, ..., n \text{ için } \; p_i, q_i, r_i, \tau_i \in C\left[[t_0, T), R^+ \right], \tag{3.3.2.4}$$

yukarıdaki denklem ve eşitsizlikler için başlangıçtaki aralık

$$t_{-1} = \min_{1 \le i \le n} \left\{ \inf_{t_0 \le t < T} \{ t - \tau_i(t) \} \right\} \tag{3.3.2.5}$$

olmak üzere $t_{-1} \le t \le t_0$.

Teorem 3.3.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.2.4) doğru ve $t_0 \le t < T$, $i = 1, 2, ..., n$ için

$$p_i(t) \ge q_i(t) \ge r_i(t) \tag{3.3.2.6}$$

olsun. Ayrıca, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sırasıyla (3.3.2.2), (3.3.2.1) ve (3.3.2.3) denklemlerinin sürekli çözümleri olsun. Öyle ki

$$x(t) > 0 \tag{3.3.2.7}$$

$$z(t_0) \ge y(t_0) \ge x(t_0) \tag{3.3.2.8}$$

$$\frac{x(t)}{x(t_0)} \ge \frac{y(t)}{y(t_0)} \ge \frac{z(t)}{z(t_0)} \ge 0\,, \; t_{-1} \le t < t_0. \tag{3.3.2.9}$$

Bu halde,

$$t_0 \le t < T \text{ için } \quad z(t) \ge y(t) \ge x(t). \tag{3.3.2.10}$$

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.2.7) ve (3.3.2.8) denklemlerinden $y(t)$ ve $z(t)$, $[t_0, T_1)$ aralığının t_0 ın sağ komşuluğunda pozitif çözümleri olsun.

İddia:

$T_1 = T$ dir. Burada, aksi halde, $y(t)$ ve $z(t)$ pozitif iki fonksiyon olmak üzere $[t_0, T_1)$, $[t_0, T)$ nın maksimum alt aralığı olsun. Bu halde, $T_1 < T$ ve

$$y(T_1)\,z(T_1) = 0 \tag{3.3.2.11}$$

elde edilir. Tüm $t_0 \le t < T_1$ için

$$\alpha_0(t) = \frac{x'(t)}{x(t)},\ \beta_0(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} \text{ ve } \gamma_0(t) = \frac{z'(t)}{z(t)}$$

olsun. Bu halde, Teorem 3.3.1.1 in ispatındaki gibi (3.3.1.5) notasyonları kullanılırsa $t_0 \le t < T_1$ için

$$\alpha_0(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{x(h_i(t))}{x(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha_0(s)\,ds \right) \le 0 \tag{3.3.2.12}$$

$$\beta_0(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \frac{y(h_i(t))}{y(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \beta_0(s)\,ds \right) = 0 \tag{3.3.2.13}$$

$$\gamma_0(t) + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \frac{z(h_i(t))}{z(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \gamma_0(s)\,ds \right) \ge 0 \tag{3.3.2.14}$$

elde edilir. Şimdi tüm $t_0 \le t < T_1$ için

$$\alpha_0(t) \le \beta_0(t) \le \gamma_0(t) \tag{3.3.2.15}$$

in doğruluğu gösterilebilir. $\alpha_0(t) \le \beta_0(t)$ olduğu gösterilecektir. $\beta_0(t) \le \gamma_0(t)$ ispatı benzer olduğundan ispatı ele alınmayacaktır. $t_0 \le t < T_1$ için $\alpha_0(t) \le \delta(t) \le 0$ olmak üzere $\delta \in C\left[[t_0, T_1), R\right]$ keyfi bir fonksiyon olsun. (3.3.2.12), (3.3.2.6) ve (3.3.2.13) denklemlerinden $t_0 \le t < T_1$ için

$$\begin{aligned}
\alpha_0(t) &\le -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{x(h_i(t))}{x(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha_0(s)\,ds \right) \\
&\le -\sum_{i=1}^{n} q_i(t) \frac{y(h_i(t))}{y(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \delta(s)\,ds \right) \le 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.1.1 deki (c) ifadesi doğrudur. Diğer bir deyişle $\beta(t)=\alpha_0(t)$ ve $\gamma(t)\equiv 0$. Böylece, aynı teoremden (Sonuç 3.3.1.1 ve Not 3.3.1.1)

$$\alpha(t)+\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\frac{y(h_i(t))}{y(t_0)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\alpha(s)ds\right)=0 \qquad (3.3.2.16)$$

denklemi $t_0 \le t < T_1$ aralığı üzerinde tam olarak bir çözüme sahiptir. Hatta, (3.3.2.16) nın çözümü $\alpha_0(t)$ ve 0 arasındadır. Fakat, (3.3.2.13) ifadesinden β_0, (3.3.2.16) nın bir çözümüdür. Bu sebeple $t_0 \le t < T_1$ için $\alpha_0(t)\le \alpha(t)\equiv \beta_0(t)\le 0$ ve (3.3.2.15) doğruluğu görülür. Açıkça, $t_0 \le t < T_1$ üzerinde α_0, β_0 ve γ_0 tanımları kullanılarak

$$x(t)=x(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha_0(s)\,ds\right),$$

$$y(t)=y(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\beta_0(s)\,ds\right)$$

ve

$$z(t)=z(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\gamma_0(s)\,ds\right)$$

elde edilir. (3.3.2.8) ve (3.3.2.15) ifadeleri $t_0 \le t < T_1$ için

$$z(t)\ge y(t)\ge x(t) \qquad (3.3.2.17)$$

yi gerektirir. $x(T_1)>0$ iken ve $x(t), y(t)$ ve $z(t)$ fonksiyonlarının süreklilikleri ile birlikte (3.3.2.17) den $z(T_1)\ge y(T_1)>0$. Bu durum (3.3.2.11) denklemine çelişki teşkil eder. Yani, $T_1 = T$ olduğunu ispatlar. T_1 yerine T yazılırsa (3.3.2.17) doğru olur. İspat tamamlanır.

Sonuç 3.3.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$t_0 \leq t < T$ aralığı içinde (3.3.2.1) denkleminin katsayıları ve gecikmeleri negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ve $\phi,\ \psi \in C\left[\left[t_{-1}, t_0\right], R\right]$ olmak üzere $t_{-1} \leq t \leq t_0$ için

$$\psi(t_0) \geq \phi(t_0) > 0\,,\ \frac{\phi(t)}{\phi(t_0)} \geq \frac{\psi(t)}{\psi(t_0)} \geq 0$$

ve $t_0 \leq t < T$ için $y(\phi)(t) > 0$ olsun. Bu halde, $t_0 \leq t < T$ için $y(\psi)(t) \geq y(\phi)(t)$.

Sonuç 3.3.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i = 1, 2, \ldots, n$ için $p_i, \tau_i \in C\left[\left[t_0, \infty\right), R^+\right]$ olsun. Bu halde, $t \geq t_0$ için

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x(t - \tau_i(t)) \leq 0$$

diferansiyel eşitsizliğinin nihayetinde pozitif bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart $t \geq t_0$ için

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, y(t - \tau_i(t)) = 0$$

denkleminin nihayetinde pozitif çözüme sahip olmasıdır.

Otonom diferansiyel denklemler ve eşitsizlikler için aşağıdaki güçlü teorem verilir.

Teorem 3.3.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$i = 1, 2, \ldots, n$ için $p_i \in (0, \infty)$ ve $\tau_i \in [0, \infty)$ olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) $t \geq 0$ için

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t - \tau_i) = 0 \qquad (3.3.2.18)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi pozitif bir çözüme sahiptir.

(b) $$\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda \tau_i} = 0 \qquad (3.3.2.19)$$

karakteristik denklemi bir reel köke sahiptir.

(c) $t \geq 0$ için

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i \, y(t-\tau_i) \leq 0 \tag{3.3.2.20}$$

gecikmeli diferansiyel eşitsizliği pozitif bir çözüme sahiptir.

(d) Bir $\varepsilon_0 \in (0,1)$ açık aralığı vardır öyle ki her $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ kapalı aralığı için

$$z'(t)+\sum_{i=1}^{n}(1-\varepsilon)\, p_i \, z(t-\tau_i)=0\,,\ t \geq 0 \tag{3.3.2.21}$$

gecikmeli diferansiyel denklemi pozitif bir çözüme sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) $\Rightarrow$ (b) : İspatı Teorem 3.2.1.1 ve (3.3.2.18) otonom denkleminden elde edilir.

(a) $\Rightarrow$ (c) : Olduğu açıktır. Diğer taraftan (c) $\Rightarrow$ (a) durumu (3.3.2.18) denkleminin çözümünde başlangıç koşulu $y(t)$ ye eşit alınarak Teorem 3.3.2.1 den elde edilir.

(b) $\Leftrightarrow$ (d) olduğunu gösterirsek ispat biter. Teorem 3.2.1.1 den (d) ifadesi (3.3.2.21) ifadesinin karakteristik denklemi olan

$$\mu+\sum_{i=1}^{n}(1-\varepsilon)\, p_i \, e^{-\mu \tau_i}=0 \tag{3.3.2.22}$$

denklemi reel bir köke sahiptir. Buradan aşağıdaki ifadelerin birbirine denk olduğunu göstermek yeterlidir.

(b') (3.3.2.19) denklemi reel bir köke sahip değildir.

(d') Bir $\varepsilon_0 \in (0,1)$ öyle ki her $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ için (3.3.2.22) karakteristik denklemi reel bir köke sahip değildir.

$(d') \Rightarrow (b')$ olduğu açıktır.

$(b') \Rightarrow (d')$ olduğunu ispat edelim.

$$F(\lambda)=\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{-\lambda \tau_i}\ ,\quad F(\infty)=\infty\,,\quad F(\lambda)=0$$ reel bir köke sahip olmasın.

Buradan $\lambda \in R$ için $F(\lambda)>0$. Aynı zamanda, $F(-\infty)=\infty$ aksi takdirde tüm gecikmeler sıfıra eşit ve (3.3.2.19) pozitif reel köke sahip değildir. Dolayısıyla $\min_{\lambda \in R} F(\lambda)$ var ve bu minimum pozitif m sayısı olsun. Bu sebeple $\lambda \in R$ için

$$F(\lambda) \geq m \tag{3.3.2.23}$$

olur. $\mu \in R$ için

$$G(\mu) = \mu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\mu\,\tau_i} \text{ ve } G(\infty) = G(-\infty) = \infty .$$

Böylece $\alpha > 0$ vardır öyle ki $|\mu| > \alpha$ için $G(\mu) > 0$.

$\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ seçelim öyle ki $\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{\alpha\,\tau_i} \le \frac{m}{2}$ olsun. Her $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ için (3.3.2.22) denkleminin reel köklere sahip olmadığını iddia edelim. Gerçekten $|\mu| > \alpha$ için $\mu \in R$ ise

$$\mu + \sum_{i=1}^{n} (1-\varepsilon)\, p_i\, e^{-\mu\,\tau_i} \ge \mu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\mu\,\tau_i} > 0$$

olur. Diğer taraftan $-\alpha \le \mu \le \alpha$ ise

$$\mu + \sum_{i=1}^{n} (1-\varepsilon)\, p_i\, e^{-\mu\,\tau_i} = \left(\mu + \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\mu\tau_i}\right) - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\mu\tau_i} \ge F(\mu) - \varepsilon_0 \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{\alpha\,\tau_i}$$

$$\ge m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2} > 0$$

elde edilir. Aşağıdaki sonuç Sonuç 3.3.2.2 nin dualidir (diğer yönüdür).

Sonuç 3.3.2.3. (Györi ve Ladas, 1991)

$i = 1, 2, ..., n$ için $p_i, \tau_i \in C\left[[t_0, \infty), R^+\right]$ olsun. Bu halde, $t \ge t_0$ için $x'(t) - \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x(t + \tau_i(t)) \ge 0$ ifadesinin nihayetinde pozitif çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $y'(t) - \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, y(t + \tau_i(t)) = 0$ denkleminin nihayetinde pozitif çözüme sahip olmasıdır.

3.3.3 Pozitif çözümlerin varlığı

Katsayıları değişken ve gecikmeleri t ye bağlı olan (değişken) lineer otonom olmayan $t_0 \le t < T$ için

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x(t - \tau_i(t)) = 0 \qquad (3.3.3.1)$$

$t_0 \le T \le \infty$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için

$$p_i \in C\left[[t_0, T), R\right] \text{ ve } \tau_i \in C\left[[t_0, T), R^+\right] \qquad (3.3.3.2)$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. $t_{-1} = \min_{1 \le i \le n}\left\{ \inf_{t_0 \le t < T} \{t - \tau_i(t)\} \right\}$ olmak üzere

$i = 1,2,...,n$ ve $t_0 \le t < T$ için $p_i^+(t) = \max\{0, p_i(t)\}$,

$t_0 \le t < T$ için $g(t) = \min_{1 \le i \le n}\{\max\{t_0, t - \tau_i(t)\}\}$ ve

$$\Phi = \left\{ t_{-1} \le t \le t_0 \text{ için } \phi \in C\left[[t_{-1}, t_0], R^+\right] : \phi(t_0) > 0 \text{ ve } \phi(t) \le \phi(t_0) \right\} \qquad (3.3.3.3)$$

olsun.

Teorem 3.3.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.2.2) doğru ve $t_0 \le t < T$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{g(t)}^{t} p_i^+(s)\, ds \le \frac{1}{e} \qquad (3.3.3.4)$$

olsun. Bu halde, her $\phi \in \Phi$ için (3.3.3.1) denkleminin $x(\phi)(t)$ çözümü (t_0, ϕ) boyunca $t_0 \le t < T$ üzerinde pozitiftir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$t_0 \le t < T$ için

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i^+(t)\, y(t - \tau_i(t)) = 0 \qquad (3.3.3.5)$$

denklemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen genelleştirilmiş karakteristik denklem $t_0 \le t < T$ için

$$\alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i^+(t) \frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)} \exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \alpha(s)\, ds \right) = 0 \qquad (3.3.3.6)$$

ile verilir. Burada, $h_i(t)$ ve $H_i(t)$, (3.3.1.5) ile verilir. Şimdi de $t_0 \le t < T$ için $\beta(t) = -e\sum_{i=1}^{n} p_i^{+}(t)$ ve $\gamma(t) = 0$ olmak üzere Teorem 3.3.1.1 in (c) ifadesinin doğru olduğunu iddia edelim. Gerçekten β ve γ arasında keyfi ve herhangi bir $\delta \in C\left[\left[t_0, T\right), R\right]$ fonksiyonu için

$$-\int_{H_i(t)}^{t} \delta(s)\,ds \le e\int_{H_i(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i^{+}(s)\,ds \le e\int_{g(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i^{+}(s)\,ds \le 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, $t_0 \le t < T$ için (3.3.1.12) doğrudur çünkü

$$\gamma(t) = 0 \ge -\sum_{i=1}^{n} p_i^{+}(t)\frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)}\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t} \delta(s)\,ds\right) \ge -\sum_{i=1}^{n} p_i^{+}(t)e = \beta(t).$$

Sonuç olarak Teorem 3.3.1.1 den $t_0 \le t < T$ üzerinde (3.3.3.5) denkleminin $y(\phi)(t)$ çözümü pozitiftir. Teorem 3.3.2.1 in basit bir uygulaması olarak $x(\phi)(t)$ ve $y(\phi)(t)$ sırasıyla (3.3.3.1) ve (3.3.3.5) denklemlerinin çözümü olup sonuç olarak $t_0 \le t < T$ için $x(\phi)(t) \ge y(\phi)(t) > 0$.

Sonuç 3.3.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$t \ge 0$ için

$$\tau(t) \le \frac{1}{e} \tag{3.3.3.7}$$

olacak şekilde $\tau \in C\left[R^{+}, R^{+}\right]$ olsun. Bu halde, $t \ge 0$ için

$$x'(t) + x(t - \tau(t)) = 0 \tag{3.3.3.8}$$

gecikmeli diferansiyel denklemi $[t_{-1}, \infty)$ aralığı üzerinde bir pozitif çözüme sahiptir. Burada, $t_{-1} = \min_{t \ge 0}\{t - \tau(t)\}$.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Burada, $t_0 = 0$, $T = \infty$ ve $g(t) = \max\{0, t - \tau(t)\}$. Dolayısıyla tüm $t \geq 0$ için $\int_{g(t)}^{t} ds = t - g(t) \leq \frac{1}{e}$. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.3.3.1 in bir sonucudur.

Gecikmelerin sabit olması halinde (3.3.3.7) şartı (3.3.3.8) denkleminin pozitif bir çözümünün varlığı için gerek ve yeter şarttır. Buna rağmen gecikmelerin değişken olması halinde (3.3.3.7) şartının yeterince kuvvetli olmadığını aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 3.3.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.3.8) denkleminde $\tau(t)$ aşağıdaki gibi verilsin.

$$\tau(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ \frac{3}{2} - t, & 1 < t \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \frac{3}{2} < t < \infty \end{cases}.$$

Açıkça, $\tau(1) = \frac{1}{2} > \frac{1}{e}$ ve böylece (3.3.3.7) sağlanmaz. Buna rağmen $t \leq 0$ için

$$x(t) = e^{-t} \tag{3.3.3.9}$$

başlangıç koşulu ile beraber $t \geq 0$ için (3.3.3.8) denkleminin bir çözümünün pozitif olduğu gösterilir. Gerçekten basit bir hesaplama ile

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{3}{2} - t\right) e^{-\frac{1}{2}}, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ x\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\left(t - \frac{3}{2}\right)}, & t \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

elde edilir. $1 \le t \le \frac{3}{2}$ için $x(t) > 0$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Çelişki oluşturmak için $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ de $x(t)$ pozitif olmasın. Bu halde, $0 \le t < t_1$ için $x(t) > 0$ ve $x(t_1) = 0$ olacak şekilde bir $t_1 \in \left(1, \frac{3}{2}\right]$ vardır. (3.3.3.8) denklemi 1 den t_1 e integre edilirse

$$x(t_1) - x(1) + \int_1^{t_1} x\left(2s - \frac{3}{2}\right) ds = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} = x(1) = \int_1^{t_1} x\left(2s - \frac{3}{2}\right) ds \le \int_1^{3/2} x\left(2s - \frac{3}{2}\right) ds < \int_1^{3/2} x\left(\frac{1}{2}\right) ds = \frac{1}{2} e^{-1/2}$$

yazılır. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla, tüm t ler için (3.3.3.8) ve (3.3.3.9) un tüm çözümleri pozitiftir.

Teorem 3.3.3.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.3.2) doğru olsun ve $t \ge t_0$ için

$$\sum_{i=1}^{n} | p_i(t) | e^{\mu \tau_i(t)} \le \mu \qquad (3.3.3.10)$$

sağlanacak şekilde bir μ sayısı vardır. Bu halde, her $\phi \in \Phi$ için (3.3.3.1) denkleminin $x(\phi)(t)$ çözümü (t_0, ϕ) boyunca $t_0 \le t < T$ üzerinde pozitiftir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Başlangıç fonksiyonu $\phi \in \Phi$ olsun ve $t \in [t_0, T)$ için

$$(S\delta)(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{\phi(h_i(t))}{\phi(t_0)} \exp\left(- \int_{H_i(t)}^{t} \delta(s) ds \right) \qquad (3.3.3.11)$$

olacak şekilde $\delta \in C[[t_0, T), R]$ için $(S\delta)(t)$ tanımlansın. Burada, $h_i(t)$ ve $H_i(t)$ (3.3.1.5) ile belirtilmiştir. $t_0 \le t < T$ için $\beta(t) = -\mu$ ve $\gamma(t) = \mu$ olmak üzere Teorem 3.3.1.1 in (c) ifadesinin doğru olduğunu iddia edelim. Gerçekten, β ve γ arasında keyfi bir $\delta \in C[[t_0, T), R]$ ve

$$t_0 \le t < T \text{ için } -\mu(t - H_i(t)) \le \int_{H_i(t)}^{t} \delta(s)ds \le \mu(t - H_i(t))$$

yazılır. Açıkça, (3.3.1.5) den

$$-\mu\tau_i(t) \le \int_{H_i(t)}^{t} \delta(s)\, ds \le \mu\tau_i(t)$$

elde edilir.

Şimdi de (3.3.1.12) doğruluğunu kabul edelim. Gerçekten, (3.3.3.10) ifadesinden $t \in [t_0, T)$ için

$$\beta(t) = -\mu \le -\sum_{i=1}^{n} |p_i(t)|\, e^{\mu\tau_i(t)} \le (S\delta) \le \sum_{i=1}^{n} |p_i(t)|\, e^{\mu\tau_i(t)} \le \mu = \gamma(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 3.3.1.1 den $[t_0, T)$ üzerinde (3.3.3.1) denkleminin $x(\phi)(t)$ çözümü pozitiftir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.3.3.3. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.3.2) doğru,

$$0 \le \tau_1(t) \le \tau_2(t) \le ... \le \tau_n(t) \tag{3.3.3.12}$$

ve

$$t \in [t_0, T) \text{ ve } m = 1, 2, ..., n \text{ için } \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \le 0 \tag{3.3.3.13}$$

olsun. Bu halde, $[t_0, T)$ aralığı üzerinde (3.3.3.1) denklemi pozitif ve artan bir çözüme sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$t_{-1} \le t \le t_0$ için $\phi(t) = 1$ ve $\delta \in C[[t_0, T), R]$ olmak üzere $(S\delta)(t)$ operatörü (3.3.3.11) ile verilsin.

İddia:

$\gamma(t)=\sum_{i=1}^{n}|\,p_i(t)\,|$ ve $\beta(t)=0$ olmak üzere Teorem 3.3.1.1 in (c) ifadesi doğrudur. Gerçekten,

$$(S\delta)(t)\le \sum_{i=1}^{n}|\,p_i(t)\,|\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\delta(s)ds\right)\le \sum_{i=1}^{n}|\,p_i(t)\,|=\gamma(t)$$

yazılır. Çünkü,

$H_1(t)\ge H_2(t)\ge ...\ge H_n(t)$ dir. (3.3.3.13) ifadesinden $t\in[t_0,T)$ için

$$(S\delta)(t)\ge -[p_1(t)+p_2(t)]\exp\left(-\int_{H_2(t)}^{t}\delta(s)\,ds\right)-\sum_{i=3}^{n}p_i(t)\exp\left(-\int_{H_i(t)}^{t}\delta(s)\,ds\right)$$

$$\ge\left[-\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\right]\exp\left(-\int_{H_n(t)}^{t}\delta(s)\,ds\right)$$

$$\ge 0=\beta(t)$$

yazılır. Dolayısıyla, Teorem 3.3.1.1 ifadesinde $[t_0,T)$ üzerinde (3.3.3.1) denkleminin $x(t)=x(\phi)(t)$ çözümü pozitiftir. Hatta, Sonuç 3.3.1.1 den $t_0\le t<T$ için

$x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\,ds\right)$ yazılır. Burada, tüm $t\in[t_0,T)$ için $\alpha(t)$, $\beta(t)=0$ ve $\gamma(t)$ arasında olup (3.3.1.6) denkleminin sürekli bir çözümüdür. Dolayısıyla, $x(t)$, (3.3.1.1) in sürekli bir çözümüdür.

Sonuç 3.3.3.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$$x'(t)-q(t)\,x(t-\tau)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\,x(t-\tau_i)=0 \qquad (3.3.3.14)$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, $i=1,2,...,n$ için $q,\ p_i\in C[\,[t_0,\infty),R\,]$, $\tau,\tau_i\in[0,\infty)$, $\sum_{i=1}^{n}|\,p_i(t)\,|\le q(t)$ ve $\tau\le\min\{\tau_1,\tau_2,...,\tau_n\}$. Bu halde, her $t_1\ge t_0$ için $[t_1,\infty)$ aralığı üzerinde (3.3.3.14) denklemi pozitif bir çözüme sahiptir.

3.3.4 Otonom olamayan denklemlerin osilasyonu için yeterli şartlar

Bu kısımda, $t \geq 0$ için

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, x(t - \tau_i(t)) = 0 \tag{3.3.4.1}$$

ve $i = 1, 2, ..., n$ için

$$p_i, \tau_i \in C\big[[0, \infty), R^+\big] \tag{3.3.4.2}$$

otonom olmayan lineer gecikmeli diferansiyel denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için yeterli şartlar sağlanmaya çalışılacaktır.

Lemma 3.3.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$$p \in C\big[[T, \infty), (0, \infty)\big],\ \tau \in C\big[[T, \infty), [0, \infty)\big],$$

$$\liminf_{t \to \infty} (t - \tau(t)) = \infty \tag{3.3.4.3}$$

ve

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t-\tau(t)}^{t} P(s)\, ds > 0\,. \tag{3.3.4.4}$$

olsun. $T_{-1} = \inf_{t \geq T} \{t - \tau(t)\}$ olmak üzere $\alpha \in C\big[[T_{-1}, \infty), (-\infty, 0]\big]$.

$$t \geq T \text{ için } \alpha(t) + P(t) \exp\left[-\int_{t-\tau(t)}^{t} \alpha(s)\, ds\right] \leq 0 \tag{3.3.4.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu halde,

$$\liminf_{t \to \infty} \left[-\int_{t-\tau(t)}^{t} \alpha(s)\, ds\right] < \infty. \tag{3.3.4.6}$$

Teorem 3.3.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.4.2) olmak üzere $t \geq 0$ için

$$\tau(t) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\tau_i(t)\} \tag{3.3.4.7}$$

ve

$$\lim_{t \to \infty} (t - \tau(t)) = \infty \tag{3.3.4.8}$$

olsun. Bu halde,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\,ds > \frac{1}{e} \tag{3.3.4.9}$$

ifadesi (3.3.4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için yeterli bir şarttır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için (3.3.4.1) denklemi nihayetinde bir $x(t)$ pozitif çözüme sahip olsun. Bu halde, $t \geq T_{-1}$ için $x(t) > 0$ olacak şekilde $T \geq 0$ vardır. Burada, $T_{-1} = \min_{1\leq i\leq n}\left\{\inf_{t\geq T}\{t-\tau_i(t)\}\right\}$. Dolayısıyla, Teorem 3.3.1.1 ve Not 3.3.1.2 den

$$t \geq T \text{ için } \alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right) = 0$$

olacak şekilde bir $\alpha \in C\left[[T_{-1},\infty), R\right]$ sürekli fonksiyonu vardır. Dolayısıyla, $t \geq T$ için

$$\alpha(t) + \left[\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\right]\exp\left(-\int_{t-\tau(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right) \leq 0 \tag{3.3.4.10}$$

ve Lemma 3.3.4.1 den

$$m \equiv \liminf_{t\to\infty}\left[-\int_{t-\tau(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right] < \infty \tag{3.3.4.11}$$

yazılır. (3.3.4.10) daki terimler düzenlenir ve $t-\tau(t)$ den t ye integre edilirse

$$\int_{t-\tau(t)}^{t}\alpha(s)\,ds \geq \int_{t-\tau(t)}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(u)\right]\exp\left(-\int_{u-\tau(u)}^{u}\alpha(s)\,ds\right)du$$

elde edilir. (3.3.4.11) ve (3.3.4.9) ifadelerinden

$$m \geq \liminf_{t\to\infty}\left(\int_{t-\tau(t)}^{t}\sum_{i=1}^{n} p_i(u)\,du\right)e^{m} > \frac{1}{e}\,e\,m = m$$

çelişkisi elde edilir.

Aşağıdaki teorem,

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i) = 0 \tag{3.3.4.11$'$}$$

ifadesi ile ilgili sonuçların genelleştirilmiş halidir. Pozitif katsayılı ve negatif gecikmelere sahip olmayan $(3.3.4.11')$ ifadesinin her çözümünün salınımlı olabilmesi için $\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda \tau_i} = 0$ karakteristik denkleminin negatif köklere sahip olmamasıdır. Yani, buna denk olarak tüm $\lambda > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{\lambda \tau_i} > 1.$$

Teorem 3.3.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.4.2) doğru, $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\lim_{t\to\infty}(t - \tau_i(t)) = \infty \tag{3.3.4.12}$$

ve $l = 1, 2, ..., m$ olmak üzere $i_l \in \{1, 2, ..., n\}$ vardır öyle ki

$$\liminf_{t\to\infty}\left[\tau_{i_1}(t)\right] > 0 \text{ ve } \liminf_{t\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{m} p_{i_l}(s)\right] > 0 \tag{3.3.4.13}$$

olsun. Bu halde, (3.3.4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için

$$\liminf_{t\to\infty}\left[\inf_{\lambda>0}\left\{\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)e^{\lambda\tau_i(t)}\right\}\right] > 1 \tag{3.3.4.14}$$

yeterli bir şarttır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için (3.3.4.1) denklemi nihayetinde bir $x(t)$ pozitif çözümüne sahip olsun. Bu halde, $t \ge T_{-1}$ için $x(t) > 0$ olacak şekilde $T \ge 0$ vardır. Burada, $T_{-1} = \min_{1\le i\le n}\left\{\inf_{t\ge T}\{t - \tau_i(t)\}\right\}$. Sonuç 3.3.1.1 den $t \ge T$ için

$$\alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right) = 0 \tag{3.3.4.15}$$

olacak şekilde sürekli bir $\alpha \in C\left[[T_{-1}, \infty), R\right]$ fonksiyonu vardır. $r(t) = \max_{1\le l\le m}\tau_{i_l}(t)$ olsun. Bu halde, $t \ge T$ için

$$\alpha(t) + \left[\sum_{i=1}^{m} p_{i_l}(t)\right]\exp\left(-\int_{t-r(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right) \le 0 \tag{3.3.4.16}$$

ve Lemma 3.3.4.1 den $M \equiv \liminf_{t\to\infty}[-\alpha(t)] < \infty$. Açıkça, $M > 0$, aksi taktirde $M = 0$ ve (3.3.4.13) denklemine çelişki teşkil edecek

$$0 = \liminf_{t\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\alpha(s)\,ds\right)\right] \geq \liminf_{t\to\infty}\left[\sum_{l=1}^{n} p_{i_l}(t)\right]$$

vardır.

Her $\varepsilon \in (0, M)$ için $T_\varepsilon \geq T$ vardır öyle ki $t \geq \widetilde{T}_\varepsilon$ için $-\alpha(t) \geq M - \varepsilon$, burada $\widetilde{T}_\varepsilon = \min_{1\leq i\leq n}\left\{\inf_{t\geq T_\varepsilon}\{t-\tau_i(t)\}\right\}$. (3.3.4.15) den $t \geq T_\varepsilon$ için

$$\alpha(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)e^{(M-\varepsilon)\tau_i(t)} \leq 0 \tag{3.3.4.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.3.4.14) ifadesinden $T_1 > 0$ ve $q > 1$ vardır öyle ki tüm $\lambda > 0$ ve $t \geq T_1$ için $\sum_{i=1}^{n} p_i(t)e^{\lambda\tau_i(t)} \geq q\,\lambda$. Buradan ve (3.3.4.17) ifadesinden tüm

$$t \geq \max\{T_\varepsilon, T_1\} \text{ için } -\alpha(t) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i(t)e^{(M-\varepsilon)\tau_i(t)} \geq q\,(M-\varepsilon)$$

yazılır. Dolayısıyla, $M = \liminf_{t\to\infty}[-\alpha(t)] \geq q\,(M-\varepsilon)$ ve $\varepsilon \to 0$, $M \geq q\,M > M$ yazılır. İspat biter.

Sonuç 3.3.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.4.2), (3.3.4.12) ve (3.3.4.13) sağlansın. Bu halde, (3.3.4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için aşağıdaki şartlardan her biri yeterlidir.

(a) $$\liminf_{t\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\tau_i(t)\right] > \frac{1}{e}; \tag{3.3.4.18}$$

(b) $$\liminf_{t\to\infty}\left\{\left[\prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^{\frac{1}{n}}\left[\sum_{i=1}^{n}\tau_i(t)\right]\right\} > \frac{1}{e}. \tag{3.3.4.19}$$

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Her iki durumda (3.3.4.14) ifadesinin geçerli olduğunu göstermek yeterlidir.

(a) $e^x \geq e\,x$ kullanılırsa ve herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)e^{\lambda\tau_i(t)} \geq \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)e\,\lambda\,\tau_i(t) = e\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\tau_i(t)$$

ve (3.3.4.18), (3.3.4.14) unu gerektirir.

(b) $e^x > e\,x$ ve $i = 1, 2, ..., n$ ve $q_i \geq 0$ için $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} q_i\right)^{\frac{1}{n}}$ kullanılırsa

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)e^{\lambda\tau_i(t)} \geq \frac{n}{\lambda}\prod_{i=1}^{n}\left[p_i(t)e^{\lambda\tau_i(t)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{n}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^{\frac{1}{n}} \exp\left(\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i(t)\right)$$

$$\geq e\left[\prod_{i=1}^{n} p_i(t)\right]^{\frac{1}{n}}\left[\sum_{i=1}^{n}\tau_i(t)\right]$$

ve (3.3.4.19), (3.3.4.14) unu gerektirir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.3.4.1 in kuvvetli bir versiyonu olmamakla beraber (3.3.4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için yeni bir şartı ifade ettiğinden ayrı bir önem arz eder.

Teorem 3.3.4.3. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.3.4.2) geçerli olmak üzere $t \geq 0$ için $\tau(t) = \min_{1\leq i\leq n}\{\tau_i(t)\}$ ve $\lim_{t\to\infty}(t-\tau(t)) = \infty$ olsun. Bu halde, (3.3.4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımı için

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t-\tau(t)}^{t}\sum_{i=1}^{n} p_i(s)\,ds > 1 \qquad (3.3.4.20)$$

yeterli bir şarttır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için, (3.3.4.1) denklemi nihayetinde bir $x(t)$ pozitif çözümüne sahip olsun. (3.3.4.1) denklemi yeterince büyük t ler için $t-\tau(t)$ dan t ye integre edilirse

$$0 = x(t) - x(t-\tau(t)) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\, x(s-\tau_i(s))\, ds$$

$$\geq x(t) - x(t-\tau(t)) + x(t-\tau_i(t)) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\, ds$$

$$\geq x(t) + x(t-\tau(t)) \left[\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\, ds - 1 \right] > 0$$

bu çelişkiden ispat biter.

Sonuç 3.3.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

Açıkça (3.3.4.9) ve (3.3.4.20) şartları bağımsızdır. Buna rağmen tüm $p_i(t)$ lerin sabit olması halinde (3.3.4.20) ifadesi (3.3.4.9) ifadesini gerektir.

"4"3.4 Matematiksel Biyolojide Linerize Olmuş Salınım ve Teorileri

$i = 1,2,...,n$ için $p_i, \tau_i \in [0,\infty)$, $f_i \in C[R,R]$, $u \neq 0$ için $u\, f_1(u) > 0$, $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f_i(u)}{u} = 1$ olmak üzere matematiksel biyolojide çeşitli denklemler

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\, f_i(x(t-\tau_i)) = 0 \tag{3.4.0.1}$$

formunda yazılabilir. Bazı pozitif δ sayısı için ya $u \in [0,\delta]$ için $f_i(u) \leq u$ ya da $u \in [-\delta, 0]$ için $f_i(u) \geq u$ dür. (3.4.0.1) denklemine eşlik eden linerize olmuş denklem

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\, y(t-\tau_i) = 0 \tag{3.4.0.2}$$

ile verilir. Bu kısımda, (3.4.0.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerekli ve yeterli şart (3.4.0.2) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

"4" Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında çalışan lisans üstü öğrencileri Neriman AVCI, Mikail KARACA, Abbas TUTAR 'ın tezlerinde bu kısımda ifade edilen tüm sonuçların türkçesi ortaktır.

3.4.1 Linerize olmuş osilasyon teorisi

Lineer olmayan

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\ f_i(x(t-\tau_i))=0 \tag{3.4.1.1}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, $i=1,2,...,n$ için

$$p_i \in (0,\infty),\ \tau_i \in [0,\infty) \text{ ve } f_i \in C[R,R] \tag{3.4.1.2}$$

ve

$$u \neq 0 \text{ için } u\ f_i(u) > 0. \tag{3.4.1.3}$$

f aşağıdaki şartları sağlar.

(H₁) $i=1,2,...,n$ için $\liminf\limits_{u\to 0} \dfrac{f_i(u)}{u} \geq 1$ (3.4.1.4)

(H₂) $i=1,2,...,n$ için $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f_i(u)}{u} = 1$ (3.4.1.5)

(H₃) Bir δ pozitif sabiti vardır öyle ki $i=1,2,...,n$ için

ya

$$0 \leq u \leq \delta \text{ için } f_i(u) \leq u \text{ ya da } -\delta \leq u \leq 0 \text{ için } f_i(u) \geq u \tag{3.4.1.6}$$

(3.4.1.4) veya (3.4.1.5) sağladığında (3.4.1.1) denkleminin linerize olmuş şekli

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\ y(t-\tau_i)=0 \tag{3.4.1.7}$$

ile verilir.

Teorem 3.4.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4.1.2), (3.4.1.3), (3.4.1.4) doğru ve linerize olmuş (3.4.1.7) denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu halde, (3.4.1.1) denkleminin de her çözümü aynı zamanda salınımlıdır.

Teorem 3.4.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4.1.2), (3.4.1.3), (3.4.1.6) doğru ve (3.4.1.1) denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu halde, linerize olmuş (3.4.1.7) denkleminin her çözümü aynı zamanda salınımlıdır.

Sonuç 3.4.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4.1.2), (3.4.1.3), (3.4.1.5) ve (3.4.1.6) doğru olsun. Bu halde, (3.4.1.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart, (3.4.1.7) denkleminin her çözümünün salınımlı olmasıdır.

Lemma 3.4.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$n \geq 1$ ve (3.4.1.2) ve (3.4.1.3) şartları doğru olsun. Bu halde, (3.4.1.1) denkleminin salınım yapmayan her çözümü $t \to \infty$ için sıfıra gider.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$x(t)$, (3.4.1.1) denkleminin salınım yapmayan bir çözümü ve ayrıca $x(t)$ nihayetinde pozitif olsun. $x(t)$ nin nihayetinde negatif olma durumu benzer olduğundan ele alınmayacaktır. Bu halde, $x'(t) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \; f_i(x(t-\tau_i)) < 0$ ve $L \equiv \lim_{t\to\infty} x(t)$ mevcut negatif olmayan bir sayıdır.

Şimdi de $L = 0$ olduğunu görelim. Aksi halde, $L > 0$ ve $\lim_{t\to\infty}[\, x'(t)\,] = -\sum_{i=1}^{n} p_i \; f(L) < 0$. Bu ise $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$ olduğunu gerektirir. Bu bir çelişkidir. İspat biter.

Teorem 3.4.1.1 in İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturmak için (3.4.1.1) denkleminin salınım yapmayan bir $x(t)$ çözümü var ve $x(t)$ nihayetinde pozitif bir çözüm olsun. $x(t)$ nin nihayetinde negatif olma hali benzer olduğundan ispat edilmeyecektir.

Lemma 3.4.1.1 den $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Bu halde, (3.4.1.4) ten $i = 1, 2, ..., n$ için $\liminf_{t\to\infty} \frac{f(x(t-\tau_i))}{x(t-\tau_i)} \geq 1$ yazılır. $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ ve

$t \geq T_\varepsilon$ için $x(t-\tau_i) > 0$ ve $f_i(x(t-\tau_i)) \geq (1-\varepsilon)\, x(t-\tau_i)$

olacak şekilde bir T_ε vardır. Bu halde, (3.4.1.1) denkleminden

$$t \geq T_\varepsilon \text{ için } x'(t) + \sum_{i=1}^{n} (1-\varepsilon)\, p_i\, x(t-\tau_i) \leq 0$$

yazılır. Teorem 3.3.2.2 den (3.4.1.7) denklemi pozitif bir çözüme sahiptir. Bu ise (3.4.1.7) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğuna çelişki teşkil eder.

Teorem 3.4.1.2 nin İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

$i = 1, 2, ..., n$ ve $0 \leq u \leq \delta$ için $f_i(u) \leq u$ olmak üzere (3.4.1.6) doğru olsun. $-\delta \leq u \leq 0$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için $f_i(u) \geq u$ durumunun ispatı benzer olduğundan ele alınmayacaktır. Çelişki oluşturabilmek için (3.4.1.7) denklemi nihayetinde $y(t)$ pozitif çözümüne sahip olsun. Açıkça, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ ve $\tau = \max_{1 \leq i \leq n} \tau_i$ olmak üzere $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için $0 < y(t) < \delta$ olacak şekilde bir t_0 vardır. $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ için başlangıç fonksiyonu, $y(t)$ ye eşit alınmak üzere (3.4.1.1) denklemi t_0 ın sağ komşuluğunda bir $x(t)$ çözümüne sahiptir. Şimdi de

$$y(t) \leq x(t) < \delta \tag{3.4.1.8}$$

sağlanacak şekilde bir $x(t)$ nin varlığını göstermek yeterlidir. Tüm $t \geq t_0$ için $x(t)$ mevcut ve pozitiftir. Bu durum (3.4.1.1) denkleminin her çözümünün salınımlı oluşuna terslik teşkil eder. $0 \leq x(t) < \delta$ olacak şekilde $x(t)$ olduğu sürece

$$x'(t) = -\sum_{i=1}^{n} p_i\, f_i(x(t-\tau_i)) \geq -\sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i)$$

vardır ve böylece Teorem 3.3.2.1 den $y(t) \leq x(t)$ dir. (3.4.1.1) denkleminde $x(t)$ mevcut ve pozitif ise kesin olarak azalandır. Böylece tüm $t \geq t_0$ için (3.4.1.8) doğru olur ve ispat biter.

3.4.2 Kaynakların sınırlı olması halinde gecikmeli popilasyon modeli

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)\left\{1-\frac{N(t)}{K}\right\} \tag{3.4.2.1}$$

Otonom diferansiyel denklemini ele alalım. Burada $r, K \in (0,\infty)$. Bu denklem matematikte "Lojistik Denklem" olarak bilinir (Smith, 1963). Burada r gelişim oranı, K ise taşıma kapasitesidir. Yiyeceğin sınırlı olması halinde lojistik denklem

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)\frac{K-N(t)}{K+c\,r\,N(t)} \tag{3.4.2.2}$$

ile verilir. Burada r, K, c pozitif sabit sayılardır. (3.4.2.2) denkleminin çıkarımı için (Pielou,1969). (3.4.2.1) çözümü kolaylıkla elde edilir. $N(0)>0$ olması halinde $t\to\infty$ için çözüm bir K sayısına yakınsar. (3.4.2.1) denkleminin gecikmeli diferansiyel denklemi (Hutchionson, 1948) tarafından

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)\left\{1-\frac{N(t-\tau)}{K}\right\} \tag{3.4.2.3}$$

ile verilmiştir. Burada, $r, \tau, K \in (0,\infty)$. (3.4.2.3) yaygın olarak gecikmeli lojistik denklem olarak bilinmekle birlikte birçok araştırmacı tarafından çalışılacaktır. Buna benzer olarak yiyeceklerin sınırlı olması halinde gecikmeli diferansiyel denklem

$$N'(t) = r\,N(t)\frac{K-N(t-\tau)}{K+c\,r\,N(t-\tau)} \tag{3.4.2.4}$$

verilir. Burada,

$$r, \tau, K \in (0,\infty) \text{ ve } c \in [0,\infty). \tag{3.4.2.5}$$

Bu denklemde özel olarak $c=0$ alınırsa (3.4.2.3) elde edilir.

Bu kısımda,

$\phi \in C\big([-\tau, 0], R^{+}\big)$ ve $\phi(0)>0$ olmak üzere $-\tau \le t \le 0$ için

$$N(t) = \phi(t) \tag{3.4.2.6}$$

denklemini sağlayacak şekilde (3.4.2.4) denkleminin çözümleri irdelenecektir. (3.4.2.6) olması halinde açıkça (3.4.2.4) denklemi tüm $t \ge 0$ için bir tek pozitif çözüme sahiptir. K denge noktası çevresinde (3.4.2.4) denkleminin her pozitif çözümünün salınımı için gerekli ve yeterli şartlar tesis edilecektir. $N(t)=K\,e^{x(t)}$ olsun. Bu halde, (3.4.2.4) denklemi

$$x'(t)+r\,\frac{e^{x(t-\tau)}-1}{1+c\,r\,e^{x(t-\tau)}}=0 \tag{3.4.2.7}$$

formunda yazılır. (3.4.2.4) ve (3.4.2.6) ifadelerinin $N(t)$ çözümünün K civarında salınımlı olması için gerek ve yeter şart $x(t)$ nin sıfır civarında salınımlı olmasıdır. Sonuç 3.4.1.1, (3.4.2.4) denklemine uygulanırsa (3.4.2.4) denkleminin tüm pozitif çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 3.4.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4.2.5) doğru olsun. Bu halde, (3.4.2.4) denkleminin her çözümünün K civarında salınım yapması için gerek ve yeter şart

$$\frac{r}{1+c\,r}\,\tau>\frac{1}{e} \tag{3.4.2.8}$$

olmasıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$f(u)=(1+c\,r)\dfrac{e^{u}-1}{1+c\,r\,e^{u}}$ olsun. (3.4.2.7) denklemi

$$x'(t)+\frac{r}{1+c\,r}\,f\big(x(t-\tau)\big)=0 \tag{3.4.2.9}$$

formatında yazılır. Burada, f, $f\in C[R,R]$, $u\neq 0$ için $u\,f(u)>0$ ve $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$.

Bu durumda bir δ pozitif sayısı vardır öyle ki

$u\in[0,\delta]$ için $c\,r\geq 1 \;\Rightarrow\; f(u)\leq u$

iken

$u\in[-\delta,0]$ için $c\,r\leq 1 \;\Rightarrow\; f(u)\geq u$.

Nihayetinde Teorem 3.2.2.3 ve (3.4.2.8) den

$$y'(t)+\frac{r}{1+c\,r}\,y(t-\tau)=0$$

denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

3.4.3 Birden fazla gecikme olması halinde gecikmeli lojistik diferansiyel denklemlerin osilasyonu

n tane gecikmeye sahip $t \geq 0$ için

$$N'(t) = N(t)\left[\alpha - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, N(t-\tau_i)\right] \tag{3.4.3.1}$$

gecikmeli lojistik denklemini ele alalım. Burada,

$$\alpha, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in (0, \infty) \text{ ve } 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n \equiv \tau . \tag{3.4.3.2}$$

Bu denklem $t \geq 0$ için

$$N'(t) = r\, N(t)\left[1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right] \tag{3.4.3.3}$$

denkleminin genelleştirilmiş halidir. Burada, $N(t)$, t zamandaki popülasyon yoğunluğu, r gelişim oranı, K taşıma kapasitesidir. $\dfrac{1 - N(t-\tau)}{K}$ geçmişteki popülasyonun geri dönüşüm mekanizmasını gösterir. (3.4.3.1) denklemine eşlik eden başlangıç fonksiyon $-\tau \leq t \leq 0$ için

$$N(t) = \phi(t), \text{ burada } \phi \in C\left[[-\tau, 0], R^+\right] \text{ ve } \phi(0) > 0 \tag{3.4.3.4}$$

ile verilsin. (3.4.3.1) ve (3.4.3.4) başlangıç değer problemi $t \geq 0$ için bir tek pozitif $N(t)$ çözümüne sahiptir. (3.4.3.1) denklemi bir denge noktasına sahiptir.

Bu kısımdaki amacımız (3.4.3.1) denkleminin

$$N^* = \frac{\alpha}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i} \tag{3.4.3.5}$$

civarındaki salınımı için gerek ve yeter şart elde etmektir. (3.4.3.3) denkleminin her pozitif çözümünün K civarında salınım yapması için gerek ve yeter şart

$$r\, \tau > \frac{1}{e} \tag{3.4.3.6}$$

olmasıdır. (3.4.3.1) ve (3.4.3.4) başlangıç değer probleminin bir tek pozitif çözümü $N(t)$ olsun. $t \geq 0$ için

$$x(t) = \ln \frac{N(t)}{N^*} \tag{3.4.3.7}$$

ile birlikte $t \geq \tau$ için

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \, f(x(t-\tau_i)) = 0 \qquad (3.4.3.8)$$

elde edilir. Burada, $i = 1, 2, ..., n$ için $p_i = N^* \beta_i$ ve $f(u) = e^u - 1$. Açıkça, $x(t)$ nin sıfır civarında salınım yapması için gerek ve yeter şart $N(t)$ nin N^* civarında salınım yapmasıdır. Aynı zamanda,

$f \in C[R, R]$, $u \neq 0$ için $u\, f(u) > 0$,

$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = 1$ ve $u \leq 0$ için $f(u) \geq u$.

(3.4.3.1) denklemine eşlik eden linerize denklem

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \, y(t-\tau_i) = 0 \qquad (3.4.3.9)$$

ile verilir.

Teorem 3.4.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4.3.2) doğru olsun. Bu halde, (3.4.3.1) denkleminin her pozitif çözümünün N^* pozitif denge noktası civarında salınımlı olması için gerek ve yeter şart (3.4.3.9) denkleminin her çözümünün sıfır civarında salınımlı olmasıdır. Yani, $\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i \, e^{-\lambda \tau_i} = 0$ karakteristik denkleminin hiçbir reel köke sahip olmamasıdır.

(3.4.3.3) denklemine (3.4.3.7) dönüşümü yapılırsa $f(u) = e^u - 1$ olmak üzere

$$x'(t) + r\, f(x(t-\tau)) = 0 \qquad (3.4.3.10)$$

elde edilir. (3.4.3.10) denkleminin linerize olmuş formu $y'(t) + r\, y(t-\tau) = 0$ ile verilir. Bu denklemin salınımlı olması için gerek ve yeter şart (3.4.3.6) ifadesinin doğru olmasıdır. Bunun için aşağıdaki sonuç doğrudur.

Sonuç 3.4.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

r, τ ve K pozitif sabitler olsun. Bu halde, (3.4.3.3) lojistik denkleminin her y çözümünün K civarında salınım yapması için gerek ve yeter şart $r\,\tau\, e > 1$ olmasıdır.

Not 3.4.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

Teorem 3.2.2.1 in tüm koşulları kullanılırsa lineer denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olması için aşağıdaki her iki şarttan birinin (3.4.3.1) denkleminin her y çözümünün N^* civarında salınımlı olmasıdır.

(a) $\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, \tau_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right) > 1/e$

(b) $\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right) \Big/ \left(\prod_{i=1}^{n} \beta_i\right)^{1/n} \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right) > 1/e.$

3.4.4 Alyuvarların (kırmızı kan hücrelerinin) varlığını sürdürmesi için Lasota-Wazewska modeli

Bir hayvandaki alyuvarların varlığını sürdürmesi için gerekli model $t \geq 0$ için

$$N'(t) = -\mu \, N(t) + p \, e^{-\gamma N(t-\tau)} \tag{3.4.4.1}$$

gecikmeli diferansiyel denklem Wazewska-Czyzewska ve Lasota (1988) tarafından kullanılmıştır. Burada $N(t)$, t zamandaki alyuvarların sayısını, μ ise bir alyuvarın ölümünün olasılığı, p ve γ ise her birim zamandaki alyuvarların üretimi ile ilgili pozitif sabitler, τ ise bir alyuvarın üretimi için gerekli zamandır. (3.4.4.1) denklemi $\phi \in C\left(\left[-\tau, 0\right], R^{+}\right)$ ve $\phi(0) > 0$ olmak üzere

$$-\tau \leq t \leq 0 \text{ için } N(t) = \phi(t) \tag{3.4.4.2}$$

koşulları ile birlikte irdelenecektir. Açıkça, (3.4.4.1) ve (3.4.4.2) tüm $t \geq 0$ için bir tek pozitif çözüme sahiptir. (3.4.4.1) denkleminin N^* denge noktası pozitif ve $N^* = \dfrac{p}{\mu} e^{-\gamma N^*}$ dir. $N^*(t) = N^* + \dfrac{1}{\gamma} x(t)$ dönüşümü ile (3.4.4.1) denklemi

$$x'(\mathrm{t}) + \mu \, x(t) + \mu \, \gamma \, N^* \left[1 - e^{-x(t-\tau)}\right] = 0 \tag{3.4.4.3}$$

gecikmeli diferansiyel denklemine indirgenir.

$n = 2$, $p_1 = \mu$, $f_1(u) = u$, $p_2 = \mu \, \gamma \, N^*$ ve $f_2(u) = 1 - e^{-u}$ alınırsa (3.4.1.1) denklemi elde edilir. Açıkça $N(t)$ nin N^* civarında salınım yapması için gerek ve yeter şart $x(t)$ nin sıfır civarında salınımlı olmasıdır. (3.4.4.3) denklemi için Sonuç 3.4.1.1 in tüm varsayımları sağlanmıştır. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 3.4.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.4.4.1) ve (3.4.4.2) denklemlerinin çözümünün N^* civarında salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda + \mu + \mu\,\gamma\,N^* e^{-\lambda\tau} = 0$ denkleminin hiçbir reel köke sahip olmamasıdır. Diğer bir deyişle (3.4.4.1) ve (3.4.4.2) denklemlerinin çözümünün N^* civarında salınımlı olması için gerek ve yeter şart $\mu\,\tau\,\gamma\,N^* e^{\mu\tau} > 1/e$ olmasıdır.

"5"3.5 Gecikmeli Diferansiyel Denklem Sistemlerinde Salınım

Diferansiyel denklem sistemleri ile ilgili olarak çözümlerin salınım kavramı ile ilgili (çözümlerin salınımı ile ilgili olan kavram) değişik yollar mevcuttur.

Tanım 3.5.0.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$x(t) = [x_1(t),..., x_n(t)]^T$ olsun. Eğer çözümün her $x_i(t)$ bileşeni keyfi sayıda büyük köklere sahipse $x(t)$ çözümüne salınımlıdır denir. Aksi halde çözüme salınımlı değildir deriz. Diğer bir deyişle $x(t)$ nin her bileşeni salınımlı ise $x(t)$ salınımlıdır denir ve eğer $x(t)$ nin en az bir bileşeni nihayetinde pozitif veya negatif ise $x(t)$ çözümüne salınımlı değildir deriz.

Tanım 3.5.0.2. (Györi ve Ladas, 1991)

Eğer $x(t) = [x_1(t),..., x_n(t)]^T$ nihayetinde triviyal veya en az bir bileşeni nihayetinde sabit bir işarete sahip değilse $x(t)$ çözümü salınımlıdır, aksi halde salınımlı değildir.

"5" Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında çalışan lisans üstü öğrencileri Neriman AVCI, Mikail KARACA, Abbas TUTAR 'ın tezlerinde bu kısımda ifade edilen tüm sonuçların türkçesi ortaktır.

$x(t)=[1,\sin t]$ Tanım 3.5.0.2 ye göre salınımlıdır fakat Tanım 3.5.0.1 e göre salınımlı değildir. Eğer Tanım 3.5.0.1 varsa Tanım 3.5.0.2 kesinlikle doğrudur. Eğer Tanım 3.5.0.2 ye göre $x(t)$ salınımlı değilse Tanım 3.5.0.1 e göre de $x(t)$ salınımlı değildir. Yukarıdaki örnek tersinin doğru olmadığını gösterir. Yani Tanım 3.5.0.2 ye göre salınımlı ise Tanım 3.5.0.1 e göre salınımlı olmak zorunda değildir.

3.5.1 Lineer otonom sistemlerin salınımı için gerekli ve yeterli şartlar

$$x'(t)+\sum_{i=1}^{n} P_i\, x(t-\tau_i)=0 \tag{3.5.1.1}$$

Lineer otonom gecikmeli diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Burada, P_i katsayıları $m\times m$ tipinde matrisler ve τ_i gecikmeleri negatif olmayan reel sayılardır. Bu denkleme eşlik eden karakteristik denklem

$$\det\left(\lambda\, I+\sum_{i=1}^{n} P_i\, e^{-\lambda\,\tau_i}\right)=0 \tag{3.5.1.2}$$

ile verilir. Burada, I, $m\times m$ tipinde birim matristir. Aşağıdaki teorem Teorem 3.2.1.1 in lineer otonom sistemindeki karşılığıdır.

Teorem 3.5.1.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,n$ için

$$P_i\in R^{m\times m} \text{ ve } \tau_i\in R^{+} \tag{3.5.1.3}$$

olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.5.1.1) denkleminin her çözümü bileşensel olarak salınımlıdır.

(b) (3.5.1.2) karakteristik denkleminin reel kökü yoktur.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a)$\Rightarrow$(b): Kolaydır. Gerçekten λ_0, (3.5.1.2) denkleminin bir kökü ise

$\left(\lambda_0\, I+\sum_{i=1}^{n} P_i\, e^{-\lambda_0\,\tau_i}\right)\xi=0$ denklemini sağlayacak şekilde reel $\xi\neq 0$ vardır. Bu halde, açıkça en az bir bileşeni salınımlı olmamak üzere $x(t)=e^{\lambda_0 t}\,\xi$, (3.5.1.1) denkleminin bir çözümüdür.

(b) $\Rightarrow$ (a): Laplace transformasyonu kullanılarak yapılacaktır.

Çelişki oluşturmak için (b) doğru ve (3.5.1.1) denklemi $x(t)=[x_1(t),...,x_m(t)]^T$ şeklinde salınım yapmayan bir çözüme sahip olsun. Yani, $x(t)$ nin bileşenlerinden en az bir tanesi salınımlı değildir. Genelliği bozmaksızın $x_1(t)$ bileşeni nihayetinde pozitif olsun. (3.5.1.1) otonom olduğundan burada $\tau=\max\limits_{1\le i\le n}\tau_i$ olmak üzere $t\ge-\tau$ için $x_1(t)>0$ olduğu kabul edilir.

Teorem 3.1.5.1 den $x(t)$ eksponansiyel mertebeli olduğundan ($|\,x(t)\,|\le M\,e^{\mu t}$. Burada $M>0$, μ reel)

$$\operatorname{Re} s>\mu \text{ için } X(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,x(t)\,dt$$

yazılır. (3.5.1.1) denklemine Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$\operatorname{Re} s>\mu \text{ için } F(s)\,X(s)=\Phi(s) \tag{3.5.1.4}$$

elde edilir. Burada,

$$F(s)=s\,I+\sum_{i=1}^{n}P_i\,e^{-s\tau_i} \tag{3.5.1.5}$$

ve

$$\Phi(s)=x(0)-\sum_{i=1}^{n}P_i\,e^{-s\tau_i}\int_{-\tau_i}^{0}e^{-st}\,x(t)\,dt. \tag{3.5.1.6}$$

Hipotezden tüm $s\in R$ için $\det[F(s)]\ne0$. Üstelik,

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ s\in R}}\left(\det[F(s)]\right)=\infty \tag{3.5.1.7}$$

ve böylece

$$\text{tüm } s\in R \text{ için } \det[F(s)]>0 \tag{3.5.1.8}$$

yazılır. $x(t)$ çözümünün birinci bileşeni $x_1(t)$ nin Laplace transformasyonu $X_1(s)$ olsun. Buradan Cramer kuralından

$$\operatorname{Re} s > \mu \text{ için } X_1(s) = \frac{\det[D(s)]}{\det[F(s)]}. \tag{3.5.1.9}$$

Burada,

$$D(s) = \begin{bmatrix} \Phi_1(s) & F_{12}(s) & . & . & . & F_{1m}(s) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ \Phi_m(s) & F_{m2}(s) & . & . & . & F_{mm}(s) \end{bmatrix}$$

$\Phi_i(s)$, $\Phi(s)$ vektörünün i. bileşeni ve $F_{ij}(s)$ ise $F(s)$ matrisinin i. satırı j. sütunudur. Açıkça, tüm $i, j = 1, 2, \ldots, m$ için $\Phi_i(s)$ ve $F_{ij}(s)$ tamdır. Dolayısıyla $\det[D(s)]$ ve $\det[F(s)]$ tamdır.

σ_0, $X_1(s)$ nin yakınsaklık apsisi olsun. Yani $\sigma_0 = \inf\{\sigma \in R : X_1(\sigma) \text{ mevcut}\}$. Teorem 3.2.1.1 ve Teorem 3.2.1.2 nin ispatındaki argümanlara benzer muhakeme ile $\sigma_0 = -\infty$ olur ve (3.5.1.9) denkleminden tüm

$$s \in R \text{ için } X_1(s) = \frac{\det[D(s)]}{\det[F(s)]} \tag{3.5.1.10}$$

elde edilir. $x_1(t) > 0$ olduğundan tüm $s \in R$ için $X_1(s) > 0$ ve (3.5.1.8) ve (35.1.10) denklemlerinden $\det[D(s)] > 0$. $D(s)$ nin tanımından ve (3.5.1.5) ve (3.5.1.6) denklemlerinden

$$s \le -s_0 \text{ için } \det[D(s)] \le M\, e^{-\alpha s} \tag{3.5.1.11}$$

sağlanacak şekilde M, α, s_0 pozitif sabitleri vardır. $\det[F(s)]$, $s, e^{-s\tau_1}, e^{-s\tau_2}, \ldots, e^{-s\tau_n}$ değişkenlerine bağlı bir polinom olduğundan

$$s \in R \text{ için } \det[F(s)] \ge m \tag{3.5.1.12}$$

olacak şekilde bir m pozitif sayısı vardır. (3.5.1.10), (3.5.1.11) ve (3.5.1.12) denklemlerinden

$$X_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, x_1(t)\, dt \ge \int_T^\infty e^{-st}\, x_1(t)\, dt \ge e^{-sT} \int_T^\infty x_1(t)\, dt > 0$$

ve böylece

$$s \to -\infty \text{ için } 0 < \int_T^\infty x_1(t)\,dt \le \frac{M}{m} e^{s(T-\alpha)} \to 0$$

elde edilir. Bu ise $t \ge T$ için $x_1(t) \equiv 0$ olduğunu gerektirir. Bu bir çelişkidir.

Teorem 3.5.1.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.1.3) doğru olsun. Bu halde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.5.1.1) denkleminin her çözümü Tanım 3.5.0.1 anlamında (bileşensel olarak) salınımlıdır.

(b) (3.5.1.1) denkleminin her çözümü Tanım 3.5.0.2 anlamında salınımlıdır. (Yani, nihayetinde tiriviyal veya en az bir bileşeni nihayetinde sabit bir işarete sahip değildir.)

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) $\Rightarrow$ (b) : Açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (a) : İspat edelim. Bunun için çelişki oluşturmak için (b) doğru fakat $x(t)$ (3.5.1.1) denkleminin Tanım 3.5.0.1 e göre salınım yapmayan bir çözümü olsun. Bu halde, Teorem 3.5.1.1 den (3.5.1.2) karakteristik denklemi bir λ_0 reel köküne sahiptir. Dolayısıyla, (3.5.1.1) denkleminin bir çözümü $x(t) = e^{\lambda_0 t}\,\xi$ olacak şekilde sıfırdan farklı $\xi \in R^n$ vardır. Fakat bu çözüm Tanım 3.5.0.2 ye göre salınımlı değildir. Bu bir çelişkidir. İspat tamamlanmıştır.

3.5.2 Lineer otonom sistemlerin için osilasyon ve osilasyon yapmaması halinde kesin şartlar

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} P_i\, x(t-\tau_i) = 0 \qquad (3.5.2.1)$$

Gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, P_i, $m \times m$ tipinde matris ve τ_i ler negatif olmayan reel sayılardır. (3.5.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlı ve salınımlı olmaması halinde tam şartları elde etmek için

$\mu(P_i) = \max\limits_{\|\mu\|=1}(P_i u, u)$ logaritmik normu kullanılacaktır. (3.5.2.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(\lambda I + \sum_{i=1}^{n} P_i e^{-\lambda \tau_i}\right) = 0 \tag{3.5.2.2}$$

denkleminin hiçbir reel köke sahip olmamasıdır. Aşağıdaki teorem, Teorem 3.2.2.1 in matris analoğudur (karşılığıdır).

Teorem 3.5.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

Her $i = 1, 2, ..., n$ için

$$P_i \in R^{m\times m},\ \tau_i \geq 0 \text{ ve } \mu(-P_i) \leq 0 \tag{3.5.2.3}$$

olsun. Bu halde, aşağıdaki iki şartın her biri (3.5.2.1) in tüm çözümlerinin salınımı için yeterlidir.

(a) $$\sum_{i=1}^{n} -\mu(-P_i)\tau_i > \frac{1}{e} \tag{3.5.2.4}$$

(b) $$m\left[\prod_{i=1}^{n}\left(-\mu(-P_i)\right)\right]^{1/n} \sum_{i=1}^{n}\tau_i > 1/e. \tag{3.5.2.5}$$

Teoremin ispatı için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.5.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

$\gamma \in R^+$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(-P_i) e^{-\gamma \tau_i} < 0 \tag{3.5.2.6}$$

ve

$$\inf_{\gamma<0}\left[\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\mu(-P_i)e^{-\gamma \tau_i}\right] > 1 \tag{3.5.2.7}$$

olmak üzere $i = 1, 2, ..., n$ için $P_i \in R^{m\times m}$ ve $\tau_i \geq 0$ olsun. Bu halde, (3.5.2.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturmak için (3.5.2.1) denklemi salınım yapmayan bir çözüme sahip olsun. Teorem 3.5.1.1 den (3.5.2.2) karakteristik denklemi λ_0 reel köküne sahiptir. Fakat

$$\left(\lambda_0 \, I + \sum_{i=1}^{n} P_i \, e^{-\lambda_0 \tau_i} \right) u = 0$$

olacak şekilde $\|u\| = 1$ olmak üzere $u \in R^n$ vardır.

Dolayısıyla,

$$\lambda_0 = \left(- \sum_{i=1}^{n} P_i e^{-\lambda_0 \tau_i} \, u, u \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(- P_i \, u, u \right) e^{-\lambda_0 \tau_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \mu\left(- P_i \right) e^{-\lambda_0 \tau_i}$$

ve (3.5.2.6) ifadesinden

$$\lambda_0 < 0 \text{ ve } 1 \geq \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(- P_i \right) e^{-\lambda_0 \tau_i} .$$

Bu (3.5.2.7) ye çelişki teşkil eder. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.5.2.1 in İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

$\mu\left(- P_i \right) \leq 0$ için Lemma 3.5.2.1 kullanılırsa (3.5.2.6) sağlanır. Böylece (3.5.2.7) nin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak (3.5.2.4) doğru olsun. Bu halde $e^x \geq e \, x$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\text{tüm } \gamma < 0 \text{ için } \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(- P_i \right) e^{-\gamma \tau_i} \geq \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(- P_i \right) e \left(- \gamma \, \tau_i \right) = e \sum_{i=1}^{n} - \mu\left(- P_i \right) \tau_i .$$

Bu ifade ile birlikte (3.5.2.4) kullanılırsa (3.5.2.7) doğu olur. Şimdi de (3.5.2.5) doğru olsun. Buradan da tüm $\gamma < 0$ için aritmetik ve geometrik ortalama arasındaki ilişki kullanılırsa

$$\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}\mu(-P_i)e^{-\gamma\tau_i} = -\frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n}[-\mu(-P_i)]e^{-\gamma\tau_i} \geq -\frac{1}{\gamma}n\left[\prod_{i=1}^{n}(-\mu(-P_i))e^{-\gamma\tau_i}\right]^{1/n}$$
$$= -\frac{1}{\gamma}n\left[\prod_{i=1}^{n}(-\mu(-P_i))\right]^{1/n}\exp\left(-\frac{1}{n}\gamma\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)$$
$$\geq -\frac{1}{\gamma}n\left[\prod_{i=1}^{n}(-\mu(-P_i))\right]^{1/n} e\left(-\frac{1}{n}\gamma\right)\sum_{i=1}^{n}\tau_i$$
$$= e\left[\prod_{i=1}^{n}(-\mu(-P_i))\right]^{1/n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i .$$

Bu ifade ile birlikte (3.5.2.5) kullanılırsa (3.5.2.7) doğru olur. İspat biter.

$$x'(t)+P\,x(t-\tau)=0 \tag{3.5.2.8}$$

Gecikmeli diferansiyel sistemini ele alalım. Burada, $P\in R^{m\times m}$ ve $\tau\geq 0$. (3.5.2.4) ve (3.5.2.5) şartları aynı olup her biri

$$-\mu(-P)\tau > 1/e \tag{3.5.2.9}$$

ifadesine indirgenir. Burada $1/e$ alt sınırı olabilecek en iyi alt sınırdır. Üstelik, P skaler ise (3.5.2.8) in tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter şart (3.5.2.9) olmasıdır.

Teorem 3.5.2.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$P\in R^{m\times m}$ ve $\tau\geq 0$. Bu halde aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.5.2.8) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

(b) $(-\infty,1/e\tau]$ aralığı içinde P reel öz değerlere sahip değildir.

($\tau=0$ olduğunda $(-\infty,1/e\tau]$ aralığı $(-\infty,\infty)$ açık aralığına genişletilebilir.)

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$\tau=0$ için ispat Teorem 3.5.1.1 elde edilir. $\tau>0$ olsun. (a) nın ters yönünün doğru olmadığı durumunun (b) nin ters yönünün doğru olmadığı durumunu gerektirdiğini göstermek yeterlidir. Bunu yapabilmek için (3.5.2.8) denkleminin salınım yapmayan bir çözüme sahip olmaması için gerek ve yeter şart $\det(\lambda I+P\,e^{-\lambda\tau})=0$ karakteristik denkleminin bir λ_0 reel köküne sahip olduğunu göstermektir. λ_0 ın reel kök ve $\det(\lambda_0\,e^{\lambda_0\tau}I+P)=0$ olması için gerek ve yeter şart P nin

$$\mu_0 = -\lambda_0 \, e^{\lambda_0 \tau} \tag{3.5.2.10}$$

daki μ_0 eigen (öz) değerine sahip olmasıdır. Fakat (3.5.2.10) nun doğru olması için gerek ve yeter şart $\lambda_0 + \mu_0 \, e^{-\lambda_0 \tau} = 0$ olmasıdır. Yani, bu durumun olması için gerek ve yeter şart $\lambda + \mu_0 \, e^{-\lambda \tau} = 0$ denkleminin reel köke sahip olmasıdır. Bu durum Teorem 3.2.2.3 te $\mu_0 \le \dfrac{1}{e\tau}$ denktir. Yani, P nin μ_0 eigen değerinin $\left(-\infty, \dfrac{1}{e\tau}\right]$ aralığı içinde olmasıdır.

Tanım 3.5.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

Eğer $i = 1, 2, ..., n$ ve $\tau_i > 0$ için (3.5.2.1) denkleminin her çözümü salınımlı ise (3.5.2.1) denklemi salınımlıdır. Gecikmelere göre global olarak salınımlıdır.

Sonuç 3.5.2.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.2.8) denklemi τ gecikmesine göre global olarak salınımlı olması için gerek ve yeter şart P nin reel eigen değerlere sahip olmamasıdır. Diğer taraftan $(m = 1)$ için,

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i \, x(t - \tau_i) = 0$$

burada $i = 1, 2, ..., n$ için $p_i \in R$ ve $\tau_i \ge 0$ skaler gecikmeli diferansiyel denklem sistemi gecikmelere göre global olarak salınımlı olmaz. Daha genel olarak aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 3.5.2.3. (Györi ve Ladas, 1991)

m tek bir doğal sayı ve $i = 1, 2, ..., n$ için $P_i \in R^{m \times m}$ ve $\tau_i \ge 0$ doğru olsun. Bu halde, (3.5.2.1) denklemi gecikmelere göre global olarak salınımlı değildir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Gecikmelerin olmaması halinde (3.5.2.1) denklem sistemi

$$x'(t)+\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right)x(t)=0 \tag{3.5.2.11}$$

sistemine indirgenir. Hipotezin aksine tüm çözümler salınımlı olur. Fakat m tek olduğundan $\det\left(\lambda I+\sum_{i=1}^{n} P_i\right)=0$ karakteristik denklemin derecesi de m olup tek reel köke sahip olur. Bu bir çelişkidir. İspat tamamlanır.

Teorem 3.5.2.4. (Györi ve Ladas, 1991)

$$-\mu(-P)>\mu(Q)\geq 0,\ \tau\geq\sigma,\ \mu(Q)(\tau-\sigma)\leq 1$$

ve

$$[-\mu(-P)-\mu(Q)]\tau>\frac{1}{e}[1-\mu(Q)(\tau-\sigma)]$$

olmak üzere $P,Q\in R^{m\times m}$ ve $\tau,\sigma\in R^{+}$ olsun. Bu halde,

$$x'(t)+P\,x(t-\tau)-Q\,x(t-\sigma)=0$$

denkleminin her çözümü salınmlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Lemma 3.5.2.1 den (3.5.2.6) şartı açıkça sağlanmaktadır. (3.5.2.7) ifadesinin doğruluğunu ispat edersek ispat biter. Yani,

$$\inf_{\gamma<0}\left\{\frac{1}{\gamma}\left[\mu(-P)e^{-\gamma\tau}+\mu(Q)e^{-\gamma\sigma}\right]\right\}>1,\ p=-\mu(-p)\text{ ve }q=\mu(Q)$$

olsun. Teorem 3.2.2.4 ün (3.2.2.13) şartı sağlandığından ve böylece (3.2.2.14) yazılır.

Yani, $F(\gamma)\equiv\gamma-\mu(-P)e^{-\gamma\tau}-\mu(Q)e^{-\gamma\sigma}=0$ ifadesi γ reel köküne sahip değildir. $F(-\infty)=\infty$ olduğundan tüm $\gamma\in R$ için $\gamma>\mu(-P)e^{-\gamma\tau}+\mu(Q)e^{-\gamma\sigma}$ yazılır. Tüm $\gamma<0$ için $\frac{1}{\gamma}\left[\mu(-P)e^{-\gamma\tau}+\mu(Q)e^{-\gamma\sigma}\right]>1$ dir ve böylece ispat tamamlanır.

3.5.3 Lineer otonom olmayan sistemlerin salınımı için yeterli şartlar

$$t \geq 0 \text{ ve } i = 1, 2, ..., m \text{ için } x_i'(t) + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)\, x_j(t - \tau(t)) = 0 \tag{3.5.3.1}$$

denklemini ele alalım. Burada,

$$i, j = 1, 2, ..., m \text{ için } p_{ij} \in C\left[R^+, R\right], \tau \in C\left[R^+, \mathrm{R}\right] \tag{3.5.3.2}$$

ve

$$\lim_{t \to \infty} (t - \tau(t)) = \infty. \tag{3.5.3.3}$$

$p_{ij}(t)$ katsayıları aşağıdaki şartı sağlasın.

Hipotez 3.5.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

Bileşensel olarak pozitif $u = [u_1, ..., u_m]^T$ vektörü ve $p \in C\left[R^+, R^+\right]$ vardır öyle ki tüm $j = 1, 2, ..., m$ ve $t \geq 0$ için

$$u_j\, p_{jj}(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} u_i \left| p_{ij}(t) \right| \leq -p(t) u_j \tag{3.5.3.4}$$

yazılır. Bu kısımdaki temel sonuç (3.5.3.1) sisteminin salınım yapan tüm çözümlerinin

$$y'(t) + p(t)\, y(t - \tau(t)) = 0 \tag{3.5.3.5}$$

skaler denkleminin salınım yapan tüm çözümlerinin karşılaştırılması hakkındadır.

Burada, elde edilen sonuç ve Teorem 3.5.1.1 kullanılarak $t \geq 0$ ve $i = 1, 2, ..., m$ için

$$x_i'(t) + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, x_j(t - \tau) = 0 \tag{3.5.3.6}$$

lineer otonom sisteminin tüm çözümlerinin salınımı için oldukça ilginç olan gerek ve yeterli şart elde edilecektir. Burada,

$$\left.\begin{array}{l} \tau \in (0, \infty), i, j = 1, 2, ..., m \text{ için } p_{ij} \in R, \\ P = \left(p_{ij}\right) \text{ matrisi indirgenemez,} \\ j = 1, 2, ..., m \text{ için } p_{jj} > 0 \text{ ve } 1 \leq i \neq j \leq m \text{ için } p_{ij} \leq 0 \end{array}\right\} \tag{3.5.3.7}$$

Teorem 3.5.3.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.3.2), (3.5.3.3) ve Hipotez 3.5.3.1 sağlansın ve ayrıca (3.5.3.5) skaler denkleminin her çözümü salınımlı olsun. Bu halde, (3.5.3.1) denkleminin her çözümü Tanım 3.5.0.2 anlamında salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturabilmek için (3.5.3.1) denkleminin salınım yapmayan $x(t)=[x_1(t),...,x_m(t)]^T$ çözümü olsun. Bu halde, $T_0 \geq 0$ vardır öyle ki

$$i=1,2,...,m \text{ ve } t \geq T_0 \text{ için } \varepsilon_i \equiv \operatorname{sgn} x_i(T_0) = \operatorname{sgn} x_i(t),\ \varepsilon_i\, x_i(t) = |\, x_i(t)\,|$$

ve

$$t \geq T_0 \text{ için } \sum_{i=1}^{m} |\, x_i(t)\,| > 0$$

olsun. Ayrıca,

$$t \geq T_0,\ z(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i\, \varepsilon_i\, x_i(t)$$

olsun. Bu halde, $z(t) > 0$ ve yeterince büyük t ler için

$$\begin{aligned} z'(t) &= \sum_{i=1}^{m} u_i\, \varepsilon_i\, x_i'(t) = -\sum_{i=1}^{m} u_i\, \varepsilon_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)\, x_j(t-\tau(t)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \left[-u_j\ p_{jj}(t)\, x_j(t-\tau(t)) \operatorname{sgn} x_j(t-\tau(t)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} u_i\, |p_{ij}(t)|\, |\, x_j(t-\tau(t))\,| \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} -\, p(t)\, u_j\, |x_j(t-\tau(t))| = -p(t)\, z(t-\tau(t)) \end{aligned}$$

yazılır. Yani, $z'(t) + p(t)\, z(t-\tau(t)) \leq 0$ diferansiyel eşitsizliği nihayetinde pozitif çözüme sahiptir. Dolayısıyla, Sonuç 3.3.2.2 den (3.5.3.5) denklemi nihayetinde pozitif çözüme sahiptir.

Teorem 3.5.1.1 ve Teorem 3.5.3.1 uygulanırsa aşağıdaki teorem, Teorem 3.5.2.2 nin genelleştirilmiş versiyonudur.

Teorem 3.5.3.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.3.7) sağlansın. Bu halde, aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) (3.5.3.6) denkleminin her çözümü (bileşensel olarak) salınımlıdır.

(b) $\left(-\infty, \dfrac{1}{e\,\tau}\right)$ aralığında $P = \left(p_{i\,j}\right)$ matrisi reel eigen değerlere sahip değildir.

(c) Bir pozitif $u = \left[u_1, u_2, ..., u_n\right]^T$ vektörü vardır öyle ki $j = 1, 2, ..., m$ için

$$u_j\; p_{jj} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} u_i\; p_{i\,j} > \frac{u_j}{e\,\tau}. \qquad (3.5.3.8)$$

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(a) $\Rightarrow$ (b) ifadesi Teorem 3.5.2.2 ile verildi.

(c) $\Rightarrow$ (a) olduğunu görelim. $p \in \left(1/e\,\tau, \infty\right)$ olsun. (3.5.3.8) ifadesinden $p_{i\,j}(t)$ ve $p(t)$ ifadelerinin yerine $p_{i\,j}$ ve p sabitleri sırasıyla (3.5.3.4) denklemini sağlar. $p(t)$ yerine p sabiti yazılırsa (3.5.3.5) her çözümü Teorem 3.2.2.3 ten salınımlıdır ve $p\,\tau > \dfrac{1}{e}$.

Teorem 3.5.3.1 den (3.5.3.1) denkleminin her çözümü Tanım 3.5.0.2 anlamında salınımdır. Fakat Teorem 3.5.1.2 de ispat edildiği gibi eğer otonom sisteminin her çözümü Tanım 3.5.0.2 anlamında salınımlı ise aynı zamanda bileşensel olarak da salınımlıdır. Bu da (c) $\Rightarrow$ (a) dır.

Nihayetinde (b) $\Rightarrow$ (c) olduğunu görelim. Burada, P matrisinin ve P^T nun aynı eigen değerlere sahip olduğu gerçeği kullanılacaktır. Böylece λ nın P nin bir eigen değeri olması için gerek ve yeter şart $-\lambda$, $-P^T$ eigen değerinin olmasıdır. (3.5.3.7) ifadesinden $-P^T$ pozitiftir ve böylece λ_0 $-P^T$ nin öz değeri ise buna karşılık gelen bileşenleri pozitif olan eigen vektörü $u = \left(u_1, u_2, ..., u_m\right)^T$ dır. Böylece, $-P^T\,u = \lambda_0\,u$ yazılır veya buna denk olarak

$$j = 1, 2, ..., m \text{ için } \; p_{jj}\,u_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} p_{i\,j}\,u_i = -\lambda_0\,u_j \qquad (3.5.3.9)$$

elde edilir. Fakat $-\lambda_0$, P nin öz değeri ve (b) kabulünden $-\lambda_0 > \frac{1}{e\,\tau}$. Dolayısıyla, (3.5.3.9) denklemi (3.5.3.8) denklemini verir.

3.5.4 Gecikmeli lojistik denklemler sisteminde salınım

$$N_i'(t) = N_i(t)\left[a_i - \sum_{i=1}^{m} b_{i\,j}\, N_j(t-\tau)\right],\; i = 1, 2, ..., m \tag{3.5.4.1}$$

denklemini ele alalım. Burada, $i,\, j = 1, 2, ..., m$ için

$$\tau \in (0, \infty) \text{ ve } a_i, b_{i\,j} \in R. \tag{3.5.4.2}$$

Bu sistemin tüm pozitif çözümlerinin salınımı için yeterli şartlar verilecektir. Bu denklem sisteminin kararlılık konumu $N^* = \left[N_1^*, N_2^*, ..., N_m^*\right]^T$ ile verilir. Yani, sistemin çözümü hakkında

$$i = 1, 2, ..., m \text{ için } \sum_{i=1}^{m} b_{i\,j}\, N_j^* = a_i \tag{3.5.4.3}$$

yazılır. Bunun yanında (3.5.4.1) in salınım yapmayan çözümleri için yeterli şartlar verilecektir. (3.5.4.1) sistemiyle birlikte $i = 1, 2, ..., m$ ve $-\tau \le t \le 0$ için

$$N_i(t) = \phi_i(t) \text{ burada } \phi_i \in C\left[[-\tau, 0], \mathrm{R}^+\right] \text{ ve } \phi_i(0) > 0 \tag{3.5.4.4}$$

verilsin. (Györi ve Ladas, 1991, Teorem 1.1.5) ispatındaki argümana benzer bir argüman kullanılırsa tüm $t \ge 0$ çin (3.5.4.1) ve (3.5.4.4) problemi $N(t) = \left[N_1(t), N_2(t), ..., N_m(t)\right]^T$ tek çözümüne sahiptir. Öyle ki $t \ge 0$ ve $i = 1,2,...,m$ için $N_i(t) > 0$. Bu kısım boyunca (3.5.4.3) ifadesinin bileşenleri pozitif olan N^* çözümü olduğunu kabul edelim. $t \ge 0$ ve $i = 1,2,...,m$ için $N_i(t) = N_i^*\, e^{x_i(t)}$ olsun. $x_i(t)$ fonksiyonları $i = 1,2,...,m$ için

$$x_i'(t) + \sum_{j=1}^{m} p_{i\,j}\left[e^{x_j(t-\tau)} - 1\right] = 0 \tag{3.5.4.5}$$

denklemini sağlar. Burada, $i,\, j = 1, 2, ..., m$ için $p_{i\,j} = b_{i\,j}\, N_j^*$. Eğer bazı $i = 1,2,...,m$ için $N_i(t) - N_i^*$ keyfi sayıda büyük köklere (sıfırlara) sahipse (3.5.4.1) denkleminin $N(t)$ çözümü N^* civarında salınımlıdır. Eğer diğer taraftan $N_i(t)-N_i^*$ her biri nihayetinde sıfırdan farklı ise $N(t)$ çözümüne N^* civarında salınımlı değildir denir. (3.5.4.1) ve (3.5.4.4), N^* civarında salınımlı olması için gerek ve yeter şart (3.5.4.5) çözümünün $[0, 0,..., 0]^T$ civarında salınım yapmasıdır.

Teorem 3.5.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.4.2) sağlanacak şekilde (3.5.4.1) denklem sistemini ele alalım. (3.5.4.3) bileşenleri pozitif olan $N^* = \left[N_1^*, N_2^*,..., N_m^*\right]^T$ çözümüne sahip olsun.

$$\mu = \min_{1\le j\le m}\left[N_j^*\left(b_{jj} - \sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{m}\left|b_{ij}\right|\right)\right] \tag{3.5.4.6}$$

ve

$$\mu\,\tau\,e > 1 \tag{3.5.4.7}$$

olmak üzere (3.5.4.4) ile birlikte (3.5.4.1)-(3.5.4.4) çözümü N^* civarında salınımlıdır.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

Çelişki oluşturmak için (3.5.4.1) ile birlikte (3.5.4.4) denkleminin $N(t)$ çözümü N^* civarında salınımlı olmasın. Bu halde, (3.5.4.5) ifadesindeki $x(t) = [x_1(t), x_2(t),..., x_m(t)]^T$ çözümü $[0, 0,..., 0]^T$ civarında salınımlı değildir. İlk olarak;

İddia: $i = 1, 2,..., m$ için

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \tag{3.5.4.8}$$

yazılır. Bunu sonlandırmak için yeterince büyük t ler ve $i = 1, 2,..., m$ için

$$\delta_i = \operatorname{sgn} x_i(t),\; z_i(t) = \delta_i\, x_i(t),\; v(t) = \sum_{i=1}^{m} z_i(t)$$

olsun. Bu halde,

$$i = 1, 2, ..., m \text{ için } z_i(t) > 0 \text{ ve } z_i'(t) + \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \frac{\delta_j}{\delta_i} \frac{e^{\delta_j z_j(t-\tau)} - 1}{\delta_j} = 0. \tag{3.5.4.9}$$

Dolayısıyla, $i = 1, 2, ..., m$ için

$$z_i'(t) + p_{ii} \frac{e^{\delta_i z_i(t-\tau)} - 1}{\delta_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} |p_{ij}| \frac{e^{\delta_j z_j(t-\tau)} - 1}{\delta_j} \leq 0 \tag{3.5.4.10}$$

yazılır. $i = 1, 2, ..., m$ için (3.5.4.10) yeniden toplanır ve (3.5.4.6) kullanılırsa

$$v'(t) + \mu \sum_{i=1}^{m} \frac{e^{\delta_i z_i(t-\tau)}}{\delta_\mathrm{i}} \leq 0 \tag{3.5.4.11}$$

elde edilir.

$$\mu > 0 \text{ ve } i = 1, 2, ..., m \text{ için } \frac{e^{\delta_i z_i(t-\tau)} - 1}{\delta_i} > 0$$

ifadesinden $v'(t) < 0$ ve böylece

$$L = \lim_{t \to \infty} v(t) \tag{3.5.4.12}$$

mevcut ve negatif değildir. (3.5.4.12) ifadesinden her $i = 1, 2, ..., m$ için $z_i(t)$ nin sınırlı olduğu görülür. Dolayısıyla, (3.5.4.9) ifadesinden her $i = 1, 2, ..., m$ için $z_i'(t)$ ve $z_i''(t)$ sınırlıdır. Sonuç olarak, $v'(t)$, $[T, \infty)$ $(T \in (0, \infty))$ aralığı üzerinde düzgün süreklidir. Yani, bir $M > 0$ sabit sayısı vardır öyle ki

$$\text{tüm } t_1, t_2 \geq T \text{ için } |v'(t_2) - v'(t_1)| \leq M |t_2 - t_1|.$$

Diğer taraftan (3.5.4.11), (3.5.4.12) ifadelerinden kolaylıkla $v'(t)$ nin $[T, \infty)$ aralığı üzerinde integrallenebilir olduğu görülür. Herhangi bir

$$t \geq T \text{ ve } \delta > 0 \text{ için } v'(t) = \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} v'(s)\, ds - \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} [v'(s) - v'(t)]\, ds$$

yazılır ve açıkça

$$\limsup_{t \to +\infty} |v'(t)| \leq \frac{1}{\delta} \limsup_{t \to +\infty} \int_t^{t+\delta} |v'(s)|\, ds + \frac{M}{\delta} \limsup_{t \to +\infty} \int_t^{t+\delta} (s - t)\, ds = \frac{M}{2} \delta$$

yazılır. $\delta > 0$ ve keyfi olduğundan bu durumda $\lim_{t \to +\infty} v'(t) = 0$ bulunur. (3.5.4.11) ifadesinden her $i = 1, 2, ..., m$ için $\lim_{t \to \infty} z_i(t) = 0$. Bu iddiayı ispatlar.

İkinci olarak (3.5.4.5) denklemi $x'(t)+\sum_{j=1}^{m}\left[p_{ij}\frac{e^{x_j(t-\tau)}-1}{x_j(t-\tau)}\right]x_j(t-\tau)=0$ tipinde yazılır. Yani, $i=1,2,...,m$ için

$$x_i'(t)+\sum_{j=1}^{m}P_{ij}\,x_j(t-\tau)=0 \tag{3.5.4.13}$$

yazılır. Burada,

$$i,\ j=1,2,...,m \text{ için } P_{ij}(t)=p_{ij}\frac{e^{x_j(t-\tau)}-1}{x_j(t-\tau)} \text{ ve } \lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)=p_{ij} \tag{3.5.4.14}$$

yazılır. (3.5.4.13) ifadesinden $i=1,2,...,m$ olmak üzere

$$z_i'(t)+P_{ii}(t)z_i(t-\tau)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\left|P_{ij}(t)\right|z_j(t-\tau)\leq 0 \tag{3.5.4.15}$$

yazılır. Burada, $i=1,2,...,m$ için $\delta_i=\operatorname{sgn}x_i(t)$ ve $z_i(t)=\delta_i\,x_i(t)$.

$$(\mu-\varepsilon)\tau e>1 \tag{3.5.4.16}$$

sağlanacak şekilde $\varepsilon>0$ seçilsin. (3.5.4.7) ifadesinden bu mümkündür. (3.5.4.15) dikey olarak toplanırsa

$$v'(t)+\sum_{j=1}^{m}\left[P_{jj}(t)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\left|P_{ij}(t)\right|\right]z_j(t-\tau)\leq 0$$

elde edilir. (3.5.4.14), (3.5.4.6) ve (3.5.4.7) ifadeleri

$$v'(t)+(\mu-\varepsilon)v(t-\tau)\leq 0 \tag{3.5.4.17}$$

yi gerektirir. Sonuç 3.2.4.1 ve Teorem 3.2.2.3 ifadesinde (3.5.4.16) eşitsizliğinden (3.5.4.17) nihayetinde pozitif çözüme sahip olmasın. Bu bir çelişkidir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 3.5.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.4.1) sistemi ve $i,\ j=1,2,...,n$ için $\tau>0$ ve $b_{ij}>0$ olsun. (3.5.4.3) tüm bileşenleri pozitif olan $N^*=\left[N_1^*,N_2^*,...,N_m^*\right]$ çözümüne sahip olsun.

$$\rho\,\tau\,e<1 \tag{3.5.4.18}$$

sağlasın. Burada, ρ, $b_{ij}N_j^*$ nin spectral yarıçapıdır. Bu halde, (3.5.4.1) ifadesi N^* civarında salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

$$t \ge t_0 \text{ için } x'(t) + P(t)\, f\left(x(t-\tau)\right) = 0 \tag{3.5.4.19}$$

$$y'(t) + Q\, y(t-\tau) = 0 \tag{3.5.4.20}$$

sistemini ve

$$z'(t) + P(t)\, f\left(z(t-\tau)\right) \le 0 \tag{3.5.4.21}$$

eşitsizliğini ele alalım. Burada, $\tau > 0$, $P(t)$ bileşenleri pozitif ve sürekli $m \times m$ tipinde bir matris, Q ise bileşenleri pozitif ve sabit $m \times m$ tipinde bir matris ve $f = \left[f_1, f_2, ..., f_m\right]^T$ azalmayan bir dizi öyle ki

$$\left.\begin{array}{l} i = 1, 2, ..., m \text{ için } u_i\ f_i\left(u_1, u_2, ..., u_m\right) > 0, \\ u_i \ne 0 \text{ herhangi } u = \left[u_1, u_2, ..., u_m\right]^T \text{ ve } f \in C\left[R^m, R^m\right] \end{array}\right\}. \tag{3.5.4.22}$$

Lemma 3.5.4.1. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.4.22) geçerli $\tau > 0$, $P(t) > 0$ ve sürekli, (3.5.4.21) eşitsizliği nihayetinde pozitif çözüme sahip olsun. Bu halde, buna karşılık gelen (3.5.4.19) nihayetinde bir pozitif çözüme sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$z(t)$ nihayetinde (3.5.4.21) eşitsizliğinin pozitif bir çözümü ve $T \ge t_0$ öyle ki $t \ge T - \tau$ için $z(t) > 0$. Bu halde, $t \ge T$ için $z'(t) < 0$ ve $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = L$ var, sonlu ve negatif olmayan bir vektördür. Sonuç olarak, (3.5.4.21) T den ∞ a integre edilirse

$$t \ge T \text{ için } L + \int_t^\infty P(s)\, f\left(z(s-\tau)\right) ds \le z(t) \tag{3.5.4.23}$$

elde edilir. W, $t \ge T$ için $L \le w(t) \le z(t)$ sağlanacak şekilde $[T, \infty)$ aralığı üzerinde artmayan ve negatif olmayan w fonksiyonlarının bir kümesi olsun. Her $w \in W$ için

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} w(t), & \mathrm{t} \ge \mathrm{T} \\ w(T) + z(t) - z(T), & T - \tau \le t < T \end{cases}$$

olsun. W üzerinde S dönüşümü tanımlayalım. $t \ge T$ için

$$(Sw)(t) = L + \int_t^\infty P(s)\, f\left(\tilde{w}(s-\tau)\right) ds.$$

(3.5.4.23) ifadesinden $S: W \to W$ ve Knaster – Tarski Fixed Nokta Teoreminin tüm şartları sağlanmıştır. Dolayısıyla, $x \in W$ vardır öyle ki $Sx = x$. Ayrıca (3.5.4.19) denklemini sağlar ve nihayetinde $x(t) > 0$ olduğunu gösterirsek ispat biter.

$T - \tau \le t < T$ için $x(t) = x(T) + z(t) - z(T) > 0$ yazılır. Çelişki oluşturmak için $t^* \ge T$ için öyle ki $x(t^*) = 0$ ise $T - \tau \le t < t^*$ için $x(t) > 0$ yazılır. Bu halde, (3.5.4.19) ve (3.5.4.22) den $x'(t^*) = -P(t^*) f\left(x\left(t^* - \tau\right)\right) < 0$. Bu bir $x \in S$ gerçeğine çelişkidir. Sonuç olarak, $t \ge T$ için $x(t) \ge 0$. İspat tamamlanır.

Lemma 3.5.4.2. (Györi ve Ladas, 1991)

$q\,\tau\,e < 1$ olmak üzere $q, \tau \in (0, \infty)$ olsun. Bu halde, $\mu + q\,e^{-\mu\tau} = 0$ negatif bir köke sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$F(\mu) = \mu + q\,e^{-\mu\tau}$ olsun ve

$$F(0)\,F\left(-\frac{1}{\tau}\right) = q\left(-\frac{1}{\tau} + q\,e\right) = q\,\frac{q\,\tau\,e - 1}{\tau} < 0$$

ifadesinden F negatif köke sahip olduğu görülür.

Lemma 3.5.4.3. (Györi ve Ladas, 1991)

A, $m \times m$ tipinde bir matris ve $\tau, \lambda_0, \mu_0 \in R$ ve $\xi \in R^n$ öyle ki $A\xi = \lambda_0\,\xi$ ve $\mu_0 + \lambda_0\,e^{-\mu_0\tau} = 0$ olsun. Bu halde, $z(t) = e^{\mu_0 t}\,\xi$, $z'(t) + A\,z(t-\tau) = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

$$\begin{aligned} z'(t) + A\,z(t-\tau) = \mu_0\,e^{\mu_0 t}\,\xi + A\,e^{\mu_0(t-\tau)}\,\xi &= e^{\mu_0(t-\tau)}\left(A + \mu_0\,e^{\mu_0\tau}\,I\right)\xi \\ &= e^{\mu_0(t-\tau)}\left(A - \lambda_0\,I\right)\xi = 0 \end{aligned}.$$

Lemma 3.5.4.4. (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.4.19) sistemini ele alalım ve $P(t)$, $m \times m$ tipinde sürekli bir matris öyle ki

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = Q$$

burada, Q bileşenleri pozitif sabit olan bir matris ve öyle ki

$$\rho(Q)\tau e < 1 \tag{3.5.4.24}$$

sağlar. Burada, $\tau > 0$ ve $\rho(Q)$, Q nun spectral yarıçapıdır. Ayrıca, f , (3.5.4.22) yi sağlasın ve bir $\delta > 0$ vardır öyle ki ya

$$0 < u \leq \delta \text{ için } f(u) \leq u \tag{3.5.4.25}$$

ya da

$$-\delta \leq u < 0 \text{ için } f(u) \geq u \tag{3.5.4.26}$$

sağlansın. Bu halde, (3.5.4.19) sistemi salınım yapmayan bir çözüme sahiptir.

İspat: (Györi ve Ladas, 1991)

(3.5.4.25) geçerli olsun ve (3.5.4.19) nihayetinde pozitif bir çözüme sahip olduğu gösterilecektir. Burada (3.5.4.26) olsun. $v(t) = -x(t)$ alarak benzer bir argümanla (3.5.4.19) nihayetinde negatif çözüme sahiptir.

Bunu yapabilmek için $\varepsilon > 0$ ve $T \geq t_0$ öyle ki $\rho(Q(\varepsilon))\tau e < 1$ ve $t \geq T$ için $0 \leq P(t) \leq Q(\varepsilon)$ olsun. Burada $Q(\varepsilon)$, $m \times m$ tipinde ij bileşenleri $q_{ij} + \varepsilon$ ve $\rho(Q(\varepsilon))$ ise $Q(\varepsilon)$ nun spectral yarıçapını gösterir. $\rho(Q(\varepsilon))$ eigen değerine karşılık gelen $Q(\varepsilon)$ nun pozitif bir öz vektörü $Q(\varepsilon)$ olsun. $Q(\varepsilon)$ pozitif bir matris ve $\rho(Q(\varepsilon))$ en büyük öz vektör olduğundan spectral yarıçaptır. $\mu_0(\varepsilon)$, $\mu + \rho(Q(\varepsilon))e^{-\mu\tau} = 0$ denkleminin negatif bir kökü olduğu Lemma 3.5.4.2 den garanti edilir. $z(t) = e^{\mu_0(\varepsilon)t}\xi$, Lemma 3.5.4.3 ten $z'(t) + Q(\varepsilon)z(t-\tau) = 0$ denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu halde,

$$0 = z'(t) + Q(\varepsilon)z(t-\tau) \geq z'(t) + P(t)z(t-\tau) \geq z'(t) + P(t)f(z(t-\tau)).$$

Dolayısıyla Lemma 3.5.4.1 den (3.5.4.19) sistemi nihayetinde pozitif bir çözüme sahiptir.

Teorem 3.5.4.2 nin İspatı: (Györi ve Ladas, 1991)

$i=1,2,...,m$ ve $t \geq 0$ için $N_i(t)=N_i^* e^{x_i(t)}$ transformasyonu (3.5.4.1) denklemini (3.5.4.5) denklemine indirger. Diğer taraftan, $N(t)$, N^* civarında salınımlı olmaması için gerek ve yeter şart $x(t)$ nin $[0,0,...,0]^T$ civarında salınımlı olmamasıdır. Böylece, (3.5.4.5) sisteminin salınım yapmayan bir çözüme sahip olmadığını göstermek yeterlidir.

Her $u=[u_1,u_2,...,u_m]^T$ için $f(u)=[e^{u_1}-1, e^{u_2}-1,..., e^{u_m}-1]^T$ olsun.

f azalmayan bir dizidir ve $u_i \neq 0$ için $(e^{u_i}-1)u_i > 0$ ve $u<0$ için $e^u-1 \geq u$ ifadelerinden f, (3.5.4.22) ve (3.5.4.26) şartlarını sağlar. Lemma 3.5.4.4, (3.5.4.5) denklemine uygulanırsa (3.5.4.5) denklemi salınım yapmayan bir çözüme sahip olur. İspat biter.

3.6 Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin İçinde Tek Tür Dinamiği

Gecikmeler (zaman gecikmeleri) biyolojik modellerde yeniden doğma zamanı, olgunlaşma periyotları, beslenme zamanı, reaksiyon zamanları vb. gibi parametreleri temsil ettiği birçok araştırmacı tarafindan çalışılmıştır. Bu konuda, daha genel olarak gecikmeli biyolojik sistemlerin tartışması için (Cushing, 1977; Gopalsamy, 1992; Kuang, 1993; MacDonald, 1978). Genel olarak gecikmeli diferansiyel denklemler bayağı diferansiyel denklemlerden komplike dinamikleri sergiler. Çünkü zaman gecikmesi kararlı denge noktalarının karasız olmasına ve nüfusun dalgalanmasına (düzensiz hareket etmesine) sebebiyet verir. Bu bölümde tek türlü canlıların çalışmasında oluşan çeşitli gecikmeli diferansiyel denklemler ele alınacaktır. $x(t)$, t zamandaki popilasyon büyüklüğü, b ve d sırasıyla doğum ve ölüm oranları, $\Delta t > 0$ olmak üzere $[t, t+\Delta t]$ aralığı üzerinde popilasyon modeli

$$x(t+\Delta t)-x(t)=b\,x(t)\Delta t - d\,x(t)\Delta t$$

veya eşitliğin her iki tarafi Δt ye bölünürse

$$\frac{dx}{dt}=b\,x-d\,x=r\,x. \tag{3.6.0.1}$$

Burada, $r=b-d$ popilasyonun esas gelişim oranıdır. $x(0)=x_0$ ise

$$x(t) = x_0\, e^{r\,t}. \tag{3.6.0.2}$$

Bu popilasyonun (3.6.0.2) exponansiyel olduğu bilgilerimizin dahilindedir (Maltus, 1798). Eğer kaynaklar sınırlı ise (Verhulst, 1836)

$$\frac{dx}{dt} = r\,x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \tag{3.6.0.3}$$

denklemini ele aldı. Burada, $r > 0$ esas gelişim oranı ve $K > 0$ popilasyon taşıma kapasitesidir. (3.6.0.3) denkleminde x küçük ise popilasyon (3.6.0.1) Malthus (1798) modelindeki büyür. Sınırlı kaynakların olması halinde birbirleriyle mücadele eden canlıların fazla olması halinde (x büyük) $x(0) = x_0$ ise (3.6.0.3) denkleminin çözümü

$$x(t) = \frac{x_0\,K}{x_0 - (x_0 - K)e^{-r\,t}} \tag{3.6.0.4}$$

ile verilir. Eğer $x_0 < K$ ise nüfus büyür ve $t \to \infty$ için K ya yaklaşlaşır. Eğer $x_0 > K$ ise nüfus azalarak $t \to \infty$ için tekrar K ya yaklaşır. Eğer $x_0 = K$ ise sonlu zamanda $x = K$. Gerçekten $x = K$ (3.6.0.3) denkleminin denge noktasıdır. (3.6.0.3) lojistik denklemi $x = K$ pozitif denge noktası global olarak stabildir. Yani, $x(0) = x_0$ olmak üzere (3.6.0.3) denkleminin çözümü $\lim_{t \to \infty} x(t) = K$.

3.6.1 Hutchinson denklemi

Kuluçkaya yatırılan büyük sayıda yumurtalar muhtemelen hayvanlar yumurtadan çıktığında tüketilmemiş yiyeceklerin yoğunluğu tarafından belirlenemez. Fakat bazı zamanlarda onlar geniş bir torbanın içine geçmeden önce yumurtalar şekillendiğinden yiyecek miktarının olması halinde mevcut yiyeceğin olmasıyla belirlenir. Bu zaman belirlemesi ve kuluçkadan yeni çıkmış hayvanların arasında kültürdeki diğer dafinanın çıkan yavrular diğerlerinden bağımsızdır. Gerçekten radikal bir durumda tüm $K - x$ boş depolama sahaları yeni üretim durmadan önce doldurulabilir. (Hutchinson, 1948) kuluçkaya yatırılan yumurtalar çıkmadan önce yumurtaların şekli çıkmadan önceki τ birimin oluştuğunu kabul ederek daha gerçekçi olan

$$\frac{dx}{dt} = r\,x(t)\left[1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right] \qquad (3.6.1.1)$$

lojistik denklemini elde aldı. Burada, r ve K yukarıda verilen r ve K dır. τ pozitif bir sabittir. (Büyüyen türler örneğin, Dafina kuluçkaya yatırdığı bir yumurtanın olgunlaşabilmesi için bir τ zamanına ihtiyaç duyulur. (Hutchinson, 1948))

3.6.1.1. Stabilite ve dallanma

(3.6.1.1) denkleminin başlangıç değeri $x(\theta) = \phi(\theta) > 0$, $\theta \in [-\tau, 0]$. Burada, ϕ $[-\tau, 0]$ aralığı üzerinde süreklidir. (3.6.1.1) denkleminin $x = x^*$ denge noktasının kararlılığından kasıt herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ var öyle ki $[-\tau, 0]$ aralığı üzerinde $\left|\phi(t) - x^*\right| \le \delta$ ifadesi $[-\tau, 0]$ aralığı üzerinde ϕ başlangıç değeri ile birlikte (3.6.1.1)denkleminin tüm çözümleri tüm $t \ge 0$ için $\left|x(t) - x^*\right| < \varepsilon$. Eğer ek olarak $\delta_0 > 0$ vardır öyle ki $[-\tau, 0]$ aralığı üzerinde $\left|\phi(t) - x^*\right| \le \delta_0$ ifadesi $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$ olmasını gerektiriyorsa x^* asimtotik olarak kararlıdır.

(3.6.1.1) denklemi $x = 0$ ve $x = K$ denge noktalarına sahip olduğu bilinmektedir. $x = 0$ civarında $\frac{dx}{dt} = r\,x$ dolayısıyla çözüm exponansiyel olup $x = 0$ kararlı değildir. Bunun için $x = K$ denge noktasını ele alalım. $X = x - K$ olsun. Bu halde

$$\frac{dX}{dt} = -r\,X(t-\tau) - \frac{r}{K}\,X(t)\,X(t-\tau).$$

Bu denklemin linerize olmuş formu

$$\frac{dX}{dt} = -r\,X(t-\tau) \qquad (3.6.1.1.1)$$

ile verilir. Çözümler c sabit olmak üzere $X(t) = c\,e^{\lambda t}$ biçimindedir. Burada, λ eigen değerleri

$$\lambda + r\,e^{-\lambda\tau} = 0 \qquad (3.6.1.1.2)$$

karakteristik denkleminin kökleridir. Linerazisyon teorisinden (3.6.1.1.2) denkleminin tüm eigen değerlerinin reel kısmı negatif ise $x = K$ noktasında asimtotik olarak kararlıdır. Aşağıdaki teoremin ispatı Önerme 3.1.2.1 ifadesine bakılabilir.

Teorem 3.6.1.1.1: (Arino ve ark., 2002)

(i) $0 \le r\,\tau < \frac{\pi}{2}$ ise (3.6.1.1) denkleminin $x = K$ pozitif denge noktası asimtotik denge noktasına sahiptir.

(ii) $r\,\tau > \frac{\pi}{2}$ ise $x = K$ kararlı değildir.

(iii) Eğer $r\,\tau = \frac{\pi}{2}$ ise $x = K$ Hopf bifurkasyonu (dallanması) oluşur. Yani, periyodik çözümler $x = K$ noktasında bifurkasyon (dallanma) oluşturur. $r\,\tau > \frac{\pi}{2}$ için periyodik çözüm mevcut ve kararlıdır (stabil).

3.6.1.2 Wright hipotezi

$$y(t) = -1 + \frac{x(t)}{K}$$

olmak üzere (3.6.1.1) Hutchinson denklemi

$$\frac{dy}{dt} = -\,r\; y(t-\tau)\left[1 + y(t)\right]$$

formatında yazılır. $t = \tau\,\bar{t}$, $\bar{y}(\bar{t}) = y(\tau\,\bar{t})$ dönüşümü altında

$$\frac{d}{dt}\,\bar{y}(\bar{t}) = -\,r\,\tau\;\bar{y}(\bar{t}-1)\left[1 + \bar{y}(\bar{t})\right]$$

denklemi elde edilir. $r\,\tau = \alpha$ denir ve çizgiler ignore edilirse

$$\frac{dy}{dt} = -\,\alpha\; y(t-1)\left[1 + y(t)\right]. \qquad (3.6.1.2.1)$$

Teorem 3.6.1.1.1 gereğince $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ise (3.6.1.2.1) denkleminin sıfır çözümü asimtotik olarak kararlı ve $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ise kararsızıdır. (Wright, 1955) te $\alpha < \frac{3}{2}$ ise

(3.6.1.2.1) denkleminin sıfır çözümünün global olarak kararlı olduğunu ifade etmiştir. Wright $\alpha < \frac{\pi}{2}$ olması halinde (3.6.1.2.1) denkleminin sıfır civarında salınımlı olduğu hipotezini ortaya atmıştır. Bu hipotez hala çözülememiştir. (3.6.1.2.1) denkleminin tüm çözümleri $\alpha > \frac{1}{e}$ ise salınımllı ve $\alpha < \frac{1}{e}$ ise salınımlı değildir. (Kakutani ve Markus, 1958). $\alpha > \frac{\pi}{2}$ için global olarak periyodik çözümlerin varlığı çalışılmıştır (Jones, 1962a; Jones, 1962b). Sabit olmayan ve periyodik çözümlerin varlığı için (Hadeler ve Tomiuk, 1977; Hale ve Verduyn Lunel, 1993; Kaplan ve York, 1975; Naussbaum, 1974; Walter, 1975; Kuang, 1993… vb).

(3.6.1.2.1) denkleminin $\alpha = \alpha(t)$ pozitif ve sürekli olması hali araştırılmıştır ve tüm $t \geq 0$ için

$$\alpha(t) \leq \alpha_0 < \frac{3}{2} \tag{3.6.1.2.2}$$

sağlanacak şekilde (3.6.1.2.1) denkleminin sıfır çözümünün düzgün olarak kararlı olduğu ifade edilmiştir. (Sugie, 1992). Bu koşulun geliştirilmiş hali $t \geq 1$

$$\int_{t-1}^{t} \alpha(s)\, ds \leq \alpha_0 < \frac{3}{2} \tag{3.6.1.2.3}$$

(Chen ve arkadaşları, 1995). (3.6.1.2.2) ve (3.6.1.2.3) kararlılık şartları literatürde $\frac{3}{2}$ stabilite kriteri olarak bilinir. Daha fazla bilgi için (Kuan, 1993; Yu, 1996).

3.6.1.3. Dominas (Baskınlık)

$$\frac{dx}{dt} = r\, x(t)\left[1 - a_1\, x(t) - a_2\, x(t-\tau)\right] \tag{3.6.1.3.1}$$

ayrık gecikmeli diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, a_1 ve a_2 pozitif sabitlerdir. Pozitif denge noktası $x^* = \frac{1}{a_1 + a_2}$. Gecikmenin olması halinde x^* noktası stabil değildir.

Teorem 3.6.1.3.1: (Arino ve ark., 2002)

(i) Eğer $a_1 \geq a_2$ ise $x^* = \dfrac{1}{a_1 + a_2}$ denge noktası tüm $\tau \geq 0$ için asimtotik olarak kararlıdır.

(ii) Eğer $a_1 < a_2$ ise $\tau_0 = \dfrac{a_1 + a_2}{r\sqrt{a_2^{\,2} - a_1^{\,2}}} \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{a_2^{\,2} - a_1^{\,2}}}{a_2}\right)$ ile ifade edilen bir τ_0 kritik değeri vardır öyle ki $\tau \in [0, \tau_0]$ aralığında $x^* = \dfrac{1}{a_1 + a_2}$ asimtotik olarak kararlı $\tau > \tau_0$ için kararsız, $\tau = \tau_0$ olduğundan x^* noktasında Hopf bifurkasyonu oluşur.

Teorem 3.6.1.3.2: (Arino ve ark., 2002)

$a_1 > a_2$ ise (3.6.1.3.1) denklemi $x^* = \dfrac{1}{a_1 + a_2}$ denge noktası global olarak kararlıdır.

İspat: (Arino ve ark., 2002)

$X : [-\tau, r) \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon ve $\theta \in [-\tau, 0]$ için $x_t(\theta) = x(t + \theta)$.

$$V(x(t), x_t(\theta)) = x - x^* - x^* \ln \frac{x}{x^*} + \xi \int_{-\tau}^{\theta} [x_t(\theta)]^2 \, d\theta \qquad (3.6.1.3.2)$$

Lyapunov fonksiyonunu ele alalım. Burada, $\xi > 0$ tanımlanması gererken sabittir. (3.6.1.3.1) denklemini

$$\frac{dx}{dt} = r\, x(t)\left[-a_1 \left(x(t) - x^*\right) - a_2 \left(x(t-\tau) - x^*\right)\right] \qquad (3.6.1.3.3)$$

formatında yazalım. Bu halde,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.6.1.3.3)} = \frac{dx}{dt}\frac{x - x^*}{x} + \xi\left[\left(x(t) - x^*\right)^2 - \left(x(t-\tau) - x^*\right)^2\right]$$

$$= -\left\{(r\, a_1 - \xi)\left[x(t) - x^*\right]^2 + r\, a_2 \left[x(t) - x^*\right]\left[x(t-\tau) - x^*\right] + \xi\left[x(t-\tau) - x^*\right]^2\right\}$$

elde edilir. Eğer $a_1 > a_2$ ise $\xi = \dfrac{1}{2} r\, a_1$ olarak seçilirse $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{(3.6.1.3.3)} < 0$.

3.6.2 Düzeltilmiş (Geliştirilmiş) modeller

Hutchinson denkleminin değiştirilmiş versiyonu için (Gurney, 1980).

3.6.2.1. Nicholson sinek modeli

$$\frac{dx}{dt} = P\, x(t-\tau)\exp\left[-\frac{x(t-\tau)}{x_0}\right] - \delta\, x(t) \tag{3.6.2.1.1}$$

Nichlson'nın sinekler (Blowflies) modeli olarak bilinir (Nisbet ve Gurney, 1982; Kulenovic ve ark., 1992; So ve Yu, 1994; Smith, 1995; Györi ve Trofimchuk, 2002, … vb).

3.6.2.2. Houseflies (Ev Sinekleri) modeli

$$\frac{dx}{dt} = -d\, x(t) + b\, x(t-\tau)\left[k - b\, z\, x(t-\tau)\right] \tag{3.6.2.2.1}$$

denklemi (Taylor ve Sokal, 1976) tarafindan ele alınmıştır. Burada, $x(t)$ yetişkinlerin (veya erişkinlerin) sayısını, $d > 0$ sayısı erişkinlerin ölüm oranı $\tau > 0$ gecikmesi ise yetişkinlerin yumurtalamadan çıkış ve yumurtalama arasındaki gelişim periyodunun uzunluğu, mevcut yumurtaların sayısı (kuluçkaya yatırılmış yumurta sayısı) böylece par yetişkinler için $b > 0$ mevcut yumurta sayısı olmak üzere $t-\tau$ zamanında yeni yumurtaların sayısı $b\, x(t-\tau)$. $k > 0$ sayısı ise hayatta kalan maksimum yetişkin (yumurta yetişkin) oranı ve eklenen her yeni yumurta vasıtasıyla hayatta kalanlardaki azalma z ise $k - b\, z\, x(t-\tau)$ yumurta – yetişkin hayatta kalma oranını temsil eder. $\tau = 0$ ise bildik lojistik denklemi elde edilir. Nicholson modelinin tersine periyodik olmayan salınımlar gözlemlenemediği söylenmektedir.

3.6.2.3. Recruitment (Düzeltilmiş, Geliştirilmiş) modeli

$$\frac{dx}{dt} = R\,(x(t-\tau) - D\,x(t)) \qquad (3.6.3.3.1)$$

denklemi zaman gecikmeli genel olarak tek türlü popilasyon denklemin modelini modelize eder. (Blythe, 1982). R iyileştirme oranı, D ise nüfusu x olan yetişkin popilasyonun ölüm oranı, $\tau > 0$ olgunlaşma periyodudur. Bu modelin lineer analizi için (Brauer ve Castillo – Chavez, 2001). (3.6.3.3.1) denklemi bazı özel R fonksiyonları için kompleks dinamik davranışlar sergileyebilir. Bu durum için (Beddington ve May, 1975; Rodriguez, 1998; Freedman ve Gopalsamy, 1986; Cao ve Gard,1995; Karakostas ve ark., 1992) çalışmalarına bakılabilir.

3.6.3. Allee effect (Ale etkisi)

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\left[a + b\,x(t-\tau) - c\,x^2(t-\tau)\right] \qquad (3.6.3.1)$$

denklemi tek türlü popilasyon denklemini modelize eden Allee etkisidir (Allee, 1931; Ladas, 1990). Burada, $a > 0, c > 0, \tau \geq 0$ ve b reel sayılardır. (3.6.4.1) denklemi $x^* = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 4\,a\,c}}{2\,c}$ pozitif denge noktasına sahiptir. Belli sınırlamalar altında bu pozitif denge noktası global olarak çekicidir (atraktifdir) (Gopalsamy ve Ladas, 1990). Eğer gecikme yeterince büyükse bu Alle denkleminin çözümleri bu pozitif denge noktası civarında salınımlıdır (Cao ve Gard, 1995).

Teorem 3.6.3.1: (Liz ve ark., 2003)

Eğer

$$\tau\,x^*\left(2\,c\,x^* - b\right) \leq \frac{3}{2}$$

ise (3.6.4.1) denkleminin tüm pozitif çözümleri x^* civarında atraktiftir. (3.6.4.1) denkleminin genelleştirilmiş versiyonu p, q pozitif olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\left[a + b\,x^p(t-\tau) - c\,x^q(t-\tau)\right] \qquad (3.6.3.2)$$

(Ladas ve Qian, 1994) tarafından verilmiştir.

3.6.4. Sınırlı yiyecek modeli

Bu modeller için (Hallam ve DeLuna, 1984; Gopalsamy ve ark. ,1988) çalışmalarına bakılabilir.

$$\frac{dx}{dy} = r\,x(t)\left[\frac{K - x(t-\tau)}{K + r\,c\,x(t-\tau)}\right] \tag{3.6.4.1}$$

denklemi ve genelleştirilmiş versiyonları için (Gopalsamy ve ark., 1990; Grove ve ark., 1993; So ve Yu, 1995; Qian, 1996) çalışmalarına bakılabilir

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Ülkemizde bu yönde çalışmak isteyenler için Türkçe kaynak bulunmadığından bu tezde gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınım teorisi ile ilgili literatürde bilinen kaynaklar irdelenerek Türkçe' ye çevrilmiştir.

Dolayısıyla bu tez gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınımla ilgili çalışmak isteyenler için iyi bir katalog oluşturacağı kanaatine varılmıştır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Çeşitli gecikmeli diferansiyel denklem tiplerinin salınımı için gerekli ve yeterli şartlar verildi. Ayrıca, biyolojik sistemlerde modellemesi yapılmış olan gecikmeli diferansiyel denklemlerde salınımla ilgili problemler ele alınmıştır.

Ülkemizde bu konuyu çalışmak isteyenler için temel oluşturucak bu tezde çalışılmış veya çalışılmamış biyolojik modellemeler irdelenerek içerik geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

ALLEE, W.C., 1931. Animal Aggregations: A Study in General Sociology, Chicago University Press, Chicago.

BEDDINGTON, J.R. and MAY, R.M., 1975. Time delays are not necessarily destabilizing. Math. Biosci., 27: 109–117.

BLYTHE, S.P., NISBET, R.M. and GURNEY, W.S.C., 1982. Instability and complex dynamic behaviour in population models with long time delays. Theor. Pop. Biol., 22: 147-176.

BRAUER, F. and CASTILLO-CHAVEZ, C., 2001. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Springer.

CAO, Y. and GARD, T.C., 1995. Ultimate bounds and global asymptotic stability for differential delay equations. Rocky Mountain J. Math, 25: 119-131.

CHEN, M.-P., YU, J.S., QIAN, X.Z. and WANG, Z.C., 1995. On the stability of a delay differential population model. Nonlinear Analysis - TMA, 25: 187–195.

CUSHING, J.M., 1977. Integrodifferential equations and delay models in population dynamics. Lecture Notes in Biomathematics, 20, Springer- Verlag, Heidelberg.

ERBE, L. H., KONG, Q. and ZHANG, B. G., 1994. Oscillation Theory for Functional Differential Equations. Marcell Dekker, Inc., New York.

FREEDMAN, H.I. and GOPALSAMY, K., 1986. Global stability in time-delayed single-species Dynamics. Bull. Math. Biol., 48: 485-492.

FINIZIO, N., and LADAS, G., 1982. An introduction to differential equations. Wadsworth Publishing, Belmont, California.

GOPALSAMY, K., 1992. Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Kluwer Academic, Boston.

GOPALSAMY, K. and LADAS, G., 1990. On the oscillation and asymptotic behavior of $N'(t) = N(t)\left[a + b\,N(t-\tau) - c\,N^2(t-\tau)\right]$. Quart. Appl. Math, 48: 433-440.

GOPALSAMY, K., KULENOVIC, M.R.S., and LADAS, G., 1988. Time lags in a “food-limited” population model. Appl. Anal, 31: 225-237.

GOPALSAMY, K., KULENOVIC, M.R.S., and LADAS, G., 1990. Enrivonmental periodicity and time delays in a “food-limited” population model. J. Math. Anal. Appl., 147: 545-555.

GROVE, E.A., LADAS, G. and QIAN, C., 1993. Global attractivity in a “foodlimited” population model. Dynamic Systems Appl, 2: 243-249.

GURNEY, W.S.C., BLYTHE, S.P. and NISBET, R.M., 1980. Nicholson’s blowflies revisited. Nature, 287: 17-21.

GYORI, I. and LADAS, G., 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford.

GYÖRI, I. and TROFIMCHUK, S. I., 2002. On existence of rapidly oscillatory solutions in the Nicholson blowflies equation. Nonlinear Analysis – TMA, 48: 1033-1042.

HADELER, K.P. and TOMIUK, J., 1977. Periodic solutions of difference differential equations. ArcH. Rat. and Anal., 1: 87–95.

HALE, J. K. and VERDUYN LUNEL, S. M., 1993. Introduction to Functional Differential Equations. Springer, New York.

HALLAM, T.G. and DEJUNA, J.T., 1984. Effects of toxicants on populations: A qualitative approach III. Environmental and food chain pathways. J. Theor. Biol., 109: 411-429.

HASSARD, B.D., KAZARINOFF, N.D. and WAN, Y.H., 1981. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. London Mathematical Society Lecture Note Series 41, Cambridge University Press, Cambridge.

HUTCHINSON, G.E., 1948. Circular Cause Systems İn Ecology. Ann. N. Y. Acad. Sci., 50: 221–246.

JONES, G.S., 1962b. The existence of periodic solutions of $f'(t) = -\alpha\, f(x-1)[1+f(x)]$. J. Math. Anal. Appl., 5: 435–450.

JONES, G.S., 1962a. On the nonlinear differential-difference equation $f'(t) = -\alpha\, f(x-1)[1+f(x)]$. J. Math. Anal. Appl., 4: 440–469.

KAKUTANI, S. and MARKUS, L., 1958. On The Non-Linear Differencedifferential Equation $y'(t) = [A - B\, y(t-T)]\, y(t)$, İn "Contributions To The Theory Of Nonlinear Oscillations", Vol. 4, Ed. S. Lefschetz, Princeton University Press, New Jersey, 1-18.

KAPLAN, J.L. and. YORKE, J.A., 1975. On the stability of a periodic solution of a differential delay equation. SIAM J. Math. Anal., 6: 268-282.

KARAKOSTAS, G., PHILOS, Ch.G. and SFICAS, Y.G., 1992. Stable steady state of some population models. J. Dynamics Differential Equations, 4: 161-190.

KUANG, Y., 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Academic Press, New York.

KULENOVIC, M.R.S., LADAS, G. and SFICAS, Y.G., 1992. Global attractivity in Nicholson's blowflies. Appl. Anal., 43: 109-124.

LADAS, G. and QIAN, C., 1994. Oscillation and global stability in a delay logistic equation. Dynamics and Stability of Systems, 9: 153- 162.

LIZ, E., PINTO, M., ROBLEDO, G., TROFIMCHUK, S. and TKACHENKO, V., 2003. Wright type delay differential equations with negative Schwarzian. Discrete Contin. Dynam. Systems, 9: 309–321.

MACDONALD, N., 1978. Time Lags in Biological Models. Lecture Notes in Biomathematics 27 Springer-Verlag, Heidelberg.

NICHOLSON, A.J., 1954. An outline of the dynamics of animal populations. Austral. J. Zoo., 2: 9-65.

NISBET, R.M. and GURNEY, W.S.C., 1982. Modelling Fluctuating Populations. John Wiley and Sons.

PIELOU, E. C., 1969. An introduction to mathematical ecology. Gordon and Breach, New York.

QIAN, C., 1996. Global attractivity in nonlinear delay differential equations. J. Math. Anal. Appl., 197: 529-547.

SMITH, H.L., 1995. Monotone Dynamical Systems, An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems. Mathematical Surveys and Monographs 41, Amer. Math. Soc., Providence.

SMITH, H.L., 2010. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. Springer, London.

SO, J.W.-H. and YU, J.S., 1994. Global attractivity and uniform persistence in Nicholson's blowfies. Differential Equations Dynamical Systems, 2: 11-18.

SO, J.W.-H. and YU, J.S., 1995. On The Uniform Stability For A "Foodlimited"Population Model With Time Delay. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 125A: 991-1002.

SUGIE, J., 1992. On The Stability For A Population Growth Equation With Time Delay. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 120A: 179-184.

TAYLOR, C.E. and SOKAL, R.R., 1976. Oscillations in housefly population sizes due to time lags. Ecology, 57: 1060-1067.

THOMAS, E., 2008. Applied Delay Differantial Equations, Springer.

VERHULST, F.F., 1836. Notice sur la loi que la population suit dans son acroissement. Corr. Math. Phys, 10: 113-121.

WALTHER, H.O., 1975. Existence of a non-constant periodic solution of a nonlinear autonomous functional differential equation representing the growth of a single species population. J. Math. Biol., 1: 227-240.

WRIGHT, E. M., 1955. A non-linear difference-differential equation. J. reine angew. Math., 194: 66–87.

WIDDER, D. V., 1971. An introduction to transform theory. Academic Press, New York.

YU, J.S., 1996. Global attractivity of the zero solution of a class of functional-differential equations and its applications. Sci. China Ser., A 39: 225-237.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Neriman AVCI
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Adıyaman\ Çelikhan - 10.11.1990
Telefon	**:** 05394175628
e-mail	**:** neriman772@gmail.com

EĞİTİM

Derece: Adı, İlçe, İl	**Bitirme Yılı**
Lise: Şanlı Urfa Kız Lisesi, Haliliye, ŞANLI URFA	2007
Üniversite: Harran Üniversitesi, Haliliye, ŞANLI URFA	2012
Yüksek Lisans: Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakütesi, Haliliye, ŞANLI URFA	2015

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015	MEB	Öğretmen