

**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TRANSFER MATRİSİ YÖNTEMİNİN NARİN KOLONLARIN STABİLİTE  
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

**Beyhan İPEKYÜZ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA**

**2016**

**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TRANSFER MATRİSİ YÖNTEMİNİN NARİN KOLONLARIN STABİLİTE  
PROBLEMLERİNE UYGULANMASI**

**Beyhan İPEKYÜZ**

**İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA  
2016**

Prof. Dr. M. Arif GÜREL danışmanlığında, Beyhan İPEKYÜZ'ün hazırladığı **“Transfer Matrisi Yönteminin Narin Kolonların Stabilité Problemlerine Uygulanması”** konulu bu çalışma 26.01.2016 tarihinde aşğıdaki jüri tarafından oy birliğı ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliğı Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Prof. Dr. Arif GÜREL .....

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Paki TURGUT .....

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Mahmut BİLGEHAN .....

**Bu Tezin İnşaat Mühendisliğı Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlediğini Onaylarım.**

**Prof. Dr. Sinan UYANIK**

**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	v
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Elastik Stabilite .....	3
1.2. Stabilitede Yöntemler .....	5
1.2.1. Dinamik yöntem .....	5
1.2.2. Statik yöntem .....	5
1.2.3. Enerji yöntemi .....	6
1.3. Elastik Çubukların Burkulması .....	6
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM .....	11
3.1. Transfer Matrisinin Elde Edilmesi .....	12
3.2. Transfer Matrisi Yönteminin Çeşitli Kolonlara Uygulanması ve Kolonların Burkulma Yüklerinin Belirlenmesi .....	17
3.2.1. Klasik mesnetli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi .....	18
3.2.1.1. İki ucu mafsallı kolonun burkulma yükünün belirlenmesi .....	18
3.2.1.2. Altta ankastre üstte serbest uçlu kolonun burkulma yükünün belirlenmesi .....	20
3.2.1.3. Altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolonun burkulma yükünün belirlenmesi .....	22
3.2.1.4. Altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolonun burkulma yükünün belirlenmesi .....	24
3.2.2. Elastik mesnetli kolon örneklerinde burkulma yükünün belirlenmesi .....	26
3.2.2.1. Altta ankastre üstte ötelenme yaylı kolonda burkulma yükünün belirlenmesi .....	27
3.2.2.2. Altta ankastre üstte dönme yaylı ve kayıcı mesnetli kolonda burkulma yükünün belirlenmesi .....	30
3.2.3. Değişken kesitli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi .....	32
3.2.3.1. Ani değişken kesitli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi .....	32
3.2.3.2. Sürekli değişken kesitli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi .....	37
3.2.4. Ara elastik mesnetli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi .....	38
3.2.5. Tek çatlaklı kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi .....	40
3.5. Çalışma Hakkında Genel İrdelemeler .....	43
4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER .....	44
KAYNAKLAR .....	45
ÖZGEÇMİŞ .....	47

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### TRANSFER MATRİSİ YÖNTEMİNİN NARİN KOLONLARIN STABİLİTE PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Beyhan İPEKYÜZ

Harran Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif GÜREL  
Yıl: 2016, Sayfa:52

Bu çalışmada Transfer Matrisi Yöntemiyle narin kolonların stabilite problemleri ele alınmıştır. Tezin ilk kısmında kolonlar için stabilite kavramından bahsedilmiş, ardından önceki çalışmalar verilmiştir. Daha sonra Transfer Matrisi Yöntemi anlatılmıştır. Klasik ve klasik olmayan tarzda mesnetli kolonların burkulma yükleri bu yöntemin uygulanmasıyla elde edilmiştir. Hesaplar neticesinde elde edilen sonuçlar Transfer Matrisi Yönteminin narin kolon burkulma problemleri gibi tek boyutlu mekanik problemlerin çözümü için oldukça elverişli bir yöntem olduğunu ortaya koymuştur. Böylece yöntemin geniş bir uygulama potansiyelinin olduğu görülmüştür. Tez çalışmasından elde edilen sonuçlar çalışmanın son bölümünde sunulmuştur.

**ANAHTAR KELİMELER:** narin kolon, stabilite, burkulma, Euler burkulma yükü, transfer matrisi yöntemi

## **ABSTRACT**

**MSc Thesis**

### **APPLICATION OF THE TRANSFER MATRIX METHOD TO THE STABILITY PROBLEMS OF SLENDER COLUMNS**

**Beyhan İPEKYÜZ**

**Harran University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Civil Engineering**

**Supervisor: Prof. Dr. M. Arif GÜREL  
Year: 2016, Page:52**

In this study, the stability problem of slender columns is investigated by using Transfer Matrix Method. In first section of the thesis, the concept of stability for the columns is mentioned and then previous studies has been given. Then, the Transfer Matrix Method has been explained. The buckling loads of classically and non-classically supported columns have been determined by the application of the method. Obtained results from calculations have shown that the Transfer Matrix Method is a very suitable method for solution of one dimensional mechanical problems, such as slender column buckling problems. Thus, it has been seen that the method has a wide application potential. Obtained results have been presented in the section of Conclusions.

**KEY WORDS:** slender column, stability, buckling, Euler buckling load, transfer matrix method

## TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezi, Prof. Dr. M. Arif GREL'in danışmanlığında tamamlanmıŐtır. Bu alıŐmanın hazırlanmasında öncelikle tm aŐamalarında desteğini esirgemeyen ve zamanını özveriyle bana ayıran çok kıymetli danıŐmanım Prof. Dr. M. Arif GÜREL'e, Yüksek Lisans tez savunmasına katılımlarından dolayı, jüri yeleri Doç. Dr. Paki TURGUT'a ve Doç. Dr. Mahmut BİLGEHAN'a Őükranlarımı sunarım. Ayrıca akademik hayatımda sürekli yanımda olan, maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen canım aileme teŐekkürü bir borç bilirim.



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa No</b>
Şekil 1.1. Burkulma deneyine ait bir örnek.....	2
Şekil 1.2. (a) Kararlı Denge (b) Farksız Denge ve (c) Kararsız Denge (Vable, 2012).....	4
Şekil 1.3. Eksenel yüklü basınç çubuğu ve burkulmuş hali (Erol, Şengel ve Özçelikörs, 2012) .....	5
Şekil 1.4. İki ucu mafsalı sabit mesnetlenmiş kolonun burkulmuş hali ve alt parçasında iç tesirlerinin serbest cisim diyagramı (Erol, Şengel ve Özçelikörs, 2012) .....	6
Şekil 1.5. Kritik burkulma yüküne maruz T cetveli ve uğradığı deformasyon ile SCD (Omurtag, 2012).....	7
Şekil 3.1. Euler basınç çubuklarının burkulma davranışları, burkulma boy çarpanları ve kolon uçlarındaki mesnet çeşitleri (TS648,1980) .....	12
Şekil 3.2. Farklı ve klasik uç mesnet şartlarına sahip kolonlar ve burkulma davranışları .....	17
Şekil 3.3. İki ucu mafsalı kolon ve burkulma davranışı .....	18
Şekil 3.4. Altta ankastre üstte serbest uçlu kolon ve burkulma davranışı .....	21
Şekil 3.5. Altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolon ve burkulma davranışı .....	23
Şekil 3.6. Altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolon ve burkulma davranışı .....	25
Şekil 3.7. Altta ankastre üstte ötelenme yaylı kolon .....	27
Şekil 3.8. Altta ankastre üstte dönme yaylı ve kayıcı mesnetli kolon .....	30
Şekil 3.9. Eksenel yük altında ani değişken kesitli kolon ve ara kesit geçiş yeri .....	33
Şekil 3.10. Eksenel yük altında ani değişken kesitli (n-1) tane ara kesit geçiş yerine sahip kolon. ...	36
Şekil 3.11. Eksenel yük altında sürekli değişken kesitli kolon ve elemanlara ayrılmış hali. ....	38
Şekil 3.12. Ara elastik ötelenme ve dönme mesnetli kolon .....	39
Şekil 3.13. İlerlemeyen tek kenar çatlağa sahip, dikdörtgen kesitli narin bir kolonun matematik modeli .....	41



## SİMGELER DİZİNİ

$a$	Çatlak Derinliği
$b,d$	Kolon Kesit Boyutları
$C$	Çatlaklı Kesit Esnekliği
$E$	Kolon Malzemesine Ait Elastisite Modülü
$f$	Sabit Bir Katsayı
$I, I_{min}$	Kolon Kesitinin Zayıf Ekseni Etrafındaki Atalet Momenti
$k$	Katsayı
$K$	Euler Burkulma Boyu Çarpanı
$K_t$	Çökme Yay Sabiti
$K_r$	Rotasyonel Yay Sabiti Yay Sabiti
$L$	Kolon Boyu
$l_b$	Kolona Ait Euler Burkulma Boyu
$M$	Eğilme Momenti
$P$	Kolona Gelen Eksenel Basınç Yüğü
$P_{kr}$	Euler Kritik Burkulma Yüğü
TS648	Çelik Yapıların Hesap Ve Yapım Kurallarına Ait Yönetmelik
$[T]$	Transfer Matrisi
$V$	Kesme Kuvveti
$y$	Ötelenme
$x,y$	Kolon Eksen Koordinatları
$\theta$	Eğim
$x_c$	Çatlağın Kolon Üst Ucuna Olan Mesafesi

## 1. GİRİŞ

Kolonlar birçok inşaat mühendisliği yapısında düşey ve yatay yüklerin taşınmasında kullanılan ana taşıyıcı elemanlardır. Bu elemanlar malzeme, yükseklik (boy), kesit şekli, kesitin yükseklik boyunca değişimi ve uç (mesnet) şartları gibi bakımlardan çok farklı şekillerde olabilirler. Betonarme binalarda çoğu zaman kısa kolonlar söz konusu olmakla birlikte, kolonların narin kolon olarak hesaplanması gereken durumlar da olmaktadır. Betonarme ve ön gerilmeli beton köprülerde narin ve kesiti yükseklik boyunca değişen kolonların inşası bazı durumlarda zorunlu bir hal almaktadır. Çelik yapılara gelince, bu yapılarda malzemenin yüksek mukavemeti dolayısıyla kesitler çoğu zaman küçük çıkmakta ve bu nedenle oldukça narin kolonlar söz konusu olabilmektedir.

Yapıların kolonlarına taşınan düşey yükler hemen her zaman basınç kuvveti özelliğindedir. Kolon gibi taşıyıcı elemanların başlıca görevi sistemlerine gelen bu basınç kuvvetlerini ve oluşturdukları basınç gerilmelerini temele aktarmaktır. Bu tür bir kuvvet etkisindeki kısa kolonlarda artan yük sonucu ezilme ortaya çıkmaktadır. Ancak narin bir kolon elemanı basınç yüküne maruz kaldığında, kolonun formunda değişiklikler meydana gelmekte ve taşıyabileceği yük kapasitesinde ani bir düşüş gözlenmektedir. Küçük yüklerde dikkate değer bir deformasyon görülmemekle birlikte yük kritik bir değere ulaştığında elemanda ani bir şekilde büyük deformasyonlar (özellikle yatay deformasyonlar) oluşmaktadır. Yani narin kolonlarda artan basınç yüklerinin etkisiyle malzeme taşıma gücüne ulaşmadan büyüyen ikinci mertebe etkiler (yanal yer değiştirmeler) sonucunda çubuk eksenine dik doğrultuda ani ve büyük sapmalar meydana gelmektedir. Kolon stabilitesini (kararlılığını) kaybederek, göçmektedir. Sonuçta eleman yük taşıyamaz duruma gelmektedir. Yanal yer değiştirmelerin kolon formunda oluşturduğu değişim kolonun burkulması olarak adlandırılmaktadır. Bu olaya da burkulma adı verilmektedir. Eksenel denge durumunu yitirerek eğriye yakın bir hal alan kolon burkulmuş olarak tanımlanmaktadır.

Aşağıda Şekil 1.1’de biri diğerine göre daha narin iki kolon yer almaktadır. Üst ve alt uçları ankastre mesnetlenmiş, aksenal basınç yüklü bu kolonlardan sağdaki daha bodur kolonda soldaki narin kolona göre daha az yanal deformasyon meydana geldiği gözlenmektedir. Buna göre kritik burkulma yükü uygulanan bir kolonun narinliği arttıkça kolon ekseninin elastik eğrisinde, eleman en kesitinin en küçük atalet momentini veren eksene dik doğrultudaki yer değiştirmesi de artmaktadır. Bu yüzden narin kolonların tasarımında stabilite en önemli husustur.



Şekil 1.1. Burkulma deneyine ait bir örnek

Bu tez çalışmasında, farklı mesnet şartlarına sahip basınç kuvvetiyle yüklenmiş narin kolon elemanların ezilme meydana gelerek göçmesi yerine stabilite problemi ile eleman kararlılığını yitirirken buna sebep olan kritik burkulma değerini bulmak amacıyla oldukça kullanışlı ve pratik bir yöntem olan Transfer Matrisi Yöntemi kullanılmıştır ve çeşitli kolon örneklerine yöntem uygulanmıştır. Bu çalışmayla Euler burkulma yükü elde edilirken farklı mesnet koşullarına sahip kolonlara genel bir bakış atılmıştır. Euler burkulma yükü ve boyunun hesabı için geliştirilmiş olan çeşitli yöntem ve formülasyonlar mevcuttur. Transfer Matrisi Yöntemi (TMY) de faydalı

yöntemlerden biridir ve bu çalışmada Transfer Matrisi Yöntemiyle teorik sonuçlar elde edilmiştir.

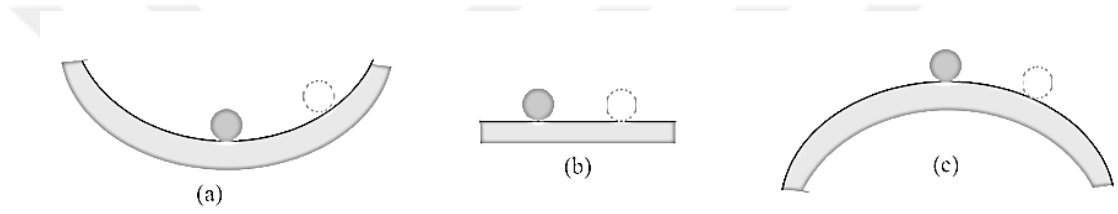
### 1.1. Elastik Stabilité

Yapı elemanlarının tasarımı genellikle dayanım ve rijitlik esaslı olarak yapılmaktadır. Dayanım, elemanın uygulanan yüke direnebilme kapasitesi olarak tanımlanırken; rijitlik ise elemanın ötelenme ve yer değiştirme tesirlerine karşı koyma derecesini ifade etmektedir. Rijitlik arttıkça şekil değiştirme için gereken yük de artmaktadır. Eleman uzun ve narin bir yapıya sahipse ve basınç yüküyle yüklenirse dayanım ve rijitlik yeteneği aynı uzunluktaki kesiti daha fazla olan bir elemana kıyasla ciddi oranda azalmaktadır. Böylelikle ilgili eleman için kritik burkulma yükü değeri bu iki kavramdan daha önemli bir hal almaktadır. Bu durumda kritik burkulma yükünün belirlenmesi oldukça önem arz etmektedir.

Sisteme etkileyen dış etkiler altında dengede olan bir sistem için gerilme ve stabilite problemleri şekil değiştiren cisimler mekaniğinde önemli bir yer tutmaktadır. İki problem türü de yapının emniyeti için oldukça önem arz etmektedir. Gerilme probleminde yapıya etkileyen dış kuvvetlerden meydana gelen gerilmelerin yapının güvenliğini tehdit eden boyutlara ulaşmadan, emniyet gerilmelerinden daha düşük değerlerde kalması gerekmektedir. Stabilite probleminde yükün fazla olmasının dışında sistemin aksenel konumu çok küçük ve denge bozucu bir etkiyle denge konumundan sapmakta ve sistem göçmektedir. “Gerilme probleminde denge durumu araştırılırken, stabilite probleminde belli olan denge durumunun kararlılığı araştırılmaktadır” (Omurtag, 2012). Kararlı denge durumunda olan sistem kendini toparlayarak eski haline dönebilirken, kararsız denge durumunda ise sistem önceki haline dönemez. Sistem bu şekilde taşıyıcılığını kaybetmektedir.

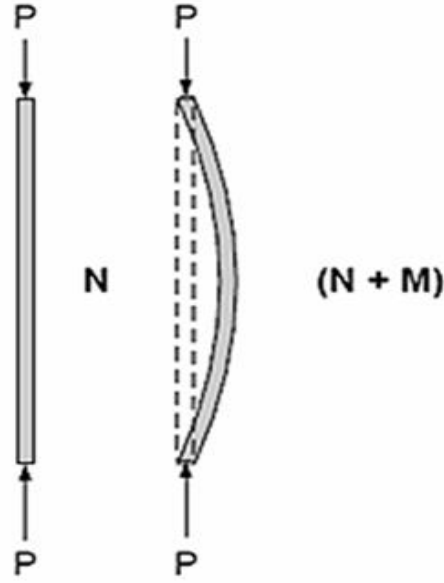
Sistemin kararlı ve kararsız denge durumu ile ilgili olarak en basit haliyle küre örneği verilebilir. Aşağıdaki Şekil 1.2’de görüldüğü üzere (a) şıkında görülen iç bükey bir yüzeyde serbest halde dengede olan bir küre görülmektedir. Kürenin konumunun değiştirilmesiyle ekseni denge konumundan uzaklaşır ve denge konumunda olmadığından dolayı küreye dıştan yükler etkimektedir. Bu dış yükler

küreyi eski denge konumuna getirmektedir. Buna kararlı denge adı verilmektedir. (b) şıkında kürenin bulunduğu düz satih üzerindeki tüm konumlarda küre yine bir denge durumunda bulunmaktadır. Bu sebeple denge konumu fark etmemektedir ve cisim stabil haline devam etmektedir. Bu durumdaki stabilite durumuna ise farksız denge durumu denilmektedir. Farksız denge durumunda küre kararlı ve kararsız denge durumu arasında bir yerde yer almaktadır. Şekildeki (c) şıkında görülen dışbükey bir yüzey üzerinde dengede bulunan küre denge konumundan saptırılınca küreye etkiyen kuvvetler ona hareket sağlamaktadır. Ancak kürenin bulunduğu yüzeyin şeklinden dolayı eski haline dönmesi beklenemez. Bu şekildeki denge durumu da kararsız denge durumu olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 1.2. (a) Kararlı Denge, (b) Farksız Denge ve (c) Kararsız Denge (Vable, 2012)

Burkulma probleminde doğrusal eksenli denge konumuna sahip bir kolonun eksenel basınç yükü altında, eğri eksenli başka bir denge konumu olup olmadığını belirlemek ve/veya varsa kolonu bu denge konumuna geçiren P yükünü hesaplamak temel amaçtır. Aşağıda Şekil 1.3’de sadece P eksenel yükü altındaki narin bir kolonun doğrusal dengesinin yanal yer değiştirmelerle kaybettiği görülmektedir. Şekilde kolonun başlangıçta sadece eksenel normal kuvvet etkisinde iken kolon ekseninin denge konumundan saptmasıyla ikinci mertbe momente de maruz kaldığı görülmektedir.



Şekil 1.3. Eksenel yüklü basınç çubuğu ve burkulmuş hali (Erol, Şengel ve Özçelikörs, 2012)

## 1.2. Stabilitede Yöntemler

Stabilitede elemanın denge konumuna ait kararlılığı belirlemek için üç farklı yöntem kullanılabilir. Bunlar dinamik yöntem, statik yöntem ve enerji yöntemidir. Bunlar dışında kullanılan başka yöntemler de mevcuttur. Diğer yöntemler bu üç genel yöntemden türetilerek oluşturulmaktadır. Bu yöntemlerden İnan (1988)'den yararlanarak aşağıda kısaca değinilmektedir.

### 1.2.1. Dinamik yöntem

Bu yöntem diğer iki yönteme kıyasla tüm sistemlere uygulanabilmektedir. Dinamiğin temelinde olan zaman kavramı ile bozulmuş denge konumunun değişimi zaman kavramıyla incelenmektedir. Dinamik yöntem tek genel yöntemdir ve kesin sonuçlar vermektedir.

### 1.2.2. Statik yöntem

Kararlılığı incelenen denge konumunun yakınında statik halde olan başka konumların olup olmadığının araştırılması esasına dayanmaktadır. Denge konumunun civarında olan farksız denge konumlarının gerektirdiği koşullar

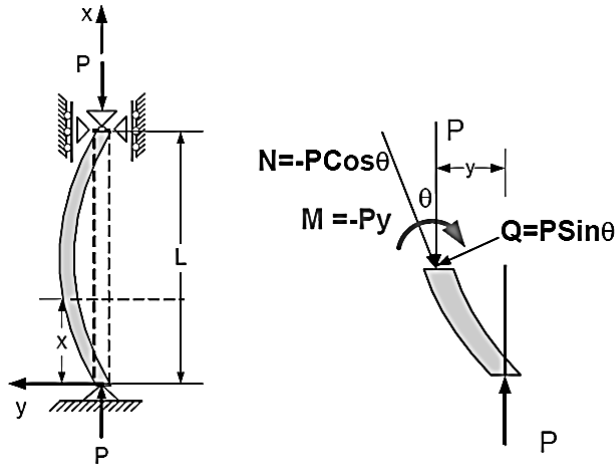
incelenerek var olan bu konumların belirlenmesi kuramı kullanılmaktadır. Bu yöntem genel bir yöntem olmamasına karşılık en çok kullanılan yöntemdir.

### 1.2.3. Enerji yöntemi

Bu yöntem sadece konservatif sistemlere uygulanabilmektedir. Sistemdeki toplam potansiyel enerjinin minimum olduğu durumda denge konumunun kararlı hale geldiği esasına dayanmaktadır. Bu yöntemde göre toplam potansiyel arttıkça kararsızlık doğru orantılı olarak artmaktadır.

### 1.3. Elastik Çubukların Burkulması

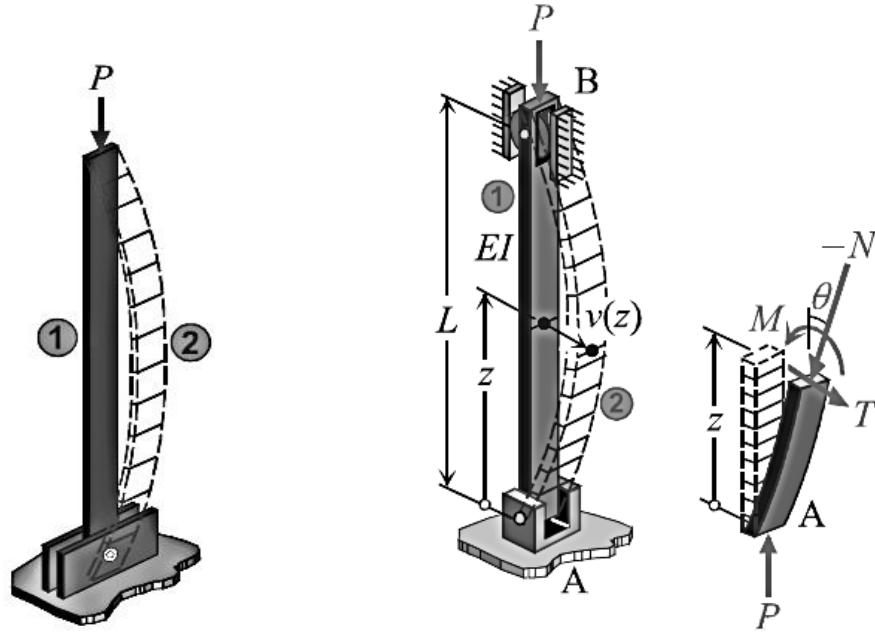
Burkulma problemi genellikle kolon ve diğer basınç elemanlarda görülmektedir. Bu problem ilk kez Leonard Euler tarafından 1757 yılında denge yöntemi ile incelenmiştir. Bu teori ilk defa Euler tarafından ortaya atılmış ve kendi ismiyle anılmaktadır (Vable, 2012). Aşağıda Şekil 1.4'te  $P$  eksenel yüküne maruz,  $L$  boyunda iki ucu mafsallı narin bir kolon görülmektedir. Kolon moment ve gerilmelerden dolayı burkulmaktadır. Aşağıdaki şekilde kolonun burkulmuş haline ait serbest cisim diyagramı da verilmektedir.



Şekil 1.4. İki ucu mafsallı sabit mesnetlenmiş kolonun burkulmuş hali ve alt parçasında iç tesirlerinin serbest cisim diyagramı (Erol, Şengel ve Özçelikörs, 2012)

Burkulmaya neden olan kritik yük değeri basit bir örnekle şöyle açıklanabilmektedir: Şekil 1.5'te üst kısmı serbest alt kısmı sabitlenmiş,  $P$  yükü ile

basınç uygulanan T cetveli görülmektedir. Sıfırdan başlanarak tedrici olarak arttırılan  $P$  yükünün belli bir değeri aşmasından sonra cetvel (1) konumundan (2) konumuna geçmektedir. Bu aşamada kuvvetin kaldırılması durumunda cetvel tekrar (1) konumuna geri dönmektedir. Ancak  $P$  yükü kaldırılmadan arttırılmaya devam edilirse, (2) konumunun devamında cetvel deformasyona uğramaya devam etmektedir.  $P$  kuvvetinin belli bir değeri aşması sonucunda cetvel kırılmaktadır. T cetvelinin kırılmasına neden olan  $P$  yükünün eşik değerine *kritik yük* ( $P_{kr}$ ) denilmektedir (Omutag, 2012). Kısaca burkulmaya yol açan en küçük yük, kritik yüküdür.



Şekil 1.5. Kritik burkulma yüküne maruz T cetveli ile deformasyonu ve SCD (Omurtag, 2012)

Aşırı derecede narin olan ve eksenini doğrultusunda basınca çalışan çubuk eleman ise burkulma olayı meydana gelmeden önce çubukta oluşan gerilmeler orantılılık sınırının altında kalmaktadır. Böylelikle gerilmeler elastik bölgede kalmaktadır. Bu halde oluşan burkulma olayı elastik burkulma olarak adlandırılmaktadır. Bu şekilde formu değişen ve yük taşıma kapasitesini yitiren eleman burkulmuş ve elastik olarak kalmaktadır. Gerilmeler de orantılı sınır altında kalması nedeniyle eleman Hooke kanununa uymaktadır (Hendekçi, YTÜ Ders notu).



Malzemenin lineer elastik davranış gösterdiği bölgede burkulma yükü bulunurken Euler'in (1.1) denkleminde verilen  $P_{kr}$ , kritik yük formülü kullanılabilir. Ancak formül uygulanmadan önce Euler kritik yük formülünün kullanılma alanının tespit edilmesi gerekmektedir. Çünkü elastik olmayan bölgede Euler formülü, kritik yük için doğru sonuçlar vermemektedir (Hendekçi, YTÜ Ders notu).

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L_b^2} \quad (1.1)$$

Burada;  $P_{kr}$ , Euler kritik burkulma yükü değerini;  $E$ , kolon malzemesine ait elastisite modülünü;  $I$  kolon kesitinin zayıf eksenine etrafındaki atalet momentini ve  $L_b$ , kolona ait Euler burkulma boyunu göstermektedir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde burkulma probleminin incelenmesi hususunda pek çok araştırma yapılmıştır. Çeşitli yükleme, mesnet ve sınır koşulları altında kolonların elastik burkulma analizi için çözümler literatürde belgelenmiştir (Gurel, 2007). Katı cisimler mekaniğinde stabilite analizi Euler'in 1744'te elastik bir kolonun burkulması için yayınladığı çözümüyle başlamıştır. Kritik yük kavramı ilk olarak Euler (1744) tarafından ortaya atılmış, farklı uç (mesnet) koşullarına sahip kolonların kritik yük değerleri verilmiştir. Engesser (1889) orijinal "teğet modülü" teorisini geliştirmiştir. Engesser ve Timoshenko bu konuya öncülük etmişlerdir. Friederich Engesser'in teğet modülü teorisi, burkulmadan hemen önce oluşan gerilmelerin orantılı elastik sınırı aştığı yani burkulmanın elastik ötesi olduğu çubuklar için geliştirilmiştir. Teori Euler'in kritik burkulma yükü hesabına benzer, ancak elastiklik modülünün yerini değişken teğet elastiklik modülü almıştır (Özhendekçi, YTÜ Ders notu). Von Mises ve Ratzersdorfer (1926); Chwalla (1928) elastisite matrisinin aksenal yükten bağımsızlığını, James (1935) ve Chandler (1956) bu konuda rijitlik matrisi üzerine çalışmışlardır (Bazant, 1991). Günümüzde bu tür stabilite problemleri sonlu elemanlar metoduna benzeyen rijitlik matrisi yöntemi gibi yöntemler ve bilgisayar aracılığıyla rahatlıkla çözülebilmektedir.

Kolonlar ve diğer basınç elemanlarının eksenlerinin başlangıçta tam düz olmaması, aksenal basınç yükünün eksantrik olarak etkimesi ve çatlak olması durumu gibi kusurlar da içerebilmektedir Gurel (2007). Dimarogonas ve Papadopoulos (1983) dairesel kesitli çatlaklı elemanların titreşimi ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Takahashi (1998, 1999) tek çatlaklı ve aksenal basınç kuvvetine maruz kalan düzgün olmayan bir Timoshenko şaftının titreşim ve stabilitesini incelemiştir. Zheng ve Fan (2003) çatlaklı dikdörtgen ve dairesel kesitli boşluklu kirişlerin titreşim ve stabilitesi ile ilgilenmiştir. Fan ve Zheng (2003) dikdörtgen ve dairesel kesitlere sahip çatlaklı Timoshenko kiriş-kolon elemanlarının burkulma analizi için uyarlanan Fourier serilerine dayalı yeni bir yöntem önermişlerdir. Dairesel kesitli kolonların burkulması ile ilgili örnek bir kolon ele almışlardır Gurel (2007). Transfer matrisi metodu, düzgün olmayan mekanik özelliklere

sahip tek-boyutlu yapılarda özdeğer probleminin çözümü için elverişli bir yöntemdir. Bu yöntem tek boyutlu taşıyıcı elemanlar için pratik bir şekilde kullanılabilirdiğini gösteren pek çok çalışma vardır. İnan (1961), Takahashi (1998, 1999) ve Gurel (2007) gibi bazı araştırmacılar bu yöntemi çalışmalarında kullanmışlardır.

Bu tez çalışmasında, Transfer Matrisi Yöntemi ile klasik mesnetli, elastik ötelenme ve dönme yaylı mesnete sahip, değişken kesitli, ara elastik mesnetli ve ilerlemeyen tek çatlaklı narin kolonların burkulma yükünün belirlenmesini sağlayacak transfer matrisi ifadeleri elde edilmiştir.



### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Yapılan çalışmada yöntem olarak Transfer Matrisi Yöntemi (TMY) kullanılmıştır. Yöntem bir çeşit özdeğer problemi esasına dayanmaktadır. Özdeğer problemleri, denklemin çözülmesi ve problemin bulunmasıdır. Stabilitate ve titreşim problemleri esasen birer özdeğer problemidir ve Transfer Matrisi Yöntemi bu tür problemlerin çözümü için oldukça etkili bir yöntemdir.

Eksenel yüklü narin bir kolonun, üzerindeki yükün kritik bir değerinde, herhangi bir bozucu etki ile (çok küçük yanal yük gibi) aniden doğrusal konumdan ayrılıp, ona yakın eğrisel bir hal alması olayına “**burkulma**” adı verilmektedir. Burkulma olayı sadece kolonlarda değil, kemer, levha, kabuk ve kiriş türü elemanlarda da meydana gelebilmektedir.

Kolonların burkulma olayı için önceki bölümde verilmiş olan Euler’in kritik yük formülü, klasik ve çeşitli mesnet şartlarına sahip narin kolonların burkulma boyları ve kritik burkulma yükü değerlerini elde ederken kullanılmaktadır. Bu ifade sadece narin kolonlar için geçerli olmaktadır. Denklem aşağıda (3.1)’de tekrar verilmektedir.

$$P_{kr} = P_E = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_b^2} \quad (3.1)$$

Aşağıda Şekil 3.1’de narin kolonların farklı mesnet koşullarına bağlı olarak elde edilen burkulma boyları, burkulma davranışları, teorik burkulma boyu çarpanları ve kolon uçlarında yer alan mesnet çeşitleri görülmektedir.

Basınç çubuğunun burkulma şekli	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Teorik burkulma boyu çarpanı (K)	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Mesnet tanımları						
		Dönme ve ötelenme tutulu				
		Dönme serbest ve ötelenme tutulu				
		Dönme tutulu ve ötelenme serbest				
		Dönme ve ötelenme serbest				

Şekil 3.1. Euler basınç çubuklarının burkulma davranışları, burkulma boy çarpanları ve kolon uçlarındaki mesnet çeşitleri (TS648,1980)

Şekilde yer alan burkulma boy çarpanı, Euler burkulma boyunun kolonun kendi boyuna oranı olarak tanımlanmaktadır. Şekilde kolonların burkulma davranışları kesikli çizgilerle gösterilmektedir. Eksenel basınç altında kolon formu bu hali almaktadır. Bu çalışmanın ilerleyen kısımlarında Transfer Matrisi Yöntemi ile bu Euler halleri ve burkulma koşulları ayrıntılı olarak incelenmektedir. Yöntemin uygulanma aşamasından önce transfer matrisinin elde edilmesi aşağıda detaylıca formülize edilmiştir. Bu kısımda (Gürel, 2007)'den yararlanılmıştır.

### 3.1. Transfer Matrisinin Elde Edilmesi

Transfer matrisi kolonun iki ucunda bulunan büyüklükler arasında bağıntı kurulması esasına dayanmaktadır. Transfer matrisi ile kolonun burkulma koşulu elde edilmektedir. Herhangi bir narin kolonun burkulmasını idare eden denklem için formülasyon; (3.2)'de verilmektedir. Bu denklem 4. dereceden homojen adi diferansiyel denklem şeklindedir.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (3.2)$$

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (3.3)$$

(3.2) denkleminin genel çözümü (veya ötelenmeler)  $y(x)$ , eğimler  $\theta(x)$ , eğilme momentleri  $M(x)$  ve kesme kuvvetleri  $V(x)$  olmak üzere, bu büyüklükler arasında (3.4) bağıntıları vardır.

$$\left. \begin{aligned} y(x) \\ \theta(x) = \frac{dy}{dx} \\ M(x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \\ V(x) = \frac{dM}{dx} - P \frac{dy}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

(3.2) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = A_1 + A_2 x + A_3 \sin(kx) + A_4 \cos(kx) \quad (3.5)$$

(3.5) denklemi olduğu dikkate alındığında (3.4) ifadesindeki diğer büyüklükler birbiri ardınca türev alınarak aşağıdaki şekilde elde edilmektedirler.

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = 0 + A_2 + A_3 k \cos(kx) + A_4 (-k) \sin(kx)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 + 0 + A_3 (-k^2) \sin(kx) + A_4 (-k^2) \cos(kx)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 + 0 + EIk^2 A_3 \sin(kx) + EIk^2 A_4 \cos(kx)$$

En son ifadede (3.3) denkleminin yardımıyla  $EIk^2 = P$  olduğu dikkate alınırsa;

$$M(x) = A_3 P \sin(kx) + A_4 P \cos(kx)$$

haline dönüşmektedir. Bununla birlikte  $V(x)$ , kesme kuvveti ifadesi de  $M(x)$ 'in türevinin alınmasıyla aşağıda belirtilen şekilde verilebilmektedir.

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{dM}{dx} - P \frac{dy}{dx} \\
&= [0 + 0 + A_3 P k \cos(kx) - A_4 P k \sin(kx)] - P [0 + A_2 + A_3 k \cos(kx) - A_4 k \sin(kx)] \\
V(x) &= -A_2 P
\end{aligned}$$

Elde edilen tüm bu büyüklükler aşağıdaki (3.6a) ifadesindeki gibi matris formunda verilebilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} y(x) \\ \theta(x) \\ M(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \sin(kx) & \cos(kx) \\ 0 & 1 & k \cos(kx) & -k \sin(kx) \\ 0 & 0 & P \sin(kx) & k \cos(kx) \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (3.6a)$$

Bu ifadede katsayıların çarpımı olan matrise  $[B(x)]$  ismi verilirse ((3.6b) denklemi);

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \sin(kx) & \cos(kx) \\ 0 & 1 & k \cos(kx) & -k \sin(kx) \\ 0 & 0 & P \sin(kx) & k \cos(kx) \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} = [B(x)] \quad (3.6b)$$

Kolon üst ucu için ( $x=0$ ) (3.4) ifadesindeki büyüklükler şöyle olmaktadır: (7a ifadesi)

$$\begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ V(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (3.7a)$$

Bu ifadede  $x=0$  değeri yerine yazılırsa aşağıdaki (7b) ifadesi olarak yazılabilmektedir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} = [B(0)] \quad (3.7b)$$

Buradan (3.8) ifadesi

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = [B(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ V(0) \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde elde edilmektedir. Benzer şekilde kolonun alt ucundaki büyüklükler için ( $x=L$ ) ise aşağıdaki ifade yazılmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} y(L) \\ \theta(L) \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & \sin(kL) & \cos(kL) \\ 0 & 1 & k \cos(kL) & -k \sin(kL) \\ 0 & 0 & P \sin(kL) & P \cos(kL) \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (3.9a)$$

Burada,

$$\begin{bmatrix} 1 & L & \sin(kL) & \cos(kL) \\ 0 & 1 & k \cos(kL) & -k \sin(kL) \\ 0 & 0 & P \sin(kL) & P \cos(kL) \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} = [B(L)] \quad (3.9b)$$

olarak ifade edilmektedir. (3.8) ifadesi (3.9a)'a ve (3.9b) ifadelerinin düzenlenmesiyle

$$\begin{Bmatrix} y(L) \\ \theta(L) \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = [B(L)][B(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ V(0) \end{Bmatrix} \quad (3.10a)$$

eşitliği elde edilmektedir. Burada,

$[B(L)][B(0)]^{-1} = [T]$  denilirse yukarıdaki (3.10a) ifadesi

$$\begin{Bmatrix} y(L) \\ \theta(L) \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ V(0) \end{Bmatrix} \quad (3.10b)$$



haline dönüşmektedir. Bu ifadede yer alan  $[T]$  matrisine “Kolonun Transfer Matrisi” adı verilmektedir. Bu matris kolonun üst ucundaki ( $x=0$ ) büyüklükler ile alt ucundaki ( $x=L$ ) büyüklükleri ilişkilendirmekte, başka bir ifadeyle birbirine transfer etmektedir. Bu  $[T]$  matrisi dört satır ve dört sütundan oluşan bir matristir ve

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Göz önüne alınacak herhangi bir kolon için (3.10b) bağıntısı ve kolonun uç (sınır, mesnet) şartları kullanılarak, burkulma koşulu (karakteristik denklem) ile burkulma yükü (yükleri) elde edilebilmektedir.

Burada  $[T] = [B(L)][B(0)]^{-1}$  transfer matrisinin elde edilmesi için yukarıda ifade edilen  $[B(L)]$  matrisi ve bunun tersi olan  $[B(L)]^{-1}$  matrisinin ifadesi yazılıp ara işlemler yapılırsa istenen  $[T]$  transfer matrisi aşağıda (3.12)’deki en genel haliyle elde edilmektedir.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & L & \sin(kL) & \cos(kL) \\ 0 & 1 & k \cos(kL) & -k \sin(kL) \\ 0 & 0 & P \sin(kL) & P \cos(kL) \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

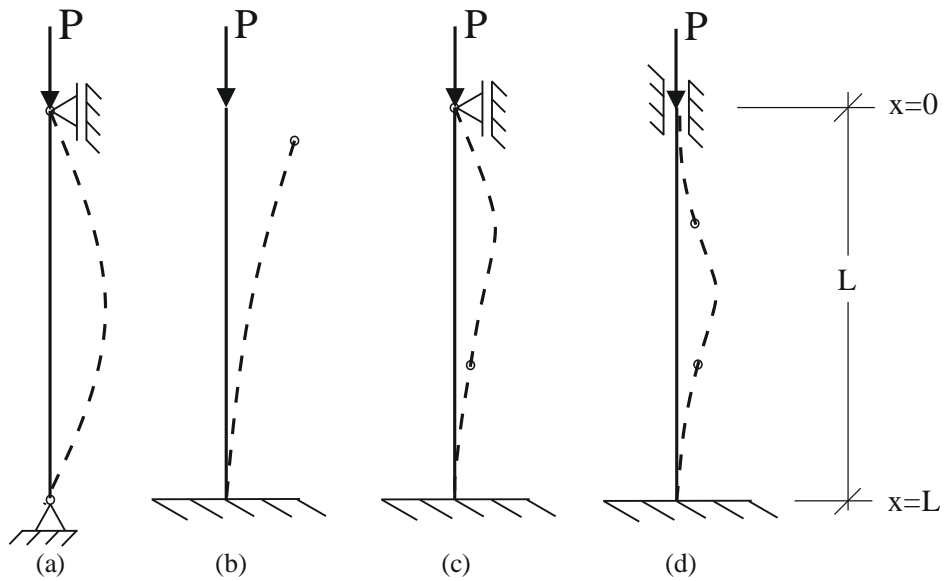
$$= \begin{bmatrix} 1 & L & \sin(kL) & \cos(kL) \\ 0 & 1 & k \cos(kL) & -k \sin(kL) \\ 0 & 0 & P \sin(kL) & P \cos(kL) \\ 0 & -P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{P} \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & \frac{1}{Pk} \\ 0 & 0 & \frac{1}{P} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(kL)}{k} & \frac{[-1 + \cos(kL)]}{P} & \frac{[-kL + \sin(kL)]}{kP} \\ 0 & \cos(kL) & \frac{-k \sin(kL)}{P} & \frac{[-1 + \cos(kL)]}{P} \\ 0 & \frac{P \sin(kL)}{k} & \cos(kL) & \frac{\sin(kL)}{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Yukarıdaki (3.12)'de verilen matris ifadesi narin bir kolonun burkulma koşulu elde edilirken kullanılacak terimleri içermektedir.

### 3.2. Transfer Matrisi Yönteminin Çeşitli Kolonlara Uygulanması ve Kolonların Burkulma Yüklerinin Belirlenmesi

Aşağıda Şekil 3.2'de her biri L boyunda (a)'da iki ucu mafsallı kolon, (b)'de altta ankastre üstte serbest uçlu kolon, (c)'de altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolon ve (d)'de altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolon ve kolonların üst kesitine gelen aksenal basınç yükünün kritik değeri altında gösterdikleri burkulma davranışları görülmektedir. Çalışmanın bu kısmında bu klasik kolonların burkulma yükleri Transfer Matrisi Yöntemi ile elde edilmiştir.



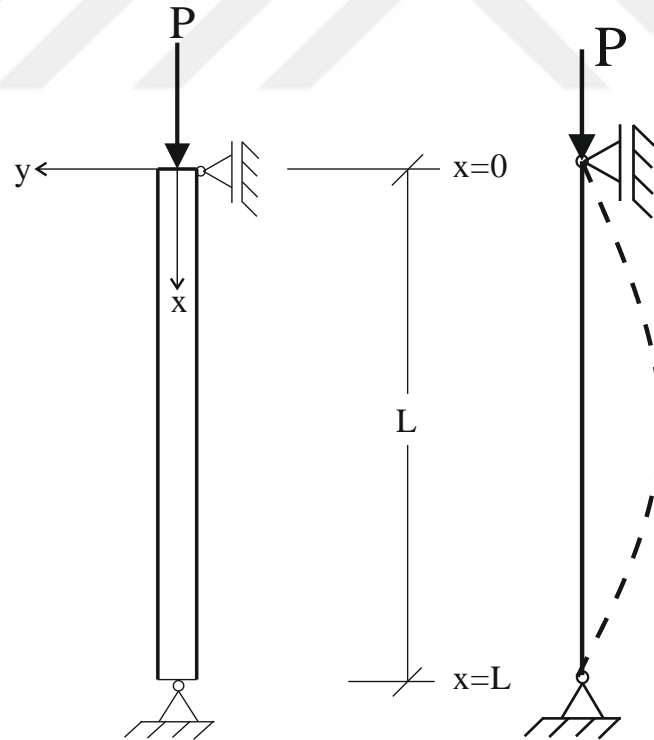
Şekil 3.2. Klasik uç (mesnet) şartlarına sahip kolonlar ve burkulma davranışları

### 3.2.1. Klasik mesnetli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi

Çalışmanın bu kısmında klasik mesnetli kolonlar başlığı altında iki ucu mafsallı kolon, altta ankastre üstte serbest uçlu kolon, altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolon ve altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolonların burkulma yüklerinin Transfer Matrisi Yöntemi ile burkulma koşulu ve kritik burkulma yükleri elde edilmiştir.

#### 3.2.1.1. İki ucu mafsallı kolonun burkulma yükünün belirlenmesi

İki ucunda mafsallı olarak mesnetlenmiş kolonlar için burkulma yükünün belirlenmesi için ilk olarak kolonun uç koşulları belirlenmektedir. Bu koşulların (3.10b) ifadesinin düzenlenmesiyle burkulma yükü elde edilmektedir. Bu kolonlardaki uç koşullar;  $y(0)=0$ ,  $M(0)=0$ ;  $y(L)=0$ ,  $M(L)=0$  olarak bilinmektedir. Bu durumda kolon alt ve üst uçlarında ötelenme ve eğilme momentlerinin olmamasına göre matris çözülecektir. Aşağıda verilen Şekil 3.3'teki alt kısmı sabit üst ucu kayıcı mesnetli kolon için kapalı formda bir matris ifadesi elde edilmiştir.



Şekil 3.3. İki ucu mafsallı kolon ve burkulma davranışı

Kolonun uç koşulları:  $y(0)=0$ ,  $M(0)=0$ ;  $y(L)=0$ ,  $M(L)=0$  olmak üzere (3.11) ifadesinin (3.10b)'de yazılmasıyla;

$$\begin{Bmatrix} y(L) \\ \theta(L) \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ V(0) \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

ifadesi elde edilmektedir. Bu ifadede kolon sınır koşullarından bilinen değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta(L) \\ 0 \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta(0) \\ 0 \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

şeklinde elde edilen yukarıdaki ifade yeniden düzenlenirse;

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} & T_{14} \\ T_{32} & T_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

şeklinde daha sade bir hal almaktadır. Yukarıda ifadenin düzenlenip sadeleştirildiği son haliyle elde edilen ifadenin çözümü için, katsayılar matrisinin determinantının sıfır (0) olması gerekmektedir ( $\det[ ] = 0$ ). Buna göre aşağıda verilen ifade bulunmaktadır.

$$T_{12}T_{34} - T_{14}T_{32} = 0$$

Bu ifade altta sabit üstte kayıcı mesnetli kolonun kapalı formdaki koşulu olarak ifade edilmektedir. (3.12) ifadesinden alınan ilgili  $T_{ij}$  terimleri yukarıdaki kapalı burkulma koşulu ifadesinde yerlerine yazılarak ara işlemlerin ardından

$$\left( \frac{\sin(kL)}{k} \right) \left( \frac{\sin(kL)}{k} \right) - \frac{[-kL + \sin(kL)]}{kP} \left( \frac{P \sin(kL)}{k} \right) = 0$$

$$\left( \frac{\sin(kL)}{k} \right)^2 + \left( \frac{\sin(kL)L}{k} \right) - \left( \frac{\sin(kL)}{k} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\sin(kL)L}{k} = 0$$

çözümü elde edilmektedir. Elde edilen bu ifade burkulma yükü belirlenmek istenen kolonun açık formdaki burkulma koşuludur. Bu eşitlik için denklemini sağlayan en küçük  $(kL)$  değerleri hesaplanmaktadır.

$$(kL) = 0 \text{ olursa} \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

denklemine göre yük yok demektir bu sebeple elde edilen denklem kökleri için sıfırdan farklı en küçük kök değerleri araştırılmaktadır.

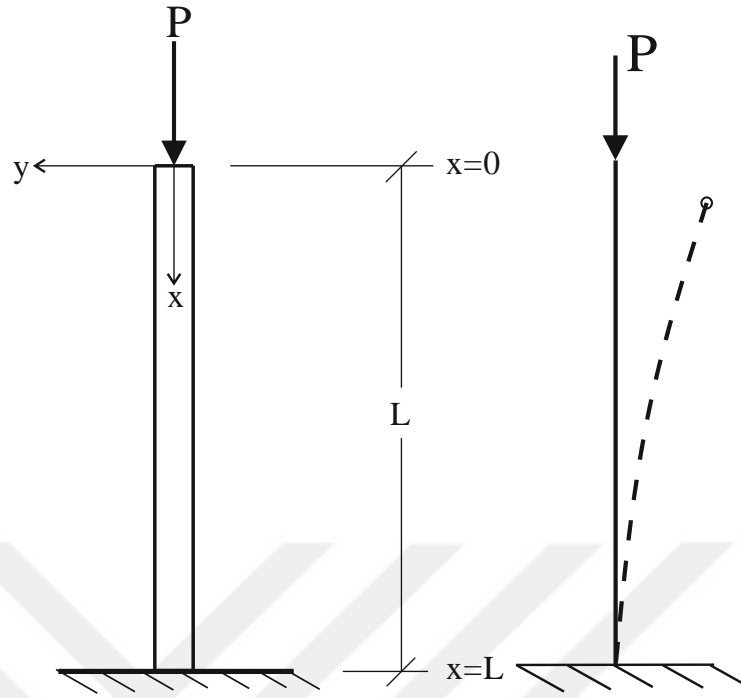
$(kL) = \pi$  olursa (3.3) denklemine göre

$$(kL)^2 = \pi^2 \quad k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} = \frac{P}{EI} \quad P = P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad l_b = L.$$

Böylelikle iki ucu mafsallı kolonlar için burkulma yükü denklemini elde edilmiş olup, burkulma boyunun kolon boyuna eşit olduğu denklemden anlaşılmaktadır.

### 3.2.1.2. Altta ankastre üstte serbest uçlu kolonun burkulma yükünün belirlenmesi

Altta ankastre üstte serbest uçlu kolonlar için burkulma yükünün belirlenmesinde bir önceki örnekteki gibi iki ucu mafsallı kolondaki hesap adımları benzer şekilde tekrarlanmaktadır. Bu kolonun sınır koşulları belirlenmekte ve bu koşulların (3.10b) ifadesine yerleştirilip düzenlenmesiyle burkulma yükü elde edilmektedir. Bu kolonlardaki uç koşullar;  $M(0)=0, V(0)=0; y(L)=0, \theta(L)=0$ 'dır. Bu durumda kolonun alt ucunda ötelenme ve dönme olmazken ve üst ucunda kesme kuvveti ve eğilme momentleri oluşmamaktadır. Bu şartlara göre transfer matrisi çözümlenmektedir. Bunun için başlangıçta Şekil 3.4' te verilen altta ankastre üstte serbest uçlu kolon için kapalı formda bir matris denklemini elde edilecektir. Daha sonra elde edilen ifadede transfer matrisinde yer alan  $T_{ij}$  terimleri yerlerine yazılarak burkulma yükü elde edilecektir.



Şekil 3.4. Altta ankastre üstte serbest uçlu kolon ve burkulma davranışı

Kolon için uç koşulları:  $M(0)=0, V(0)=0; y(L)=0, \theta(L)=0$  olmak üzere (3.11) ifadesinin (3.10b)'de yazılmasıyla;

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Bu ifade;

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \end{Bmatrix}$$

şeklinde sadeleşmektedir. Burada çözüm elde etmek için katsayılar matrisinin determinantı sıfır ( $\det[ ] = 0$ ) olmalıdır.

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 0$$

Yukarıdaki ifade altta ankastre üstte serbest uçlu kolon için kapalı formdaki burkulma koşulu olarak adlandırılmaktadır. Transfer matrisinde yer alan ilgili  $T_{ij}$  terimleri yerlerine yazılarak burkulma yükü belirlenmektedir.

$$(1 \cdot \cos(kL)) - \left( \frac{\sin(kL) \cdot 0}{k} \right) = 0$$

$$\cos(kL) = 0$$

Elde edilen bu yeni ifade kolonun açık formdaki burkulma koşuludur. Denklemi sağlayan en küçük ( $kL$ ) değeri  $kL = \frac{\pi}{2}$ 'dir. Dolayısıyla;

$$(kL)^2 = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \rightarrow k^2 = \frac{\pi^2}{4L^2} \text{ ve } k^2 = \frac{P}{EI} \text{ olduğu göz önünde tutulursa bu eşitlikten}$$

$$P = P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}, \quad l_b = 2L$$

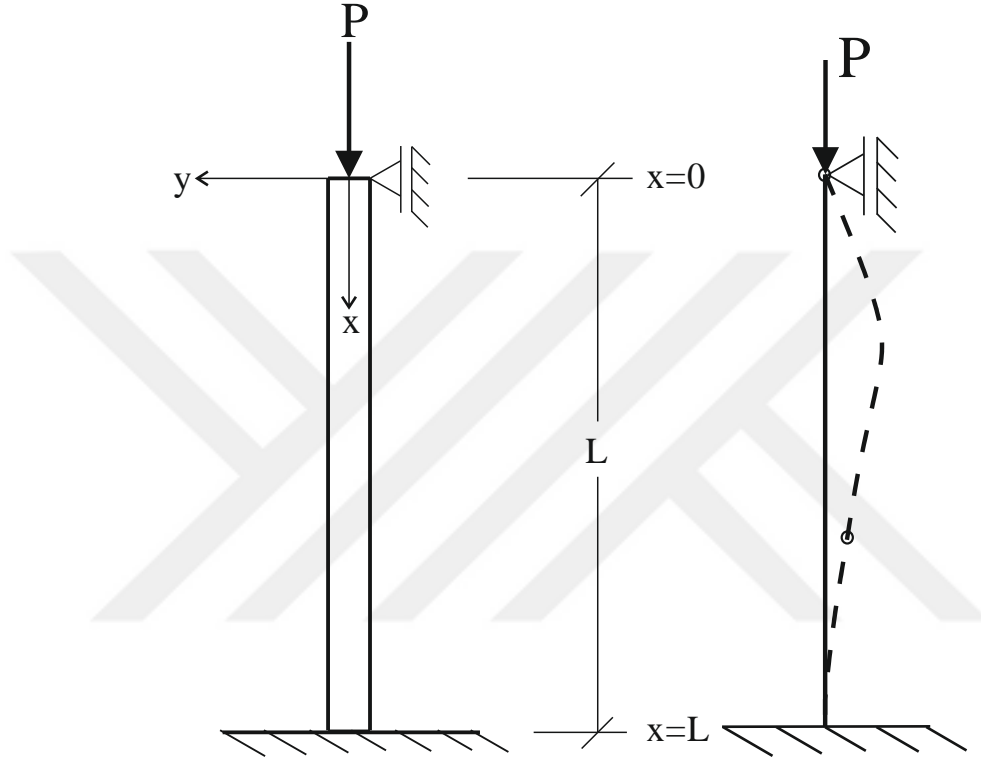
ifadesi elde edilmektedir.

Belirlenen bu sonuçla altta ankastre üstte serbest uç koşullarına sahip kolonlar için burkulma yükü denklemi elde edilerek burkulma boyunun kolon boyunun da iki katına eşit olduğu görülmektedir.

### 3.2.1.3. Altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolonun burkulma yükünün belirlenmesi

Altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolonlar için burkulma yükünün belirlenmesi önceki klasik kolon örneklerine uygulanan işlemlerin tekrarı ile yapılmaktadır. Bu kolonlardaki uç koşullar;  $y(0)=0$ ,  $M(0)=0$ ;  $y(L)=0$ ,  $\theta(L)=0$  olduğu bilinmektedir. Bu durumda kolonun alt ucunda ötelenme ve dönme olmazken ve üst ucunda ötelenme ve eğilme momenti oluşmaz. Transfer matrisi de bu koşullar dikkate alınarak çözülmektedir. Bunun için öncelikle Şekil 3.5' te verilen altta ankastre üstte serbest uçlu

kolon için kapalı formda bir matris denklemi oluşturulur ve oluşturulan denklemde transfer matrisinde yer alan  $T_{ij}$  terimleri yerlerine yazılarak burkulma yükü elde edilmektedir.



Şekil 3.5. Altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolon ve burkulma davranışı

Kolon için uç koşulları:  $y(0)=0, M(0)=0$ ;  $y(L)=0, \theta(L)=0$

$[T]$ , transfer matrisi ifadesine kolon uç şartlarının yazılmasıyla aşağıdaki ifadeye ulaşılmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta(0) \\ 0 \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

Bu ifade çözülerek;



$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} & T_{14} \\ T_{22} & T_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

2x2'lik bu matris elde edilmektedir. Bu matriste çözüm için  $\det[\ ] = 0$  olması gerektiğinden matris aşağıdaki şekilde sadeleştirilmektedir.

$$T_{12}T_{24} - T_{14}T_{22} = 0$$

Yukarıdaki ifade altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolon için kapalı formdaki burkulma koşuludur. Transfer matrisinde yer alan  $T_{ij}$  terimleri yerlerine yazılarak burkulma yükleri elde edilecektir.

$$\left( \frac{\sin(kL)}{k} \right) \left( \frac{-1 + \cos(kL)}{P} \right) - \left( \frac{-kL + \sin(kL)}{kP} \right) (\cos(kL)) = 0$$

$$\left( \frac{\cos(kL)L}{P} \right) - \left( \frac{\sin(kL)}{P} \right) = 0 \rightarrow (kL)(\cos(kL)) - (\sin(kL)) = 0$$

Buradan ara işlemler yapılarak

$$\tan(kL) = kL$$

denkleme ulaşılır. Denklemin sıfırdan farklı en küçük ( $kL$ ) değeri;  $kL \cong 4.4934$  'tür.

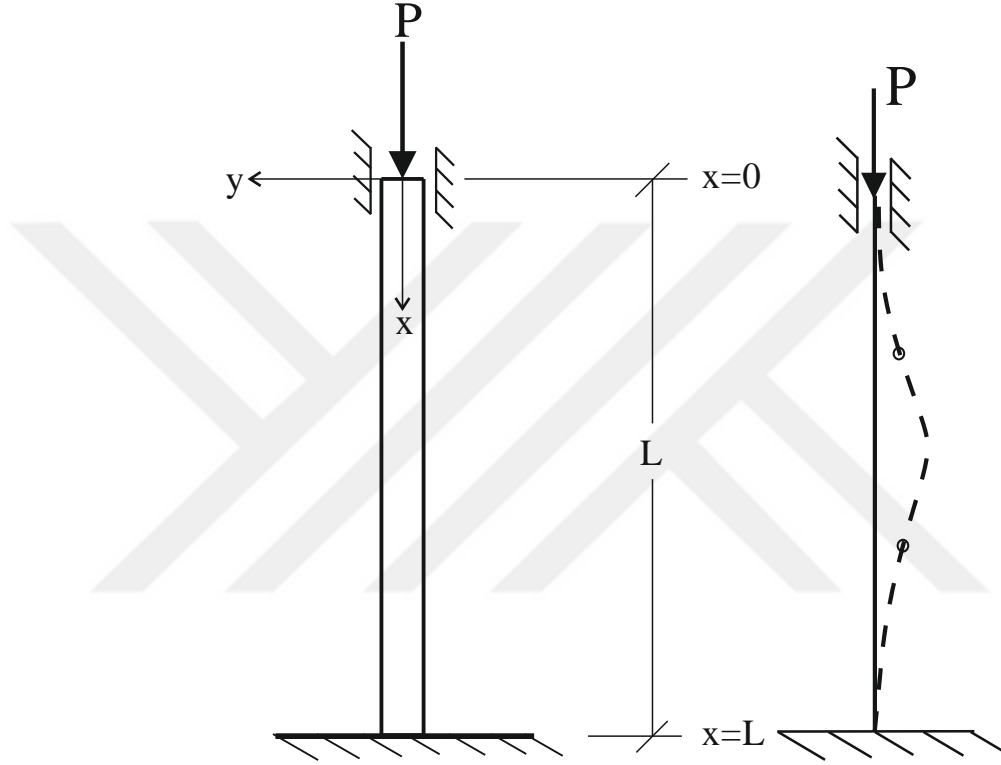
$$P = \frac{20.1601EI}{L^2}, \quad P = P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7)^2} \quad l_b = 0.7L$$

Elde edilen bu değerle altta ankastre üstte kayıcı mesnetli kolon için kritik burkulma yükü belirlenmiş olup, burkulma boyunun %30 oranında azaldığı gözlenmektedir.

#### 3.2.1.4. Altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolonun burkulma yükünün belirlenmesi

Altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolonlarda burkulma yükü belirlenirken yukarıda yapılanlar benzer şekilde tekrarlanmaktadır. Bu kolonlardaki uç

koşullar;  $y(0)=0$ ,  $\theta(0)=0$ ;  $y(L)=0$ ,  $\theta(L)=0$ 'dır. Bu durumda kolonun hem alt hem de üst ucunda ötelenme ve dönme meydana gelmemektedir. Transfer matrisi için bu koşullar dikkate alınarak Şekil 3.6'da verilen altta ankastre üstte kayıcı ankastre kolon için kapalı formda bir matris denklemi elde edilmektedir. Denklemden transfer matrisinin  $T_{ij}$  terimleri yerlerine yazılarak burkulma yükü belirlenmektedir.



Şekil 3.6. Altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolon ve burkulma davranışı

Kolon için uç koşulları:  $y(0)=0$ ,  $\theta(0)=0$ ;  $y(L)=0$ ,  $\theta(L)=0$  olmak üzere  $[T]$ , transfer matrisi ifadesi aşağıdaki şekilde olmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(0) \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

Bu ifade için;

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{13} & T_{14} \\ T_{23} & T_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M(0) \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

$\det[ ] = 0$  olması gerektiğinden aşağıdaki haline indirgenebilen matris daha sade bir hal almakta ve çözüm kolaylaşmaktadır.

$$T_{13}T_{24} - T_{14}T_{23} = 0$$

Bu durumda elde edilen yukarıdaki ifade, altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolon için kapalı formdaki burkulma koşuludur. Bu denklemden transfer matrisi ifadeleri yerlerine yazılarak;

$$\left( \frac{-1 + \cos(kL)}{P} \right) \left( \frac{-1 + \cos(kL)}{P} \right) - \left( \frac{-kL + \sin(kL)}{kP} \right) \left( \frac{-k \sin(kL)}{P} \right) = 0$$

$$\left( \frac{-1 + \cos(kL)}{P} \right)^2 - \left( \frac{k^2}{P^2} \right) \left( \frac{\sin(kL)L}{k} \right) + \left( \frac{\sin(kL)}{P} \right)^2 = 0$$

$$\sin(kL/2) = 0$$

çözümü elde edilmektedir. Elde edilen bu ifade için  $(kL)$ 'nin sıfırdan farklı en küçük kökü,

$$\left( \frac{kL}{2} \right) = \pi \rightarrow (kL) = 2\pi \text{ 'dir. Bu değerle ,}$$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(1/2)^2 L^2} \rightarrow P = P_{kr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0.5L)^2} , \quad l_b = 0.5L \text{ olarak elde edilmektedir. Böylece}$$

kolonun burkulma boyu, kolonun normal boyunun yarısı olduğu görülmektedir. Bu sonuçla altta ankastre üstte kayıcı ankastre mesnetli kolon için kritik burkulma yükü elde edilmiş olmaktadır.

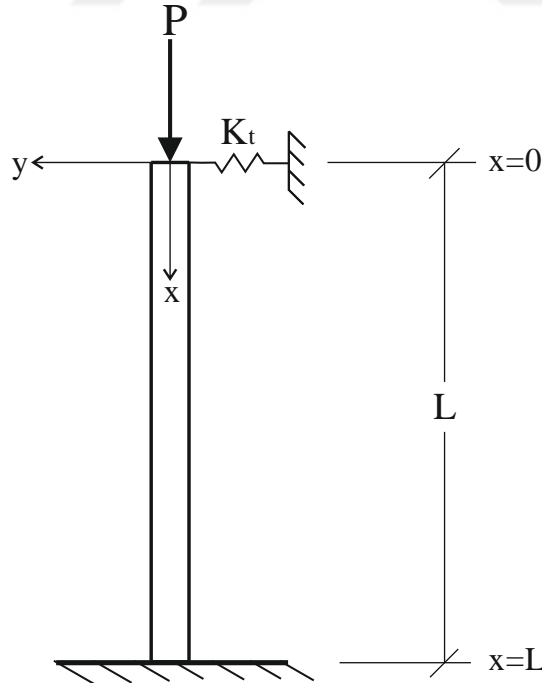
### 3.2.2. Elastik mesnetli kolonlarda burkulma yüklerinin belirlenmesi

Eksenel basınç yüklü kolon elemanlarında klasik mesnet koşulları dışında elastik mesnetli durumları da mevcuttur. Kolon uç koşullarında mesnet olması halinde transfer

matrisinde sınır koşullarında ilgili büyüklük yerlerinde mesnet rijitliklerinden ortaya çıkan eğilme momenti ve/veya kesme kuvveti etkileri yazılmaktadır. Daha sonra önceki bölümde klasik mesnet koşulları olan kolonlarda yapılan ara işlemler tekrarlanmaktadır. Bu bölümde altta ankastre üstte ötelenme yaylı ve altta ankastre üstte dönme yaylı ve kayıcı mesnetli kolonların burkulma yüklerinin belirlenmesi için transfer matris ifadeleri verilmektedir.

### 3.2.2.1. Altta ankastre üstte ötelenme yaylı kolonun burkulma yükünün belirlenmesi

Altta ankastre üstte ötelenme yaylı narin bir kolonun burkulma yükü koşulunun belirlenmesi için öncelikle (3.13)'teki transfer matrisi ifadesinde kolon uç koşulları yerlerine yazılarak çözüm yapılmaktadır. Aşağıda Şekil 3.7'de üstte elastik çöken yaylı bir kolon görülmektedir. Buna göre;



Şekil 3.7. Altta ankastre üstte ötelenme yaylı kolon

Yukarıdaki şekilde  $K_t$  ötelenme yayının rijitliğini göstermektedir. Kolon uç koşulları:  $M(0)=0$ ,  $V(0)=K_t \cdot y(0)$  ;  $y(L)=0$ ,  $\theta(L)=0$ 'dır. Buna göre  $[T]$  transfer matrisi ifadesi şöyle olmaktadır:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(L) \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \\ 0 \\ K_t \cdot y(0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = T_{11}y(0) + T_{12}\theta(0) + T_{14}K_t \cdot y(0) \\ 0 = T_{21}y(0) + T_{22}\theta(0) + T_{24}K_t \cdot y(0) \end{cases} \xrightarrow{\text{düzenlenirse}} \begin{cases} 0 = (T_{11} + T_{14}K_t)y(0) + T_{12}\theta(0) \\ 0 = (T_{21} + T_{24}K_t)y(0) + T_{22}\theta(0) \end{cases}$$

Son ifadenin matrise dönüştürülmüş hali;

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_{11} + T_{14}K_t) & T_{12} \\ (T_{21} + T_{24}K_t) & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y(0) \\ \theta(0) \end{Bmatrix}$$

şeklinde olmaktadır. Burada kökleri bulmak için determinantın sıfıra eşit olması gerekmektedir.

$$\det[ ] = 0 \rightarrow (T_{11} + T_{14}K_t)T_{22} - T_{12}(T_{21} + T_{24}K_t) = 0$$

Son olarak elde edilen bu ifade ile altta ankastre üstte çökme yaylı kolon için kapalı formdaki burkulma koşulu elde edilmiş olmaktadır. Daha sonra  $T_{ij}$  terimleri yerlerine yazılarak istenen kolon burkulma koşulunun açık formunu elde edilmektedir. Yapılan ara işlemlerin ardından

$$\left[ 1 + \left( \frac{-kL + \sin(kL)}{kP} \right) K_t \right] \cos(kL) - \frac{\sin(kL)}{k} \left[ 0 + \left( \frac{-1 + \cos(kL)}{P} \right) K_t \right] = 0 \rightarrow$$

$$\left( 1 - \frac{K_t L}{P} + \frac{K_t \sin(kL)}{kP} \right) \cos(kL) - \frac{\sin(kL)}{k} \left( \frac{-K_t}{P} + \frac{K_t \cos(kL)}{P} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\cos(kL) - \frac{\cos(kL) K_t \cdot L}{P} + \frac{\cos(kL) \sin(kL)}{kP} K_t - \frac{\sin(kL) \cos(kL)}{kP} K_t + \frac{\sin(kL) K_t}{kP} = 0 \rightarrow$$

$$\cos(kL) - \frac{\cos(kL) K_t \cdot L}{P} + \frac{\sin(kL) K_t}{kP} = 0 \rightarrow$$

$$\cos(kL) \left( 1 - \frac{K_t \cdot L}{P} \right) + \frac{\sin(kL) K_t}{kP} = 0$$

şeklinde sadeleşmiş ifade bulunmaktadır. Aşağıda bu örnek kolon için üç farklı yay rijitliği değeri için farklı kritik burkulma yükü değerleri elde edilmiştir. Burada  $f$  bir katsayıdır.

$$k^2 = \frac{P}{EI}, \quad K_t = f \frac{EI}{L^3} \text{ ifadeleri kullanılarak}$$

$$f=1 \text{ için} \quad K_t = \frac{EI}{L^3} \quad P_{kr} = 0,3316 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

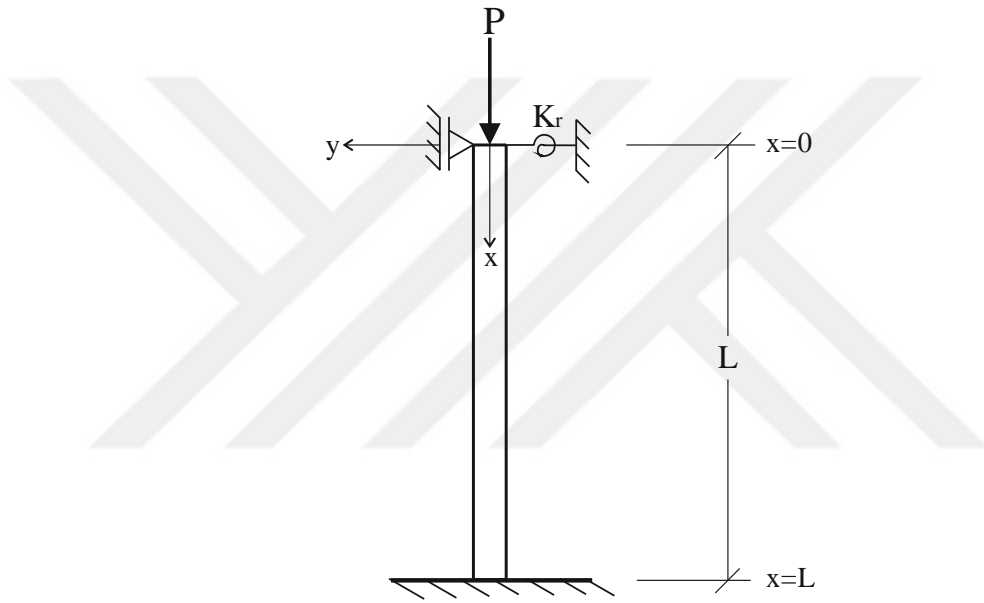
$$f=3 \text{ için} \quad K_t = \frac{3EI}{L^3} \quad P_{kr} = 0,4922 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$f=10 \text{ için} \quad K_t = \frac{10EI}{L^3} \quad P_{kr} \cong 1,00 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{değerleri Matlab programı ile elde}$$

edilmiştir. Elde edilen sonuçlarla çökme yayının rijitliği arttıkça gerekli burkulma yükü değerinin de arttığı gözlenmektedir.

### 3.2.2.2. Altta ankastre üstte dönme yaylı ve kayıcı mesnetli kolonun burkulma yükünün belirlenmesi

Altta ankastre üstte dönme yaylı ve kayıcı mesnetli narin bir kolonun burkulma yükü koşulunun belirlenmesi için (3.13)'teki transfer matrisi ifadesinde kolon uç koşulları yerlerine yazılarak çözüm yapılmaktadır. Aşağıda Şekil 3.8'de üstte elastik dönme yaylı ve kayıcı mesnetli bir kolon görülmektedir. Buna göre;



Şekil 3.8. Altta ankastre üstte dönme yaylı ve kayıcı mesnetli kolon

Yukarıdaki şekilde  $K_r$  dönme yayının rijitliğini göstermektedir. Kolon uç koşulları:  $y(0)=0$ ,  $M(0)=-K_r y'(0)$ ;  $y(L)=0$ ,  $M(L)=0$ 'dır. Buna göre;  $[T]$  transfer matrisi ifadesi aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta(L) \\ 0 \\ V(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta(0) \\ -K_r \cdot y'(0) \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

Kolon uç koşulları yardımıyla ifade sadeleştirilirse;

$$\left. \begin{aligned} 0 &= T_{12}\theta(0) + T_{13}(-K_r \cdot \theta(0)) + T_{14}V(0) \\ 0 &= T_{32}\theta(0) + T_{33}(-K_r \cdot \theta(0)) + T_{34}V(0) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{düzenlenirse}} \begin{aligned} 0 &= (T_{12} - T_{13}K_r)\theta(0) + T_{14}V(0) \\ 0 &= (T_{32} - T_{33}K_r)\theta(0) + T_{34}V(0) \end{aligned}$$

Haline dönüşmektedir. Yukarıdaki ifadenin matrise dönüştürülmüş hali;

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_{12} - T_{13}K_r) & T_{14} \\ (T_{32} - T_{33}K_r) & T_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ V(0) \end{Bmatrix}$$

şeklinde olmaktadır. Bu ifadede  $\det[ ] = 0$  olmalıdır.

$$(T_{12} - T_{13}K_r)T_{34} - T_{14}(T_{32} - T_{33}K_r) = 0$$

Elde edilen bu ifade ile altta ankastre üstte dönme yaylı ve kayıcı mesnetlenmiş kolon için kapalı formdaki burkulma koşulu elde edilmiş olmaktadır. İlgili  $T_{ij}$  terimleri yerlerine yazılarak istenen kolon burkulma koşulunun açık formu elde edilmektedir.

$$\left[ \frac{\sin(kL)}{k} \left( K_r - \frac{(-1 + \cos(kL))}{P} \right) \right] \frac{\sin(kL)}{k} - 1 \cdot \left[ \frac{P \sin(kL)}{k} - K_r \cos(kL) \right] = 0 \rightarrow$$

$$\left( \frac{\sin(kL)}{k} \right)^2 \left( K_r + \frac{1}{P} - \frac{\cos(kL)}{P} \right) - \frac{P \sin(kL)}{k} + K_r \cdot \cos(kL) = 0$$

Burada; L kolon boyu, P etkiyen dış yük,  $K_r$  rotasyonel (dönme) yay sabitidir. Yukarıdaki sadeleşmiş ifade bulunmaktadır. Aşağıda bu örnek kolon için üç farklı yay rijitliği değeri için farklı kritik burkulma yükü değerleri elde edilmiştir. Burada  $f$  bir katsayıdır.

$$k^2 = \frac{P}{EI}, \quad K_r = f \frac{3EI}{L} \quad \text{ifadeleri kullanılarak,}$$

$$f=1 \text{ için } K_r = \frac{3EI}{L}, \quad P_{kr} = 1.406 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$f=3 \text{ için } K_r = \frac{9EI}{L}, \quad P_{kr} = 1.703 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



$f=10$  için  $K_r = \frac{30EI}{L}$  ,  $P_{kr} = 1.920 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$  değerleri Matlab programı ile elde edilmiştir.

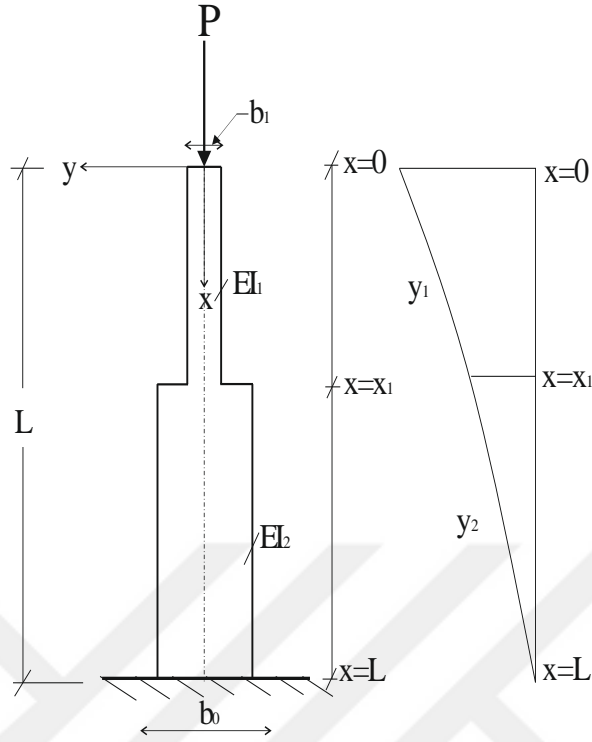
Elde edilen bu sonuçlarla beklendiği gibi dönme yayının rijitliği arttıkça gerekli burkulma yükü değerinin de arttığı görülmektedir.

### 3.2.3. Değişken kesitli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi

Bir elemandaki burkulma yükünün belirlenmesinde etken olan bir diğer parametre eleman kesitinde yükün olduğu eksen boyunca eleman kesitinin sabit olmamasıdır. Bu durumda her bir kesit için ayrı bir hesaplama durumu gerekebilmektedir. Bu çalışmada ilk olarak ani değişen ‘bir’ kesit geçiş yerine sahip bir kolon için transfer matrisi ifadesi elde edilmiştir. Daha sonra kesiti sürekli değişen bir kolon elemanı bölümlere ayrılarak tıpkı kesiti ani değişen kolon örneğine benzetilerek burkulma yükü yaklaşık olarak hesaplanmaktadır. Böylelikle değişken kesitli kolonlarda burkulma koşulunu verecek olan transfer matrisi ifadeleri elde edilmiştir.

#### 3.2.3.1. Ani değişken kesitli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi

Aşağıda tek kesit değişimi olan bir kolon örneği görülmektedir. Bu kolonun ara kesit yeri geçişinin hemen altı ve hemen üstünde ötelenme, dönme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerlerinin birbirine eşit olduğu bilindiğinden bu eşitlikten kolon elemanının en üst ucu ile en alt ucu arasındaki büyüklükler transfer matrisi ile ilişkilendirilmiştir.



Şekil 3.9. Eksenel yük altında ani değişken kesitli kolon ve ara kesit geçiş yeri

Kolonun ara kesit geçiş yerindeki büyüklüklere ait eşitlikler aşağıdaki (3.14) ifadesinde verilmektedir.

$$\begin{aligned}
 \text{Ötelenme} & : y_1(x_1) = y_2(x_1) \\
 \text{Dönme} & : y_1'(x_1) = y_2'(x_1) \\
 \text{Eğ.Mom.} & : M_1(x_1) = M_2(x_1) \\
 & (EI)_1 y_1''(x_1) = (EI)_2 y_2''(x_1) \\
 \text{Kesme Kuv.} & : V_1(x_1) = V_2(x_1) \\
 & (EI)_1 y_1'''(x_1) = (EI)_2 y_2'''(x_1)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Yukarıdaki bu ifadeler, birim matrisin de ilavesiyle aşağıdaki matris formlarında yazılabilmektedir. (3.15a), (3.15b).

$$\begin{Bmatrix} y_2(x_1) \\ \theta_2(x_1) \\ M_2(x_1) \\ V_2(x_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(x_1) \\ \theta_1(x_1) \\ M_1(x_1) \\ V_1(x_1) \end{Bmatrix} \tag{3.15a}$$

$$\begin{Bmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \\ (EI)_2 y_2''(x_1) \\ (EI)_2 y_2'''(x_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \\ (EI)_1 y_1''(x_1) \\ (EI)_1 y_1'''(x_1) \end{Bmatrix} \quad (3.15b)$$

$$\text{Burada, } y_2''(x_1) = \frac{(EI)_1}{(EI)_2} y_1''(x_1) \quad (3.16)$$

şeklinde yazılabilir. (3.16) denklemindeki  $(EI)_1/(EI)_2$  oranına işlemlerde kolaylık sağlaması açısından  $\frac{(EI)_1}{(EI)_2} = \alpha_1$  denilirse ve bu ifade (3.15b) ifadesinde yerine

yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \\ y_2''(x_1) \\ y_2'''(x_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \\ y_1''(x_1) \\ y_1'''(x_1) \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

yukarıdaki matrisi elde edilmektedir. Bu matris ile ara kesit geçiş yerinin üst kısmındaki bölümün alt ve üst ucu arasındaki büyüklükler, Gurel (2007) makalesinden Eq.(8) ve Eq.(11) ifadelerinden yararlanılarak aşağıdaki gibi düzenlenirse ;(  $x_1 = 0$ ) için

$$\begin{Bmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \\ y_1''(x_1) \\ y_1'''(x_1) \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \\ y_1''(0) \\ y_1'''(0) \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \\ y_2''(x_1) \\ y_2'''(x_1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} [T_1] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \\ y_1''(0) \\ y_1'''(0) \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

ve (3.19)'da yer alan aşağıdaki matrise  $[T_{IEI}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} [T_1] = [T_{1EI}]$$

matrisi denilirse,  $[T_{1EI}]$ :  $EI$  ların farklılığını hesaba katan matris adı verilebilmektedir.

Bu durumda;

$$\begin{Bmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \\ y_2''(x_1) \\ y_2'''(x_1) \end{Bmatrix} = [T_{1EI}] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \\ y_1''(0) \\ y_1'''(0) \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

son olarak (3.20) ifadesiyle kesitin üst bölümünün alt ve üst ucundaki büyüklükler ilişkilendirilmiş olmaktadır. Bu eşitlikten yola çıkılarak alt bölümün üst ucundaki büyüklükler de alt ucundaki büyüklüklerle ilişkilendirilerek bu kolonun burkulma yükü denklemi için gerekli transfer matrisi ifadesine ulaşılır. Buna göre kolonun alt bölümü için benzer işlemler yapılarak Gurel (2007)'den Eq.(8) ile

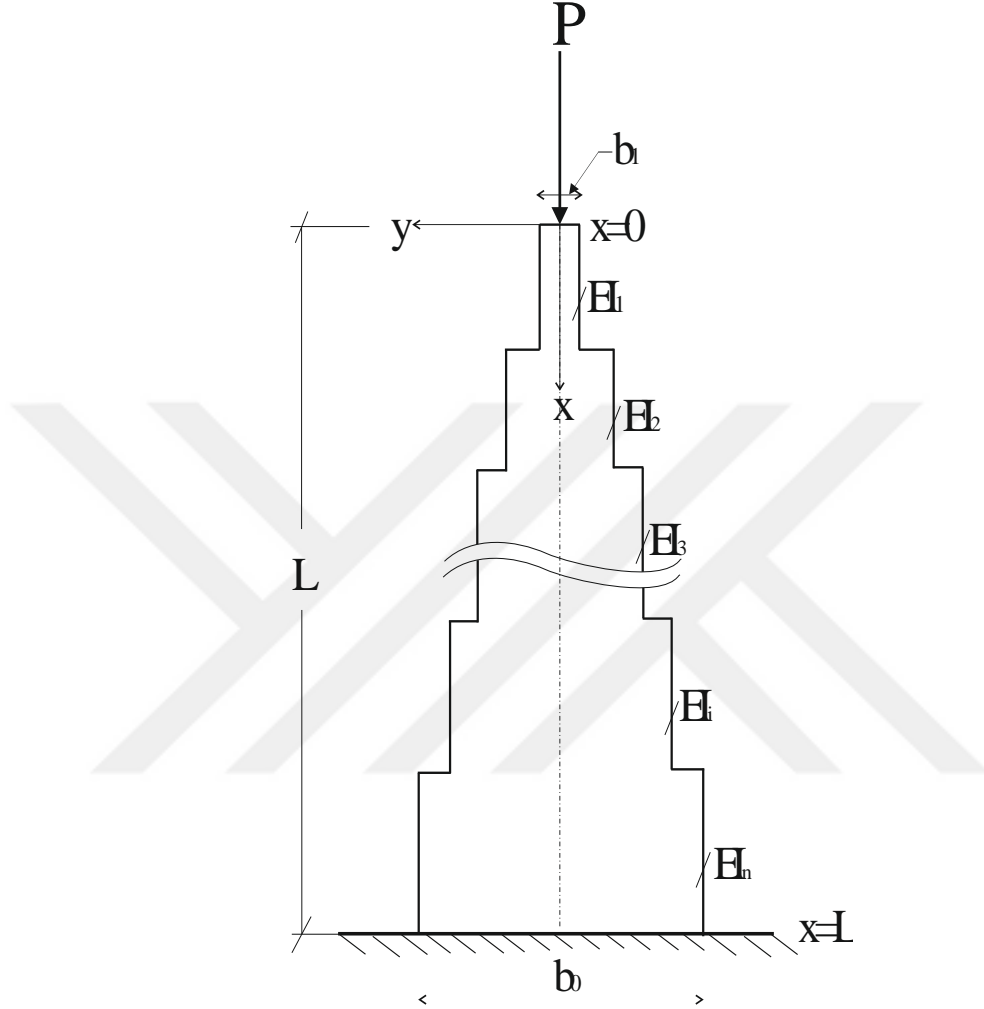
$$\begin{Bmatrix} y_2(x_2) \\ y_2'(x_2) \\ y_2''(x_2) \\ y_2'''(x_2) \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \\ y_2''(x_1) \\ y_2'''(x_1) \end{Bmatrix} \quad (3.18a)$$

ifadesine ulaşılabilir ve daha sonra (3.20) matris ifadesinde yerine yazılırsa bu ifade ( $x_2 = L$ ) için

$$\begin{Bmatrix} y_2(L) \\ y_2'(L) \\ y_2''(L) \\ y_2'''(L) \end{Bmatrix} = [T_2][T_{1EI}] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \\ y_1''(0) \\ y_1'''(0) \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

ifadesi haline gelmektedir. Elde edilen (3.21) matrisi tek kesit değişimi olan bir kolonun burkulma yükünün belirlenmesi için gerekli transfer matrisidir. Benzer şekilde birden

çok ara kesit geçiş yeri olan ani değişken kesitli kolon ( Şekil 3.10'da görüldüğü gibi) elemanlar için bu ifade türetilerek kullanılabilir.



Şekil 3.10. Aksenal yük altında ani değişken kesitli (n-1) tane kesit geçiş yerine sahip kolon.

Örneğin; n+1 elemana bölünmüş ve n ara kesit geçiş yeri olan bir kolon için n+1. ve n. bölümler arasındaki ilişkilendirmeyi sağlayan ifade

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1}(L) \\ y'_{n+1}(L) \\ y''_{n+1}(L) \\ y'''_{n+1}(L) \end{Bmatrix} = [T_{n+1}] \begin{Bmatrix} y_{n+1}(x_n) \\ y'_{n+1}(x_n) \\ y''_{n+1}(x_n) \\ y'''_{n+1}(x_n) \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

şeklinde verilebilmektedir. Bu ifade aşağıdaki gibi düzenlenerek;

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1}(L) \\ y'_{n+1}(L) \\ y''_{n+1}(L) \\ y'''_{n+1}(L) \end{Bmatrix} = [T_{n+1}][T_{nEI}] \dots [T_{1EI}] \begin{Bmatrix} y_{n+1}(0) \\ y'_{n+1}(0) \\ y''_{n+1}(0) \\ y'''_{n+1}(0) \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada  $[T_{n+1}][T_{nEI}] \dots [T_{1EI}]$  ifadesine  $[T]$  denilirse

$$[T_{n+1}][T_{nEI}] \dots [T_{1EI}] = [T]$$

ve eşitliği son olarak (3.22) matrisine uygulanırsa aşağıdaki (3.24) matrisi elde edilmektedir.

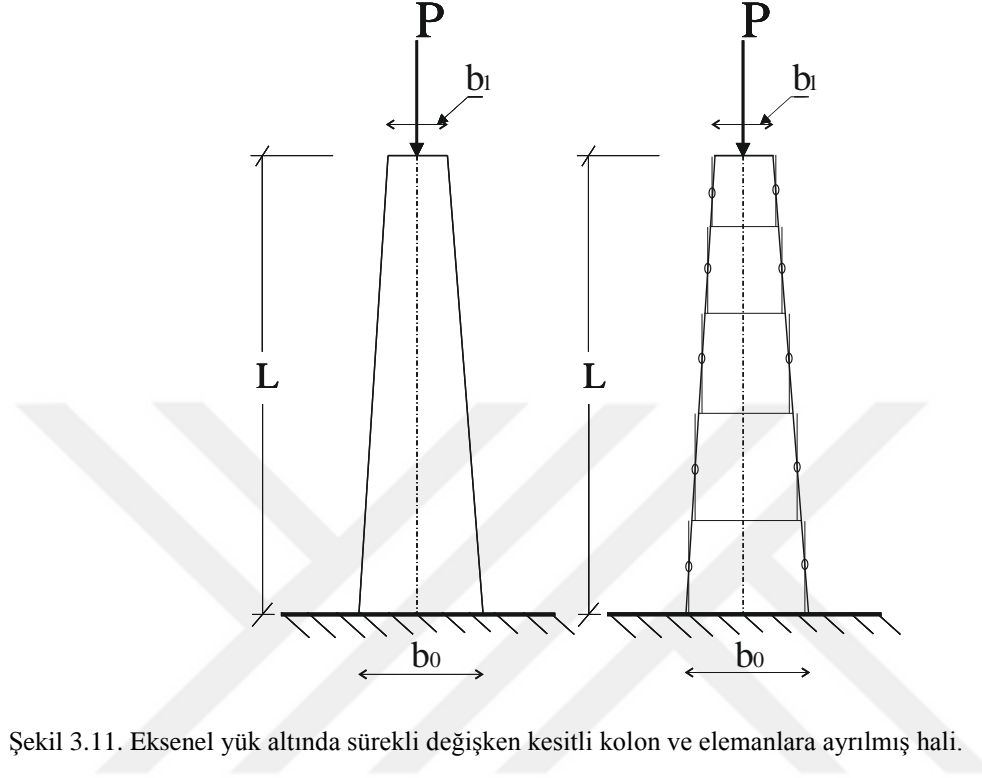
$$\begin{Bmatrix} y_{n+1}(L) \\ y'_{n+1}(L) \\ y''_{n+1}(L) \\ y'''_{n+1}(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y'_1(0) \\ y''_1(0) \\ y'''_1(0) \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Yukarıdaki matris ifadesi ile bu tarz kolon problemde kullanılabilir transfer matrisinin en genel hali elde edilmiş olmaktadır. Bu transfer matrisi kolonun en alt ve en üst ucu ile beraber her bir bölümün alt ve üst uçları arasındaki büyüklüklerin ardışık olarak ilişkilendirilmesinin toplamı halinde kolonun transfer matrisi elde edilerek buradan transfer matrisinin yardımıyla gereken burkulma yükünün hesaplanması sağlanmaktadır.

### 3.2.3.1. Sürekli değişken kesitli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi

Kesiti sürekli değişen kolon elemanların burkulma yükünün belirlenmesi incelendiğinde kesitler eleman boyunca lineer veya parabolik bir değişim söz konusu olabilmektedir. Bu sebeple işlemlerde kolaylık sağlamak amacıyla ele alınan kolon yeter sayıda elemana bölünerek bir nevi ani değişken kesitli kolon olarak çözülebilmektedir. Edinilen sonuç yaklaşık bir değerdir. Ancak ele alınan elemanın bölüdüğü bölüm sayısı arttıkça belirlenen burkulma yükü değerinin doğruluğu artmaktadır. Örneğin; Şekil 3.11' deki gibi kesiti lineer değişen bir kolon elemanın çözümde kolaylık olması açısından beş bölüme bölünerek çözülebilmektedir. Bu şekilde

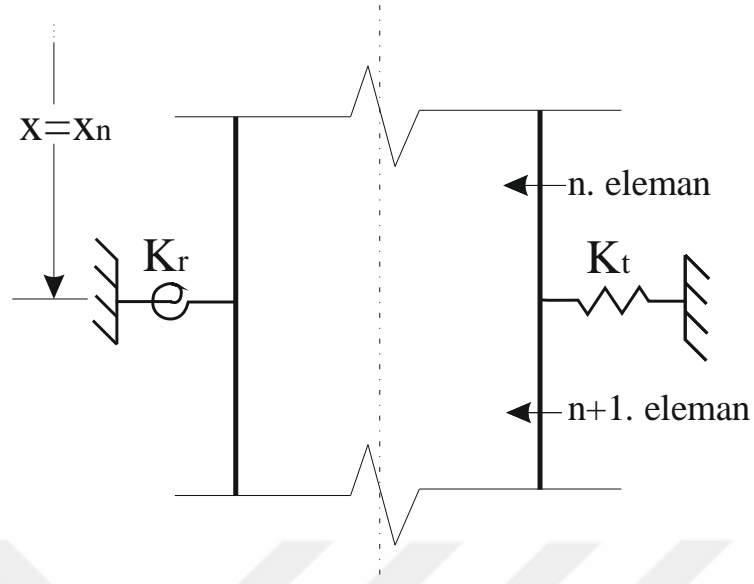
ani değişken kesitli kolona dönüştürülen bu eleman için (3.24) matrisi rahatlıkla uygulanabilmektedir.



Şekil 3.11. Eksenel yük altında sürekli değişken kesitli kolon ve elemanlara ayrılmış hali.

### 3.2.4. Ara elastik mesnetli kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi

Ara elastik mesnetli kolonlar bina, köprü gibi yapılarda çoğunlukla kullanılmaktadır. Bu sebeple bu yapılardaki eksenel basınç yüküyle yüklenen kolonların burkulma yükünün belirlenmesi önem taşımaktadır. Bu kolonların burkulma yükünün belirlenmesi için gerekli transfer matrisinin elde edilmesi aşamasında Gurel (2007)'den yararlanılmıştır. Aşağıda Şekil 3.12' de verilen ara elastik mesnetli kolonun burkulma yükünün belirlenmesi hususunda, kolon elemanın elastik mesnetlerden önceki (n.) ve sonraki (n+1.) kısmı olmak üzere iki bölüme ayrılarak çözüm yapılmıştır.



Şekil 3.12. Ara elastik ötelenme ve dönme mesnetli kolon

Burada önceki bölümlerden elde edilen bilgilerle aşağıdaki gibi denklemler kurularak (3.25) ve (3.26) ifadelerine ulaşılmaktadır.

$$\begin{aligned}
 \text{Ötelenme} & : y_{n+1}(x_n) = y_n(x_n) \\
 \text{Dönme} & : \theta_{n+1}(x_n) = \theta_n(x_n) \\
 \text{Eğ. Mom.} & : M_{n+1}(x_n) = M_n(x_n) - K_r \theta_n(x_n) \\
 \text{Kesme Kuv.} & : V_{n+1}(x_n) = V_n(x_n) - K_t y_n(x_n)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bu ifadeyle yukarıdaki gibi burkulma yükü belirlenmek istenen ara elastik ötelenme ve dönme mesnetli kolonun mesnetli kısmı için transfer matrisi ifadesi elde edilmektedir. Tüm kolonun burkulma yükünün elde edilmesi için (3.22), (3.23) ifadelerinde verilen matrislerin (3.26) ifadesine uyarlanmasıyla (3.27) matrisi elde edilerek burkulma yükünün belirlenmesi için gereken transfer matrisi belirlenmektedir. Bunun yanı sıra sadece ara ötelenme elastik mesnetli ve sadece dönme elastik mesnetli kolonlar için de ayrı ayrı transfer matrisi ifadeleri elde edilebilir.

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1}(x_n) \\ \theta_{n+1}(x_n) \\ M_{n+1}(x_n) \\ V_{n+1}(x_n) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_r & 1 & 0 \\ -K_t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n(x_n) \\ \theta_n(x_n) \\ M_n(x_n) \\ V_n(x_n) \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$



Burada  $[T_{1E}]$ : Elastik ara mesnet matrisidir ve  $[T_{n+1}][T_{nE}] \dots [T_{1E}]$  ifadesine  $[T]$  denilirse;

$$[T_{n+1}][T_{nE}] \dots [T_{1E}] = [T]$$

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1}(L) \\ \theta_{n+1}(L) \\ M_{n+1}(L) \\ V_{n+1}(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ \theta_1(0) \\ M_1(0) \\ V_1(0) \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

yukarıdaki bu son ifadeyle ara elastik mesnetli kolon için burkulma koşulunu verecek ifade elde edilmiş olmaktadır.

### 3.2.5. Tek çatlaklı kolonlarda burkulma yükünün belirlenmesi

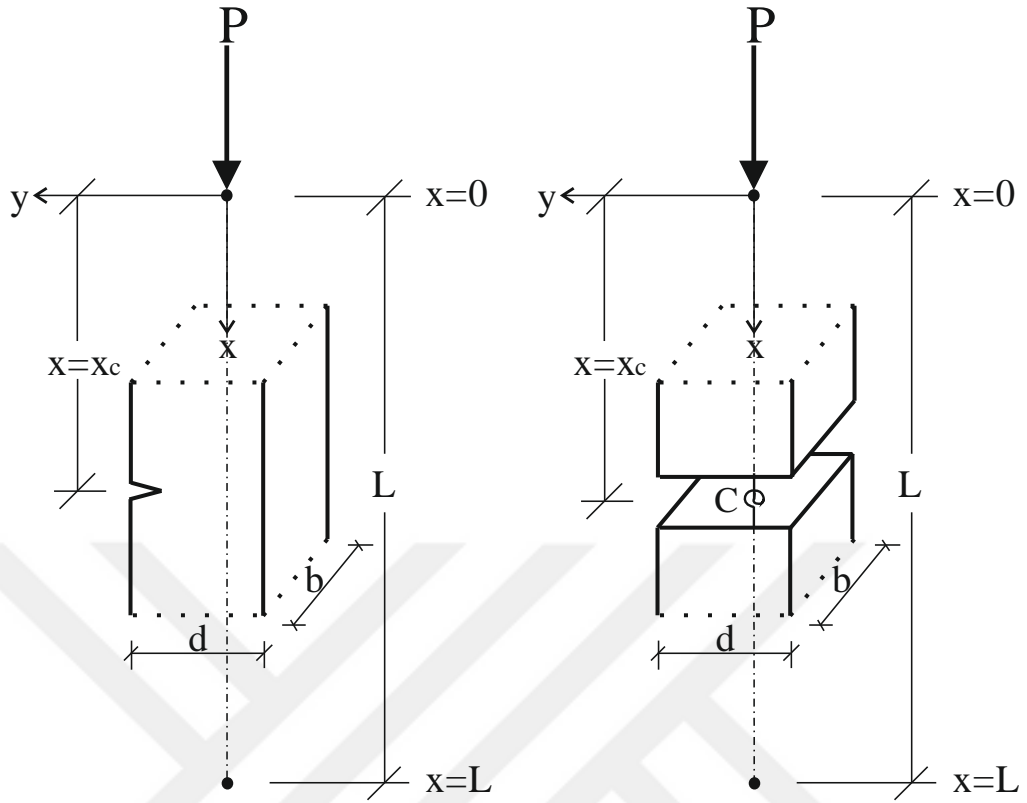
Kolonlar çatlak gibi kusurlar da içerebilmektedir. Tez çalışmasının bu bölümünde sunulan matris ifadeleri için Gurel (2007)'den yararlanılmaktadır. Burkulma koşulunun genel olması amacıyla başlangıçta kolonun mesnet şartları belirtilmemiştir. İlerlemeyen ve  $a$  derinliğine sahip çatlak, kolonun üst ucundan itibaren  $x_c$  mesafede bulunmaktadır. Kolonun matematik modeli Şekil 3.13'te görülmektedir. Burada, çatlaklı kesit esnekliği  $C$  olan bir dönme yayı ile modellenmektedir. Çatlak derinliği  $a$  olan ve kesit yüksekliği  $d$ 'nin bir fonksiyonu olan  $C$ , Shifrin ve Ruotolo (1999)'da şöyle verilmektedir:

$$C = 5.346df(\xi)$$

Yukarıdaki bu ifadeye  $\xi = a/d$  boyutsuz çatlak derinliğidir ve  $f(\xi)$  boyutsuz yerel esneklik fonksiyonudur.  $f(\xi)$ , Shifrin ve Ruotolo (1999)'da şöyle ifade verilmektedir:

$$f(\xi) = 1.8624\xi^2 - 3.95\xi^3 + 16.375\xi^4 - 37.226\xi^5 + 76.81\xi^6 - 126.9\xi^7 + 172\xi^8 - 143.97\xi^9 + 66.56\xi^{10}$$

Yukarıdaki bu ifade şekil değiştirme enerjisi fonksiyonundan elde edilmektedir.



Şekil 3.13. İlerlemeyen tek kenar çatlğa sahip, dikdörtgen kesitli narin bir kolonun matematik modeli

Yukarıda Şekil 3.13'te görülen ilerlemeyen tek kenar çatlğa sahip, dikdörtgen kesitli narin bir kolonun matematik modelinde dönme yayı ile kolonun iki bölgeye ayrıldığı ve bu bölgelerin sınırlarının (1. Bölge:  $0 \leq x \leq x_c$ , 2. Bölge:  $x_c \leq x \leq L$ ) olduğu görülmektedir.

$$\text{Ötelenme} : y_1(x_c) = y_2(x_c)$$

$$\text{Eğ. Mom.} : M_1(x_c) = M_2(x_c)$$

$$\text{Kesme Kuv.} : V_1(x_c) = V_2(x_c)$$

$$\text{Dönme} : \theta_1(x_c) - \theta_2(x_c) = Cy''(x_c)$$

$$= -C \frac{M_1(x_c)}{EI}$$

(3.28)

Yukarıdaki ifadeler matris formunda aşağıdaki gibi verilebilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} y_2(x_c) \\ y_2'(x_c) \\ y_2''(x_c) \\ y_2'''(x_c) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-C}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(x_c) \\ y_1'(x_c) \\ y_1''(x_c) \\ y_1'''(x_c) \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

Aşağıda kolonun üst bölümünün transfer matrisi ifadesi (3.30)'da ile alt bölümünün transfer matrisi ifadesi (3.31)'de ve dönme yayı kesitinin transfer matrisi ifadesi de (3.32)'de verilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} y_1(x_c) \\ y_1'(x_c) \\ y_1''(x_c) \\ y_1'''(x_c) \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \\ y_1''(0) \\ y_1'''(0) \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{Bmatrix} y_2(L) \\ y_2'(L) \\ y_2''(L) \\ y_2'''(L) \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} y_2(x_c) \\ y_2'(x_c) \\ y_2''(x_c) \\ y_2'''(x_c) \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{Bmatrix} y_2(x_c) \\ y_2'(x_c) \\ y_2''(x_c) \\ y_2'''(x_c) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-C}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(x_c) \\ y_1'(x_c) \\ y_1''(x_c) \\ y_1'''(x_c) \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

$$[T_{1c}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-C}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [T_1] \quad (3.33)$$

Burada  $[T_{1c}]$ : çatlak kesiti esnekliğini dikkate alan matris olarak adlandırılmaktadır.

Yukarıdaki (3.30), (3.31) ve (3.32) ifadeleri düzenlenerek  $[T_2][T_{1c}]$  ifadesine de  $[T]$  denilirse

$$[T_2][T_{1c}] = [T]$$

İfade son olarak (3.34)'teki hale gelmektedir. Bu ifade ilerlemeyen tek kenar çatlğa sahip, dikdörtgen kesitli narin bir kolonun burkulma koşulunu verecek ifadedir.

$$\begin{Bmatrix} y_2(L) \\ y_2'(L) \\ y_2''(L) \\ y_2'''(L) \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \\ y_1''(0) \\ y_1'''(0) \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

### 3.5. Çalışma Hakkında Genel İrdemeler

Yukarıda ele alınmış olan kolon örneklerinden görüldüğü gibi Transfer Matrisi Yöntemi hemen her tür narin kolonun burkulma yüklerinin belirlenmesinde oldukça pratik bir yöntemdir. Bu özelliğinden dolayı, uyarlanma koşuluyla çok özel kolon ve diğer elemanların burkulma problemlerine uygulanma potansiyeli vardır. Örneğin, Bakeer (2016) Transfer Matrisi Yöntemini yığma duvarların kararlılık problemleri üzerinde başarıyla uygulamıştır.

#### 4. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, başlangıçta stabilite (kararlılık) kavramından bahsedilmiş, ardından konu ile ilgili önceki çalışmalardan bahsedilmiştir. Daha sonra narin kolonların stabilite problemlerinin çözümü ve burkulma yüklerinin belirlenmesi için Transfer Matrisi Yöntemi açıklanmıştır. Yöntem değişik mesnet şartlarına sahip kolonlar üzerinde uygulanarak, bu kolonların burkulma yükleri elde edilmiştir. Sadece klasik mesnetli kolonlar değil, elastik mesnetli, değişken kesitli ve çatlaklı kolonlar ele alınmıştır. Bu yapılanlar sonucunda Transfer Matrisi Yönteminin kolon burkulma problemlerinin incelenmesinde oldukça pratik bir yöntem olduğu anlaşılmıştır.

Bu tez çalışmasında klasik bir konu ele alınmış olmasına karşılık, literatürde çok da fazla kullanılmamış olan bir yöntemin uygulanmasıyla kolon stabilite problemlerine toplu bir bakış yapılmıştır. Böylece çalışma belli düzeyde özgünlüğü olan bir çalışma niteliğinde olmuştur.

Görülmüştür ki Transfer Matrisi Yöntemi Mekanikteki tek boyutlu problemlerin çözümü için kullanılmaya ve geliştirilmeye açık, elverişli bir yöntem olduğu görülmüştür. Bu özelliği ile yöntemin, örneğin; fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemedен ya da çekme almayan malzemedен oluşturulmuş kolonların stabilite problemlerine dahi uygulanma potansiyeli vardır. İleride bu konuların incelenmesi düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR

- BAKEER, T., 2016. Assessment The Stability Of Masonry Walls By The Transfer Matrix Method. *Engineering Structures*, 110, 1-20.
- BAZANT, Z. P., CEDOLIN, L., 1991. *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, New York.
- BAZANT, Z. P., 2000. Structural Stability. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 55-67.
- BEER, F. P., JOHNSTON, E.R., 2003. *Cisimlerin Mukavemeti*. Çeviri: Ö.R. Akgün, O. Yazıcıoğlu, T. Kotil, Beta Yayınevi.
- BİLGEHAN, M., GÜREL, M.A., PEKGÖKGÖZ, R.K., KISA, M., 2011. Çatlaklı Basınç Çubuklarındaki Burkulma Probleminin Transfer Matrisi Yöntemi Ve Yapay Sinir Ağları İle İncelenmesi. *e-Journal of New World Sciences Academy Engineering Sciences*, 1A0126, 6, (1), 62-70.
- BİLGEHAN, M., GÜREL, M.A., PEKGÖKGÖZ, R.K., KISA, M., 2012. Buckling load estimation of cracked columns using artificial neural network modeling technique. *Journal of Civil Engineering and Management*, 18:4, 568-579.
- EROL, H., ŞENGEL, H.S., ÖZÇELİKÖRS, Y., 2012. E. Osmangazi Üni. İnşaat Müh. Böl. Mukavemet II Ders Notları.
- GUREL, M. A., KISA, M., 2005. Buckling of Slender Prismatic Columns with a Single Edge Crack under Concentric Vertical Loads. *Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences*, 29, 185-193.
- GUREL, M. A., 2007. Buckling of Slender Prismatic Circular Columns Weakened by Multiple Edge Cracks. *Acta Mechanica*, 188, 1-19.
- Handbook of Structural Stability. 1971. Column Research Committee of Japan, Corona, Tokyo, Japan.
- İNAN, M., 1961. The Carry-over Matrix In Elastomechanics. *Bull. Tech. Univ.* 14, 61. İstanbul.
- İNAN, M., 1988. *Cisimlerin Mukavemeti*. İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı, Yayın No:25, İstanbul.
- LI, Q. S., 2001. Buckling of Multi-Step Cracked Columns with Shear Deformation. *Engineering Structures*, 23, 356-364.
- OMURTAG, M.H., 2007. *Mukavemet Cilt 2*, Birsen Yayınevi.
- OMURTAG, M.H., 2012. *Statik ve Mukavemet*. Nobel Yayın Dağıtım, 4. Baskı ISBN 978-9944-77-188-7.
- ÖZHENDEKÇİ, D., YTÜ İnşaat Müh. Böl. Çelik Yapılar I Ders Notları.
- SHIFRIN, E.I., RUOTOLO, R., 1999. Natural Frequencies of a Beam with an Arbitrary Number of Cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 222(3), 409-423.
- TAKAHASHI, I., 1998. Vibration and Stability of A Cracked Shaft Simultaneously Subjected To A Follower Force with An Axial Force. *Int. J. Solids Struct.* 35, 3071–3080.
- TAKAHASHI, I., 1999. Vibration and Stability of Non-uniform Cracked Timoshenko beam Subjected to Follower Force. *Comput. Struct.* 71, 585–591.
- TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M., 1961. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, Singapore.

- WANG, C. M., WANG, C. Y., REDDY, J. N., 2004. Exact Solutions for Buckling of Structural Members. CRC Press, Boca Raton, Florida.
- VABLE, M., 2012. Mechanics of Materials. Michigan Technological University, 2nd Edition, Townsend Dr, Houghton, ABD.
- ZHENG, D. Y., FAN, S. C., 2003. Vibration and Stability of Cracked Hollow-Sectional Beams. J. Sound Vibr. 267, 933–954.
- TS648, 1980. Çelik Yapıların Hesap ve Yapım Kuralları



## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Beyhan İPEKYÜZ  
**Uyruğu** : T.C.  
**Doğum Yeri ve Tarihi** : Bismil/DİYARBAKIR-1990  
**Telefon** : -  
**Faks** : -  
**e-mail** : beyhan.ipekyuz@gmail.com

### EĞİTİM

Derece	Adı	İlçe/İl	Bitirme Yılı
Lise	Bismil Anadolu Lisesi	Bismil /DİYARBAKIR	2004-08
Lisans	Harran Üniversitesi Merkez/ŞANLIURFA		2008-12

### İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-2015	Harran Üniversitesi Müh. Fak. İnşaat Böl.	Araştırma Görevlisi
2015 -	Dicle Üniversitesi Müh. Fak. İnşaat Böl.	Araştırma Görevlisi