T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

[-1,1] ARALIĞINDA BERNSTEİN-SCHURER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Gül Sinem KELEŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2018

Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, Gül Sinem KELEŞ' in hazırladığı **"$[-1,1]$ aralığında Bernstein-Schurer operatörlerinin yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı"** konulu bu çalışma 25/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy çokluğu ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman	: Doç. Dr. Aydın İZGİ	……………………..........
Üye	: Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN	……………………..........
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI	……………………..........

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

[-1,1] ARALIĞINDA BERNSTEİN-SCHURER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Gül Sinem KELEŞ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2018, Sayfa: 38

Bu tez, yaklaşım teorisindeki çalışmalara dayanmaktadır. Bernstein-Schurer operatörler dizisi $(G_n(f;x))$ in yaklaşım hızı ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Merkezi momentleri hesaplanmıştır. Sonra, Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar için, bu dizinin yaklaşımı gösterilmiştir. $G_n(f;x)$ operatörler dizisinin yaklaşımı Mapple programı kullanılarak grafikler ile incelenmiştir. $G_n(f;x)$ operatörler dizisinin bir fonksiyona yaklaşımının, bazı n ve x değerleri için nümerik değerler tablosu hazırlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatörler, Berstein-Schurer polinomları, yaklaşım hızı, Korovkin teoremi, düzgün yaklaşım.

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF BERNSTEIN-SCHURER OPERATORS AND RATE OF APPROXIMATION ON INTERVAL [-1,1]

Gül Sinem KELEŞ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ

Year : 2018, Page: 38

The thesis is based on study of approximation theory. Approximation and rate of approximation properties of Bernstein-Schurer sequences of operators ($G_n(f;x)$) investigated. Centripetal moments of $G_n(f;x)$ operator is estimated. Then Approximation properties of Bernstein-Schurer sequences of operators ($G_n(f;x)$) also investigated for the functions satisfy Lipschitz condition. The approximation of the $G_n(f;x)$ operator is shown graph using the Mapple program. For the chosen function, numeric values chart is given about the values of the some n and x for the approximation of operator $G_n(f;x)$ to the function.

KEY WORDS: Linear positive operators, Bernstein Schurer Polynomials, rate of approximation, Korovkin theorem, uniform approximation.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında büyük özveri ve sabırla beni yönlendiren, destekleyen, katkılarını esirgemeyen değerli danışman hocam, Doç. Dr. Aydın İZGİ' ye, Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI' ya, Arş. Gör. Harun ÇİÇEK'e hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve beni destekleyen sevgili babam Zekeriye KELEŞ'e, annem E. Gülsen KELEŞ'e, ağabeylerim H. İbrahim ve M. Ali KELEŞ' e ve tez çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarim Gülbahar AKYAR' a, Kübra ELMAS' a, Nadire Fulda ODABAŞI' na teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

$B_n(f;x)$	Bernstein polinom dizisi
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonların uzayı
$f_n(x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$G_n(f;x)$	$n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [-1,1]$ olmak üzere bir operatör dizisi
$[a,b]$	Kapalı aralık
$\Vert \quad \Vert$	Norm
$S_n(f;x)$	Schurer polinom dizisi
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin amacı, seçtiğimiz herhangi çalışılması zor olan bir fonksiyonun daha kullanışlı daha rahat işlem yapabileceğimiz başka bir fonksiyon cinsinden yazmaktır. Böylece fonksiyon hakkında daha rahat ve çalışabilir bilgi elde edilir.

Bernstein polinomları tanımlandıklarından (1912) beri, pek çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. O zamandan beri birçok genellemeleri ve modifikasyonları tanımlanmış, farklı açılardan ele alınıp çalışılmış ve günümüzde hala çalışılmaktadır. Bu polinomlar esas olarak Weierstrass teoreminin ispatı için tanımlanıp çalışılmıştır. 1951'de Korovkin, lineer pozitif operatörleri tanımlayıp, bu operatörlerin yaklaşım özelliğini veren meşhur teoremini ispatladıktan sonra, aynı zamanda bir lineer pozitif operatör olan Bernstein polinomları daha ilgi çekici olmuş ve bunlarla ilgili çalışmalar hız kazanmıştır. 1962 yılında Schurer, Bernstein polinomlarını modifiye etmiş ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

Bu çalışmada,

$G_n(f;x) = \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k} f(\frac{2k}{n}-1), \qquad l \in \mathbb{N} \ \ -1 \leq x \leq 1$

şeklinde $[-1,1]$ aralığında Bernstein ve Schurer operatörlerinin bir modifikasyonu olarak verilmiştir ve tanımladığımız yeni operatörün $[-1,1]$ simetrik aralığında lineer pozitif olduğu, Korovkin teoremi altındaki yaklaşımları incelenecektir. Bunlara ek olarak, süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı ve momentleri hesaplanmıştır. Ayrıca Mapple bilgisayar programı yardımıyla, bazı fonksiyonlara belirlediğimiz farklı n ve x değerleri için nümerik tablosu ve yaklaşım grafikleri hazırlanmıştır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu tanım ve teoremler genel halde geçerli olduğu için çoğunda kaynak verilmemiştir.

Tanım 1.1.1.

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\alpha \in A$ olsun.
f fonksiyonu α noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki,

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

dır.

Tanım 1.1.2.

$A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$, öyle ki $|x-t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall\, x, t \in A$ için

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

dır.

Teorem 1.1.1.

Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon bu aralık üzerinde düzgün süreklidir.

Tanım 1.1.3.

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere $L: X \to Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir.

Tanım 1.1.4.

Lineer L operatörünün X uzayından Y uzayına dönüşüm yaptığını kabul edelim.

$$\|L(f;x)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlıyorsa L operatörüne sınırlı operatör denir. C sabitinin en küçüğüne L operatörünün normu denir. $\|L\|_{x\to y}$ veya $\|L\|$ ile gösterilir (Hacıyev).

Tanım 1.1.5.

X lineer bir uzay olsun. $f(x)$, g(x) X uzayında herhangi iki fonksiyon, iki keyfi reel sayı olmak üzere L operatörü,

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f;x) + \beta L(g;x)$$

şartını sağlıyorsa L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.1.6.

Lineer operatörler kümesi içinde bir alt sınıf olan pozitif operatörler vardır.
$X^+ = \{\, f \in X, f(x) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{\, g \in Y, g(x) \geq 0\}$ olsun.
Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonu pozitif fonksiyona dönüşüyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir (H. Hacı Salihoğlu).

Tanım 1.1.7.

$l = \{L: C[a,b] \to C[a,b] : L$ lineer pozitif operatör$\}$ $\mathbb{N} = \{1,2,3 \ldots\}$ olsun. L: $\mathbb{N} \to L$ şeklinde tanımlı L fonksiyonuna lineer pozitif operatörler dizisi denir. (L_n) ile gösterilir. $L(\mathbb{N}) = \{L_1, L_2 L_3, \ldots\}$ şeklinde olur.

Tanım 1.1.8.

$A \subset \mathbb{R}$ ve A üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $F(A)$ olsun.

$k: \mathbb{N} \to F(A)$ şeklindeki k fonksiyonuna fonksiyon dizisi denir. (f_n) ile gösterilir ve terimleri f_1, f_2, f_3 ... şeklindedir.

Tanım 1.1.9.

Kapalı [a,b] aralığı üzerinde tanımlanmış ve aynı zamanda sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[\mathrm{a,b}]$ fonksiyon uzayı denir.

Tanım 1.1.10.

$f \in C[a,b]$ olmak üzere $C[a,b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.11.

(g_n) , $C[\mathrm{a,b}]$ fonksiyon uzayında tanımlı fonksiyon dizisi olsun. (g_n) fonksiyonlar dizisinin g fonksiyonuna $C[\mathrm{a,b}]$ normunda düzgün yakınsak olması için tanım kümesinde ki $\forall\, x \in A$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{C[\mathrm{a,b}]} = \lim_{n\to\infty} \max_{a \le x \le b} |g_n(x) - g(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. $g_n(x) \rightrightarrows g(x),\ (n \to \infty)$ ile ifade edilir.

Teorem 1.1.2.

$$f(x) \le g(x) \Rightarrow L(f(x); x) \le L(g(x); x)$$

yani lineer pozitif operatörler monoton artandır.

İspat

L lineer pozitif operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \ge 0$ olduğunda $L(f; x) \ge 0$ olur. O halde her x için,

$$f(x) \le g(x)$$

olduğunda,

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

olur. L operatörü pozitif olduğundan;

$$L(g(x) - f(x); x) \geq 0$$

olur. L operatörü lineer olduğundan;

$$L(g(x); x) - L(f(x); x) \geq 0 \Rightarrow L(f(x); x) \leq L(g(x); x)$$

olur. İspat tamamlanmış olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev,1995).

Teorem 1.1.3.

L bir lineer pozitif operatör olsun. O halde,

$$|L(g)| \leq L(|g|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Herhangi bir g fonksiyonu için;

$$-|g| \leq g \leq |g| \tag{1.1}$$

dir. L operatörü lineerlik özelliğini sağladığından dolayı monoton artandır. O halde

$$L(-|g|) \leq L(g) \leq L(|g|)$$

yazabiliriz. L lineer olduğundan;

$$L(-|g|) = -L(|g|)$$

dir. Bu eşitlik (1.1) de yerine yazılırsa;

$$-L(g) \leq L(g) \leq L(|g|) \Rightarrow |L(g)| \leq L(|g|)$$

olur. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.12.

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \epsilon A$, x_0 A nın bir yığılma noktası olsun ve $f: A \to B$ fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa $x = x_0$ noktasında türevlenebilir denir. Bu limit f nin x_0 noktasındaki türevi adını alır. $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $Df(x_0)$ gibi farklı sembollerle gösterilir.

Tanım 1.1.13.

$n \geq 1$ olmak üzere P_n, n-inci dereceden bir polinom ve f ile g de $x = 0$ noktasında n-inci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$$

olmak üzere;

$$f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$$

yazılıyorsa P_n polinomuna $x = 0$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomu denir.

Tanım 1.1.14.

f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi denir.

Tanım 1.1.15.

$p > 1$ ve $q > 0$ reel sayıları

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şartı sağlansın. Bu durumda $\forall\ (a_k) \in l_p$, $\forall\ (b_k) \in l_q$ dizileri için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k b_k| \leq (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir. Burada $p = q = 2$ için bu eşitsizlik Cauchy Scwarz eşitsizliğidir.

Teorem 1.1.4.

$x \in [0,1]$, $0 \le a_{k,n} \le 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(a_{k,n}\right) P_{k,n}(x), \quad P_{k,n}(x) \ge 0 \text{ olur.}$$

Pozitif operatör dizisinin $n \to \infty$ için [0,1] aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için üç koşul aşağıdaki gibidir. H. Bohman,

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{1.2}$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{1.3}$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{1.4}$$

şeklinde ifade etmiştir. Görülüyor ki Bohman'ın araştırdığı operatörün değeri f fonksiyonunun [0,1] aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

P. P. Korovkin, 1953 yılında Bohman'ın koşullarının genel halinin de geçerli olduğunu görmüş ve genel bir teorem ispatlamıştır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995; Korovkin, 1953).

Teorem 1.1.5. (P. P. Korovkin Teoremi)

Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi [a,b] aralığında (1.2), (1.3) ve (1.4) koşullarını sağlıyorsa bu takdirde C[a,b] uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı her hangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \qquad a \le x \le b$$

olur. Ya da bu ifadeye eşdeğer olarak aşağıdaki gösterimler de kullanılabilir:

$$\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

$$\lim_{n \to \infty} \max_{a \le x \le b} |L_n(f;x) - f(x)| = 0.$$

İspat

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir $M > 0$ sayısı bulabiliriz ki, tüm x' ler için;

$$|f(x)| \leq M \tag{1.5}$$

sağlanır. Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonlarının tanımı gereği $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki, $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a,b]$ için,

$$|t - x\,| < \delta \tag{1.6}$$

olduğunda;

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon \tag{1.7}$$

sağlanır.

(1.7) eşitsizliği; $x, t \in [a,b]$ olduğunda f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğu için, $x \in [a,b], t \notin [a,b]$ olduğunda ise f fonksiyonuna a ve b noktalarında, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için sağlanır.

f sınırlı olduğundan $\forall\, x \in [a,b]$; $|f(x)| \leq M,\;\; M > 0$ vardır.

$$|t-x| \geq \delta \Rightarrow \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{|t-x|}{\delta} \leq \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

$|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise (1.5) ve üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \leq 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olur. O halde;

$$|t-x| < \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|t-x| \geq \delta \text{ için } |f(t) - f(x)| \leq 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall\, t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için,

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{1.8}$$

dir. Şimdi (1.2), (1.3), (1.4)koşullarını sağlayan (L_n) lineer operatör dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_{c[a.b]} = 0$$

eşitliğini sağladığı gösterilmelidir.

L_n operatörünün lineerliğinden;

$$|L_n f(t); x - f(x)| = |L_n f(t); x) - f(x) + L_n\, f(x); x - \;L_n f(x); x)|$$

$$|L_n\, f(t); x) - L_n\, f(x); x + \;L_n f(x); x) - f(x)|$$

$$|L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)|$$

dir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılarak;

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n\, f(t) - f(x); x| + |f(x)||(L_n(1; x) - 1)| \tag{1.9}$$

elde edilir. (1.1) den

$$|L_n(f(t)-f(x);x)| \leq |L_n\,(|f(t)-f(x)|;x)|$$

şeklinde olur. Bu durumda (1.9) eşitsizliği;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)+\ M|(L_n(1;x)-1)|$$

şeklinde yazılır.(L_n) monoton artan olduğundan (1.7)'den;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n\left(\left(\varepsilon+2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\right);\mathrm{x}\right)+\mathrm{M}|L_n(1;x)-1| \tag{1.10}$$

elde edilir. Diğer taraftan (L_n) lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa

$$L_n\left(\left(\varepsilon+2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)\right)=L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(2M\frac{(t-x)^2}{\delta^2};\mathrm{x}\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}L_n(t^2-2xt+x^2;x)$$

$$=\ \varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x)-x^2-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)$$

$$=\ \varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x)-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)-x^2\}$$

$$=\ \varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x)-x^2)-2x(L_n(t;x)-x)+x^2(L_n(1;x)-1)\}$$

elde edilir. Bu ifadenin (1.9)'da yerine yazılmasıyla;

$$|(L_nf(t);x)-f(x)| \leq \varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x)-x^2)$$

$$-2x(L_n(t;x)-x)+x^2(L_n(1;x)-1)\}+M|(L_n(1;x)-1|$$

elde edilen bu ifade de (1.2), (1.3), (1.4) koşullarının kullanılmasıyla;

$$|(L_nf(t);x)-f(x)| \leq \varepsilon+\varepsilon 2\frac{M}{\delta^2}=\varepsilon\left(1+2\frac{M}{\delta^2}\right)$$

elde edilen bu ifadeyi $\forall\ \varepsilon' > 0$ için

$$|(L_nf(t);x)-f(x)| \leq \varepsilon'$$

sağlanır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}\|L_nf-f\|_{c[a,b]}=0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur

(Korovkin, 1953; Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.6.

$x\,\epsilon\,[0,1]$ için;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanan Bernstein polinomları için,

$$B_n(1;x) = 1$$

$$B_n(t;x) = x$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

eşitlikleri sağlanır. ($n \to \infty$) için, $B_n(1;x) \rightrightarrows 1$, $B_n(t;x) \rightrightarrows x$, $B_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ olduğundan Korovkin'in (1.2), (1.3) (1.4) şartlarını sağlar.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Son yıllarda lineer pozitif operatörler üzerinde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Operatörlerin günlük hayatta sayısal analiz, jeodezi, mühendislik, tıptaki görüntüleme sistemleri gibi birçok uygulama alanı vardır.

Yaklaşım teorisi alanında yapılan ilk çalışmalar Rus matematikçi P.L. Chebyshev'in sürekli bir f fonksiyonunun n dereceli

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

polinomunun yerine kullanılır mı sorusunu sormasıyla başlamıştır.

1885 yılında Alman matematikçi Wilhelm Weierstrass, $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde sürekli her f fonksiyonuna bir polinom ile yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Yaklaşım teorisi için bu ifade temeldir.

$C[a, b]$ de her f fonksiyonu bir $\varepsilon > 0$ için ve her $x \in [a, b]$ için;

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak biçimde

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

polinomu vardır.

1912'de Bernstein, bir $[a, b]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna yakınsayan polinomları toplam biçiminde bir lineer operatörler dizisi ile göstermiştir. Bu gösterim ile Weierstrass'ın teoreminin ispatı daha kolay olmuştur. Bernstein bu gösterim ile lineer operatörler teorisinin oluşmasını sağlamıştır.

1932 yılında Voronowskaja, Berntein polinomları için asimptotik yaklaşımı göstermiştir.

1935 yılında T. Popoviciu, Bernstein polinomları için süreklilik modülünü bulmuştur.

1937 yılında Chlodowsky $[0, b_n]$ aralığında $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ şartlarını sağlayan,

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{kb_n}{n}\right)(c_n)^k\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

polinom dizisini tanımlamış ve Chlodwsky, Berntein'ın operatöründe x yerine $\frac{x}{b_n}$ yazmıştır.

H. Bohman 1951 yılında lineer pozitif operatörler dizisinin sürekli bir fonksiyona yakınsaklığını [0,1] aralığında incelemiştir. Bohman'ın tanımladığı operatörü şöyledir.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(a_{k,n}\right)P_{k,n}(x)\ , \quad P_{k,n}(x) \geq 0.$$

1953 yılında Rus matematikçi ve iktisatçı Leonid Vitaliyeviç Kantoroviç, Bernstein polinomlarında integrallenebilir fonksiyonları tanımlamıştır.

$f \in L_1$ [0,1], $p \geq 1$ ve $x \in [0,1]$ şartları için;

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Korovkin ise 1953 yılında Bohman'ın ifadesini $[a, b]$ aralığında genelleyerek ispatlamıştır. Lineer pozitif operatörler için Bohman ve Korovkin'in teoremleri büyük yer tutar.

Bernstein operatörlerine 1990'lı yıllardan sonra düzenli olarak bilimsel çalışmalar yayınlanmakta ve her geçen gün yeni bilimsel çalışmalar yapılmaktadır. Taberska 1994 yılında bazı koşullar için mutlak sürekli fonksiyonlara Bernstein polinomu ile yaklaşım hızını göstermiştir.

2011 yılında Ayşegül Çilo' nun Doç. Dr Aydın İZGİ danışmanlığında başlayıp 2012 yılında bitirdiği yüksek lisans tezinde çalıştığı operatör Schurer tipinde modifiye edilmiştir. Bu operatör şöyledir;

$$C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{2k}{n}-1\right), \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Bu çalışmada;

$$G_n(f;x) = \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) \quad l \in \mathbb{R} - 1 \leq x \leq 1$$

şeklinde $[-1,1]$ aralığında Bernstein ve Schurer operatörlerinin bir modifikasyonu olarak verilen ve tanımladığımız bu yeni operatörün $[-1,1]$ simetrik aralığında giriş bölümünde de bahsettiğimiz özelliklerini inceleyeceğiz.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada, kaynaklar kısmında verilen çalışmalar detaylı olarak incelenmiş olup ilgili makale, kitaplar incelenmiştir.

3.2. Yöntem

Daha önce çalışılan operatörler, özellikleri ve kullanılan yöntemler incelenmiştir. Bu çalışmada Bernstein-Schurer operatörlerinin modifikasyonu olan $G_n(f;x)$ operatörü üzerinde benzer şekilde çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışma, nümerik değerler ve grafikler ile sonlandırılmıştır. Ayrıca çizilen bu grafiklerde Mapple programı kullanılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde $\mathrm{G_n}(f;x)$ operatörü tanımlanacak, bu operatörün lineer pozitif olduğu gösterilecek, Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenecek, merkezi momentleri bulunacaktır. Bunlara ek olarak $G_n(f;x)$ operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna ait yaklaşımını gösteren grafikler çizilecek ve bazı n ve x değerleri için nümerik değerler hesaplanacaktır.

Tanım 4.1.

Kabul edelim ki $x \in [-1,1]$ ve $f \in C[-1,1]$, $l \in \mathbb{N}$ olsun.

$$G_n(f;x) = \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $G_n(f;x)$ operatörü denir.

$G_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif olduğunu aşağıda görelim.

Lineerlik:

$\forall\, f,g \in [-1,1]$ ve $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için;

$$G_n\left(\left(\alpha f_{(t)} + \beta g_{(t)}\right);\right) = \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k}$$

$$\times \left[\alpha f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) + \beta g\left(\frac{2k}{n} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k} (\alpha f)\left(\frac{2k}{n} - 1\right)$$

$$+ \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k} (\beta g)\left(\frac{2k}{n} - 1\right)$$

$$= \alpha \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right)$$

$$+ \beta \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k} g\left(\frac{2k}{n} - 1\right)$$

$$= \alpha G_n(f(t);x) + \beta G_n(g(t);x)$$

olduğundan dolayı $G_n(f;x)$ lineer bir operatördür denir.

Pozitiflik:

$k, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [-1,1]$ için

$$f \geq 0 \Rightarrow G_n(f;x) = \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k \, (1-x)^{n+l-k} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) \geq 0$$

ise

$$G_n(f;x) \geq 0$$

olur.

Buradan (4.1) de tanımladığımız operatörün lineer ve pozitif olduğu görülür.

Lemma 4.1.1.

(4.1)' de tanımlamış olduğumuz operatör; $\forall\, x \in [-1,1]$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

a) $G_n(1;x) = 1,$

b) $G_n(t;\mathrm{x}) = x + \frac{l}{n} x + \frac{l}{n},$

c) $G_n(t^2;x) = x^2 + \frac{(2l-1)n + l(l-1)}{n^2} x^2 + \left(\frac{2l(n+l)}{n^2}\right) x + \frac{n + l(l+1)}{n^2}),$

d) $G_n(t^3;x) = x^3 + \left(\frac{3n^2 l + 3nl^2 - 6nl - 3n^2 + l^3 - 3l^2 + 2n + 2l}{n^3}\right) x^3$

$+ \left(\frac{3l(n+l)(n+l-1)}{n^3}\right) x^2 + \left(\frac{3l^2 + 3n + 3l - 2}{n^3} x\right) + \left(\frac{n^2 - nl + l^2 + 3l - n^3}{n^3}\right),$

e) $G_n(t^4;x) = x^4$

$+ \left(\frac{4n^3 l + 6n^2 l^2 + 4nl^3 - 18n^2 l - 6n^3 - 18nl^2 + 11n^2 + l^4 - 6l^3 + 11l^2 + 22nl - 6n - 6l}{n^4}\right) x^4$

$+ \left(\frac{4l(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\right) x^3 + \left(\frac{(n+l)(n+l-1)(6l^2 - 27l - 65n + 146)}{n^4}\right) x^2$

$+ \left(\frac{(n+l)[4l^3 - 241n^2 - 13l^2 - 134nl + 179n + 83l + 126]}{n^4}\right) x$

$+ \left(\frac{9n^2 l + 3nl^2 - 78nl - 4n^3 l - 3n^3 + 36l - 5l^2 + 7n^3 - 61n^2 + l^3 - 6n^2 + 92n - 24}{n^4}\right).$

İspat

a)

$$G_n(1;x) = \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$= \frac{1}{2^{n+l}} 2^{n+l} = 1.$$

b)

$$G_n(t;x) = \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k} \left(\frac{2k}{n} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} \frac{k}{n} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$- \frac{1}{2^{n+l-1}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} \frac{k}{n} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$= \frac{n+l}{n} \frac{1}{2^{n+l-1}} \sum_{k=1}^{n+l} \binom{n+l-1}{k-1} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k} - \frac{1}{2^{n+l}} 2^{n+l}$$

$$= \frac{n+l}{n} \frac{1}{2^{n+l-1}} \sum_{k=0}^{n+l-1} \binom{n+l-1}{k} (1+x)^{k+1} (1-x)^{n+l-k-1} - 1$$

$$= \frac{n+l}{n} \frac{1}{2^{n+l-1}} (1+x) \cdot 2^{n+l-1} - 1$$

$$= \frac{n+l}{n} (1+x) - 1$$

$$= x \frac{n+l}{n} + \left(\frac{n+l}{n} - 1\right)$$

$$= x + \frac{l}{n} x + \frac{l}{n}.$$

c)

$$G_n(t^2;x) = \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k} \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2$$

$$= \frac{4}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} \frac{k^2}{n^2} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$- \frac{4}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} \frac{k}{n} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$+ \frac{1}{2^{n+l}} \sum_{k=0}^{n+l} \binom{n+l}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$= \frac{1}{2^{n+l-2}} \frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2} \sum_{k=2}^{n+l} \binom{n+l}{k} \frac{k.(k-1)}{(n+l)(n+l-1)} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$+ \frac{1}{2^{n+l-2}} \frac{n+l}{n^2} \sum_{k=1}^{n+l} \binom{n+l}{k} \frac{k}{n+l} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$- \frac{n+l}{n} \frac{4}{2^{n+l}} \sum_{k=1}^{n+l} \binom{n+l}{k} \frac{k}{n+l} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k} + 1$$

$$= \frac{1}{2^{n+l-2}} \frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2} \sum_{k=2}^{n+l} \binom{n+l-2}{k-2} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$+ \frac{1}{2^{n+l-2}} \frac{(n+l)}{n^2} \sum_{k=1}^{n+l} \binom{n+l-1}{k-1} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k}$$

$$- \frac{1}{2^{n+l-2}} \frac{(n+l)}{n} \sum_{k=1}^{n+l} \binom{n+l-1}{k-1} (1+x)^k (1-x)^{n+l-k} + 1$$

$$= \frac{1}{2^{n+l-2}} \frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2} \sum_{k=0}^{n+l-2} \binom{n+l-2}{k} (1+x)^{k+2} (1-x)^{n+l-k-2}$$

$$+\frac{1}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)}{n^2}\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n+l-k-1}$$

$$-\frac{1}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)}{n}\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n+l-k-1}+1$$

$$=\frac{1}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}(1+x)^2.\,2^{n+l-2}$$

$$+\frac{1}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)}{n^2}(1+x).\,2^{n+l-1}$$

$$-\frac{1}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)}{n}(1+x)2^{n+l-1}+1$$

$$=\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}(x^2+2x+1)+\frac{2(n+l)}{n^2}(1+x)-\frac{2(n+l)}{n}(1+x)+1$$

$$=\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}x^2+\left(2\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}+\frac{2(n+l)}{n^2}-\frac{2(n+l)}{n}\right)x$$

$$+\left(\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}+\frac{2(n+l)}{n^2}-\frac{2(n+l)}{n}+1\right)$$

$$=\frac{n^2+(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2+\left(\frac{2(n+l)(n+l-1)+2(n+l)-2(n+l)n}{n^2}\right)x$$

$$+\left(\frac{(n+l)(n+l-1)+2(n+l)-2(n+l)n+n^2}{n^2}\right)$$

$$=x^2+\frac{(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2+\frac{2l(n+l)}{n^2}x+\frac{n+l(l+1)}{n^2}.$$

d)

$$G_n(t^3;x)=\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n}-1\right)^3$$

$$=\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{8k^3}{n^3}-\frac{12k^2}{n^2}+\frac{6k}{n}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$\times\left(\frac{8k(k-1)(k-2)}{n^3}+\frac{24k(k-1)}{n^3}+\frac{24k}{n^3}-\frac{16k}{n^3}\right)$$

$$-\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{12(k-1)k}{n^2}+\frac{12k}{n^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\frac{6k}{n}-1$$

$$=\frac{8}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}\left(\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}\right)(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$+\frac{24}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}\frac{k(k-1)}{n^3}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$+\frac{24}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}\frac{k}{n^3}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$-\frac{16}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}\left(\frac{k}{n^3}\right)(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$-\frac{12}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}\frac{(k-1)k}{n^2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$-\frac{12}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}\frac{k}{n^2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$+\frac{6}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}\frac{k}{n}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}-1$$

$$=\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}\frac{1}{2^{n+l-3}}\sum_{k=3}^{n+l}\binom{n+l-3}{k-3}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$+\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^3}\frac{6}{2^{n+l-2}}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l-2}{k-2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{(n+l)}{n^3}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$-\frac{8}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$-\frac{3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l-2}{k-2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$-\frac{6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^2}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$

$$+\frac{3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}-1$$

$$=\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}\frac{1}{2^{n+l-3}}\sum_{k=0}^{n+l-3}\binom{n+l-3}{k}(1+x)^{k+3}(1-x)^{n+l-k-3}$$

$$+\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^3}\frac{6}{2^{n+l-2}}\sum_{k=0}^{n+l-2}\binom{n+l-2}{k}(1+x)^{k+2}(1-x)^{n+l-k-2}$$

$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{(n+l)}{n^3}\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n+l-k-1}$$

$$-\frac{8}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n+l-k-1}$$

$$-\frac{3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}\sum_{k=0}^{n+l-2}\binom{n+l-2}{k}(1+x)^{k+2}(1-x)^{n+l-k-2}$$

$$-\frac{6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^2}\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n+l-k-1}$$

$$+\frac{3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n}\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n+l-k-1}-1$$

$$=\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}\frac{1}{2^{n+l-3}}2^{n+l-3}(1+x)^3$$

$$+\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^3}\frac{6}{2^{n+l-2}}2^{n+l-2}(1+x)^2$$

$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{(n+l)}{n^3}2^{n+l-1}(1+x)$$

$$-\frac{8}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}2^{n+l-1}(1+x)$$

$$-\frac{3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}2^{n+l-2}(1+x)^2$$

$$-\frac{6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^2}2^{n+l-1}(1+x)$$

$$+\frac{3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n}2^{n+l-1}(1+x)-1$$

$$= \frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}(x^3+3x^2+3x+1)$$

$$+\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^3}(x^2+2x+1\ )$$

$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{(n+l)}{n^3}(x+1)$$

$$-\frac{8(n+l)}{n^3}(1+x)$$

$$-\frac{3(n+l)(n+l-1)}{n^2}(x^2+2x+1)$$

$$-\frac{6(n+l)}{n^2}(x+1)+\frac{3(n+l)}{n}(x+1)-1$$

$$= x^3\left(\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}\right)$$

$$+x^2\left(\frac{3(n+l)(n+l-1)8n+l-2)}{n^3}+\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^3}-\frac{3(n+l)(n+l-1)}{n^2}\right)$$

$$+x\left(\frac{3(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}+\frac{12(n+l)(n+l-1)}{n^3}+\frac{4(n+l)}{n^3}-\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^2}-\frac{6(n+l)}{n^2}+\frac{3(n+l)}{n}\right)$$

$$+\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}+\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^3}+\frac{4(n+l)}{n^3}-\frac{3(n+l)(n+l-1)}{n^2}-\frac{6(n+l)}{n^2}+\frac{3(n+l)}{n}-1$$

$$= x^3+\frac{3n^2l+3nl^2-6nl-3n^2+l^3-3l^2+2n+2l}{n^3}x^3$$

$$+x^2\left(\frac{3(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}+\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^3}-\frac{3(n+l)(n+l-1)}{n^2}\right)$$

$$+x\left(\frac{3(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}+\frac{12(n+l)(n+l-1)}{n^3}+\frac{4(n+l)}{n^3}-\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^2}-\frac{6(n+l)}{n^2}+\frac{3(n+l)}{n}\right)+$$

$$\left(\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}+\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^3}+\frac{4(n+l)}{n^3}-\frac{3(n+l)(n+l-1)}{n^2}-\frac{6(n+l)}{n^2}+\frac{3(n+l)}{n}-1\right).$$

e)

$$G_n(t^4;x) = \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}(\frac{2k}{n}-1)^4$$

$$= \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{16k^4}{n^4}-\frac{32k^3}{n^3}+\frac{24k^2}{n^2}-\frac{8k}{n}+1\right)$$

$$= \frac{16}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\frac{6k^3-11k^2+6k+k(k-1)(k-2)(k-3)}{n^4}$$

$$-\frac{32}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\frac{k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+3k-2k}{n^3}$$

$$+\frac{24}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\frac{k(k-1)+k}{n^2}$$

$$-\frac{8}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\frac{k}{n}+1$$

$$= \frac{16}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{n^4}$$

$$-\frac{16.6}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k(k-1)(k-2)}{n^4}$$

$$-\frac{16.6.3}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{\,n+l-k}\,\frac{k(k-1)}{n^4}$$

$$+\frac{16.6.3}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}$$

$$-\frac{16.6.2}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}$$

$$-\frac{16.11}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k(k-1)}{n^4}$$

$$-\frac{16.11}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}+1$$

$$+\frac{16.6}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}$$

$$-\frac{32}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}\right)$$

$$-\frac{32.3}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{k(k-1)}{n^3}\right)$$

$$-\frac{32.3}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^3}$$

$$+\frac{32.2}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^3}$$

$$+\frac{24}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{k(k-1)}{n^2}\right)$$

$$+\frac{24}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^2}$$

$$-\frac{8}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n}+1$$

$$=\frac{2.6}{2^{n+l-3}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\sum_{k=3}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{k(k-1)(k-2)}{n^4}\right)$$

$$+\frac{4.6.3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{\,n+l-k}\left(\frac{k(k-1)}{n^4}\right)$$

$$+\frac{16.3.3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}$$

$$-\frac{16.6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}$$

$$-\frac{4.11}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{k(k-1)}{n^4}\right)$$

$$-\frac{8.11}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}$$

$$+\frac{8.6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k}{n^4}$$

$$+\frac{1}{2^{n+l-4}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)(n+l-3)}{n^4}\sum_{k=4}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}$$

$$\times\left(\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{n^4}\right)$$

$$-\frac{4}{2^{n+l-3}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}\sum_{k=3}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\,\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}$$

$$-\frac{8.3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^3}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\frac{3k(k-1)}{n^3}$$
$$-\frac{16.3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\frac{3k}{n^3}$$
$$+\frac{32}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\frac{k}{n^3}$$
$$+\frac{6}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\frac{k(k-1)}{n^2}$$
$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^2}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\frac{k}{n^2}$$
$$-\frac{4}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\frac{k}{n}+1$$
$$=\frac{12}{2^{n+l-3}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\sum_{k=3}^{n+l}\binom{n+l-3}{k-3}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$+\frac{72}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l-2}{k-2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$+\frac{144}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$-\frac{16.6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$-\frac{4.11}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l-2}{k-2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$-\frac{8.11}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$+\frac{8.6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$+\frac{1}{2^{n+l-4}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)(n+l-3}{n^4}\sum_{k=4}^{n+l}\binom{n+l-4}{k-4}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$-\frac{4}{2^{n+l-3}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}\sum_{k=3}^{n+l}\binom{n+l-3}{k-3}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$-\frac{8.3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^3}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l-2}{k-2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$-\frac{16.3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$+\frac{32}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$+\frac{6}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}\sum_{k=2}^{n+l}\binom{n+l-2}{k-2}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^2}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$-\frac{4}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n}\sum_{k=1}^{n+l}\binom{n+l-1}{k-1}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}+1$$
$$=\frac{12}{2^{n+l-3}}(1+x)^3\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\sum_{k=0}^{n+l-3}\binom{n+l-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-3}$$
$$+\frac{72}{2^{n+l-2}}(1+x)^2\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}\sum_{k=0}^{n+l-2}\binom{n+l-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-2}$$
$$+\frac{144}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}$$

$$-\frac{16.6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}$$
$$-\frac{4.11}{2^{n+l-2}}(1+x)^2\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}\sum_{k=0}^{n+l-2}\binom{n+l-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-2}$$
$$-\frac{8.11}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}$$
$$+\frac{8.6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}(1+x)\sum_{k=}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}$$
$$+\frac{1}{2^{n+l-4}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)(n+l-3}{n^4}(1+x)^4\sum_{k=0}^{n+l-4}\binom{n+l-4}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-4}$$
$$-\frac{4}{2^{n+l-3}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}(1+x)^3\sum_{k=0}^{n+l-3}\binom{n+l-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-3}$$
$$-\frac{8.3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^3}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n+l-2}\binom{n+l-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-2}$$
$$-\frac{16.3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}$$
$$+\frac{32}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}$$
$$+\frac{6}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n+l-2}\binom{n+l-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-2}$$
$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^2}(1+x)\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}$$
$$-\frac{4}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n}(1+x)\sum_{k=0}^{n+l-1}\binom{n+l-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k-1}+1$$
$$=\frac{12}{2^{n+l-3}}(1+x)^3\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}2^{n+l-3}$$
$$+\frac{72}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}(1+x)^2 2^{n+l-2}$$
$$+\frac{144}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}(1+x)2^{n+l-1}-\frac{16.6}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}(1+x)2^{n+l-1}$$
$$-\frac{4.11}{2^{n+l-2}}(1+x)^2\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}2^{n+l-2}$$
$$-\frac{8.11}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^4}(1+x)2^{n+l-1}$$
$$-\frac{4}{2^{n+l-3}}\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}(1+x)^3 2^{n+l-3}$$
$$-\frac{8.3}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^3}(1+x)^2 2^{n+l-2}$$
$$-\frac{16.3}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}(1+x)2^{n+l-1}$$
$$+\frac{32}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^3}(1+x)2^{n+l-1}$$
$$+\frac{6}{2^{n+l-2}}\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^2}2^{n+l-k-2}(1+x)^2$$
$$+\frac{12}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n^2}(1+x)\,2^{n+l-1}$$
$$-\frac{4}{2^{n+l-1}}\frac{n+l}{n}2^{n+l-1}(1+x)+1$$

$$= 12(1+x)^3\frac{(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4} + \frac{72(n+l)(n+l-1)}{n^4}(1+x)^2$$
$$+\frac{144(n+l)}{n^4}(1+x) - 16.6\frac{(n+l)}{n^4}(1+x)$$
$$-4\cdot 11(1+x)^2\frac{(n+l)(n+l-1)}{n^4}$$
$$-8\cdot 11\frac{n+l}{n^4}(1+x)$$
$$-\frac{4(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}(1+x)^3$$
$$-\frac{8.11(n+l)(n+l-1)}{n^3}(1+x)^2$$
$$-\frac{4(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^3}(1+x)^3$$
$$-\frac{8.3(n+l)(n+l-1)}{n^3}(1+x)^2$$
$$-\frac{16.3(n+l)}{n^3}(1+x)$$
$$+32\frac{(n+l)}{n^3}(1+x)$$
$$+\frac{6(n+l)(n+l-1)}{n^2}(1+x)^2$$
$$+\frac{12(n+l)}{n^2}(1+x)$$
$$-\frac{4(n+l)}{n}(1+x)+1$$
$$= x^4 + \left(\frac{4n^3l+6n^2l^2+4nl^3-18n^2l-6n^3-18nl^2+11n^2+l^4-6l^3+11l^2+22nl-6n-6l}{n^4}\right)x^4$$
$$+\left(\frac{4l(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\right)x^3 + \left(\frac{(n+l)(n+l-1)(6l^2-27l-65n+146)}{n^4}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{(n+l)[4l^3-241n^2-13l^2-134nl+179n+83l+126]}{n^4}\right)x$$
$$+\left(\frac{9n^2l+3nl^2-78nl-4n^3l-3n^3+36l-5l^2+7n^3-61n^2+l^3-6n^2+92n-24}{n^4}\right).$$

Teorem 4.1.1.

$f \in C[-1,1]$ ve f bütün reel eksende sınırlı olsun o halde;

$$\lim_{n\to\infty} \| G_n f - f \|_{C[-1,1]} = 0 \text{ dır.}$$

İspat

Korovkin teoreminden faydalanılarak $n \to \infty$ için

$$\mathrm{G_n}(1;x) \rightrightarrows 1$$
$$\mathrm{G_n}(\mathrm{t};x) \rightrightarrows x$$
$$\mathrm{G_n}(\mathrm{t}^2;x) \rightrightarrows x^2$$

olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$$\| \mathrm{G_n}1 - 1 \|_{C[-1,1]} = 0$$

olduğu açıktır.

Elde edilen sonuçları yerine yazarsak,

$$\| \mathrm{G_n}\mathrm{t} - x \|_{C[-1,1]} = \max_{-1\leq x\leq 1}\left| x + \frac{1}{\mathrm{n}}x + \frac{1}{\mathrm{n}} - x \right| = \frac{2}{\mathrm{n}}$$

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{2}{\mathrm{n}} \to 0$$

$$\| \mathrm{G_n}\mathrm{t}^2 - x^2 \|_{C[-1,1]} = 0$$

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|G(t-x)^2;x| = \begin{cases} \dfrac{(2l-1)\mathrm{n}^2 + (l^2 - l^3)\mathrm{n} - l^2}{\mathrm{n}^2[(2l-1)\mathrm{n} + l(l-1)]}, & \text{türevden faydalanarak} \\ \dfrac{4l(n+l)}{\mathrm{n}^2}, & \text{sınır değerinden faydalanarak} \end{cases}$$

$$s_n = \max_{-1\leq x\leq 1}\left| x^2 + \frac{(2l-1)n + l(l-1)}{n^2}x^2 + \left(\frac{2l(n+l)}{n^2}\right)x + \frac{n + l(l+1)}{n^2} - x^2 \right| = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{n}}, & l = 0 \\ \frac{4l(n+l)}{\mathrm{n}^2}, & l \geq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

olur ve ispat tamamlanır.

$G_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentlerinden bazıları hesaplanmıştır.

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - x\right)^0 ; x\right] = G_n(1;x) = 1$$

olduğu açıktır.

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - x\right)^1 ; x\right] = \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\left(\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - x\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n} - 1\right)$$
$$-x\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+l-k}$$
$$= G_n(t;x) - xG_n(1;x)$$

$$= x + \frac{l}{n}x + \frac{l}{n} - x$$
$$= \frac{lx+l}{n},$$

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right] = \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^2$$
$$= \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n}-1\right)^2$$
$$-2x\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n}-1\right)$$
$$+\frac{x^2}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}$$
$$= G_n(t^2;x) - 2x.x + x^2G_n(1;x)$$
$$= x^2 + \frac{(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2 + \left(\frac{2(n+l)l}{n^2}\right)x$$
$$+\frac{n+l(l+1)}{n^2} - 2x^2 + x^2$$

olduğundan,

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right] = \frac{(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2 + \left(\frac{2(n+l)l}{n^2}\right)x + \frac{n+l(l+1)}{n^2}$$

elde edilir.

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^4;x\right] = \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^4$$
$$= \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n}-1\right)^4$$
$$-\frac{4x}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n}-1\right)^3$$
$$+\frac{6x^2}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n}-1\right)^2$$
$$-\frac{4x^3}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}\left(\frac{2k}{n}-1\right)$$
$$+\frac{x^4}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^k\,(1-x)^{n+l-k}$$
$$= G_n(t^4;x) - 4xG_n(t^3;x) + 6x^2G_n(t^2;x) - 4x^3G_n(t;x) + x^4G_n(1;x)$$
$$= x^4 + \left(\frac{4n^3l+6n^2l^2+4nl^3-18n^2l-6n^3-18nl^2+11n^2+l^4-6l^3+11l^2+22nl-6n-6l}{n^4}\right)x^4$$
$$+\left(\frac{4l(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\right)x^3 + \left(\frac{(n+l)(n+l-1)[6l^2-27l-65n+146]}{n^4}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{(n+l)[4l^3-241n^2-13l^2-134nl+179n+83l+126]}{n^4}\right)x$$

$$+\left(\frac{9n^2l+3nl^2-78nl-4n^3l-3n^3+36l-5l^2+7n^3-61n^2+l^3-6n^2+92n-24}{n^4}\right)$$

$$-4x\left(x^3+\left(\left(\frac{3n^2l+3nl^2-6nl-3n^2+l^3-3l^2+2n+2l}{n^3}\right)x^3\right)+x^2\left(\frac{3l(n+l)(n+l-1)}{n^3}\right)\right)$$

$$-4x\left(x\left(\frac{3l^2+3n+3l-2}{n^3}\right)+\left(\frac{n^2-nl+l^2+3l-n^3}{n^3}\right)\right)$$

$$+6x^2\left(x^2+\frac{(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2+\left(\frac{2(n+l)l}{n^2}\right)x+\frac{n+l(l+1)}{n^2}\right)$$

$$-4x^3\left(\mathrm{x}+\frac{l}{n}x+\frac{l}{n}\right)+x^4$$

sonucunda,

$$=\left(\frac{4n^3l+6n^2l^2+4nl^3-18n^2l-6n^3-18nl^2+11n^2+l^4-6l^3+11l^2+22nl-6n-6l}{n^4}\right)x^4$$

$$+\left(\frac{4l(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{(n+l)(n+l-1)\left[6l^2-27l-65n+146\right]}{n^4}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{(n+l)\left[4l^3-241n^2-13l^2-134nl+179n+83l+126\right]}{n^4}\right)x$$

$$+\left(\frac{9n^2l+3nl^2-78nl-4n^3l-3n^3+36l-5l^2+7n^3-61n^2+l^3-6n^2+92n-24}{n^4}\right)$$

$$-\left(x^3+\left(\frac{3n^2l+3nl^2-6nl-3n^2+l^3-3l^2+2n+2l}{n^3}x^3\right)+x^2\left(\frac{3l(n+l)(n+l-1)}{n^3}\right)\right)$$

$$-\left(x\left(\frac{3l^2+3n+3l-2}{n^3}\right)+\left(\frac{n^2-nl+l^2+3l-n^3}{n^3}\right)\right)$$

$$+\left(x^2+\frac{(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2+\left(\frac{2(n+l)l}{n^2}\right)x\right)$$

$$+\left(\frac{n+l(l+1)}{n^2}\right)-\left(x+\frac{l}{n}x+\frac{l}{n}\right)$$

elde edilir.

Tanım 4.2. (Süreklilik Modülü)

$f\in C[a,b]$ olmak üzere $\forall\,\delta>0$ için;

$$\omega(f;\delta)=\max_{\substack{x,t\in[a,b]\\|t-x|\leq\delta}}|f(t)-f(x)|$$

olarak tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik Modülünün Özellikleri

1. $\omega(f;\delta) \geq 0$,

2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$,

3. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$,

4. $\alpha \epsilon \mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\alpha\delta) \leq (1+\alpha)\omega(f;\delta)$,

5. $\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$,

6. $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$,

7. $|f(t)-f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$ (Altomare ve Campiti, 1994).

Teorem 4.2.

$G_n(f;x)$ operatörünün süreklilik modülü ile yaklaşım hızı;

$$|G_n(f;x)-f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega(f,s_n)$$

şeklindedir (Burada kullanılan s_n (4.2)' de belirlenmiştir).

İspat

$$\begin{aligned}
|f(t)-f(x)| &\leq \omega(f,|t-x|) \\
&= \omega(f;\frac{|t-x|}{\delta_n}\delta_n) \\
&\leq (1+\frac{|t-x|}{\delta_n})\ \omega(f,\delta_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|G_n(f;x)-f(x)| &= |G_n(f(t)-f(x);x)| \\
&\leq G_n\left(\left(1+\frac{|t-x|}{\delta_n}\right)\omega(f,\delta_n),x\right) \\
&\leq \omega(f,\delta_n)\left(G_n(1,x)+\frac{1}{\delta_n}G_n(|t-x|;x)\right) \\
&\leq \omega(f,\delta_n)\left(1+\frac{1}{\delta_n}\sqrt{G_n((t-x)^2;x)}\right)
\end{aligned}$$

(4.2) de s_n' i kullanırsak;

$$|G_n(f;x) - f(x)| \leq \omega(f, s_n)\left(1 + \frac{1}{s_n}\sqrt{s_n}\right)\right)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{s_n}}\right)\omega(f, s_n)$$

$$\leq \frac{3}{2}\omega(f, s_n)$$

olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa; bu taktirde

$$\|G_n f - f\|_{C[-1,1]} = O\left((s_n)^{\frac{a}{2}}\right)$$

dır (Burada kullanılan s_n (4.2)' de belirlenmiştir).

İspat

$G_n(1, x) = 1$ olduğundan ve bu operatörün lineerliğinden

$$|G_n(f;x) - f(x)| = |G_n(f;x) - f(x)G_n(1,x)|$$

$$= |G_n(f;x) - G_n(f(x);x)|$$

$$\leq (|G_n f(t) - f(x)|;x) = \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^{n+l}(1-x)^{n+l-k}|f(t) - f(x)|$$

yazabiliriz.

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından;

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^a$$

$$|G_n(f;x) - f(x)|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^{n+l}(1-x)^{n+l-k}\,|f(t) - f(x)|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^{n+l}(1-x)^{n+l-k}M|t - x|^a$$

$$= M\,\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{k=0}^{n+l}\binom{n+l}{k}(1+x)^{n+l}(1-x)^{n+l-k}|t - x|^a$$

$$= MG_n(|t - x|^a;x)$$

Hölder eşitsizliğinden;

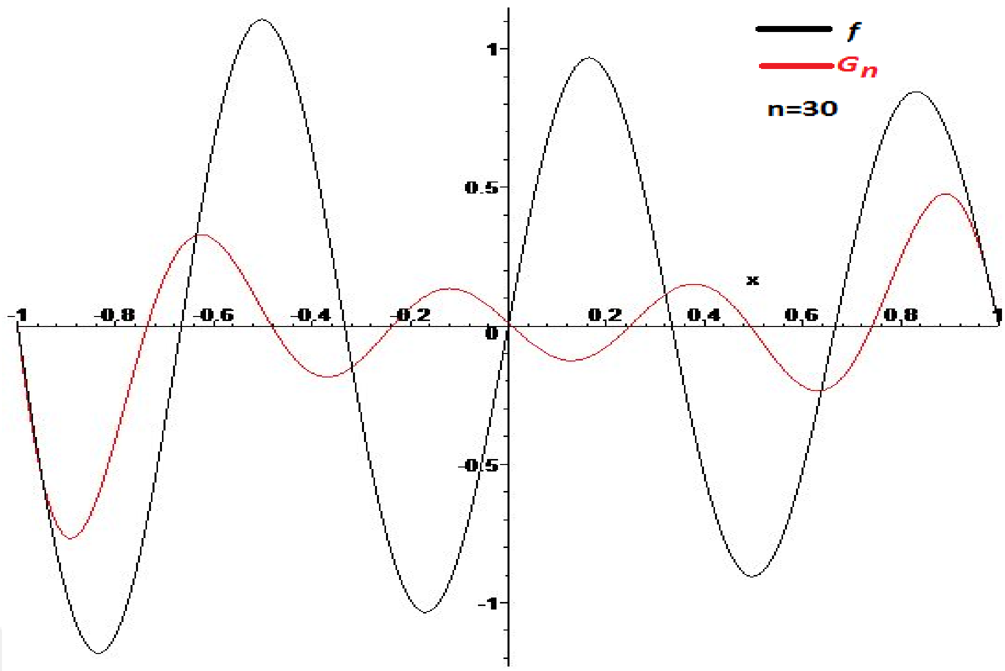
$$G_n(|t - x|^a;x) \leq G_n((t-x)^2;x)^{\frac{a}{2}}$$

$$|G_n(f;x) - f(x)| \leq \left((s_n)^{\frac{a}{2}}\right)$$

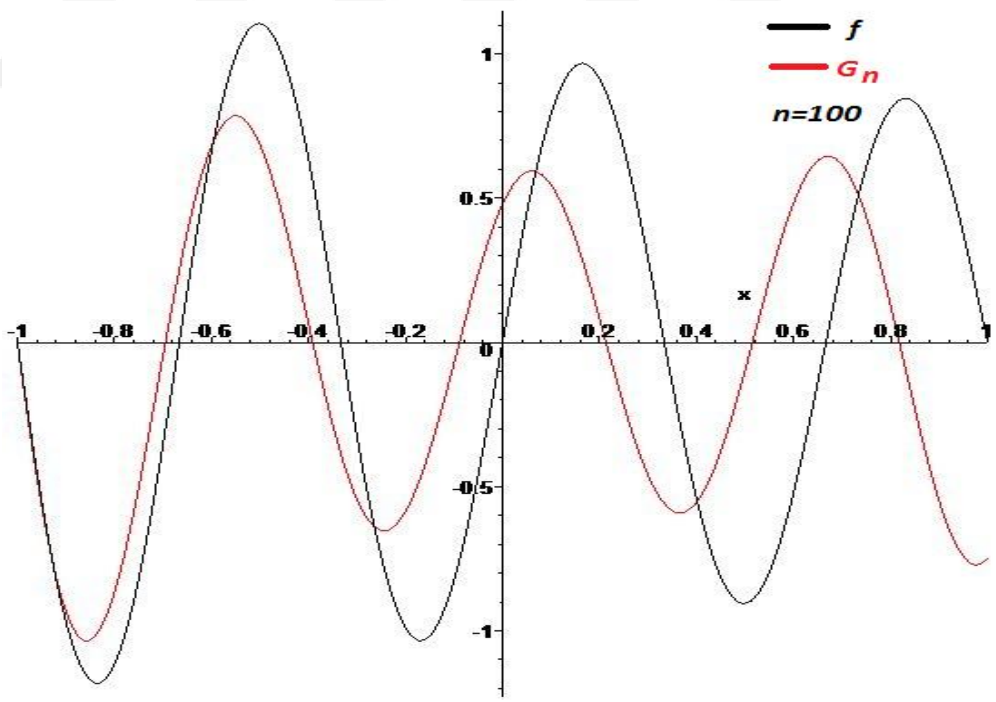
$$|G_n(f;x) - f(x)|) = O\left((s_n)^{\frac{a}{2}}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

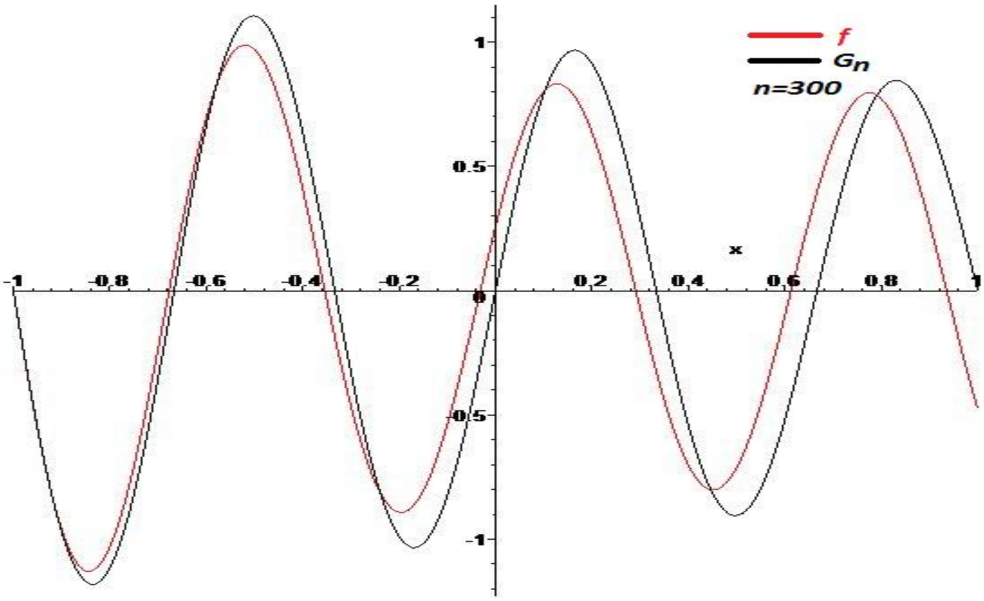
Üzerinde çalıştığımız $G_n(f;x)$ operatörünün; $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)}\sin(3\pi x)$ fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafikleri aşağıdaki gibidir.



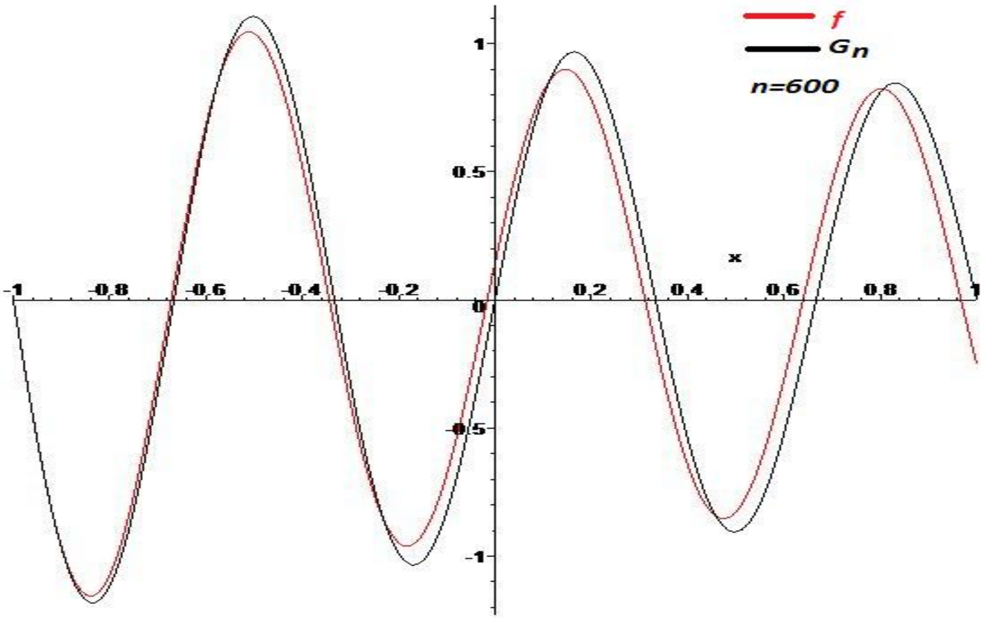
Şekil 4.1. $n = 30$ için $G_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)}\sin(3\pi x)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



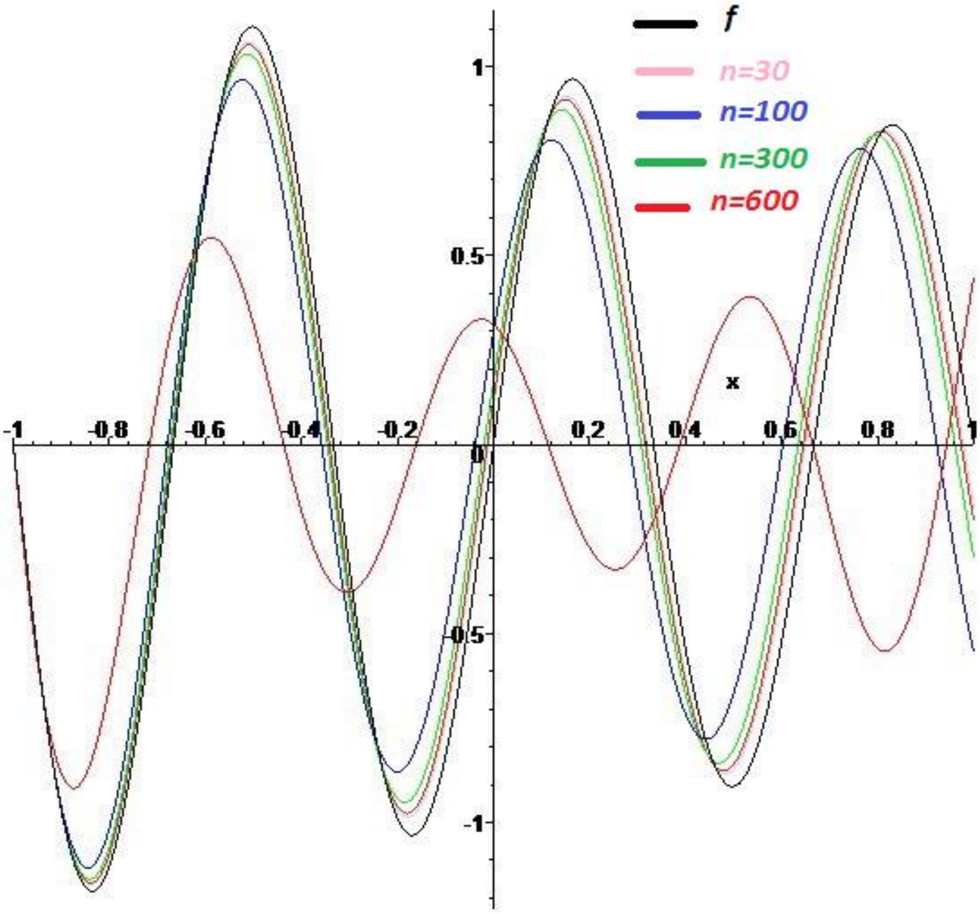
Şekil 4.2. $n = 100$ için $G_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)}\sin(3\pi x)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.3. $n = 300$ için $G_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)}\sin(3\pi x)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.4. $n = 600$ için $G_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)}\sin(3\pi x)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.5. $G_n(f;x)$ operatörünün $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)} \sin(3\pi x)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği

Çizelge 4.1. Bazı n ve x değerleri için $G_n(f;x)$ ' in $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)}\sin(3\pi x)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik değerler tablosu

x / n	-0,9	-0,7	-0,4	-0,1	0,2	0,6	0,9
10	0.000590	0.000590	0.000590	0.000590	0.000590	0.000590	0.000590
50	0.192166	0.192166	0.192166	0.192166	0.192166	0.192166	0.192166
100	0.163641	0.163641	0.163641	0.163641	0.163641	0.163641	0.163641
250	0.087738	0.087738	0.087738	0.087738	0.087738	0.08773	0.087738
500	0.048167	0.048167	0.048167	0.048167	0.048167	0.048167	0.048167
750	0.033112	0.033112	0.033112	0.033112	0.033112	0.033112	0.033112
900	0.027876	0.027876	0.027876	0.027876	0.02787	0.027876	0.027876

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

[-1,1] simetrik aralığı üzerinde tanımlanmış $G_n(f;x)$ operatörün lineer pozitif olduğu gösterilmiş olup Korovkin şartlarını sağladığı gösterilmiştir.

$G_n(f;x)$ lineer pozitif operatörün düzgün yakınsaklığı yani

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathrm{G_n} f - f \|_{C[-1,1]} = 0$$

eşitliğini sağladığı gösterilmiştir.

Sonrasında merkezi momentler hesaplanmış aşağıda elde edilen sonuçlar bulunmuştur.

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^1;x\right] = \frac{lx+l}{n}$$

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^2;x\right] = \frac{(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2 + \left(\frac{2(n+l)l}{n^2}\right)x + +\frac{n+l(l+1)}{n^2}$$

$$G_n\left[\left(\left(\frac{2k}{n}-1\right)-x\right)^4;x\right]$$

$$= \left(\frac{4n^3l+6n^2l^2+4nl^3-18n^2l-6n^3-18nl^2+11n^2+l^4-6l^3+11l^2+22nl-6n-6l}{n^4}\right)x^4$$

$$+\left(\frac{4l(n+l)(n+l-1)(n+l-2)}{n^4}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{(n+l)(n+l-1)\left[6l^2-27l-65n+146\right]}{n^4}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{(n+l)\left[4l^3-241n^2-13l^2-134nl+179n+83l+126\right]}{n^4}\right)x$$

$$+\left(\frac{9n^2l+3nl^2-78nl-4n^3l-3n^3+36l-5l^2+7n^3-61n^2+l^3-6n^2+92n-24}{n^4}\right)$$

$$-\left(x^3+\left(\frac{3n^2l+3nl^2-6nl-3n^2+l^3-3l^2+2n+2l}{n^3}x^3\right)+x^2\left(\frac{3l(n+l)(n+l-1)}{n^3}\right)\right)$$

$$-\left(x\left(\frac{3l^2+3n+3l-2}{n^3}\right)+\left(\frac{n^2-nl+l^2+3l-n^3}{n^3}\right)\right)$$

$$+\left(x^2+\frac{(2l-1)n+l(l-1)}{n^2}x^2+\left(\frac{2(n+l)l}{n^2}\right)x\right)$$
$$+\left(\frac{n+l(l+1)}{n^2}\right)-\left(x+\frac{l}{n}x+\frac{l}{n}\right).$$

Süreklilik modülü kullanılarak yaklaşım hızı hesaplanmış olup bulunan sonuç aşağıdaki gibidir.

$$|G_n(f;x)-f(x)|\leq\frac{3}{2}\omega(f,s_n)$$

f fonksiyonunun $G_n(f;x)$ lineer pozitif operatörü için Lipschitz koşulunu sağladığı gösterilmiştir. Elde edilen sonuç aşağıdaki gibidir:

$$|G_n(f;x)-f(x)|)=O\left((s_n)^{\frac{a}{2}}\right).$$

Son olarak $G_n(f;x)$ operatörünün $f(x)=e^{\left(-\frac{1}{5}x\right)}\sin(3\pi x)$ fonksiyonuna ait yaklaşımını gösteren grafikler çizilmiştir ve bazı n ve x değerleri için nümerik değerler hesaplanmış olup tablo ile gösterilmiştir.

5.2. Öneriler

Fonksiyonlara yaklaşım genelde pozitif reel eksende yapılmaktadır. Reel eksenin [-1,1]simetrik alt aralığında inceleme yapıldığında tanımladığımız Bernstein-Schurer tipi operatörlerin kullanılması uygun olacaktır.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F. and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications.de Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin-New-York.

BERNSTEİN, S.N., 1912. Démonstration du théoréme de Weierstrass, fondéesur le calculdes probabilités. Commun. Soc. Math. Kharkow, (2):13.

BOHMAN. H., 1952. On Approximation of Continuous and Analytic Functions. Ark. Mat., 2:43-56.

CHLODOWSKY, I., 1937. Sur Le Developpment Des Fonctions Definies Dans Un Interval Infini En Series De Polynomes De M.S.Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393.

DURRMEYER, J. L., 1967. Une Formule D'inversion De La Transformee De Laplace Aplication A La Theorie Des Moments. These De 3e Cyele. Faculte Des Sciences de I'Universite de Paris, 4:149-150

HACISALİHOĞLU, H. ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakısaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

LORENTZ, G.G., 1953. Bernstein Polynomials. Math. Expo., vol 8, Univ. Of Toronto Press, Toronto, 8:15-217.

MUSAYEV, B, ALP, MUSTAFAYEV, N. ve EKİNCİOĞLU, İ. 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1. Ankara.

KOROVKİN, P. P., 1953. On Convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.), 90: 961-964.

SAHAI, A., 2011. An iterativereduced- biasa logarithm for a dual- fusion S. Variant of Bersntein operators. Inter. J. of Math. Arch., 2(3): 331-334.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Gül Sinem KELEŞ
Uyruğu	: T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	: KİLİS 1993
Telefon	: 05307312652
e-mail	: gsinemkeles@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: Ekrem Çetin Lisesi, Kilis	2011
Üniversite	: Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2015
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2018

YABANCI DİLLER

İngilizce (İyi düzey)