T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE EĞRİ ÇİFTLERİ

Feryat KAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2018

Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM danışmanlığında, Feryat KAYA'nın hazırladığı **''3-Boyutlu Öklid Uzayında Darboux Çatısına Göre Eğri Çiftleri''** konulu bu çalışma 18/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman	: Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM	....
Üye	: Prof. Dr. Yusuf YAYLI	....
Üye	: Doç. Dr. Aydın İZGİ	....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA
DARBOUX ÇATISINA GÖRE EĞRİ ÇİFTLERİ

Feryat KAYA

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM
Yıl: 2018, Sayfa:74

Bu çalışma 5 bölümden oluşmuştur. Giriş bölümünde Öklid uzayında eğriler ve eğri çiftleri ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayındaki bazı eğri çiftleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, eğri çiftlerinde Darboux çatısı kullanılarak incelenmiştir. Beşinci bölümde, ulaşılan bazı sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: İnvolüt-Evolüt eğri çifti, Bertrand eğri çifti, Mannheim eğri çifti, Darboux çatısı

ABSTRACT

MSc Thesis

THE CURVE PAİRS ACCORDING TO DARBOUX FRAME IN 3-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Feryat KAYA

Harran University
Gradute School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematics

Supervisor: Assit. Prof. Dr. Abdullah YILDIRIM
Year: 2018, Page:74

This study consist of five sections. In the introduction section curves and curve pairs in Euclidean space are given information about In the second part, some definitions and theorems are given in the next sections that will be the basis of. In the third chapter, the 3-dimensional Euclidean space are discussed in some curve pairs. In the fourth chapter, the Darboux frame is used in the curve pairs. In the fifth chapter, some conclusions and recommendations reached have been given.

KEY WORDS: İnvolüt-Evolüt partner curves, Bertrand partner curves, Mannheim partner curves, Darboux frame

TEŞEKKÜR

Tezin konusunun seçiminde, uygulanmasında ve çalışmamda yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans boyunca çalışmalarımda fikir alışverişinde bulunduğum yüksek lisans öğrencisi olan Veli ÇELİK'e ve manevi anlamda desteğini esirgemeyen sevgili eşime de ayrıca teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

E^n	Öklid uzayı
$\langle , \rangle$	İç çarpım dönüşümü
$\|,\|$	Norm
T	Teğet vektörü
N	Asli normal vektörü
B	Binormal vektörü
κ	Eğrilik fonksiyonu
k_g	Geodezik eğrilik fonksiyonu
k_n	Normal eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu (torsiyonu)
α	3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri
α^*	3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri
s	α eğrisi üzerindeki parametre
s^*	α^* eğrisi üzerindeki parametre

1.GİRİŞ

Bilindiği üzere eğriler teorisi diferansiyel geometrinin temellerinden biridir. Öklidyen düzlemde eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerinde çalışan ilk bilim adamı Huygens'dir. O, eğriyi düzlemde herhangi bir noktadaki düzlem eğriliğini ortaya koyan kişidir. Ancak eğriyi düzlemde bir noktanın hareketi ile bir t parametresine göre tanımlayan ilk kişi de Newton'dur. Newton düzlemde bir eğrinin eğriliğini de tanımlamış ve bunun nasıl bulunacağı hakkında bağıntılar vermiştir (Çiçek, 2015).

E^3 de uzay eğrilerinin diferansiyel geometrisi hakkındaki çalışmaları 1847 de Frenet ile başlamış olup birbirinden habersiz olarak Serret ise 1851 de çalışmıştır. Onlar bir α uzay eğrisini s yay parametresine göre tanımlamış ve bu eğri boyunca T, α eğrisinin teğet vektörü olmak üzere $\{T, N, B = T \times N\}$ olarak bilinen ortonormal bir çatıyı tanımlamışlardır. 1876 da ise α eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları olarak bilinen k_1 ve k_2 fonksiyonları Aoust tarafından ifade edilmiştir. Böylelikle E^3 deki yüzeylerin çalışmasına başlanmıştır (Çiçek, 2015).

Bu fonksiyonlar E^3 de bir düzgün eğrinin tanımlanması için önemlidir. Mesela eğrilik fonksiyonu k_1 (eğrilik κ) ve k_2 (burulma veya torsiyonu) sıfır ise eğri bir doğrudur. Eğer $k_1 \neq 0$ (sabit) ve $k_2 = 0$ ise eğri $\frac{1}{k_1}$ yarıçaplı bir çember belirtir. Eğer $k_1 \neq 0$ (sabit) , $k_2 \neq 0$ (sabit) veya $\frac{k_1}{k_2} =$sabit ise eğri uzayda bir helistir.

Son zamanlarda ise özel eğrilere olan ilgi giderek artmıştır. Bunlardan bazıları ise bağlantılı eğrilerdir. Bağlantılı eğriler, karşılıklı noktalarında bir eğrinin Frenet vektörlerinden biri ile diğer eğrinin Frenet vektörlerinden birinin denk olduğu eğrilerdir. Böyle eğrilerin iyi bilinen en iyi örnekleri; involüt-evolüt eğri çifti, Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çiftleridir.

Optik çalışması içinde kullanıldığı bilinen bir involüt düşüncesi 1658'de C. Huygens tarafından ortaya çıkmıştır. C. Huygens daha doğru ölçüm çalışmaları yapmaya çalışırken involüt eğrileri keşfetmiştir (Ertürk, 2010).

İnvolüt-evolüt eğrilerin her noktasındaki teğet vektörleri ortogonal olup bu konuda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bilici ve Çalışkan (2009) tarafından Lorentz uzayında timelike binormalli spacelike involüt eğrileri incelendi. Yine Özyılmaz ve Yılmaz (2009) tarafından involütü-evolüt eğrileri 4 boyutlu Öklid uzayında incelendi. Azak ve ark. (2010) tarafından ise involüt-evolüt eğrilerini G_3 Galileo uzayında incelendi. As ve Sarıoğlugil (2014) de ‘‘E^3 Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin Bishop Eğriliği’’ konusunu üzerinde çalıştılar.

1845'te S. Venant bir eğrinin asli normali ile üretilen yüzey üzerinde bulunup bulunmadığını ve bu eğrinin asli normali ile lineer bağımlı olan ikinci bir eğrinin var olup olmadığını ortaya atmıştır. Bu soru 1850 yılında J. Bertrand tarafından cevaplanmıştır. Buna göre Bertrand böyle bir eğrinin olması için gerek ve yeter şart olarak bu eğrilerin birinci ve ikinci eğrilikleri arasında sabit katsayılı lineer bir bağıntının olması gerektiğini söylemiştir. Böyle eğrilere Bertrand eğri çifti olarak adlandırılmıştır (Ertürk, 2010).

Bertrand eğri çiftleri üzerinde de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Tarhan (2007) ‘‘3- Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çiftleri’’ üzerinde çalıştı. Şenyurt ve Özgüner (2013) ‘‘Bertrand Eğri Çiftlerinin Küresel Göstergelerinin Geodezik Eğrilikleri ve Tabii Liftleri’’ üzerinde çalışmışlardır. Kazaz ve ark. (2016) da ‘‘E^3 Öklid uzayında Bertrand Partner D-Eğrileri’’ üzerinde çalışmışlardır. İlarslan ve Aslan (2017) ‘‘Minkowski 3-Uzayında Spacelike Bertrand Eğrileri’’ üzerinde çalıştılar. Masal ve Azak (2017) da‘‘3- Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğriler ve Bishop Çatısı’’ üzerinde çalıştılar.

Son zamanlarda bağlantılı eğrilerde yeni bir tanım olan Mannheim partner eğrilerini 2007'de Liu ve Wang tarafından tanımlanmıştır. Onlar bu eğrileri şu şekilde tanımlarlar. E^3 öklid uzayında olan α ve β gibi iki eğri arasında karşılıklı bir ilişkinin olması halinde, α eğrisinin asli normal doğrusu β eğrisinin binormal doğrusu ile çakışıyorsa burada α eğrisine Mannheim eğrisi, β eğrisine Mannheim partner eğrisi denir. $\{\alpha, \beta\}$ ikilisine de Mannheim eğri çifti denir. Liu ve Wang iki eğrinin Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$ eşitliğinin olması gerektiğini söylemişlerdir.

Mannheim eğri çiftleri üzerine de yazılmış birçok çalışma vardır. Azak (2009) ‘’Üç Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Mannheim Eğri Çifti Üzerine’’ adlı çalışmasını yapmıştır. Kazaz ve ark. (2010) ‘’ E^3 Öklidyen Uzayında Mannheim Partner D-Eğrileri’’ üzerinde ve Coşkun (2010) da ‘’Üç Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Mannheim Eğri Çiftleri’’ üzerinde çalışmışlardır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde 3 boyutlu Öklid uzayında bazı tanım ve teoremler verilecektir. Öklid uzayında Frenet çatısı ve Darboux çatılarından bahsedilecektir.

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerindeki vektör uzayı V olsun. aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa, A ya V ile birleştirilmiş afin uzay denir.

(A_1) $\forall\, P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$
(A_2) $\forall\, P \in A$ ve $\alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$

olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalihoğlu, 1998)

Tanım 2.1.2. bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun. V'de,

$$\langle\,,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ , \qquad \begin{Bmatrix} (x_1, x_2, \dots x_n) = \vec{x} \\ (y_1, y_2, \dots y_n) = \vec{y} \end{Bmatrix}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1998)

Tanım 2.1.3. n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V ile birleşen bir Öklid uzayı E^n olsun. V vektör uzayı üzerinde bir norm $\|,\|$ olmak üzere,

$$d: E^n \times E^n \to \mathbb{R}\,,$$

$$(X,Y) \to d(X,Y) = \|XY\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad \begin{cases} X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyona E^n , n- boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve her $X, Y \in E^n$ için $d(X,Y)$ değerine de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adı verilir (Hacısalihoğlu, 1998).

Teorem 2.1.1. E^n , n-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonu bir metriktir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.4. E^n , n-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna n-boyutlu Öklid uzayında Öklid metriği denir(Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.5. $\forall\, x, y, z \in E^3$ için $x\widehat{y}z$ açısının ölçüsü

$$cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{yx}\|\,\|\overrightarrow{yx}\|}$$

den hesaplanan θ olçüsüdür (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 3.1.6. Bir F cismi üzerinde 3- boyutlu iki vektör uzayı V ile W olsun. Bir

$$f: V \to W$$

fonksiyonu için

i) f sürekli

ii) f^{-1} mevcut

iii) f^{-1} sürekli

ise bu fonksiyona V den W ye bir homeomorfizm denir ve bu durumda V ile W uzaylarına da homeomorf uzaylar adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.1.7. Reel eksenin $(a,b) \subseteq R$ açık aralığı ile homeomorf olan E^3 Öklid uzayının alt kümesine, E^3 uzayında eğri yayı denir.

$$\alpha: I \to E^n, I \subseteq R$$
$$s \to \alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s)\big)$$

ifadesinde $\alpha(I) \subset E^n$ bir eğri denir. $I \subseteq R$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.8. $\beta, J \subset R$ de tanımlı bir eğri olsun. Eğer $h: J \to I$, J açık aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\beta = \alpha(h): J \to I$$

bileşke fonksiyonu bir diferansiyellenebilir eğridir ve β ya h ile α nın yeniden parametrizasyonu denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.9. *M* eğrisi E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen eğri ve

$$\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s)\big)$$

olsun. Bu takdirde

$$\frac{d\alpha}{ds}\Big|_s = \alpha'(s)\Big|_s = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}\Big|_s, \frac{d\alpha_2}{ds}\Big|_s, \dots, \frac{d\alpha_n}{ds}\Big|_s\right)$$

tanjant vektörüne, M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir ve $\|\alpha'(s)\|$ reel sayısına da *M* nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(s)$ noktasındaki skaler hızı denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.10. M eğrisi ve (I,α) koordinat komşuluğu verilsin. $\forall\, s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I,α) ya göre birim hızlı eğri ve $s \in I$ parametresine yay parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.11. $M \subseteq E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu verilsin. $a, b \in I$ olmak üzere,

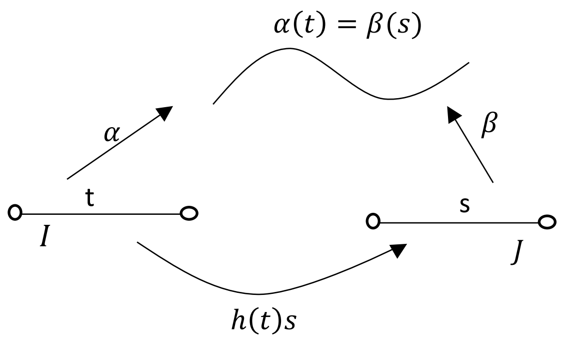
$$s = \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds$$

reel sayısına M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.1.12. $\alpha: I \to R^n$ eğrisi verilsin. Her t$\in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise, α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.1.2. R^n de regüler her eğrinin birim hızlı olacak şekilde komşuluğu vardır. Her eğri kendi yay parametresi cinsinden ifade edilebilir (Hacısalihoğlu, 1998).

İspat:



Şekil 2.1. Bir eğrinin iki parametre cinsinden ifadesi

$$\|\alpha'(t)\| \neq 1\ ,\ \|\beta'(s)\| = 1,\ \ \beta(s) = \alpha(t)$$

olup s ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha(t)}{ds}$$

ve

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\alpha(t)}{ds} = \frac{d\alpha(t)}{dt}\frac{dt}{ds}$$

bulunur. Her iki tarafın normu alınırsa

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t)\|\frac{dt}{ds}$$

bulunur. $\|\beta'(s)\| = 1$ olduğundan,

$$ds = \|\alpha'(t)\|dt$$

yazılabilir. buradan her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int ds = \int \|\alpha'(t)\|dt$$

ve

$$s = h(t) = \int \|\alpha'(t)\|dt$$

elde edilir.

2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Frenet Çatısı

2.2.1. Birim hızlı eğrilerde Frenet çatısı

Tanım 2.2.1.1. E^3uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$eğrisi için,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. Burada T , α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına α eğrisinin birim teğet vektör alanı denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.1.2. R^3 uzayında birim hızlı $\alpha \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$\kappa: I \rightarrow R,$$
$$s \rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna , α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.1.3. R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \tag{2.1}$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki birincil dik vektörü (asli normali) denir. Asli normal fonksiyonunu,

$$N = \frac{1}{\kappa} T'$$

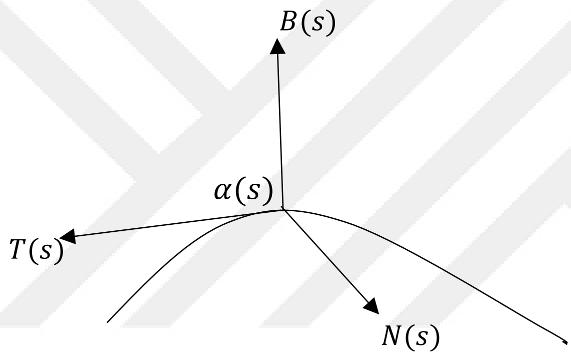
şeklinde gösterebiliriz (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.1.4. R^3 uzayında birim hızlı $\alpha \rightarrow R^3$ eğrisi için ,

$$B = T \times N$$

eşitliğiyle tanımlı B vektör alanına, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikincil dik vektörü (binormali) denir. $B = T \times N$ ifadesi her $s \in I$ için $B(s) = T(s) \times N(s)$ olması demektir. Burada $B(s)$ vektörü $T(s)$ ile $N(s)$ vektörlerine diktir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.1.5. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T , N , B \}$ kümesine eğrinin Frenet çatısı denir (Sabuncuoğlu, 2004).



Şekil 2.2. Öklid uzayında bir eğrinin Frenet çatısı

Tanım 2.2.1.6. $\alpha: I \rightarrow R^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T , N , B olmak üzere,

$$\tau: I \rightarrow R ,$$
$$s \longrightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna , α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir. Bu ifadeyi

$$\tau = -\langle B', N \rangle = \langle N', B \rangle \qquad (2.2)$$

şeklinde yazabiliriz (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2.1.1. $\alpha: I \to R^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T , N , B ise

$$\left.\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2004).

İspat: (2.1) denkleminden $T' = \kappa N$ ifadesi elde edilir.

$$N' = aT + bN + cB \tag{2.4}$$

alarak kabul edelim. Bu eşitliğin her iki yanını T ile çarparsak $\langle N', T\rangle = a$ elde edilir. $\langle N, T\rangle = 0$ olduğundan her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = 0 &\Rightarrow \langle N', T\rangle = -\langle N, T'\rangle \\ &\Rightarrow \langle N', T\rangle = -\langle N, \kappa N\rangle \\ &\Rightarrow \langle N', T\rangle = -\kappa \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $a = -\kappa$ bulunur.

Bu sefer (2.4) eşitliğinin her iki tarafını N ile çarpalım. Bu durumda, $\langle N', N\rangle = b$ olur. $\langle N, N\rangle = 1$ olup türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle N, N\rangle = 1 &\Rightarrow \langle N', N\rangle + \langle N, N'\rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\langle N', N\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N', N\rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda b=0 yazılabilir.

(2.4) denklemini B ile çarparsak $\langle N', B\rangle = c$ olur. $\langle N, B\rangle = 0$ olup bu eşitliğin her iki tarafının türevini alalım. Bu durumda

$$\langle N', B\rangle + \langle N, B'\rangle = 0 \Rightarrow \langle N', B\rangle = -\langle N, B'\rangle$$
$$\Rightarrow \langle N', B\rangle = -\tau$$

bulunur. O halde $c = -\tau$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

dır. Benzer şekilde

$$B' = dT + eN + fB \tag{2.5}$$

olarak alalım. Bu eşitliği T ile çarpalım. Bu durumda $\langle B', T\rangle = d$ bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned}\langle B, T\rangle = 0 &\Rightarrow \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle = 0\\ &\Rightarrow \langle B', T\rangle = -\langle B, T'\rangle\\ &\Rightarrow \langle B', T\rangle = -\langle B, \kappa N\rangle\\ &\Rightarrow \langle B', T\rangle = 0\end{aligned}$$

olduğundan d=0 olur. (2.5) eşitliğinin her iki tarafını N ile çarparsak $\langle B', N\rangle = e$ buluruz. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\langle B, N\rangle = 0 &\Rightarrow \langle B', N\rangle + \langle B, N'\rangle = 0\\ &\Rightarrow \langle B', N\rangle = -\langle B, N'\rangle\\ &\Rightarrow \langle B', N\rangle = -\langle B, -\kappa T + \tau B\rangle\\ &\Rightarrow \langle B', N\rangle = -\tau\end{aligned}$$

olduğundan $e = -\tau$ elde edilir. (2.5) eşitliğini bu kez B ile çarparsak, $\langle B', B\rangle = f$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\langle B, B\rangle = 1 &\Rightarrow \langle B', B\rangle + \langle B, B'\rangle = 0\\ &\Rightarrow 2\langle B', B\rangle = 0\\ &\Rightarrow \langle B', B\rangle = 0\end{aligned}$$

olduğundan $f = 0$ bulunur. Buna göre

$$B' = -\tau N$$

şeklinde yazılabilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. Buradaki eşitliklere birim hızlı α eğrisi için, Frenet formülleri ya da Frenet-Serret formülleri denir.

Frenet formüllerindeki katsayılar matrisi olan

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ters simetrik matristir.

Tanım 2.2.1.7. $\alpha: I \to R^3$ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu durumda; $\{T, N\}$ kümesinin gerdiği düzleme oskülatör düzlem, $\{T, B\}$ kümesinin gerdiği düzleme rektifyan düzlem, $\{N, B\}$ kümesinin gerdiği düzleme ise normal düzlem adı verilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.1.8. R^3 uzayında bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olsun. T vektör alanı, belirli bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa, α eğrisine bir helis denir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2.1.2. R^3 uzayında bir α eğrisi için, $\kappa > 0$ olsun. α eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olmasıdır (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.1.9. $\alpha: I \to R^3$eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu denir (Sabuncuoğlu, 2004).

2.2.2. Birim hızlı olmayan bir eğrinin Frenet çatısı

Birim hızlı olmayan bir $\alpha: I \to R^3$ eğrisini ele alalım. $\alpha oh: j \to R^3$ birim hızlı olacak biçimde bir $h: j \to I$ parametre dönüşümü bulunabilir. Buradaki h fonksiyonu,

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du \tag{2.6}$$

eşitliğiyle tanımlı $f: I \to j$ fonksiyonun tersidir. Burada $\alpha oh = \beta$ diyelim. Bu durumda β birim hızlı bir eğri olur. β eğrisinin Frenet vektör alanlarını T^1, N^1, B^1 ile gösterelim. $s \in j$, $h(s) = t$ olsun. $h = f^{-1}$ olduğundan, $s = f(t)$ demektir. Buna göre α eğrisinin Frenet vektör alanlarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 2.2.2.1. Birim hızlı olmayan bir $\alpha: I \to R^3$ eğrisinden elde edilen β eğrisinin Frenet vektör alanları T^1, N^1, B^1 olarak alınırsa $\alpha: I \to R^3$ eğrisinin frenet vektör alanları,

$$T(t) = T^1(f(t)) \ , \ N(t) = N^1(f(t)) \ , \ B(t) = B^1(f(t)) \tag{2.7}$$

eşitlikleri ile bulunabilir. Benzer şekilde β eğrisinin eğrilik ve burulması κ^1, τ^1 ise α eğrisinin eğrilik ve burulması da

$$\kappa(t) = \kappa^1(f(t)) \ , \ \tau(t) = \tau^1(f(t)) \tag{2.8}$$

ifadeleriyle bulunabilir (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2.2.1. $\alpha: I \to R^3$eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \ , \quad B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \quad , \quad N = B \times T \tag{2.9}$$

dir. $\alpha: I \to R^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları da,

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \quad \tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \tag{2.10}$$

eşitlikleriyle bulunur (Sabuncuoğlu, 2004).

Teorem 2.2.2.2. $\alpha: I \to R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve burulması κ ve τ olsun. $\|\alpha'\| = \upsilon$ ise

$$\left.\begin{aligned} T' &= \upsilon\kappa N \\ N' &= -\upsilon\kappa T + \upsilon\tau B \\ B' &= -\upsilon\tau N \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu, 2004).

2.3. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Darboux Çatısı

Tanım 2.3.1. : M regüler yüzey ve $\alpha: I \subset R \to M$ birim hızlı bir eğri olsun. O halde, α eğrisi boyunca $\{T, g = n \times T,\ n\}$ Darboux çatısı tanımlanabilir. Burada T, α eğrisinin teğeti ve n, M yüzeyinin birim normalidir. Frenet çatısı ile Darboux çatısı arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$T = T$$
$$N = cos\theta g - sin\theta n$$
$$B = sin\theta g + cos\theta n$$

dir. Burada θ, g birim verktörü ile eğrinin asli normali N arasındaki açıdır. Bu eşitliklerin matris gösterimi de

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

biçiminde olur.(Saçlı, 2013)

Teorem 2.3.2. M bir regüler yüzey ve $\alpha: I \subset R \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisi boyunca $\{T, g = n \times T,\ n\}$ Darboux çatısı için türev formülleri,

$$\left.\begin{aligned} T' &= k_g g + k_n n \\ g' &= -k_g T + \tau_g n \\ n' &= -k_n T - \tau_g g \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

dir. Burada k_g, k_n, τ_g sırasıyla , α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği, geodezik torsiyonudur ve

$$\left.\begin{aligned} &\kappa^2(s) = {k_g}^2(s) + {k_n}^2(s) \\ &k_g(s) = \kappa(s)cos\theta \\ &k_n(s) = -\kappa(s)sin\theta \\ &\tau_g(s) = \tau(s) + \theta' \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

dır. Burada,

i. α eğrisi geodezik eğri $\Leftrightarrow$ $k_g = 0$

ii. α eğrisi asimptotik eğri $\Leftrightarrow$ $k_n = 0$ (2.15)

iii. α eğrisi asli doğrultu$\Leftrightarrow$ $\tau_g = 0$

yazılabilir (Saçlı, 2013).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde eğri çiftleri ile ilgili literatür çalışmaları yapılmıştır.

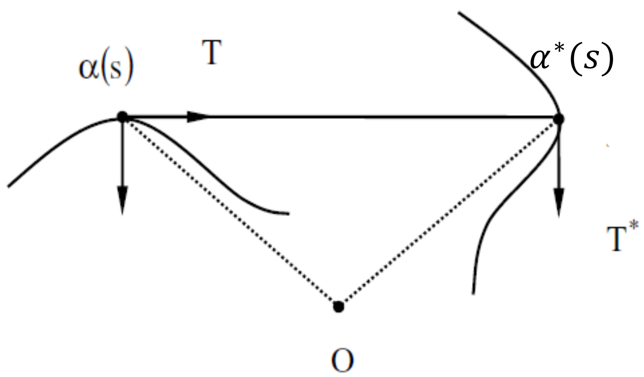
3.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

Bu bölümde involüt-evolüt eğrileri ile ilgili bazı tanımlamalar ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1.1. Birim hızlı $\alpha: I \to E^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^*: I \to E^3$eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğet vektörü $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyor ve bu notadaki teğet vektörüne dik oluyorsa α eğrisine evolüt, α^* eğrisine ise involüt eğrisi denir ve $(\alpha\ , \alpha^*)$ ile gösterilir. Buna göre

$$\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0 \tag{3.1}$$

yazılabilir. Burada $T(s),\ T^*(s)$ vektörleri sırasıyla $\alpha\ , \alpha^*$ eğrilerinin teğet vektörleridir (Hacısalihoğlu, 1983).



Şekil 3.1. İnvolüt-evolüt eğri çifti

Teorem 3.1.1. α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü ise bu eğriler arasında

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (-s + c)\, T(s) \tag{3.2}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: İnvolüt eğri tanımından

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s) \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) denklemin türevi alınırsa

$$(\alpha^*)'(s) = \alpha'(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s)$$

olup α nın parametresi s ve α^* nin parametresi s^* ise

$$\frac{d\alpha^*}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s)$$

veya,

$$T^*\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s) \tag{3.4}$$

bulunur. (3.4) denkleminin iki tarafı T çarpıldığında ve α^* eğrisi , α eğrisinin involütü olduğundan

$$0 = 1 + \lambda'(s)$$

olup buradan

$$\lambda(s) = -s + c \tag{3.5}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. $\alpha^*: I \to E^3$ eğrisi $\alpha: I \to E^3$eğrisinin bir involütü ise $\alpha^*(s)$ ile $\alpha(s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d\big(\alpha(s), \alpha^*(s)\big) = |c - s|, \text{ c=sabit}, \ \forall s \in I \tag{3.6}$$

dır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s)$ ifadesinin normunu alalım. Bu durumda

$$\|\alpha^*(s) - \alpha(s)\| = \|\lambda(s)\|$$

olup buradan,

$$d\big(\alpha(s), \alpha^*(s)\big) = |c - s|, \text{ c=sabit} \tag{3.7}$$

bulunur.

Teorem 3.1.3. $\alpha^*: I \to E^3$ eğrisi $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. α ve α^* eğrilerinin Frenet Çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ ile gösterilirse bu çatılar arasında

$$\left.\begin{aligned} T^* &= N \\ N^* &= -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B \\ B^* &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2006).

İspat: $\alpha^*(s) = \alpha(s) + (-s + c)\, T(s)$ eşitliğinden

$$(\alpha^*)'(s) = \alpha'(s) - T(s) + (-s + c)T'(s)$$

veya

$$(\alpha^*)'(s) = (-s + c)\kappa(s)N(s) \tag{3.9}$$

bulunur. Bu eşitliğin normu alınırsa

$$\|(\alpha^*)'(s)\| = |(-s+c)\kappa(s)| \tag{3.10}$$

elde edilir. (2.9) dan

$$T^* = \frac{1}{\|(\alpha^*)'(s)\|}(\alpha^*)'(s)$$

olup (3.9) ve (3.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$T^* = \frac{(-s+c)\kappa(s)}{\|(-s+c)\kappa(s)\|}N(s) \tag{3.11}$$

bulunur. Bu eşitlikte T^* ve N vektörleri birim vektörler olduğundan

$$T^* = N \text{ veya } T^* = -N \tag{3.12}$$

olur. Bundan sonraki işlemlerde $T^* = N$ kabul edip devam edeceğiz. Bu durumda

$$(\alpha^*)'(s) = (-s+c)\kappa(s)N(s)$$

ifadesinde α^* eğrisinin ikinci ve üçüncü dereceden türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}(\alpha^*)'' &= -\kappa N + (-s+c)\kappa' N + (-s+c)\kappa N' \\ &= -\kappa N + (-s+c)\kappa' N + (-s+c)\kappa(-\kappa T + \tau B) \\ &= [-(-s+c)\kappa^2]T + [-\kappa + (-s+c)\kappa']N + [(-s+c)\kappa\tau]B\end{aligned} \tag{3.13}$$

ve

$$\begin{aligned}(\alpha^*)''' = {} & [\kappa^2 - (-s+c)2\kappa\kappa']T + [-(-s+c)\kappa^2]T' \\ & +[-\kappa' - \kappa' + (-s+c)\kappa'']N + [-\kappa + (-s+c)\kappa']N' \\ & +[-\kappa\tau + (-s+c)\kappa'\tau + (-s+c)\kappa\tau']B + [(-s+c)\kappa\tau]B'\end{aligned} \tag{3.14}$$

olup Frenet formülleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(\alpha^*)''' = {} & [2\kappa^2 - 3(-s+c)\kappa\kappa']T \\ & +[-(-s+c)\kappa^3 - 2\kappa' + (-s+c)\kappa'' - (-s+c)\kappa\tau^2]N \\ & +[-2\kappa\tau + 2(-s+c)\kappa'\tau + (-s+c)\kappa\tau']\mathrm{B}\end{aligned} \tag{3.15}$$

bulunur. α^* eğrisinin birinci ve ikinci türevlerinin vektörel çarpımları alınırsa,

$$(\alpha^*)' \times (\alpha^*)'' = (-s+c)^2\kappa^2\tau T + (-s+c)^2\kappa^3 B \tag{3.16}$$

olur. (3.16) eşitliğinin normu ise,

$$\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\| = (-s+c)^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

bulunur. Bu durumda,

$$B^* = \frac{(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''}{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|}$$

olduğundan

$$B^* = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B$$

elde edilir. $N^* = B^* \times T^*$ olduğundan,

$$N^* = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.4. $\alpha^*: I \to E^3$ eğrisi $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ, α^* eğrisinin eğrilikleri de κ^* veτ^* ise bu eğrilikler arasında

$$\kappa^*(s) = \frac{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)(s)}}{|(-s+c)\kappa(s)|}$$

$$\tau^*(s) = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(s)}{(-s+c)\kappa(\kappa^2+\tau^2)(s)} \tag{3.17}$$

bağıntısı vardır (Hacısalihoğlu, 1983).

İspat: (2.10) den,

$$\kappa^* = \frac{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|}{\|(\alpha^*)'\|^3}$$

olup, (3.9) dan $(\alpha^*)'$ ve (3.13) den $(\alpha^*)''$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\kappa^*(s) = \frac{(-s+c)^2\kappa^2(s)\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)(s)}}{|(-s+c)\kappa(s)|^3}$$

ve

$$\kappa^*(s) = \frac{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)(s)}}{|(-s+c)\kappa(s)|}$$

bulunur. Yine (2.10) dan,

$$\tau^* = \frac{\langle (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'', (\alpha^*)''' \rangle}{\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\|^2}$$

olup bu eşitliğe (3.9) dan $(\alpha^*)'$, (3.13) den $(\alpha^*)''$ ve (3.15) ten de $(\alpha^*)'''$ değerleri yazılırsa

$$\langle (\alpha^*)' \times (\alpha^*)'', (\alpha^*)''' \rangle = (-s+c)^3\kappa^3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)$$

ve $(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''$ ifadesinin normu

$$\|(\alpha^*)' \times (\alpha^*)''\| = (-s+c)^2\kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

olacağından,

$$\tau^*(s) = \frac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(s)}{(-s+c)\kappa(\kappa^2+\tau^2)(s)}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.5. (α, α^*) involüt-evolüt eğri çifti olsun. α ve α^*eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ ile gösterilirse bu çatılar arsında

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ cos\psi(s) & 0 & sin\psi(s) \\ -sin\psi(s) & 0 & \cos\psi(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

dır. Burada ψ, T ile N^* arasındaki açıdır (As ve Sarıoğlugil, 2014).

Teorem 3.1.6. $\alpha^*: I \to E^3$ eğrisi $\alpha: I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. α ve α^* eğrisinin eğrilikleri sırasıyla κ, τ ve κ^*, τ^* olsun. α eğrisinin helis olması için gerek ve yeter şart α^* eğrisinin düzlemsel olmasıdır (Bilici, 1999).

İspat: α eğrisi bir helis olsun. Bu durumda,

$$\frac{\tau}{\kappa} = sabit$$

olup

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \tag{3.19}$$

olur. Diğer taraftan (3.17) bağıntılarından,

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\dfrac{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)}{(-s+c)\kappa(\kappa^2+\tau^2)}}{\dfrac{\sqrt{(\kappa^2+\tau^2)}}{|(-s+c)\kappa|}}$$

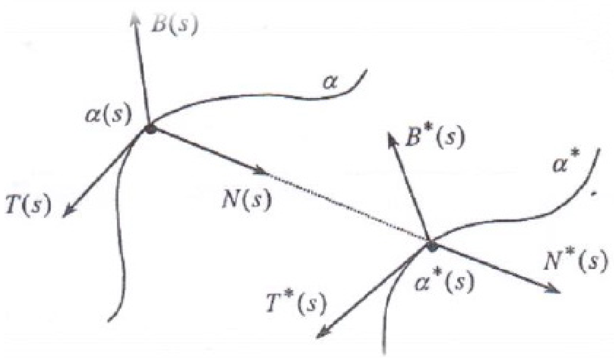
ve

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.19) ifadesi (3.20) eşitliğinde yerine yazılırsa $\tau^* = 0$ bulunur. Dolayısıyla α^* eğrisinin düzlemsel olduğu söylenebilir.

3.2. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çiftleri

Tanım 3.2.1. $\alpha: I \to E^3$ ve $\alpha^*: I \to E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri, bu eğrilerin Frenet 3-ayaklıları sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. $\forall s \in I$ için $\{N(s), N^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (α, α^*) ikilisine bir Bertrand eğri çifti denir (Hacısalihoğlu,1983).



Şekil 3.2. Bertrand eğri çifti

Teorem 3.2.1. (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. λ sabit bir sayı olmak üzere α^* eğrisi,

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s) \tag{3.21}$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu, 2004).

İspat: : $\alpha: I \to E^3$ birim hızlı eğri olsun. Bertrand eğri çifti tanımına göre

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + u(s)N(s) \tag{3.22}$$

yazılabilir. Buradan her iki tarafın türevi alınırsa,

$$(\alpha^*)'(s) = \alpha'(s) + u'(s)N(s) + u(s)N'(s)$$

veya

$$(\alpha^*)'(s) = T(s) + u'(s)N(s) + u(s)(-\kappa T + \tau B)(s)$$

veya

$$(\alpha^*)'(s) = (1 - u(s)\kappa(s))T(s) + u'(s)N(s) + u(s)\tau(s)B(s) \tag{3.23}$$

olur. $(\alpha^*)'(s)$ vektörü T^* vektörü ile parelel olduğundan $(\alpha^*)'(s) \perp N(s)$ dir. O halde

$$\langle \alpha^*(s), N(s) \rangle = 0$$

olur. (3.23) denklemini $N(s)$ ile çarparsak,

$$0 = u'(s) \Rightarrow u(s) = \text{sabit}$$

bulunur. Burada $u = \lambda$ alınırsak (3.22) denklemini

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$$

biçiminde buluruz.

Teorem 3.2.2. α ve α^* eğrileri (I, α) ve (I, α^*) koordinat komşuluğu ile verilsin. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktası ile α^* eğrisinin α^*(s) noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Sabuncuoğlu, 2006).

İspat: $\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)N(s)$ eğrisinin yay parametresi s^* ile gösterilsin.

$$\frac{d\alpha^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda'(s).N(s) + \lambda(s).N'(s)$$

veya

$$T^*(s).\frac{ds^*}{ds} = T(s) + \lambda'(s).N(s) + \lambda(s).\big(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)\big)$$

veya

$$T^*(s)\frac{ds^*}{ds} = \big(1 - \lambda(s)\,\kappa(s)\big)T(s) + \lambda'(s).N(s) + \lambda(s)\tau(s)B(s) \qquad (3.24)$$

olup (3.24) eşitliğinin her iki tarafı $N(s)$ vektörü ile çarpılırsa

$$\langle T^*(s).\frac{ds^*}{ds}, N(s)\rangle = \lambda'(s)$$

veya

$$\lambda'(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = sabit$$

olup

$$\|\alpha^*(s) - \alpha(s)\| = \|\lambda(s)\| = sabit$$

bulunur.

Teorem 3.2.3. (α, α^*) Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktalarındaki birim teğet vektörleri arasındaki açı sabittir (Hacısalihoğlu,1983).

İspat: $\alpha: I \to E^3$ ve $\alpha^*: I \to E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri, bu eğrilerin Frenet 3-ayaklısı sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\langle T(s), T^*(s)\rangle &= \langle \frac{dT}{ds}, T^*\rangle + \langle T, \frac{dT^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds}\rangle \\ &= \langle \kappa N, T^*\rangle + \frac{ds^*}{ds}\langle T, \kappa^* N^*\rangle \\ &= \kappa\langle N, T^*\rangle + \frac{ds^*}{ds}\,\kappa^*\langle T, N^*\rangle \end{aligned} \tag{3.25}$$

yazılabilir. $\{N(s), N^*(s)\}$ sistemi lineer bağımlı olduğundan

$$\langle N, T^*\rangle = 0 \text{ ve } \langle T, N^*\rangle = 0$$

dır. Dolayısıyla (3.25) eşitliği

$$\frac{d}{ds}\langle T(s), T^*(s)\rangle = 0$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\langle T(s), T^*(s)\rangle = sabit$$

söylenebilir. $T(s)$, $T^*(s)$ vektörleri arasındaki açı ψ ise

$$\langle T(s), T^*(s)\rangle = cos\,\psi = sabit$$

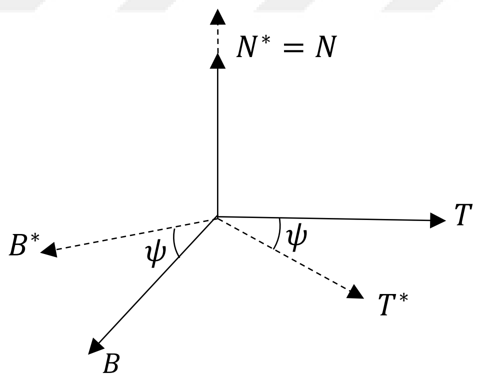
yazılabilir.

Teorem 3.2.4. (α, α^*) Bertrand eğri çiftinin birim teğet vektörleri arasındaki açı ψ olmak üzere Frenet vektörleri arasında

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,\psi & 0 & -sin\,\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\,\psi & 0 & cos\,\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2004).

İspat: (α, α^*) Bertrand eğri çifti olduğundan teğetler arasındaki açı ile binormaller arasındaki açı aynı olur (şekil 3.3).



Şekil 3.3. Bertrand eğri çiftinin Frenet çatıları

Bu durumda çatılar arasındaki bağıntı,

$$\left.\begin{array}{l} T^* = \cos\psi T - sin\psi B \\ N^* = N \\ B^* = sin\,\psi T + cos\,\psi\,\mathrm{B} \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

şeklinde olur.

Teorem 3.2.5. (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ ise bunlar arasındaki bağıntı

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1 \text{ ve } \mu = -\lambda cot\psi$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu,1983).

İspat: : α ve α^* eğrilerinin Frenet çatısı sırasıyla $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olsun. Buna göre $T(s)$ ile $T^*(s)$ arasındaki açı ψ olmak üzere,

$$T^* = \cos\psi T - sin\psi B$$

dır. Diğer taraftan

$$(\alpha^*)' = \frac{d\alpha^*}{ds^*} . \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)T + \lambda\tau B$$

veya

$$T^*(s) . \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)T + \lambda\tau B \tag{3.28}$$

dir. (3.28) eşitliğinin her iki tarafını T ve B ile çarparsak,

$$cos\psi = (1 - \lambda\kappa)\frac{ds}{ds^*}$$

ve

$$sin\psi = \lambda\tau\frac{ds}{ds^*}$$

bulunur. Bu iki ifadeyi birbirine oranlarsak

$$\lambda\kappa - \lambda cot\psi\tau = 1$$

elde edilir. Burada $\mu = -\lambda cot\psi$ alınırsa

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.6. (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ, α^* eğrisinin eğrilikleri κ^* ve τ^* olmak üzere bu eğrilikler arasında,

$$\kappa^* = \frac{\lambda\kappa - sin^2\psi}{\lambda(1 - \lambda\kappa)},$$

$$\tau^* = \frac{sin^2\psi}{\lambda^2\tau}$$

bağıntısı vardır (Sabuncuoğlu, 2006).

Teorem 3.2.7. (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun. α eğrisinin eğrilikleri κ ve τ, α^* eğrisinin eğrilikleri κ^* ve τ^* olmak üzere bu eğrilikler arasında,

$$\kappa^* = \kappa cos\psi + \tau sin\psi$$

$$\tau^* = -\kappa sin\psi + \tau cos\psi$$

bağıntısı vardır (Çelik, 2016).

İspat: (α, α^*) Bertrand eğri çifti olsun.

$$\kappa^* = \langle T^{*'}, N^* \rangle \text{ ve } \tau^* = \langle N^{*'}, B^* \rangle$$

olduğundan (3.27) denklemleri kullanırsak,

$$\kappa^* = \langle cos\psi T' - sin\psi B', N\rangle \Rightarrow \kappa^* = \langle cos\psi\kappa N + sin\psi\tau N, N\rangle$$
$$\Rightarrow \kappa^* = cos\psi\kappa + sin\psi\tau$$

ve

$$\tau^* = \langle N', sin\,\psi T + cos\,\psi \mathrm{B}\rangle \Rightarrow \tau^* = \langle -\kappa T + \tau B, sin\,\psi T + cos\psi \mathrm{B}\rangle$$
$$\Rightarrow \tau^* = -\kappa sin\psi + \tau cos\psi$$

bulunur.

3.3. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çiftleri

Bu bölümde; Huili Liu ve Fan Wang'ın 'Mannheim partner curves in 3-space' adlı makalesi incelenmiştir.

Tanım 3.3.1. α ve α^* , 3 boyutlu uzayda iki eğri olsun. Bu eğrilere karşılık gelen noktalarda, α eğrisinin asli normal doğrusu α^* eğrisinin binormal doğrusu ile lineer bağımlı (çakışık) oluyorsa, α eğrisine bir Mannheim eğrisi, α^* eğrisine de α eğrisinin Mannheim partner eğrisi adı verilir. $\{\alpha, \alpha^*\}$ çifti bir Mannheim eğri çifti olarak adlandırılır. α eğrisinin Frenet vektörleri $\{T, N, B\}$, α^* eğrisinin Frenet vektörleri $\{T^*, N^*, B^*\}$ olmak üzere $\{\alpha, \alpha^*\}$ Mannheim eğri çifti ise

$$\langle N, N^*\rangle = 0$$

dır.

Teorem 3.3.1. 3-boyutlu uzayda birim hızlı α ve α^* eğrilerinin Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)\,, \lambda \neq 0$$

dır. Burada κ ve τ , α eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

İspat: :($\Longrightarrow$) $\{\alpha , \alpha^*\}$ çifti Mannheim eğri çifti olduğundan tanımdan,

$$\alpha^*(s^*) = \alpha(s) + \lambda N(s) \tag{3.29}$$

yazılabilir. s^*, α^* eğrisinin yay parametresi s de α eğrisinin yay parametresi olmak üzere (3.29) denkleminin s ye göre türevi alınırsa,

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = T + \lambda' N + \lambda N'$$

veya

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = T + \lambda' N + \lambda(-\kappa T + \tau B)$$

veya

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)T + \lambda' N + \lambda\tau B \tag{3.30}$$

eşitliği elde edilir. (3.30) eşitliğini N ile çarparsak

$$\lambda' = 0$$

olup,

$$\lambda = sabit$$

bulunur. Bu durumda (3.30) eşitliği

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \kappa\lambda)T + \lambda\tau B \tag{3.31}$$

veya

$$T^* = \frac{ds}{ds^*}(1-\kappa\lambda)T + \frac{ds}{ds^*}\lambda\tau B \tag{3.32}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan ψ, T^* ve T arasındaki açı olmak üzere,

$$T^* = cos\psi T - sin\psi B \tag{3.33}$$

yazılabilir. (3.33) eşitliğinin türevini alırsak,

$$(T^*)'\frac{ds^*}{ds} = -\psi' sin\psi T + cos\psi(\kappa N) - \psi' cos\psi B - sin\psi(-\tau N)$$

veya

$$\kappa^* N^* \frac{ds^*}{ds} = -\psi' sin\psi T + (\kappa cos\psi + \tau sin\psi)N - \psi' cos\psi B$$

olup $\langle N, N^* \rangle = 0$ olduğundan

$$\kappa cos\psi + \tau sin\psi = 0$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\kappa}{\tau} = -tan\psi \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.32) ve (3.33) denklemlerinden de

$$\frac{\frac{ds}{ds^*}\lambda\tau}{\frac{ds}{ds^*}(1-\kappa\lambda)} = \frac{-sin\psi}{cos\psi} = -tan\psi \tag{3.35}$$

bulunabilir. Bu durumda (3.34) ve (3.35) denklemlerinden de

$$\frac{\lambda\tau}{1-\kappa\lambda}=\frac{\kappa}{\tau}\Rightarrow \kappa=\lambda(\kappa^2+\tau^2)$$

olarak bulunur.

($\Leftarrow$) $\kappa=\lambda(\kappa^2+\tau^2)$ olsun ve

$$\alpha^*(s^*)=\alpha(s)+\lambda N(s) \tag{3.36}$$

göz önüne alınsın. (3.36) eşitliğinin s^* a göre türevini alırsak

$$T^*=\big(T+\lambda' N+\lambda(-\kappa T+\tau B)\big)\frac{ds}{ds^*}$$

olup $\lambda=sabit$ olduğundan

$$T^*=\big((1-\kappa\lambda)T+\lambda\tau B\big)\frac{ds}{ds^*} \tag{3.37}$$

denklemi bulunur. (3.37) eşitliğini bir daha s^* a göre türevini alırsak,

$$(T^*)'=[-\kappa'\lambda T+(1-\kappa\lambda)T'+\lambda\tau' B+\lambda\tau B']\frac{ds}{ds^*}$$
$$+\big((1-\kappa\lambda)T+\lambda\tau B\big)\frac{d^2s}{ds^{*2}}$$

olup Frenet formüllerini kullanırsak,

$$\kappa^*N^*=[-\kappa'\lambda T+(1-\kappa\lambda)\kappa N+\lambda\tau' B-\lambda\tau^2 N]\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2$$
$$+\big((1-\kappa\lambda)T+\lambda\tau B\big)\frac{d^2s}{ds^{*2}}$$

veya

$$\kappa^* N^* = \left[-\kappa'\lambda T + \left(\kappa - \lambda(\kappa^2 + \tau^2)\right)N + \lambda\tau' B\right]\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 + \left((1-\kappa\lambda)T + \lambda\tau B\right)\frac{d^2 s}{ds^{*2}}$$

elde edilir. $\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$ olduğundan

$$\kappa^* N^* = [-\kappa'\lambda T + \lambda\tau' B]\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 + \left((1-\kappa\lambda)T + \lambda\tau B\right)\frac{d^2 s}{ds^{*2}}$$

olur. Her iki tarafı N ile çarparsak,

$$\langle N^*, N\rangle = 0$$

elde edilir. O halde $N^* \perp N$ dir. (3.37) eşitliğinden de

$$\langle T^*, N\rangle = \langle \left((1-\kappa\lambda)T + \lambda\tau B\right)\frac{ds}{ds^*}, N\rangle = 0$$

olur. Bu durumda $T^* \perp N$ dir. O halde N ile B^* paralel olur. Yani α eğrisinin asli normal doğrusu ile α^* eğrisinin binormal doğrusu çakışıktır. O halde $\{\alpha, \alpha^*\}$ çifti Mannheim eğri çiftidir.

Teorem 3.3.2. α ve α^* eğrilerinin Mannheim eğri çifti olsun. α^* eğrisinin α eğrisinin Mannheim partner eğrisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin burulması τ; $\alpha^*(s^*)$ eğrisinin eğriliği κ^*, burulması τ^* olmak üzere

$$(\tau^*)' = \frac{d\tau^*}{ds^*} = \frac{\kappa^*}{\lambda}(1 + \lambda^2(\tau^*)^2)\ , \qquad \lambda \neq 0$$

denkleminin sağlanmasıdır.

İspat: (⟹) α^* eğrisi α eğrisinin Mannheim partner eğrisi olsun. Tanımdan,

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda B^*(s^*) \tag{3.38}$$

yazılabilir. (3.38) eşitliğini s^* göre türevi alınırsa,

$$T\frac{ds}{ds^*} = T^* - \lambda\tau^* N^* \tag{3.39}$$

bulunur. Diğer taraftan T ile T^* arasındaki açı ψ olmak üzere,

$$T = cos\psi T^* + sin\psi N^* \tag{3.40}$$

dır. (3.40) eşitliğinin s^* a göre türevi alınırsa

$$T'\frac{ds}{ds^*} = -\psi' sin\psi T^* + cos\psi(\kappa^* N^*) + \psi' cos\psi N^* + sin\psi(-\kappa^* T^* + \tau^* B^*)$$

ve

$$\kappa N\frac{ds}{ds^*} = -(\kappa^* + \psi')sin\psi T^* + (\kappa^* + \psi')cos\psi N^* + \tau^* sin\psi B^*$$

elde edilir. N ile B^* aynı doğrultuda olduğundan,

$$-(\kappa^* + \psi')sin\psi T^* + (\kappa^* + \psi')cos\psi N^* = 0$$

yazılabilir. $\{T^*, N^*, B^*\}$ üçlüsü lineer bağımsız olduğundan,

$$(\kappa^* + \psi')sin\psi = 0$$

ve

$$(\kappa^* + \psi')cos\psi = 0 \tag{3.41}$$

olur. (3.41) eşitliğinden

$$\kappa^* = -\psi' \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.39) ve (3.40) eşitliklerinden,

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{cos\psi} = \frac{-\lambda\tau^*}{sin\psi}$$

olup,

$$\lambda\tau^* = -tan\psi \tag{3.43}$$

bulunur. Buradan (3.43) ifadesinin türevi alınıp (3.41) ve (3.42) eşitliği kullanılırsa,

$$\lambda(\tau^*)' = \kappa^*(1 + \lambda^2(\tau^*)^2)$$

$$(\tau^*)' = \frac{\kappa^*}{\lambda}(1 + \lambda^2(\tau^*)^2)$$

bulunur.

($\Leftarrow$) α^* eğrisinin eğriliği κ^* ve burulması τ^* olmak üzere

$$(\tau^*)' = \frac{\kappa^*}{\lambda}(1 + \lambda^2(\tau^*)^2)$$

eşitliğini kabul edelim.

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda B^*(s^*) \tag{3.44}$$

eşitliğinin s^* a göre türevi alınırsa,

$$T\ \frac{ds}{ds^*} = T^* - \lambda\tau^* N^* \tag{3.45}$$

dır. (3.45) eşitliğini de s^* a göre türevini alıp Frenet formülleri kullanılırsa,

$$T'\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 + T\frac{d^2 s}{d(s^*)^2} = \kappa^* N^* - \lambda(\tau^*)' N^* - \lambda\tau^*(-\kappa^* T^* + \tau^* B^*)$$

veya

$$\kappa N\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 + T\frac{d^2 s}{d(s^*)^2} = \lambda\kappa^*\tau^* T^* + (\kappa^* - \lambda(\tau^*)')N^* - \lambda(\tau^*)^2 B^* \tag{3.46}$$

elde edilir. (3.45) ve (3.46) eşitliklerin vektörel çarpımı alınırsa

$$\left[T\frac{ds}{ds^*}\right] \times \left[\kappa N\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 + T\frac{d^2 s}{d(s^*)^2}\right]$$

$$= (T^* - \lambda\tau^* N^*) \times (\lambda\kappa^*\tau^* T^* + (\kappa^* - \lambda(\tau^*)')N^* - \lambda(\tau^*)^2 B^*)$$

veya

$$\kappa\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^3 B = \lambda^2(\tau^*)^3 T^* + \lambda(\tau^*)^2 N^* + (\kappa^* - \lambda(\tau^*)' + \lambda^2(\tau^*)^2\kappa^*)B^*$$

bulunur.

$$\kappa^* - \lambda(\tau^*)' + \lambda^2(\tau^*)^2\kappa^* = 0$$

olacağından

$$\kappa B\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^3 = \lambda^2(\tau^*)^3 T^* + \lambda(\tau^*)^2 N^* \tag{3.47}$$

olup (3.45) ile (4.3.47) eşitliklerinin vektörel çarpılırsa,

$$T\frac{ds}{ds^*}\times\kappa\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^3 B=(T^*-\lambda\tau^*N^*)\times(\lambda^2(\tau^*)^3T^*+\lambda(\tau^*)^2N^*)$$

veya

$$\kappa\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^4 N=-(\tau^*)^2(1+(\lambda^2(\tau^*)^2)B^*$$

olur. Buna göre N ile B^* aynı doğrultudadır. Yani α eğrisinin asli normal doğrusu ile α^* eğrisinin binormal doğrusu çakışıktır. Bu durumda $\{\alpha^*,\alpha\}$ ikisi Mannheim eğri çiftidir.

Önerme 3.3.1. α , s yay parametresiyle verilmiş bir eğri olsun. α^* da s^* parametresiyle verilmiş ve α eğrisinin Mannheim partner eğrisi olsun. Eğer α eğrisi genelleştirilmiş helis ise α^* bir doğrudur.

İspat: α eğrisinin Frenet çatısı $\{T,N,B\}$, eğrilik ve burulması sırasıyla κ ve τ olsun. α^* eğrisinin de Frenet çatısı $\{T^*,N^*,B^*\}$, eğrilik ve burulması ise sırasıyla κ^* ve τ^* olsun. α genelleştirilmiş helis ise T ile belirli sabit bir P vektörü için,

$$\langle T,P\rangle=cos\beta \qquad (3.48)$$

sabittir. (3.48) eşitliğinin türevi alınırsa

$$\langle T',P\rangle+\langle T,P'\rangle=0$$

olup buradan,

$$\langle T',P\rangle=0$$

elde edilir. $T' = \kappa N$ olduğundan

$$\kappa\langle N, P\rangle = 0$$

bulunur. α eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart $\dfrac{\tau}{\kappa}$ oranın sabit olmasıdır. Buna göre $\kappa \neq 0$ dir. Böylece $\langle N, P\rangle = 0$ dır. N ile B^* aynı doğrultuda olduğuna göre

$$\langle B^*, P\rangle = 0 \tag{3.49}$$

yazılabilir.(3.49) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\langle (B^*)', P\rangle + \langle B^*, P'\rangle = 0 \Rightarrow \langle (B^*)', P\rangle = 0$$

olup,

$$-\tau^*\langle N^*, P\rangle = 0 \Rightarrow \tau^* = 0$$

elde edilir. Bu durumda α^* düzlemdedir.

$$(\tau^*)' = \frac{\kappa^*}{\lambda}(1 + \lambda^2(\tau^*)^2)$$

olduğundan $\kappa^* = 0$ olur. Bundan dolayı α^* bir doğrudur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında eğri çiftlerini Darboux çatısını kullanarak ele aldık.

4.1. Darboux Çatısına Göre İnvolüt-Evolüt Eğri Çiftleri

(α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. α ve α^* eğrilerinin Frenet çatısı sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Yine α ve α^* eğrilerinin Darboux çatısı sırasıyla $\{T, g, n\}$ ve $\{T^*, g^*, n^*\}$ olsun. Bilindiği üzere involüt-evolüt eğri çiftleri arasındaki ilişki,

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \lambda(s)T(s)$$

olup her iki tarafın türevi alınırsa ve (2.13) deki Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$(\alpha^*)'(s^*).\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')T + \lambda k_g g + \lambda k_n n$$

veya

$$T^*.\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')T + \lambda k_g g + \lambda k_n n \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) eşitliğin her iki taraf T ile çarpılırsa,

$$\langle T^*, T\rangle.\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')\langle T, T\rangle + \lambda k_g\langle g, T\rangle + \lambda k_n\langle n, T\rangle$$

$$0 = 1 + \lambda'$$

$$-1 = \lambda'$$

$$-s + c = \lambda \quad , \qquad \text{c=sbt}$$

olur. Buna göre (4.1) denklemini

$$T^{*}.\frac{ds^{*}}{ds} = \lambda k_g g + \lambda k_n n \tag{4.2}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin her iki tarafın normunu alırsak,

$$\frac{ds^{*}}{ds} = |\lambda|\sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2} = |\lambda|\kappa \tag{4.3}$$

olup (4.2) ifadesi,

$$T^{*} = \mp\frac{k_g}{\sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2}}g \mp \frac{k_g}{\sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2}}n \tag{4.4}$$

olarak elde edilir. (4.4) de

$$k_g = \kappa.cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{k_g}{\sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2}}$$

$$k_n = -\kappa.sin\theta \Rightarrow sin\theta = -\frac{k_n}{\sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2}}$$

ifadelerini yerine yazarsak,

$$T^{*} = \mp cos\theta.g \pm sin\theta.n \tag{4.5}$$

bulunur. (2.12) den dolayı (4.5) eşitliği

$$T^{*} = \mp N \tag{4.6}$$

biçiminde yazılabilir. Yani T^* ile N lineer bağımlıdırlar.

Teorem 4.1.1. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. α ve α^* eğrilerinin Frenet çatısı sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Aynı şekilde α ve α^* eğrilerinin Darboux çatısı sırasıyla $\{T, g, n\}$ ve $\{T^*, g^*, n^*\}$ olsun. Bu durumda α ve α^* eğrilerinin Darboux çatıları arasında,

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ cos\theta & sin\theta\sin\gamma & sin\theta cos\gamma \\ 0 & cos\theta\sin\gamma & cos\theta cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

bağıntısı vardır. Burada θ, α eğrisinin asli normali N ile yüzey normali ile oluşan g birim vektörü arasındaki açıdır. θ^* ise α^* eğrisinin asli normali N^* ile yüzey normali ile oluşan g^* birim vektörü arasındaki açı ve ψ açısı da α ve α^* eğrilerinin sırasıyla T ve N^* vektörleri arasındaki açı arasındaki açı olmak üzere $\psi + \theta^* = \gamma$ dır.

İspat: α^* ve α eğrilerinin sırasıyla Frenet çatısı ile Darboux çatısı arasındaki ilişkiler

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

ve

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

biçimindedir. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftlerinin T ile N^* vektörleri arasındaki açı ψ açısı olmak üzere Frenet çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ cos\psi & 0 & sin\psi \\ -sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

şeklinde olup (4.10) bağıntısını (4.8)' de yerine yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ cos\psi & 0 & sin\psi \\ -sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cos\psi & -sin\psi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\psi & cos\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & cos\theta^* cos\psi - sin\theta^* sin\psi & -sin\psi cos\theta^* - sin\theta^* cos\psi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\theta^* cos\psi + cos\theta^* sin\psi & -sin\theta^* sin\psi + cos\theta^* cos\psi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\psi + \theta^*) & -\sin(\psi + \theta^*) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\psi + \theta^*) & cos(\psi + \theta^*) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

olarak bulunur. (4.12) eşitliğinde $\psi + \theta^* = \gamma$ olarak alınırsa

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) ifadesinde (4.9) eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix}$$

olup α ve α^* eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ cos\theta & sin\theta\sin\gamma & sin\theta cos\gamma \\ 0 & cos\theta\sin\gamma & cos\theta cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.1.2. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. α^* eğrisinin geodezik eğriliği ve normal eğriliği sırasıyla

$$\begin{aligned} {k_g}^* &= -\frac{1}{\lambda} cos\gamma + \frac{\tau}{\kappa\lambda} sin\gamma \\ {k_n}^* &= \frac{1}{\lambda} sin\gamma + \frac{\tau}{\kappa\lambda} cos\gamma \end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklindedir. Burada $\gamma = \psi + \theta^*$ olmak üzere ψ, α^* eğrisinin asli normali ile α eğrisinin teğet vektörü arasındaki açı; θ^* da α^* eğrisinin asli normali ile yüzey normali ile oluşan g^* vektörü arasındaki açıdır.

İspat: (4.6) den $T^* = \mp N$ olup s ye göre türev alınıp (4.3), Darboux formülleri ve Frenet formülleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} T^{*\prime}.\frac{ds^*}{ds} = \mp N' &\Rightarrow \left({k_g}^* g^* + {k_n}^* n^*\right)\frac{ds^*}{ds} = \mp(-\kappa T + \tau B) \\ &\Rightarrow \left({k_g}^* g^* + {k_n}^* n^*\right)|\lambda|\kappa = \mp(-\kappa T + \tau B) \\ &\Rightarrow \left({k_g}^* g^* + {k_n}^* n^*\right) = -\frac{1}{\lambda} T + \frac{\tau}{\kappa\lambda} B \end{aligned} \tag{4.15}$$

olup (4.15) denklemini g^* ile çarparsak,

$$k_g{}^* = -\frac{1}{\lambda}\langle T, g^*\rangle + \frac{\tau}{\kappa\lambda}\langle B, g^*\rangle$$

olup (4.13) ifadesini de kullanırsak,

$$k_g{}^* = -\frac{1}{\lambda}cos\gamma + \frac{\tau}{\kappa\lambda}sin\gamma$$

elde edilir. Bu sefer (4.15) denklemini n^* ile çarparsak,

$$k_n{}^* = -\frac{1}{\lambda}\langle T, n^*\rangle + \frac{\tau}{\kappa\lambda}\langle B, n^*\rangle$$

olup (4.13) eşitliklerinden

$$k_n{}^* = \frac{1}{\lambda}sin\gamma + \frac{\tau}{\kappa\lambda}cos\gamma$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.1.1. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. Bu durumda

$$k_g^{*2} + k_n^{*2} = \frac{1}{\lambda^2} + (\frac{\tau}{\kappa\lambda})^2$$

yazılabilir.

İspat: (4.15) denkleminin her iki tarafının normunu alırsak,

$$k_g^{*2} + k_n^{*2} = \frac{1}{\lambda^2} + (\frac{\tau}{\kappa\lambda})^2$$

ifadesini elde etmiş oluruz.

Sonuç 4.1.2. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. Bu durumda

$$|\tau| = |\kappa|.\sqrt{({k_g^*}^2 + {k_n^*}^2)\lambda^2 - 1}$$

yazılabilir.

İspat: Sonuç 4.1.1.' den τ çekilirse,

$$|\tau| = |\kappa|.\sqrt{({k_g^*}^2 + {k_n^*}^2)\lambda^2 - 1}$$

ifadesini buluruz.

Sonuç 4.1.3. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. Bu durumda

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2}{{k_g^*}^2 + {k_n^*}^2}}$$

yazılabilir.

İspat: Sonuç 4.1.1.' den

$${k_g^*}^2 + {k_n^*}^2 = \frac{1}{\lambda^2}\left[1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2\right] \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2}{{k_g^*}^2 + {k_n^*}^2} \Rightarrow |\lambda| = \sqrt{\frac{1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2}{{k_g^*}^2 + {k_n^*}^2}}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. k_{g^*} , k_{n^*} ve τ_{g^*} de sırasıyla α^* eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olsun. k_g , k_n ve τ_g

de sırasıyla α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olsun. Bu durumda,

$$k_{g^*}cos\gamma - k_{n^*}sin\gamma = \frac{-k_g cos\theta + k_n \sin\theta}{\lambda\sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2}}$$

dır. Burada $\gamma = \psi + \theta^*$ olmak üzere ψ, α^* eğrisinin asli normali ile α eğrisinin teğet vektörü arasındaki açı; θ^*, α^* eğrisinin asli normali ile yüzey normali ile oluşan g^* vektörü arasındaki açıdır. θ da α eğrisinin asli normali ile yüzey normali ile oluşan g vektörü arasındaki açıdır.

İspat: (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri ise $T^* = \mp N$ dir. Burada

$$N = cos\theta g - sin\theta n$$

olup yerine yazdıktan sonra bu eşitliğin s' ye göre türevini alırsak,

$$T^{*\prime}.\frac{ds^*}{ds} = \mp(cos\theta g - sin\theta n)'$$

$$\begin{aligned}\left(k_{g^*}g^* + k_{n^*}n^*\right).\frac{ds^*}{ds} = \mp\big[&-\theta' sin\theta g + cos\theta\left(-k_g T + \tau_g n\right)\\ &-\theta' cos\theta n - sin\theta(-k_n T - \tau_g g)\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(k_{g^*}g^* + k_{n^*}n^*\right).\frac{ds^*}{ds} = \mp\big[&\left(-k_g cos\theta + k_n sin\theta\right)T + sin\theta\left(\tau_g - \theta'\right)g\\ &+cos\theta\left(\tau_g - \theta'\right)n\big]\end{aligned} \quad (4.16)$$

olup (4.16) eşitliğinin her iki tarafı T ile çarpıp (4.7)' yı kullanırsak,

$$(k_{g^*}cos\gamma - k_{n^*}sin\gamma)\ \frac{ds^*}{ds} = \mp\left(-k_g cos\theta + k_n sin\theta\right) \quad (4.17)$$

bulunur. Burada (4.3)' ten

$$\frac{ds^*}{ds} = |\lambda| \sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2}$$

olup (4.17) de yerine yazılırsa

$$k_{g^*} cos\gamma - k_{n^*} sin\gamma = \frac{-k_g cos\theta + k_n \sin\theta}{\lambda \, . \sqrt{{k_g}^2 + {k_n}^2}}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu durumda Teorem 4.1.3.' ten hareketle aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 5.1.4. (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. O halde,

i. α^* ve α eğrilerinin her ikisi de geodezik eğri ise,

$$k_{n^*} = \mp \frac{\sin\theta}{\lambda sin\gamma}$$

dır.

ii. α^* ve α eğrilerinin her ikisi de asimptotik eğri ise,

$$k_{g^*} = \mp \frac{\cos\theta}{\lambda cos\gamma^*}$$

dır.

iii. α^* eğrisi geodezik eğri, α eğrisi de asimptotik eğri ise,

$$k_{n^*} = \mp \frac{cos\theta}{\lambda sin\gamma}$$

dır.

iv. α^* eğrisi asimptotik eğri, α eğrisi de geodezik eğri ise

$$k_{g^*} = \mp \frac{\sin\theta}{\lambda cos\gamma}$$

dır.

İspat:

i. α^* ve α eğrilerinin her ikisi de geodezik eğri olduğuna göre $k_{g^*} = k_g = 0$ olup bu eşitlikler Teorem 4.1.3.' te yerine yazılarsa,

$$k_{n^*} = \mp \frac{\sin\theta}{\lambda sin\gamma}$$

eşitliği elde edilir.

ii. α^* ve α eğrilerinin her ikisi asimptotik eğri ise $k_{n^*} = k_n = 0$ olup bu eşitlikler Teorem 4.1.3.' te yerlerine yazılırsa,

$$k_{g^*} = \mp \frac{\cos\theta}{\lambda cos\gamma}$$

eşitliği elde edilir.

iii. α^* eğrisi geodezik eğri ise $k_{g^*} = 0$ ve α eğrisi de asimptotik eğri ise $k_n = 0$ olacağından bu eşitlikler Teorem 4.1.3.' te yerine yazılırsa,

$$k_{n^*} = \mp \frac{cos\theta}{\lambda sin\gamma}$$

eşitliği elde edilir.

iv. α^* eğrisi asimtotik eğri ise $k_{n^*} = 0$ ve α eğrisi de geodezik eğri ise $k_g = 0$ olacağından bu eşitlikler Teorem 4.1.3.' te yerine yazılırsa,

$$k_{g^*} = \mp \frac{\sin\theta}{\lambda cos\gamma}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 4.1.4. : (α^*, α) involüt-evolüt eğri çiftleri olsun. α ve α^* ın eğrilik yarıçapları sırasıyla r ve r^* olsun. Bu durumda eğrilik yarıçapları arsındaki ilişki,

$$r^* = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2.r^2}}$$

şeklindedir.

İspat: r , α eğrisinin eğrilik yarıçapı ise

$$r = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{k_g^2 + k_n^2}}$$

dır. Benzer şekilde r^* da α^* eğrisinin yarıçapı ise

$$r^* = \frac{1}{\kappa^*} = \frac{1}{\sqrt{{k_g^*}^2 + {k_n^*}^2}}$$

dır. Sonuç 4.1.1.' den

$$r^* = \frac{1}{\sqrt{{k_g^*}^2 + {k_n^*}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{\tau}{\kappa\lambda}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\kappa^2+\tau^2}{\kappa^2\lambda^2}}} = \frac{|\kappa\lambda|}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

olur. $\kappa = \frac{1}{r}$ olduğundan,

$$r^* = \frac{\left|\frac{\lambda}{r}\right|}{\sqrt{\frac{1}{r^2}+\tau^2}} = \frac{\left|\frac{\lambda}{r}\right|}{\sqrt{\frac{1+r^2.\tau^2}{r^2}}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1+r^2.\tau^2}}$$

elde edilir.

4.2. Darboux Çatısına Göre Bertrand Eğri Çiftleri

Yay parametreleri sırasıyla s ve s^* olan α ve α^* birim hızlı regüler eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. Yine bu eğrilerin Darboux çatıları sırasıyla $\{T, g, n\}$ ve $\{T^*, g^*, n^*\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.2.1. (α^*, α) Bertrand eğri çifti ise Darboux vektörleri arasında,

$$T^* = cos\psi T - sin\psi sin\theta g - sin\psi cos\theta n$$

$$\begin{aligned} g^* &= sin\theta^* sin\psi T + (cos\theta^* cos\theta + sin\theta sin\theta^* cos\psi)g \\ &\quad +(-sin\theta cos\theta^* + sin\theta^* cos\theta cos\psi)n \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} n^* &= cos\theta^* sin\psi T + (-sin\theta^* cos\theta + cos\theta^* sin\theta cos\psi)g \\ &\quad +(sin\theta^* sin\theta + cos\theta^* cos\theta cos\psi)n \end{aligned}$$

bağıntıları vardır. Burada θ, α eğrisinin yüzey normali ile oluşan g birim vektörü ile eğrinin asli normali N arasındaki açıdır. ψ, Bertrand eğri çiftlerinin teğetleri arasındaki açıdır. θ^* ise α^* eğrisinin yüzey normali ile oluşan g^* birim vektörü ile eğrinin asli normali N^* arasındaki açıdır.

İspat: α^* ve α ın Frenet çatısı ile Darboux çatısı arasındaki ilişkiler sırasıyla

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

ve

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

biçimindedir. Burada θ^*, α^* eğrisinin yüzey üzerindeki g^* birim vektörü ile eğrinin asli normali N^* arasındaki açı ve θ, α eğrisinin yüzey üzerindeki g birim vektörü ile eğrinin asli normali N arasındaki açıdır.

(α^*, α) bertrand eğri çiftlerinin T ile T^* vektörleri arasındaki açı ψ açısı olmak üzere Frenet çatıları arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

şeklinde olup (4.21) bağıntısını (4.20) de kullanırsak,

$$\begin{bmatrix} cos\psi & 0 & sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & -sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.19) eşitlikleri (4.22) de kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & -sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & sin\theta^* \\ 0 & -sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\psi & 0 & -sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\psi & 0 & cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

olup matrisler çarpılırsa,

$$T^* = cos\psi T - sin\psi sin\theta g - sin\psi cos\theta n$$

$$g^* = sin\theta^* sin\psi T + (cos\theta^* cos\theta + sin\theta sin\theta^* cos\psi)g$$
$$+(-sin\theta cos\theta^* + sin\theta^* cos\theta cos\psi)n$$
$$n^* = cos\theta^* sin\psi T + (-sin\theta^* cos\theta + cos\theta^* sin\theta cos\psi)g$$
$$+(sin\theta^* sin\theta + cos\theta^* cos\theta cos\psi)n$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1: (α^*, α) Bertrand eğri çifti paralel eğri çifti ise,

$$\epsilon = \begin{cases} +1, & \psi = 0 \\ -1, & \psi = \pi \end{cases}$$

olarak alınırsa (4.18) denklemleri

$$\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta^* - \epsilon\theta) & \epsilon\sin(\theta^* - \epsilon\theta) \\ 0 & -\sin(\theta^* - \epsilon\theta) & \epsilon\cos(\theta^* - \epsilon\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

biçiminde yazılabilir.

İspat: (α^*, α) Bertrand eğri çifti aynı zamanda paralel eğri çifti ise $\psi = 0$ veya $\psi = \pi$ olacaktır. O halde (4.18) denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta^* - \epsilon\theta) & \epsilon\sin(\theta^* - \epsilon\theta) \\ 0 & -\sin(\theta^* - \epsilon\theta) & \epsilon\cos(\theta^* - \epsilon\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır.

Teorem 4.2.2. (α^*, α) Bertrand eğri çifti ise

$$cos\psi \, \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa) \qquad \lambda = sbt \tag{4.24}$$

yazılabilir.

İspat: $\alpha^* = \alpha + \lambda N$ eğrisinin yay parametresi s^* ile gösterilsin. s ye göre türev alıp Frenet formüllerini kullanırsak,

$$\frac{d\alpha^*}{ds^*} . \frac{ds^*}{ds} = \alpha' + \lambda'. N + \lambda. N'$$
$$T^*. \frac{ds^*}{ds} = T + \lambda. (-\kappa T + \tau B)$$

$$T^*. \frac{ds^*}{ds} = T - \lambda\kappa T + \lambda\tau B$$

$$T^*. \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)T + \lambda\tau(sin\theta g + cos\theta n) \tag{4.25}$$

olup (4.25) eşitliğinin her iki tarafını T ile çarparsak,

$$cos\psi \frac{ds^*}{ds} = 1 - \lambda\kappa$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Teorem 5.2.3. (α^*, α) Bertrand eğri çifti ise

$$sin\psi \, \frac{ds^*}{ds} = \lambda\tau \qquad \lambda = sbt \tag{4.26}$$

yazılabilir.

İspat: (4.25) denkleminin her iki tarafını g ile çarparsak,

$$\langle T^*, g\rangle.\frac{ds^*}{ds} = -\lambda\tau sin\theta \tag{4.27}$$

olur. (4.18)'den

$$T^* = cos\psi T - sin\psi sin\theta g - sin\psi cos\theta n \Rightarrow \langle T^*, g\rangle = -sin\psi sin\theta$$

olacağından (4.27) eşitliği

$$sin\psi\ \frac{ds^*}{ds}\lambda\tau \qquad \lambda = sbt$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.4. (α^*, α) Bertrand eğri çifti aynı zamanda paralel eğri çifti ise,

$$\kappa = \epsilon\kappa^*\ \frac{ds^*}{ds} \quad \text{ve} \quad \tau = \epsilon\tau^*\ \frac{ds^*}{ds} \tag{4.28}$$

yazılabilir (Masal ve Azak, 2017).

İspat: (α^*, α) Bertrand eğri çifti ise

$$N^* = N$$

alınabilir. Bu eşitliğin her iki tarafını s ye göre türevini alalım. Bu durumda,

$$(N^*)'.\frac{ds^*}{ds} = N'$$

ve

$$-\kappa^*T^*.\frac{ds^*}{ds} + \tau^* B^* \frac{ds^*}{ds} = -\kappa T + \tau B$$

veya

$$-\kappa^*T^*.\frac{ds^*}{ds} + (sin\theta^*.g^* + cos\theta^* n^*)\tau^* \frac{ds^*}{ds} = -\kappa T + (sin\theta g + cos\theta n)\tau \quad (4.29)$$

bulunur. (4.29) eşitliğinin her iki tarafını T ile çarpıp Sonuç 4.2.1.' i de kullanırsak

$$\kappa^*.\epsilon\frac{ds^*}{ds} = \kappa$$

elde edilir. Bu sefer (4.29) eşitliğin her iki tarafını da g ile çarpıp Sonuç 4.2.1.'i kullanırsak ,

$$\tau^* sin\theta^*.\frac{ds^*}{ds}.\cos(\theta^* - \epsilon\theta) - \tau^* cos\theta^* \frac{ds^*}{ds}.\sin(\theta^* - \epsilon\theta) = \tau sin\theta$$

olup buradan

$$\tau^*.\frac{ds^*}{ds}.[sin\theta^* \cos(\theta^* - \epsilon\theta) - cos\theta^* \sin(\theta^* - \epsilon\theta)] = \tau sin\theta$$

veya

$$\tau^*.\frac{ds^*}{ds}.\sin(\epsilon\theta) = \tau sin\theta$$

bulunur. Burada $\epsilon = \mp 1$ olduğundan,

$$\epsilon\tau^*.\frac{ds^*}{ds} = \tau$$

bulunur.

Teorem 4.2.5. (α^*, α) Bertrand eğri çifti olsun. k_g , k_n ve τ_g' de α eğrisinin sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olsun. Yine k_{g^*} ,k_{n^*} ve τ_{g^*} de α^* eğrisin sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olsun. Bu durumda,

$$k_{g^*}.sin\theta^* + k_{n^*}cos\theta^* = \frac{cos\psi sin\theta k_g + cos\psi cos\theta k_n}{1-\lambda k_g cos\theta + \lambda k_n sin\theta} \tag{4.30}$$

dır. Burada ψ, eğri çiftlerinin teğet vektörleri arasındaki açıdır. θ^* açısı α^* eğrisinin asli normali ve yüzeyin normali ile oluşan g^* vektörü arasındaki açı, θ açısı da α eğrisinin asli normali ve yüzeyin normali ile oluşan g vektörü arasındaki açıdır.

İspat: (α^*, α) Bertrand eğri çifti olduğundan,

$$\alpha^* = \alpha + \lambda N$$

yazılabilir. Burada

$$N = cos\theta g - sin\theta n$$

olup bu ifade yerine yazarsak

$$\alpha^* = \alpha + \lambda(cos\theta g - sin\theta n)$$

veya

$$\alpha^* = \alpha + \lambda cos\theta g - \lambda sin\theta n \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.31) eşitliğini s ye göre türev alıp Darboux türev formüllerini yerine yazarsak,

$$\frac{d\alpha^*}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = \alpha' - \theta'\lambda sin\theta g + \lambda cos\theta g' - \theta'\lambda cos\theta n - \lambda sin\theta n'$$

veya

$$T^*.\frac{ds^*}{ds} = T - \theta'\lambda sin\theta g + \lambda cos\theta\left(-k_g T + \tau_g n\right)$$
$$-\theta'\lambda cos\theta n - \lambda sin\theta\left(-k_n T - \tau_g g\right)$$

veya

$$T^*.\frac{ds^*}{ds} = \left(1 - \lambda k_g cos\theta + \lambda k_n sin\theta\right)T$$
$$+\lambda sin\theta\left(\tau_g - \theta'\right)g + \lambda cos\theta\left(\tau_g - \theta'\right)n \qquad (4.32)$$

elde edilir. (4.32) eşitliğinin her iki tarafını T ile çarparsak,

$$\langle T^*, T\rangle \frac{ds^*}{ds} = 1 - \lambda k_g cos\theta + \lambda k_n sin\theta$$

bulunur. (4.21)' den $\langle T^*, T\rangle = cos\psi$ olup,

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \lambda k_g cos\theta + \lambda k_n sin\theta}{cos\psi} \qquad (4.33)$$

bulunur. Teorem 4.2.1.' deki

$$T^* = cos\psi T - sin\psi sin\theta g - sin\psi cos\theta n$$

eşitliğin türevini alalım. Burada Teorem 3.2.3.' ten $cos\psi$ =sabit olduğu da görülürse,

$$(T^*)'.\frac{ds^*}{ds} = cos\psi T' - \theta' sin\psi cos\theta g - sin\psi sin\theta g'$$
$$+\theta' sin\psi sin\theta n - sin\psi cos\theta n'$$

$$
\begin{aligned}
(k_{g^*}g^* + k_{n^*}n^*)\frac{ds^*}{ds} = {} & cos\psi\big(k_g g + k_n n\big) - \theta' sin\psi cos\theta g \\
& -sin\psi sin\theta\big(-k_g T + \tau_g n\big) + \theta' sin\psi sin\theta n \\
& -sin\psi cos\theta(-k_n T - \tau_g g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k_{g^*}g^* + k_{n^*}n^*)\frac{ds^*}{ds} = {} & \big(k_g sin\psi sin\theta + k_n sin\psi cos\theta\big)T \\
& +\big(k_g cos\psi - \theta' sin\psi cos\theta + \tau_g sin\psi cos\theta\big)g \\
& +\big(k_n cos\psi - \tau_g sin\psi sin\theta + \theta' sin\psi sin\theta\big)n
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

eşitliği elde edilir. (4.34) ün her iki tarafı T ile çarpalım. Bu durumda,

$$
\big[k_{g^*}\langle g^*, T\rangle + k_{n^*}\langle n^*, T\rangle\big]\frac{ds^*}{ds} = \big(k_g sin\psi sin\theta + k_n sin\psi cos\theta\big)
$$

olur. (4.18) eşitliklerini de kullanırsak

$$
\big[k_{g^*} sin\theta^* sin\psi + k_{n^*} cos\theta^* sin\psi\big]\frac{ds^*}{ds} = k_g sin\psi sin\theta + k_n sin\psi cos\theta
$$

bulunur. (4.33) denklemini de yerine yazalım. Böylece,

$$
\big(k_{g^*} sin\theta^* + k_{n^*} cos\theta^*\big)\left(\frac{1 - \lambda k_g cos\theta + \lambda k_n sin\theta}{cos\psi}\right) = k_g sin\theta + k_n cos\theta
$$

veya

$$
\big(k_{g^*} sin\theta^* + k_{n^*} cos\theta^*\big) = \frac{cos\psi sin\theta k_g + cos\psi cos\theta k_n}{1 - \lambda k_g cos\theta + \lambda k_n sin\theta}
$$

eşitliğini elde ederiz.

Teorem 4.2.5.' den hareketle aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

Sonuç 4.2.2. (α^*, α) Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda

i. α^*ve α eğrileri geodezik eğri ise,

$$k_{n^*} = \frac{cos\psi cos\theta k_n}{cos\theta^* + \lambda k_n sin\theta cos\theta^*}$$

olur.

ii. α^*ve α eğrileri asimptotik eğri ise,

$$k_{g^*} = \frac{cos\psi sin\theta k_g}{sin\theta^* - \lambda k_g cos\theta sin\theta^*}$$

olur.

iii. α^* eğrisi geodezik eğri, α eğrisi de asimptotik eğri ise,

$$k_{n^*} = \frac{cos\psi sin\theta k_g}{cos\theta^* - \lambda k_g cos\theta cos\theta^*}$$

olur.

iv. α^* eğrisi asimptotik eğri, α eğrisi de geodezik eğri ise,

$$k_{g^*} = \frac{cos\psi cos\theta k_n}{sin\theta^* + \lambda k_n sin\theta sin\theta^*}$$

olur.

İspat:

i. α^*ve α eğrileri geodezik eğri ise $k_{g^*} = k_g = 0$ olup Teorem 4.2.5.'ten,

$$k_{n^*} = \frac{cos\psi cos\theta k_n}{cos\theta^* + \lambda k_n sin\theta cos\theta^*}$$

bulunur.

ii. α^*ve α eğrileri asimptotik eğri ise $k_{n^*} = k_n = 0$ olup Teorem 4.2.5.'ten,

$$k_{g^*} = \frac{cos\psi sin\theta k_g}{sin\theta^* - \lambda k_g cos\theta sin\theta^*}$$

elde edilir.

iii. α^* eğrisi geodezik eğri ise $k_{g^*} = 0$ ve α eğrisi de asimptotik eğri ise $k_n = 0$ olacağından Teorem 4.2.5.' ten,

$$k_{n^*} = \frac{cos\psi sin\theta k_g}{cos\theta^* - \lambda k_g cos\theta cos\theta^*}$$

bulunur.

iv. α^* eğrisi geodezik eğri ise $k_{n^*} = 0$ ve α eğrisi de asimptotik eğri ise $k_g = 0$ olacağından Teorem 4.2.5.' ten,

$$k_{g^*} = \frac{cos\psi cos\theta k_n}{sin\theta^* + \lambda k_n sin\theta sin\theta^*}$$

bulunur.

Teorem 4.2.6. : (α^*, α) Bertrand eğri çifti olsun. k_g , k_n ve τ_g de α eğrisinin sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olsun. Bu durumda,

$$\tau_g = \frac{-sin\psi + \lambda k_g cos\theta sin\psi - \lambda\, k_n sin\theta sin\psi + \lambda\theta' cos\psi}{\lambda cos\psi} \qquad (\lambda = sbt)$$

olur. Burada ψ eğri çiftlerinin teğet vektörleri arasındaki açı, θ ise α eğrisinin asli normali ve yüzey normali ile oluşan g vektörü arasındaki açıdır.

İspat: (4.26) ve (4.33) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\lambda\tau = sin\psi\frac{1-\lambda k_g cos\theta+\lambda k_n sin\theta}{cos\psi} \tag{4.35}$$

olur. $\tau_g = \tau + \theta'$ olduğundan (4.35) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\lambda(\tau_g - \theta') = sin\psi\frac{1-\ \lambda k_g cos\theta + \lambda k_n sin\theta}{cos\psi}$$

$$\tau_g - \theta' = \frac{-sin\psi + \lambda k_g cos\theta sin\psi - \lambda\ k_n sin\theta sin\psi}{\lambda cos\psi}$$

$$\tau_g = \frac{-sin\psi + \lambda k_g cos\theta sin\psi - \lambda\ k_n sin\theta sin\psi + \lambda\theta' cos\psi}{\lambda cos\psi}$$

olarak bulunur.

4.3. Darboux Çatısına Göre Mannheim Eğri Çiftleri

Yay parametreleri sırasıyla s ve s^* olan birim hızlı regüler α ve α^* eğrileri verilsin. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.1. (α,α^*) eğri çifti bir Mannheim eğri çifti olsun. α ve α^* eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T,N,B\}$ ve $\{T^*,N^*,B^*\}$ olsun. Yine α ve α^* eğrilerinin Darboux çatıları da sırasıyla $\{T,g,n\}$ ve $\{T^*,g^*,n^*\}$ olsun. Bu durumda bu eğrilerin Darboux çatıları arasında

$$T = \ cos\psi T^* + \ sin\psi cos\theta^* g^* - sin\psi sin\theta^* n^*$$

$$\begin{aligned} g &= -sin\psi sin\theta T^* + (cos\theta sin\theta^* + sin\theta cos\psi cos\theta^*)g^* \\ &\qquad +(cos\theta cos\theta^* - sin\theta cos\psi sin\theta^*)n^* \\ n &= -sin\psi cos\theta T^* + (-sin\theta sin\theta^* + cos\psi cos\theta cos\theta^*)g^* \\ &\qquad +(-sin\theta cos\theta^* - cos\theta cos\psi sin\theta^*)n^* \end{aligned}$$

biçiminde bir bağıntı yazılabilir. Burada θ, α eğrisinin yüzey normali ile oluşan g birim vektörü ve eğrinin asli normali N arasındaki açıdır. ψ, Mannheim eğri çiftlerinin teğet vektörleri arasındaki açıdır. θ^* ise α^* eğrisinin yüzey normali ile oluşan g^* birim vektörü ve eğrinin asli normali N^* arasındaki açıdır.

İspat: (α, α^*) eğri çifti bir Mannheim eğri çifti ise bu eğrilerin Frenet çatıları arasında

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\psi & sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin\psi & cos\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

bağıntısı vardır. α eğrisinin darboux çatısı ile Frenet çatısı arasındaki bağıntı,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

şeklindedir. α^* eğrisinin darboux ile Frenet çatısı arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix} T^* \\ N^* \\ B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

biçimindedir. (4.38) eşitliğini (4.36) da yerine yazarsak,

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\psi & sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin\psi & cos\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

olur. (4.37) eşitliğini de (4.39) da kullanırsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\psi & sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin\psi & cos\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* \\ g^* \\ n^* \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} T \\ g \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\psi & sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin\psi & cos\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta^* & -sin\theta^* \\ 0 & sin\theta^* & cos\theta^* \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada gerekli çarpımlar yapılırsa,

$$T = cos\psi T^* + sin\psi cos\theta^* g^* - sin\psi sin\theta^* n^*$$

$$g = -sin\psi sin\theta T^* + (cos\theta sin\theta^* + sin\theta cos\psi cos\theta^*)g^* \\ +(cos\theta cos\theta^* - sin\theta cos\psi sin\theta^*)n^*$$

$$n = -sin\psi cos\theta T^* + (-sin\theta sin\theta^* + cos\psi cos\theta cos\theta^*)g^* \\ +(-sin\theta cos\theta^* - cos\theta cos\psi sin\theta^*)n^*$$

elde edilir.

Teorem 4.3.2. (α, α^*) eğri çifti Mannheim eğri çifti ve α ile α^* eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. α ile α^* eğrilerin yay parametreleri de sırasıyla s ve s^* olsun. Bu durumda,

$$cos\psi \ \frac{ds}{ds^*} = 1 \text{ ve } sin\psi \ \frac{ds}{ds^*} = -\lambda\tau^* \qquad \lambda = sabit$$

dır. Burada ψ eğrilerin teğetleri arasındaki açı ve τ^* da α^* eğrisinin burulmasıdır.

İspat: (α, α^*) eğri çifti Mannheim eğri çifti olduğundan,

$$\alpha(s) = \alpha^*(s^*) + \lambda B^*(s^*) \tag{4.40}$$

yazılabilir. (4.40) eşitliğini s^* a göre türevini alırsak,

$$\alpha' \frac{ds}{ds^*} = (\alpha^*)' + \lambda' B^* + \lambda (B^*)'$$

olup Frenet formüllerini kullanırsak,

$$T \ \frac{ds}{ds^*} = T^* + \lambda' B^* - \lambda \tau^* N^* \tag{4.41}$$

bulunur. α ile α^* Mannheim eğri çifti olduğundan B^* ile N aynı doğrultudadır. Buna göre (4.41) eşitliğini B^* ile çarparsak,

$$\lambda' = 0 \Longrightarrow \lambda = sabit$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.41) eşitliğini artık,

$$T \ \frac{ds}{ds^*} = T^* - \lambda \tau^* N^* \tag{4.42}$$

biçiminde yazabiliriz. Oluşan (4.42) denkleminin her iki taraftan T^* ile çarparsak,

$$\langle T, T^* \rangle \frac{ds}{ds^*} = 1 \Longrightarrow cos\psi \frac{ds}{ds^*} = 1$$

elde edilir. (4.42) denklemini N^* ile çarparsak,

$$\langle T, N^* \rangle \frac{ds}{ds^*} = -\lambda \tau^* \Longrightarrow sin\psi \frac{ds}{ds^*} = -\lambda \tau^*$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.3.1. (α, α^*) eğri çifti Mannheim eğri çifti ise,

$$\tau_{g^*} = \frac{(\theta^*)' \lambda - tan\psi}{\lambda}$$

dir. Burada θ^* yüzey normali ile oluşan g^* vektörü ve eğrinin aslinormali N^* arasındaki açıdır.

İspat: Teorem 4.3.2. den

$$\frac{sin\psi \frac{ds}{ds^*}}{cos\psi \frac{ds}{ds^*}} = -\lambda\tau^* \Rightarrow tan\psi = -\lambda\tau^*$$

yazılabilir. $\tau^* = \tau_{g^*} - (\theta^*)'$ olduğundan,

$$-\lambda\left(\tau_{g^*} - (\theta^*)'\right) = tan\psi$$

olup buradan τ_{g^*} çekilirse,

$$\tau_{g^*} = \frac{(\theta^*)'\lambda - tan\psi}{\lambda}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.3. (α^*, α) Mannheim eğri çiftleri olsun. k_{g^*} , k_{n^*} ve τ_{g^*} de sırasıyla α^* eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olsun k_g , k_n ve τ_g de α eğrisinin sırasıyla geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu olsun. Bu durumda,

$$k_g sin\theta + k_n cos\theta = \left(\psi' + k_{g^*} cos\theta^* - k_{n^*} sin\theta^*\right) cos\psi$$

yazılabilir. Burada θ, α eğrisinin yüzey normali ile oluşan g birim vektörü ve eğrinin asli normali N arasındaki açıdır. ψ, Mannheim eğri çiftlerinin teğet vektörleri arasındaki açıdır. θ^* ise α^* eğrisinin yüzey normali ile oluşan g^* birim vektörü ve eğrinin asli normali N^* arasındaki açıdır.

İspat: (α^*, α) Mannheim eğri çifti ise Teorem 4.3.1'den,

$$T = cos\psi T^* + sin\psi cos\theta^* g^* - sin\psi sin\theta^* n^* \quad (4.43)$$

yazılabilir. Bu durumda (4.43) eşitliğinin her iki tarafını da s^* a göre türevini alıp Darboux formüllerini kullanırsak,

$$\begin{aligned} T' \frac{ds}{ds^*} = & -\psi' sin\psi T^* + cos\psi\left(k_{g^*} g^* + k_{n^*} n^*\right) + \psi' cos\psi cos\theta^* g^* \\ & -(\theta^*)' sin\psi sin\theta^* g^* + sin\psi cos\theta^*\left(- k_{g^*} T^* + \tau_{g^*} n^*\right) \\ & -\psi' cos\psi sin\theta^* n^* - (\theta^*)' sin\psi cos\theta^* n^* \\ & -sin\psi sin\theta^*(-k_{n^*} T^* - \tau_{g^*} g^*) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} (k_g g + k_n n)\frac{ds}{ds^*} = & \left(-\psi' - k_{g^*} cos\theta^* + k_{n^*} sin\theta^*\right) sin\psi T^* \\ & + \begin{pmatrix} k_{g^*} cos\psi + \psi' cos\psi cos\theta^* - (\theta^*)' sin\psi sin\theta^* \\ +\tau_{g^*} sin\psi sin\theta^* \end{pmatrix} g^* \\ & + \begin{pmatrix} k_{n^*} cos\psi + \tau_{g^*} sin\psi cos\theta^* - \psi' cos\psi sin\theta^* \\ -(\theta^*)' sin\psi cos\theta^* \end{pmatrix} n^* \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. (4.44) eşitliğini T^* ile çarparsak,

$$k_g\langle g, T^*\rangle \frac{ds}{ds^*} + k_n\langle n, T^*\rangle \frac{ds}{ds^*} = \left(-\psi' - k_{g^*} cos\theta^* + k_{n^*} sin\theta^*\right) sin\psi \quad (4.45)$$

olup Teorem 4.3.2.' den,

$$cos\psi \frac{ds}{ds^*} = 1 \Rightarrow \frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{cos\psi}$$

ifadesi kullanılır, Teorem 4.3.1.' den de,

$$\langle g, T^* \rangle = -sin\psi sin\theta$$
$$\langle n, T^* \rangle = -sin\psi cos\theta$$

olduğu görülürse (4.45) eşitliği,

$$k_g sin\theta + k_n cos\theta = \left(\psi' + \ k_{g^*} cos\theta^* - k_{n^*} sin\theta^*\right) cos\psi$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3.3 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 4.3.2. (α^*, α) Mannheim eğri çifti olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

i. . Eğer α ve α^* eğrileri bir geodezik eğri ise

$$k_n = \frac{(\psi' - k_{n^*} sin\theta^*) cos\psi}{cos\theta}$$

dir.

ii. Eğer α ve α^* eğrileri bir asimptotik eğri ise

$$k_g = \frac{\left(\psi' + \ k_{g^*} cos\theta^*\right) cos\psi}{sin\theta}$$

dir.

iii. Eğer α geodezik bir eğri, α^* da asimptotik bir eğri ise

$$k_n = \frac{\left(\psi' + \ k_{g^*} cos\theta^*\right) cos\psi}{cos\theta}$$

dir.

iv. Eğer α asimptotik bir eğri, α^* da geodezik bir eğri ise,

$$k_g = \frac{(\psi' - k_{n^*} sin\theta^*)cos\psi}{sin\theta}$$

dir.

İspat:

i. α ve α^* eğrileri bir geodezik eğri ise $k_g = k_{g^*} = 0$ olacağından Teorem 4.3.3.' ten

$$k_n = \frac{(\psi' - k_{n^*} sin\theta^*)cos\psi}{cos\theta}$$

olur.

ii. α ve α^* eğrileri bir asimptotik eğri ise $k_n = k_{n^*} = 0$ olacağından Teorem 5.3.3.' ten

$$k_g = \frac{\left(\psi' + k_{g^*} cos\theta^*\right)cos\psi}{sin\theta}$$

iii. α geodezik bir eğri, α^* da asimptotik bir eğri ise $k_g = k_{n^*} = 0$ olacağından Teorem 4.3.3.' ten

$$k_n = \frac{\left(\psi' + k_{g^*} cos\theta^*\right)cos\psi}{cos\theta}$$

olur.

iv. α asimptotik bir eğri, α^* da geodezik bir eğri ise $k_n = k_{g^*} = 0$ olacağından Teorem 4.3.3.' ten

$$k_g = \frac{(\psi' - k_{n^*} sin\theta^*)cos\psi}{sin\theta}$$

olur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Yaptığımız bu çalışmada birbirinden farklı iki eğrinin, involüt-evolüt eğri çifti, Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çifti olması durumunda bu eğri çiftlerin Darboux çatıları arasındaki ilişkiyi gördük. Bu durumda iki eğrinin her ikisinin geodezik eğri olması durumu, her ikisinin asimptotik eğri olması durumu ve iki eğriden birinin geodezik diğerinin asimptotik olması halinde birbirleri arasındaki nasıl bir ilişki olduğunu gördük.

5.2. Öneriler

Bu çalışma 3- boyutlu Öklid uzayında yapılmıştır. Benzer şekilde Öklid uzayında farklı boyutlarda yapılabilir.

Yine Lorentz uzayda özel eğri çiftlerinin Darboux çatıları incelenebilir. Bu uzayda eğri çiftlerinin geodezik eğri ve asimptotik eğri olma durumları incelenebilir.

KAYNAKLAR

AS, E., and SARIOĞLUGİL, A., 2014. On the Bishop Curvatures of Involut-Evolute Curve Couple in E^3. Internatıonal Journal of Physical Sciences, 9(7) :140-145.

AZAK, A. Z., 2009. Üç Boyutlu Lorentz Uzayında Timelike Mannheim Eğri Çifti Üzerine. Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Dergisi, 11(2): 35-45.

AZAK, A. Z., AKYİĞİT, M., and ERSOY, S., 2010. Involute-Evolute Curves in Galilean Space G_3. Scientia Magna, 6(4): 75-80.

BİLİCİ, M., 1999. İnvolüt-Evolüt Eğrilerinin Küresel Göstergerinin Eğrilikleri ve Tabii Liftleri. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Samsun, 49s.

BİLİCİ, M., and ÇALIŞKAN, M., 2009. On the Involutes of the Spacelike Curve With a Timelike Binormal in Minkowski 3-Space. Internatıonal Matematicals Forum, 4(31), 1497-1509.

COŞKUN, Ö., 2010. 3-Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Mannheim Eğri Çiftleri. Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüzksek Lisans Tezi, Uşak, 68s.

ÇİÇEK, V., 2015. Üç Boyutlu Öklidyen ve Minkowski Uzayında Yüzeyler. Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Niğde, 77s.

ÇELİK, Ü., 2016. Bertrand Eğri Çiftine Ait Frenet Çatısına Göre Smarandache Eğrileri. Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ordu, 88s.

ERTÜRK, N., 2010. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğri Çiftleri. Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Uşak, 113s.

HACISALİHOĞLU , H.H., 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 7., Malatya, 895s.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1998. Diferensiyel Geometri I. Cilt. Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 269s.

İLARSLAN, K. and ASLAN, N.K., 2017. On Spacelike Bertrand Curve in Minkowski 3-Space. Konuralp Journal of Mathematics, 5(1): 214-222.

KAZAZ, M. , UĞURLU, H.H. , ÖNDER, M., ve KAHRAMAN, T., 2010. E^3 Öklid Uzayında Mannheim Partner D-Eğrileri. TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, 5. Ankara Matematik Günleri. 3-4 Haziran.

KAZAZ, M. , UĞURLU, H.H. , ÖNDER, M., and ORAL, S., 2016. Bertrand Partner D-Curves in the Euclidean 3-space E^3. Afyon Kocatepe Universty Journal of Science and Engineering, 16: 76-83.

LIU, H. and WANG, F., 2007. Manheim Partner Curves in 3-Space. Proceeding of the Eleventh International Workshop on Diff. Geom,.11: 25-31.

MASAL, M., ve AZAK, A.Z., 2017. 3 Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğriler ve Bishop Çatısı. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 21(6): 1140-1145.

O'NEİLL, B., 1997. Elementary Diferential Geometry. Second Edition Academic Press Inc, New York, 482p.

ÖZYILMAZ, E., and YILMAZ, S., 2009. Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4-Space, Int J. Open Problems Compt. Math, 2(2): 168-174.

SABUNCUOĞLU, A., 2004. Diferensiyel Geometri II. Baskı. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 556s.

SABUNCUOĞLU, A., 2006. Diferensiyel Geometri III. Baskı. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, 522s.

SAÇLI, Y.G., 2013. Darboux Çatılı Regle Yüzeylerin Karakteristik Özellikleri. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul, 151s.

ŞENYURT, S. ve ÖZGÜNER, Z., 2013. Bertrand Eğri Çiftinin Küresel Göstergelerinin Geodezik Eğrileikleri ve Tabii Liftleri. Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg., 3(3): 58-81.

TARHAN, M., 2007. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çiftleri. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Elazığ, 39s.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Feryat KAYA
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Osmaniye-1988
Telefon :
Faks :
e-mail : f.kaya73@outlook.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Cemile-Hamdi Ongun Lisesi, Toroslar, Mersin	2005
Üniversite	: Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Yakutiye, Erzurum	2010
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Haliliye, Şanlıurfa	2018

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013-2015	Harran Üniversitesi	Memur
2015-Halen	MEB	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI : Geometri

YABANCI DİL : İngilizce