T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFIN LAPLACIAN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN ÜST SINIRLAR

Duygu BARUT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2018

Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN danışmanlığında Duygu BARUT'un hazırladığı "**Grafın Laplacian Spektral Yarıçapı için Üst Sınırlar**" konulu bu çalışma 21/12/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN	……………...
Üye	: Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE	……………...
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER	……………...

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr.Halil Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAFIN LAPLACIAN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN ÜST SINIRLAR

Duygu BARUT

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN

Yıl: 2018, Sayfa: 110

Grafın Laplacian spektral yarıçapı; başta matematik olmak üzere, kombinatöryel optimizasyon, iletişim ağları, teorik kimya, teorik fizik, kuantum mekaniği gibi çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Grafın Laplacian matrisinin ikinci en küçük öz değeri ise grafın bağlantısallığı hakkında bilgi vermektedir. Grafın Laplacian öz değerlerinin önemi göz önüne alındığından bu çalışmada basit ve sonlu grafların Laplacian spektral yarıçapı için elde edilmiş üst sınırları içeren çalışmalar incelenmiş ve çalışmalar bir araya getirilerek özellikle spektral graf teorisi alanında çalışan araştırmacılara detaylı bir kaynak sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Graf, Laplacian spektral yarıçap, öz değer

ABSTRACT

MSc Thesis

UPPER BOUNDS FOR LAPLACIAN SPECTRAL RADIUS OF GRAPH

Duygu BARUT

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. N. Feyza YALÇIN

Year: 2018, Page: 110

Laplacian spectral radius of a graph is mainly related to mathematics, it is used in various fields such as combinatorial optimization, communication networks, theoretical chemistry, theoretical physics and quantum mechanics. The second smallest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph gives information about the connectivity of a graph. Since the importance of Laplacian eigenvalues is taken into consideration, in this study upper bound works for the Laplacian spectral radius of simple and finite graphs are examined and these works are brought together, thus a detailed source presented to the researchers working especially in the field of spectral graph theory.

KEY WORDS: Graph, Laplacian spectral radius, eigenvalue

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam ve yüksek lisans eğitimim süresince bilgisi, tecrübesi ve anlayışı ile bana yol gösteren; gece gündüz demeden değerli zamanını bana ayıran danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN'a, hoşgörüsü ve anlayışından dolayı Sayın Dr. Öğr. Üyesi Gökhan YALÇIN'a, tez çalışmam sürecinde kaynak temini konusunda yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Haydar ALICI'ya, eğitim-öğretim hayatım boyunca desteklerini bir an olsun benden esirgemeyen, her zaman arkamda duran ve benimle gurur duyan canımdan öte babam Nesim BARUT'a ve annem Mukkadder BARUT'a, sabrı, sevgisi ve anlayışı ile yüksek lisans eğitimime büyük katkısı olan eşim Meki BARUT'a ve bu süreçte oğluma kendi çocuğu gibi bakan merhametli ve anlayışlı canım ablam Nalan BARUT'a sonsuz teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

$G=(V(G),E(G))$	G grafı
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
d_u	u köşesinin derecesi
$i \sim j$	Komşu köşeler
$uv \approx xy$	Komşu kenarlar
m_u	u köşesine komşu köşelerin derece ortalaması
N_u	u nun komşuluk kümesi
Δ	Maksimum köşe derecesi
δ	Minimum köşe derecesi
G_{line}	G grafının çizgi grafı
n'	G_{line} çizgi grafının köşe sayısı
e'	G_{line} çizgi grafının kenar sayısı
N_n	n köşeli boş graf
P_n	Yol graf
$K_{n,m}$	İki parçalı tam graf
K_n	Tam graf
S_n	Star graf
$G_{n,m}$	Bistar graf
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
$L(G)$	G grafının Laplacian matrisi
$D(G)$	G grafının derece matrisi
$K(G)$	G grafının işaretsiz Laplacian matrisi
$Q(G)$	Köşe-kenar etki matrisi
$F(G)$	Yönlendirilmiş köşe-kenar etki matrisi
$A(G_{line})$	Çizgi grafın komşuluk matrisi
M_n	$n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$M_{n,m}$	$n \times m$ tipindeki matrislerin kümesi
$\sigma(A)$	A matrisinin spektrumu
$\mu(G)$	G grafının spektral yarıçapı
$\rho(G)$	G grafının Laplacian spektral yarıçapı
$\mu(A(G_{line}))$	$A(G_{line})$ matrisinin en büyük öz değeri
$a(G)$	G grafının cebirsel bağlantısallığı
$\alpha(G)$	G grafının köşe bağımsızlık sayısı

$\beta(G)$	G grafının örtü sayısı
$\omega(G)$	G grafının klik sayısı
$\left\|L(G)\right\|$	$L(G)$ matrisinin herbir girdisinin mutlak değeri alınarak elde edilen matris

1. GİRİŞ

Graf Teorisi'nin bir dalı olan spektral graf teorisi uzun bir geçmişe sahiptir. Spektral graf teorisi özellikle grafın komşuluk ve Laplacian matrisi ile bu matrislerin öz değer ve spektral yarıçapı üzerine odaklanmıştır. İlk zamanlarda matris teorisi ve lineer cebir, grafın komşuluk matrisini analiz etmek için kullanılmıştır. Ancak Fiedler'in 1973 yılında bir grafın Laplacian matrisinin ikinci en küçük öz değerini "cebirsel bağlantısallığı" olarak tanımlaması, Laplacian matrisi ön plana çıkarmış ve çalışmaların Laplacian matris üzerinde yoğunlaşmasına neden olmuştur.

Graf matrislerinin öz değerlerinin matematiğin birçok alanı ile benzerlik ve ilişki içinde olduğu bilinmektedir. Örneğin; "Spektral Riemann geometrisinin kavram ve metodları graf öz değerleri çalışmalarına kullanışlı ve önemli bir kavrayış sunarken, spektral geometride yeni yönleri ve sonuçları beraberinde getirmektedir" (Chung, 1997). Bir grafın Laplacian spektral yarıçapı; kombinatöryel optimizasyon (Mohar ve Poljak, 1990; 1993), iletişim ağları (Solé, 1995) ve teorik kimya (Gutman ve ark., 1999; 2002) gibi çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Birçok araştırmacı tarafından grafın Laplacian spektral yarıçapı için köşe derecesi, köşe ve kenar sayısı, klik sayısı vb. çeşitli graf parametrelerine bağlı olarak sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca mümkün olduğu durumlarda bu sunırlara karşılık gelen uç (extremal) graflar karakterize edilmiştir. Başlangıçta basit grafın Laplacian spektral yarıçapının sınırları üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda ağırlıklı graf, yönlü graf, çoklu graf vb. graf çeşitlerinin Laplacian spektral yarıçap sınırlarına ve işaretsiz Laplacian spektral yarıçap sınırlarına genişlemiştir.

Grafın Laplacian spektral yarıçapının sınırları üzerine inceleme, makale vb. türdeki çalışmalar halen güncelliğini korumaktadır (Patra ve Sahoo, 2017). Bu bağlamda; Laplacian spektral yarıçapın önemi de dikkate alındığından bu çalışmada basit ve sonlu grafların Laplacian spektral yarıçapının üst sınırları üzerine yapılmış çalışmaların incelenmesi ve bir tek kaynakta birleştirilmesi amaçlanmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, çalışmamıza temel oluşturan graf kavramları ve matris teorisi ile ilgili tanım ve teoremler detaya inilmeksizin sunulmuştur.

2.1. Graf Kavramı

Tanım 2.1.1. Elemanları "köşe" ve bu köşeleri birbirine birleştiren "kenar" olarak adlandırılan boş olmayan sırasıyla $V(G)=\{v_1,v_2,...\}$ ve $E(G)=\{e_1,\mathrm{e}_2,...\}$ kümelerinden oluşan $G=(V(G),E(G))$ sıralı ikilisine graf denir ve kısaca G ile gösterilir. Burada $V(G)$ kümesine grafın köşe kümesi, $E(G)$ kümesine ise grafın kenar kümesi denir.

$G=(V(G),E(G))$ bir graf ve $u,v\in V(G)$ olsun. u ve v köşelerini birleştiren bir e kenarı varsa, "u ve v köşelerine komşudur" veya "e kenarı, u ve v köşeleri ile etkidedir" denir. Bu durumda $u \sim v$, $e=(u,v)$ veya $(u,v)\in E(G)$ gösterimlerinden biri kullanılır. Ortak köşeye sahip kenarlara ise komşu kenarlar denir. uv ve xy kenarları komşu ise $uv \approx xy$ gösterimi kullanılacaktır.

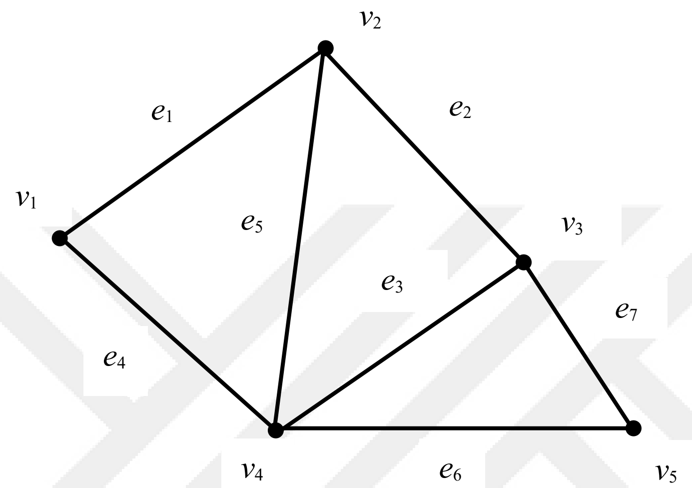
Bir u köşesine komşu olan bütün köşelerin kümesine u köşesinin komşuluk kümesi denir ve $N(u)$ ya da N_u ile gösterilir ve

$$N_u=\{v\in V(G):\ u\sim v\}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.1.2. Bir grafın herhangi bir v köşesine komşu olan köşe sayısına v köşesinin derecesi denir ve $\deg(v)$ veya d_v ile gösterilir. Ayrıca $\deg(v)=|N_v|$ dir. Bir G grafında köşe derecelerinin maksimumu ve minimumu sırasıyla Δ ve δ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1.

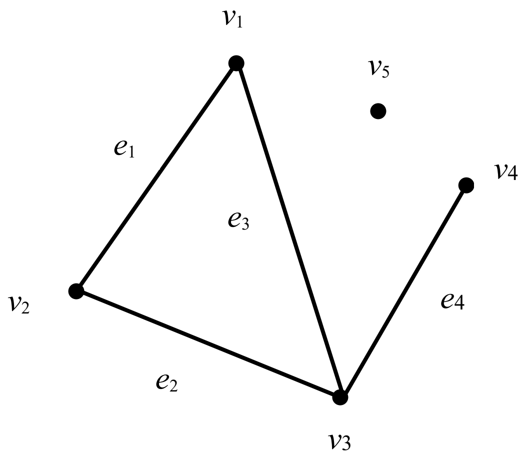


Şekil 2.1. *G* grafı

Şekil 2.1 de verilen G grafını göz önüne alalım. $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ ve $E(G)=\{e_1,\mathrm{e}_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ olmak üzere, G grafının köşe dereceleri $d_{v_1}=2,\ d_{v_2}=3,\ d_{v_3}=3,\ d_{v_4}=4,\ d_{v_5}=2$ dir. Köşe komşulukları ise $v_1\sim v_2$, $v_1\sim v_4$, $v_2\sim v_4$, $v_2\sim v_3$, $v_3\sim v_5$, $v_3\sim v_4$, $v_4\sim v_5$ şeklindedir.

Tanım 2.1.3. G bir graf olsun. v köşesine komşu hiçbir kenar yoksa, yani $d_v=0$ ise v köşesine izole köşe denir. Eğer bir v köşesinin komşuluğunda yalnız 1 köşe varsa, v köşesine pendant köşe denir. Bir kenarı birleştiren köşelerden biri pendant köşe ise bu kenara pendant kenar denir.

Örnek 2.1.2. Şekil 2.2 de verilen G grafında v_5 izole köşedir, v_4 ise bir pendant köşedir.



Şekil 2.2. G grafı

Tanım 2.1.4. $G=(V(G),E(G))$ bir graf ve $u,v\in V(G)$ olsun. u ve v köşelerini birleştiren birden çok kenar varsa, bu kenarların hepsine katlı kenarlar denir. Bir köşeyi kendisine birleştiren kenara ise ilmek (loop) denir.

Tanım 2.1.5. $G=(V(G),E(G))$ grafının $V(G)$ köşe kümesi ve $E(G)$ kenar kümesi sonlu ise G ye sonlu graf, aksi halde sonsuz graf denir.

Teorem 2.1.1. (Handshaking) G, köşe kümesi $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ olan m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$$

dir. Bu teorem literatüre "El Sıkışma Teoremi" olarak geçmiştir.

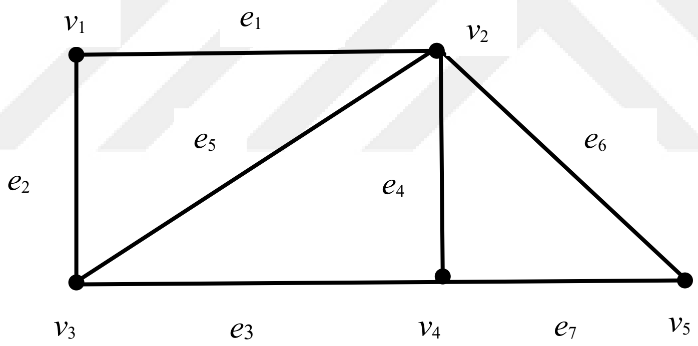
Sonuç 2.1.1. Bir G grafında tek dereceli köşelerin sayısı çifttir.

Tanım 2.1.6. G bir graf olsun. $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ olmak üzere, G grafının köşelerinin ve kenarlarının oluşturduğu $u_0, e_1, u_1, e_2, ..., e_k, u_k$ şeklindeki diziye k-uzunluğunda bir yürüme (walk) denir. Başlangıç ve bitim köşesi aynı olan yürümeye kapalı yürüme denir. Bütün köşeleri farklı olan yürümeye yol (path) denir. Başlangıç ve bitim köşesi hariç hiçbir köşesinin tekrar edilmediği kapalı yürümeye ise döngü (cycle) denir.

Örnek 2.1.3. Şekil 2.3 de verilen G grafına ait birer yürüme ve yol örneği aşağıda verilmiştir:

Yürüme (walk): $v_1e_1v_2e_6v_5e_7v_4e_4e_5v_3$

Yol (Path): $v_1e_1v_2e_6v_5e_7v_4e_3v_3$.



Şekil 2.3. G grafı

Tanım 2.1.7. $G = (V(G), E(G))$ bir graf ve $U \subset V(G)$ olsun. U kümesindeki köşelerin hiçbiri komşu değilse, U ya G grafının bir bağımsız köşe kümesi denir. Bir G grafının bağımsız köşe kümelerinin kardinalitelerinin en büyüğüne G nin (köşe) bağımsızlık sayısı denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

$\alpha(G) = \max\{|U| : U \subset V(G) \text{ bağımsız küme}\}$ şeklinde yazılabilir. Burada $|U|$; U kümesinin kardinalitesini göstermektedir.

Tanım 2.1.8 $G=(V(G),E(G))$ bir graf ve $S\subset V(G)$ olsun. G grafındaki herbir kenarın en az bir ucu S kümesinde ise S alt kümesine G grafının bir örtüsü denir. G grafının $|S'|<|S|$ olacak biçimde hiçbir S' örtüsü yoksa, S kümesine G grafının minimal örtüsü denir. G grafının minimal örtü kümesindeki köşelerin sayısı G grafının örtü sayısı (covering number) olarak adlandırılır ve $\beta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. $G=(V(G),E(G))$ bir graf ve $C\subset V(G)$ olsun. C kümesindeki bütün köşeler karşılıklı olarak komşu ise C alt kümesine G grafının bir klik'i (clique) adı verilir. Bir klik başka hiçbir klik tarafından kapsanmıyorsa, bu klik'e maksimal klik denir. Maksimum kardinaliteye sahip klik'e maksimum klik denir. G grafındaki bir klik'in maksimum büyüklüğüne ise G grafının klik sayısı (clique number) denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. $G=(V(G),E(G))$, $H=(V(H),E(H))$ iki graf olsun. $\forall\ u,v\in V(G)$ için $(u,v)\in E(G)\Leftrightarrow(g(u)g(v))\in E(H)$ sağlanacak biçimde bir $g:V(G)\to V(H)$ bire bir ve örten dönüşümü varsa, G ve H graflarına izomorftur denir ve $G\cong H$ ile gösterilir.

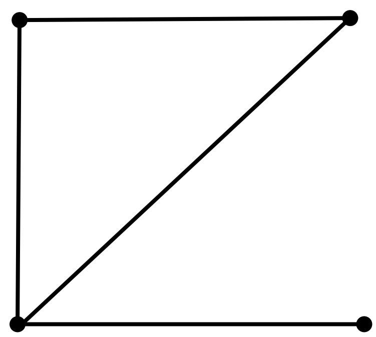
Tanım 2.1.11. $G=(V(G),E(G))$ bir graf olsun. $V(H)\subseteq V(G)$ ve $E(H)\subseteq E(G)$ ise H ya G nin bir alt grafı denir.

2.2. Graf Çeşitleri

Tanım 2.2.1. $G=(V(G),E(G))$ bir graf olsun. $E(G)=\varnothing$ ise G grafına boş (null) graf denir. n köşeli boş graf N_n ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. Katlı kenar ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir.

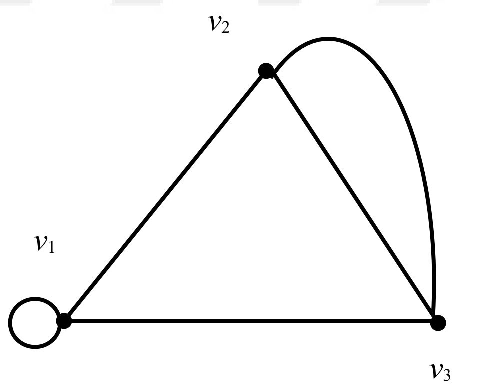
Örnek 2.2.1.



Şekil 2.4. Basit graf

Tanım 2.2.3. Hem katlı kenar hem de ilmek içeren grafa pseudo graf denir. Katlı kenar içeren ama ilmek içermeyen grafa ise çoklu graf (multigraph) denir.

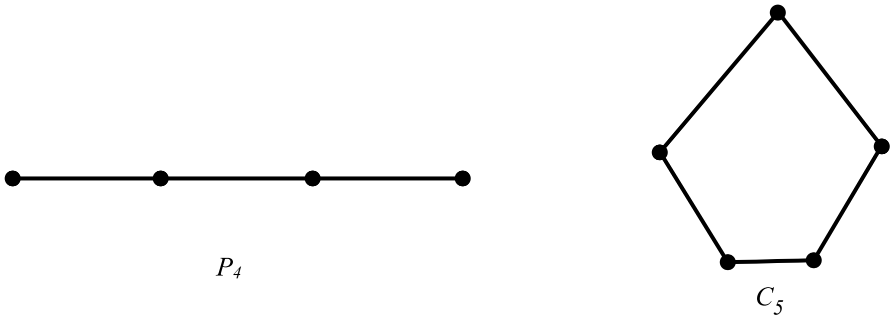
Örnek 2.2.2.



Şekil 2.5. Pseudo graf

Tanım 2.2.4. Kendisi bir yoldan (path) oluşan n köşeli bir grafa yol graf denir ve P_n ile gösterilir. Benzer olarak kendisi bir döngüden oluşan n köşeli bir grafa döngü graf denir ve C_n ile gösterilir n tek (çift) olması durumunda döngüye tek ya da çift döngü denir.

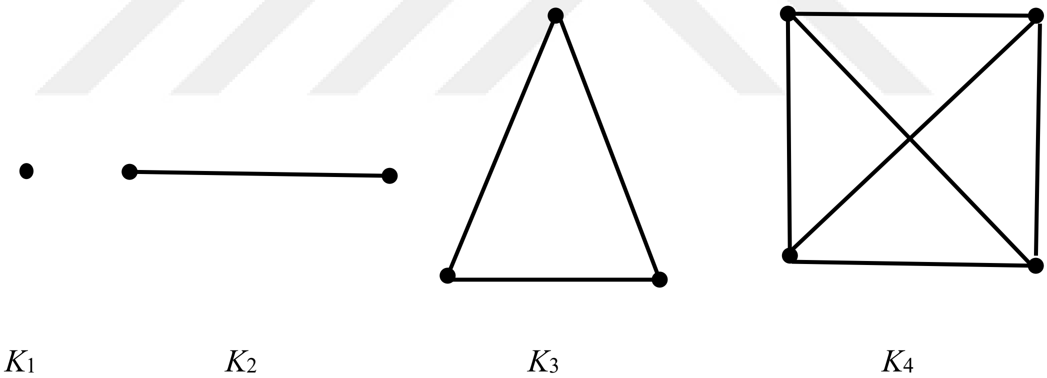
Örnek 2.2.3.



Şekil 2.6. P_4 grafı ve C_5 grafı

Tanım 2.2.5. Basit bir grafın herhangi iki köşesi arasında bir kenar varsa, yani herhangi iki köşesi komşu ise bu grafa tam (complete) graf denir ve n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir. K_n tam grafının her bir köşesinin derecesi de $n-1$ dir.

Örnek 2.2.4.



Şekil 2.7. K_1 ,K_2 , K_3 ,K_4 Tam grafları

Tanım 2.2.6. $G=\big(V(G),E(G)\big)$; n köşeli, m kenarlı basit bir graf olsun.

i. $V(G)=V(G')$

ii. $\forall\ u,v\in V(G)$ için $(u,v)\in E(G')\Leftrightarrow(u,v)\notin E(G)$

koşullarını sağlayan G' grafına G grafının tamamlayıcı (complementary) grafı denir ve $\overline{G}$ ile gösterilir. Ayrıca v köşesinin $\overline{G}$ grafındaki derecesi $d_{\overline{G}}(v) = n-1-d(v)$ dir.

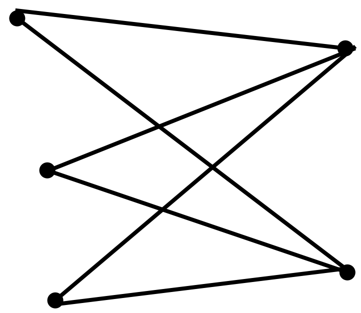
$G = (V(G), E(G))$; n köşeli, m kenarlı bir basit graf olsun. $G \cup \overline{G} = K_n$ olduğundan $E(G) \cup E(\overline{G}) = E(K_n)$ dir ve $\left|E(\overline{G})\right| = \binom{n}{2} - m$ dir.

Tanım 2.2.7. $G = (V(G), E(G))$ grafının $V(G)$ köşe kümesi $i = 1,2$ için V_i kümesindeki köşeler komşu olmayacak şekilde V_1 ve V_2 şeklinde parçalanabiliyorsa, G ye iki parçalı (bipartite) graf denir.

Teorem 2.2.1. $n \geq 2$ olmak üzere n köşeli bir G grafının iki parçalı olması için gerek ve yeter koşul tek döngü içermemesidir (König, 1916).

Tanım 2.2.8. G grafı $|V_1| = m,\ |V_2| = n$ olacak biçiminde V_1 ve V_2 gibi iki ayrık köşe kümesinden oluşan bir graf olsun. V_1 kümesindeki her köşe V_2 kümesindeki her köşe ile komşu ise G grafına iki parçalı tam (complete bipartite) graf denir ve $K_{n,m}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.5.

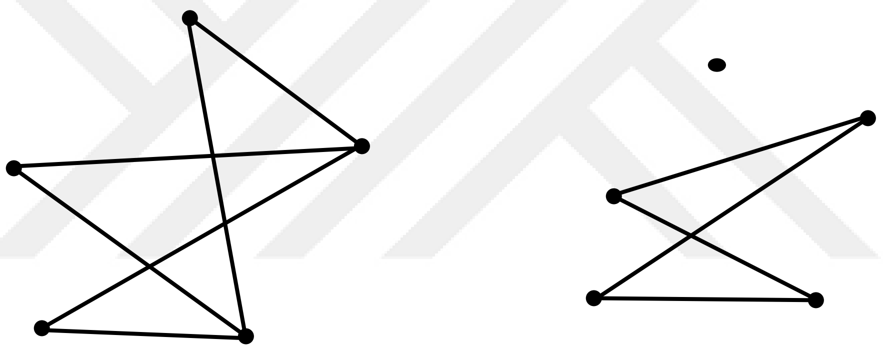


Şekil 2.8. $K_{2,3}$ İki Parçalı Tam grafı

Tanım 2.2.9. G, U ve W köşe kümelerine sahip iki parçalı bir graf olmak üzere, U kümesine ait herbir köşenin derecesi r ve W kümesine ait herbir köşenin derecesi s ise bu grafa yarı-regüler iki parçalı graf denir. Özel olarak $r = s$ ise grafa regüler iki parçalı graf denir. G grafının herbir köşesinin derecesi k ise G ye k-regüler graf denir.

Tanım 2.2.10. Herhangi iki köşesi arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı (connected) graf denir, aksi takdirde bağlantısız (disconnected) graf denir.

Örnek 2.2.6.



Şekil 2.9. Bağlantılı ve Bağlantısız graf

Tanım 2.2.11. G grafının maksimal bağlantılı alt grafına G grafının bağlantılı bileşeni (connected component) denir. Bağlantılı bir grafın bir tek bağlantılı bileşeni vardır ki bu bileşen grafın kendisidir.

Tanım 2.2.12. Döngü içermeyen bağlantılı grafa ağaç (tree) denir. n köşeli bir ağaç $n-1$ kenara sahiptir.

Tanım 2.2.13. Bir köşesinin derecesi $n-1$, diğer $n-1$ köşesinin derecesi 1 olan grafa yıldız (star) graf denir ve S_n ile gösterilir. S_n star grafı $K_{1,n-1}$ iki parçalı tam grafına izomorftur.

Tanım 2.2.14. K_2 tam grafının bir ucunun n pendant kenar ile diğer ucunun ise m pendant kenar ile birleştirilmesiyle elde edilen grafa bistar graf denir ve $G_{n,m}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.7.

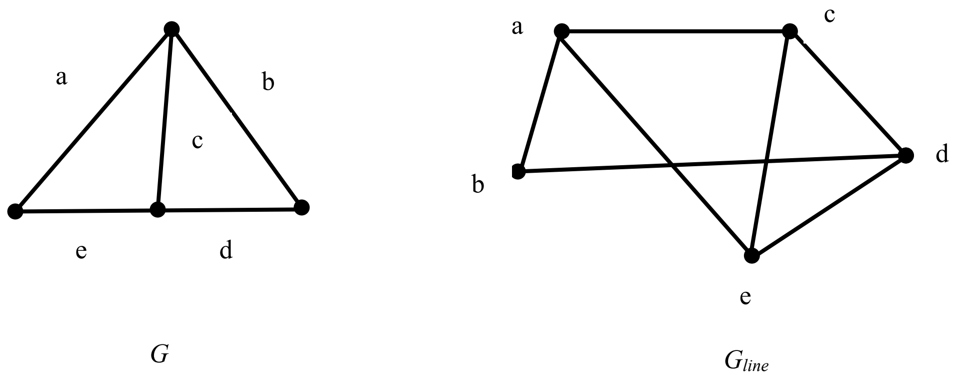
Şekil 2.10. $G_{2,3}$ Bistar grafı

Tanım 2.2.15. G bir graf olsun. G nin köşe derece kümesi $\{\Delta, \delta\}$ olmak üzere $\Delta > \delta \geq 1$ ise G ye iki farklı dereceli (bidegreed) graf denir.

Tanım 2.2.16. G basit bir graf olsun. G nin çizgi grafı G_{line} ile gösterilir. G_{line} grafında G nin herbir kenarı köşe olarak kabul edilir ve G_{line} grafındaki iki köşenin komşu olması için gerek ve yeter koşul G grafının karşılık gelen kenarlarının komşu (ortak köşeye sahip) olmasıdır.

G; n köşeli, e kenarlı ve köşe dereceleri d_i olan bir graf olsun. G_{line} grafının köşe sayısı $n' = e$ ve kenar sayısı ise $e' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - e$ dir.

Örnek 2.2.8.

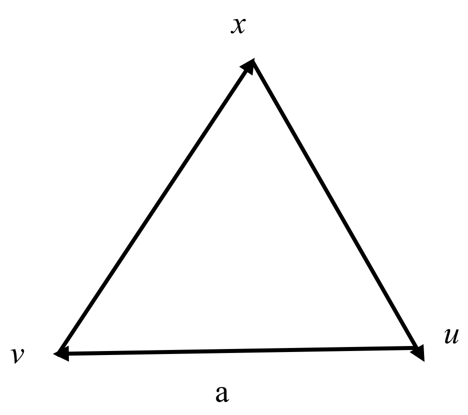


Şekil 2.11. G ve G_{line} grafı

Tanım 2.2.17. $G=(V,E)$ grafındaki bütün kenarlar yönlendirilmişse, G grafına yönlü graf (digraph) denir. Yönlü olmayan graflara ise yönsüz (undirected) graf denir. Bir başka değişle, $G=(V,E)$ yönlü grafı; V , G grafındaki köşelerin kümesi, A ise köşelerin sıralı ikililerinden oluşan yayların kümesi olmak üzere iki kümeden oluşur.

G yönlü grafında $a=(u,v)$ bir yay olsun. Bu durumda "a ya u ile v köşelerini birleştirir" denir. u köşesine a yayının başlangıç köşesi , v köşesine ise ise a yayının bitiş köşesi denir.

Örnek 2.2.9.



Şekil 2.12. Yönlü graf

2.3. Matrisler ve Spektral Yarıçap

Bu bölümde $n\times n$ tipindeki bütün matrislerin kümesi M_n ile $n\times m$ tipindeki matrislerin kümesi ise $M_{n,m}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.1. $A\in M_n$ olsun. Bir $\lambda\in\mathbb{C}$ skaleri ve $0\neq x\in\mathbb{C}^n$ vektörü $Ax=\lambda x$ denklemini sağlıyorsa**,** λ ya A matrisinin bir öz değeri ve x vektörüne ise λ öz değerine karşılık gelen bir öz vektör denir.

Tanım 2.3.2. Bir $A\in M_n$ matrisinin bütün $\lambda\in\mathbb{C}$ öz değerlerinin kümesine A matrisinin spektrumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir. $\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)}\{|\lambda|\}$ reel sayısına ise A matrisinin spektral yarıçapı denir ve $\lambda(A)$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.1. $A\in M_n$ matrisinin tekil olması için gerek ve yeter koşul $0\in\sigma(A)$ olmasıdır (Horn ve Johnson, 2013).

Tanım 2.3.3. $A=(a_{ij})\in M_{m,n}$ ve $B=(b_{ij})\in M_{m,n}$ olsun. A ve B matrisleri reel girdili matrisler olsun. Bu durumda bütün $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ için

I. $a_{ij}\geq 0$ ise A matrisine negatif olmayan matris denir ve $A\geq 0$ şeklinde yazılır.

II. $a_{ij}>0$ ise A matrisine pozitif matris denir ve $A>0$ şeklinde yazılır.

III. $A-B\geq 0$ ise $A\geq B$ ve $A-B>0$ ise $A>B$ şeklinde yazılır.

Yukarıdaki ifadeler "$\leq$ " ve "<" bağıntıları için benzer şekilde yazılabilir.

Teorem 2.3.2. $A=(a_{ij})\in M_n$ ve $B\in M_n$ negatif olmayan bir matris olsun. $|A|=(|a_{ij}|)$ ve λ matrislerin spektral yarıçapı olmak üzere, $|A|\leq B$ ise

$$\lambda(A) \leq \lambda(|A|) \leq \lambda(B)$$

dir**.**(Horn ve Johnson, 2013).

Sonuç 2.3.1. $A, B \in M_n$ negatif olmayan matrisler olsun. λ matrislerin spektral yarıçapı olmak üzere, $0 \leq A \leq B$ ise $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ dir (Horn ve Johnson, 2013).

Teorem 2.3.3. $\| \,.\, \|$, herhangi bir matris normu ve $A \in M_n$ olsun. $\lambda(A)$, A matrisinin spektral yarıçapı olmak üzere, $\lambda(A) \leq \|A\|$ dır (Horn ve Johnson, 2013).

Teorem 2.3.4. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ negatif olmayan indirgenmez bir matris olsun. $\lambda(A)$, A matrisinin spektral yarıçapı ve $R_i(A)$; A matrisinin i. satır toplamı, yani $R_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ olsun. Bu durumda

$$\min_{1 \leq i \leq n} R_i(M) \leq \lambda(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} R_i(M)$$

eşitsizlikleri sağlanır. A matrisinin satır toplamları eşit değilse, yukarıdaki her iki eşitsizlik kesindir (Horn ve Johnson, 2013).

Tanım 2.3.4. Herbir satırı ve sütunundaki bir girdisi 1 ve diğer bütün girdileri 0 olan karesel matrise permütasyon matrisi denir.

Tanım 2.3.5. A ve B iki matris olsun. $PAP^T = B$ olacak biçimde bir P permütasyon matrisi varsa, A ve B matrislerine (permütasyon) denktir denir.

Tanım 2.3.6. $A \in M_n$ olsun. $1 \leq r \leq n-1$ için

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{bmatrix}$$

olacak biçimde bir P permütasyon matrisi varsa, A matrisine indirgenebilir denir. Burada B, C, D blok matrislerinin sıfır olmayan girdili olması koşulu yoktur. B ve D karesel bloklarının mertebesi en az 1 olmalıdır. Ayrıca A matrisinin satır ve sütunlarının her keyfi yer değiştirmesi sonucu $0_{n-r,r}$ bloğunun elde edilmesi gereklidir. $A \in M_n$ matrisi indirgenebilir değilse, A matrisine indirgenmez matris denir.

Teorem 2.3.5. $A \in M_n$ negatif olmayan bir matris olsun. A matrisinin indirgenmez matris olması için gerek ve yeter koşul $(I + A)^{n-1}$ matrisinin pozitif olmasıdır (Horn ve Johnson, 2013).

Teorem 2.3.6. $A, B \in M_n$ ve A negatif olmayan indirgenmez bir matris ve $|B| \leq A$ olsun. B matrisinin her γ öz değeri ve A matrisinin $\lambda(A)$ spektral yarıçapı için $|\gamma| \leq \lambda(A)$ dır (Gantmacher, 1959).

Tanım 2.3.7. $A \in M_n$ kompleks bir matris olsun. Her sıfır olmayan $x \in \mathbb{C}^n$ vektörü için $x^* Ax > 0$ ise A matrisine pozitif tanımlı matris, $x^* Ax \geq 0$ ise A ya pozitif yarı tanımlı matris denir. Burada x^*, x vektörünün eşlenik transpozudur.

Tanım 2.3.8. $A \in M_n$ olsun. $B = S^{-1}AS$ olacak şekilde tekil olmayan bir $S \in M_n$ matrisi varsa, B matrisi A ya benzerdir denir. $B = P^T AP$ olacak biçimde bir P permütasyon matrisi varsa, B matrisi A ya permütasyon benzerdir denir. Matrislerde benzerlik M_n üzerinde bir denklik bağıntısı olduğundan A matrisi de B ye benzerdir.

Teorem 2.3.7. $A, B \in M_n$ ve A matrisi B ye benzer olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i. A ve B matrisi aynı öz değerlere sahiptir.

ii. B bir köşegen matris ise esas köşegen girdileri A matrisinin öz değerleridir (Horn ve Johnson, 2013).

Teorem 2.3.8. (Perron-Frobenius) $A \in M_n$ negatif olmayan indirgenmez bir matris ve $\lambda(A)$, A matrisinin spektral yarıçapı olsun. Bu durumda;

i. $\lambda(A) \geq 0$ dır.

ii. $\lambda(A)$, A matrisinin bir basit öz değeridir.

iii. $Ax = \lambda(A)x$ ve $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ olacak şekilde bir tek reel pozitif $x = (x_i)_{n\times 1}$ vektörü vardır.

iv. $y^T A = \lambda(A) y^T$ ve $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = 1$ olacak şekilde bir tek reel pozitif $y = (y_i)_{1\times n}$ vektörü vardır (Horn ve Johnson, 2013).

Teoremdeki x vektörüne A matrisinin (sağ) Perron vektörü, y vektörüne ise A matrisinin (sol) Perron vektörü denir (Horn ve Johnson, 2013).

Tanım 2.3.9. Bir A matrisinin tüm satırlarının (sütunlarının) toplamları eşit ise A ya satır-regüler (sütun-regüler) matris denir.

Teorem 2.3.9. (Rayleigh–Ritz) $A \in M_n$ simetrik bir matris olsun. A matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olmak üzere $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i. Bütün $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda_1 x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_n x^T x,$$

ii. $$\lambda_n = \max_{x\neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \max_{x^T x = 1} x^T A x,$$

iii. $\lambda_1 = \min\limits_{x \neq 0} \dfrac{x^T Ax}{x^T x} = \min\limits_{x^T x=1} x^T Ax$

(Horn ve Johnson, 2013).

Teorem 2.3.10. (Courant-Fischer) $A \in M_{m,n}$ simetrik bir matris ve $k; 1 \leq k \leq n$ olacak biçimde bir tamsayı ve A matrisinin öz değerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ şeklinde sıralanmak üzere,

$$\lambda_k = \min_{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{R}^n} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ x \perp w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^T Ax}{x^T x} \tag{1}$$

$$\lambda_k = \max_{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k} \in \mathbb{R}^n} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ x \perp w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}}} \frac{x^T Ax}{x^T x} \tag{2}$$

eşitlikleri sağlanır (Horn ve Johnson, 2013).

Tanım 2.3.10. $A = (a_{ij}) \in M_n$ bir kompleks matris olsun. $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ olmak üzere,

$$R_i' = \sum_{i \neq j} \left| a_{ij} \right| = \left| a_{i1} \right| + \ldots + \left| a_{i,i-1} \right| + \left| a_{i,i+1} \right| + \ldots + \left| a_{in} \right|$$

toplamına A matrisinin silinmiş mutlak satır toplamı denir. $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $\left| a_{ii} \right| > R_i'$ ise A matrisine diyagonal dominant denir.

Teorem 2.3.11. (Levy-Desplanques) A matrisi diyagonal dominant ise $\det A \neq 0$ dır (Brualdi ve Ryser,1991).

Aşağıdaki teorem A matrisinin öz değerleri için bir kapsama bölgesi belirler.

Teorem 2.3.12. (Gershgorin) $A \in M_n$ matrisinin bütün öz değerleri $i = 1,2,3,\dots,n$ için

$$Z_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - a_{ii} \right| \le R_i' \right\}$$

olacak şekilde n kapalı diskin birleşimi tarafından belirlenen kompleks düzlemdeki bölge içinde bulunur.

Z_i disklerinin herbirine Gershgorin diski, bu disklerin birleşiminden oluşan bölgeye ise Gershgorin bölgesi denir.

A diyagonal dominant matris ise Z_i disklerinin hiçbiri 0'ı içermez. Bu nedenle Gershgorin Teoremi'nden diyagonal dominant bir A matrisinin hiçbir öz değeri 0'a eşit değildir. Bu durumda $\det A \neq 0$ dır.

Teorem 2.3.13. (Brauer) $A = \left(a_{ij} \right) \in M_n$, $n \ge 2$ olmak üzere bir kompleks matris olsun. $i, j = 1,2,3,\dots,n$ ve $i \neq j$ için

$$\left| a_{ii} \right| \left| a_{jj} \right| > R_i' R_j'$$

ise $\det A \neq 0$ dır. A matrisinin bütün öz değerleri $i, j = 1,2,3,\dots,n$ ve $i \neq j$ için

$$Z_{ij} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - a_{ii} \right| \left| z - a_{jj} \right| \le R_i' R_j' \right\}$$

olacak biçimde ovallerin birleşimi tarafından belirlenen bölge içinde bulunur (Brualdi ve Ryser, 1991).

2.4. Grafların Bazı Matris Gösterimleri

Bu bölümde çalışmaya temel oluşturan grafların bazı matris gösterimleri ve ilgili teoremlere kısaca yer verilecektir.

Tanım 2.4.1. G ; köşe kümesi $1,2,\ldots,n$ ile etiketli bir graf ve $A(G)=\left(a_{ij}\right)$ olsun.

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j \text{ ve } \left(i,j\right)\in E\left(G\right) \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A(G)\in M_n$ matrisine G grafının (köşe) komşuluk matrisi denir. İlmek içermeyen bir grafta bir köşenin derecesi, komşuluk matrisinin o köşeye karşılık gelen satır (sütun) girdilerinin toplamına eşittir.

Örnek 2.4.1. Şekil 2.1. de verilen G grafının komşuluk matrisi aşağıda verilmiştir:

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

Tanım 2.4.2. G , köşe kümesi $1,2,\ldots,n$ ile etiketli bir graf ve $D(G)=\left(d_{ij}\right)$ olsun.

$$d_{ij}=\begin{cases}d_i, & i=j \text{ ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan köşegen $D(G)\in M_n$ matrisine G grafının derece matrisi denir.

Teorem 2.4.1. G, köşe kümesi $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ olan bir graf olsun. $A(G)^k$ matrisinin (i, j). girdisi G grafındaki v_i köşesinden v_j köşesine k uzunluklu yürümelerin sayısına eşittir (Harary, 1969).

Örnek 2.4.2. Şekil 2.1 de verilen G grafının derece matrisi aşağıda verilmiştir:

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.4.3. G; köşe kümesi $1, 2, \dots, n$ ile etiketli, n köşeli bir graf ve $L(G) = (l_{ij})$ olsun.

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \text{ ise} \\ -1, & i \sim j \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan simetrik $L(G) \in M_n$ matrisine G grafının Laplacian matrisi denir.

- **i.** G grafının Laplacian matrisi pozitif yarı tanımlı bir matristir.
- **ii.** G grafının Laplacian matrisinin satır ve sütun toplamları sıfırdır.
- **iii.** G grafının Laplacian matrisine ait iki elemanın kofaktörü eşittir (Bapat, 2014).

Bir G grafının Laplacian matrisi, komşuluk matrisi ve derece matrisi türünden

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

şeklinde ifade edilir.

Bir G grafının Laplacian matrisi sadece G ye bağlı olmayıp, aynı zamanda G grafının köşelerinin sıralanmasına da bağlıdır. Bununla beraber, aynı G grafının farklı köşe sıralanmalarına karşılık gelen Laplacian matrisleri permütasyon benzer matrislerdir.

Teorem 2.4.2. G ve H iki graf olsun. G ve H graflarının izomorf olması için gerek ve yeter koşul $L(G)=P^T L(H)P$ olacak biçimde bir P permütasyon matrisinin var olmasıdır (Merris, 1994).

Hatırlatma 2.4.1. Bir grafın Laplacian matrisinin her bir satırındaki esas köşegen girdisi o satırdaki alt (üst) köşegen girdilerin mutlak değerlerinin toplamına eşit olduğundan Gershgorin Disk Teoremi'nden bütün öz değerleri negatif olmayan reel sayılardır. Ayrıca Laplacian matrisin her bir satır toplamı 0 olduğundan Laplacian matrisin en küçük öz değeri 0 dır ve karşılık gelen öz vektör ise $e=(1,1,\ldots,1)^T$ dir. Teorem 2.3.1 gereği $L(G)$ tekil matristir.

Tanım 2.4.4. G grafının $A(G)$ komşuluk matrisinin bütün öz değerlerinin kümesine G grafının spektrumu denir. Basit ve yönsüz bir G grafının komşuluk matrisi simetrik olduğundan bütün öz değerleri birer reel sayıdır. $A(G)$ komşuluk matrisinin en büyük öz değerine G grafının spektral yarıçapı denir. G grafının spektral yarıçapı $\mu(G)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.4.5. Basit ve yönsüz bir G grafının $L(G)$ Laplacian matrisi simetrik olduğundan bütün öz değerleri (Laplacian öz değerler) birer reel sayıdır. Bu nedenle Laplacian öz değerler $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n = 0$ şeklinde sıralanabilir. λ_{n-1} ikinci en küçük öz değerine G grafının "cebirsel bağlantısallığı" denir ve $a(G)$ ile gösterilir (Fiedler, 1973). $L(G)$ matrisinin en büyük öz değerine ise G grafının Laplacian spektral yarıçapı denir. G grafının Laplacian spektral yarıçapı $\rho(G)$ ile gösterilecektir.

$\mathbb{R}^n$ deki birim vektörlerin kümesi $W = \{X \in \mathbb{R}^n : X^T X = 1\}$ olsun. X, $L(G)$ Laplacian matrisinin $\rho(G)$ öz değerine karşılık gelen bir birim öz vektör olsun. Rayleigh-Ritz Teoremi'nden $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ olmak üzere,

$$\rho(G) = \max_{x \in W} X^T L(G) X = \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} \left(x_i - x_j\right)^2$$

dir.

G bağlantısız bir graf ise $L(G)$ matrisi, her bir bloğu G grafının bir bağlantılı bileşeninin Laplacian matrisinden oluşan bir blok köşegen matrise benzerdir. Ayrıca $G_1, G_{2,} \ldots, G_k$; G grafının bağlantılı bileşenleri ise $\rho(G_i)$; her bir bağlantılı bileşenin Laplacian spektral yarıçapı olmak üzere, G grafının Laplacian spektral yarıçapı $\rho(G) = \max\{\rho(G_i) : 1 \le i \le k\}$ ile hesaplanır (Patra ve Sahoo, 2017).

Örnek 2.4.3 Şekil 2.1 de verilen G grafının Laplacian matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dir. G grafının Laplacian öz değerleri $0,\ 3-\sqrt{2},\ 3+\sqrt{2},\ 5$ olup, G grafının Laplacian spektral yarıçapı $\rho(G) = 5$ tir ve grafın cebirsel bağlantısallığı ise $a(G) = 3-\sqrt{2}$ dir.

Teorem 2.4.3. G bir graf olsun. $a(G)=0$ olması için gerek ve yeter koşul G nin bağlantısız bir graf olmasıdır (Fiedler, 1989).

Teorem 2.4.4. $G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$, n köşeli basit yönsüz bir graf olsun. G nin cebirsel bağlantısallığı olan $a\left(G\right)$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

i. $$a\left(G\right)=\min_{x\in W}\sum_{\substack{(i,k)\in E(G)\\ i<k}}\left(x_i-x_k\right)^2,$$

veya

ii. $$a\left(G\right)=\min_{x\in W}x^T L\left(G\right)x.$$

Burada $W=\left\{\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)^T\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2=1\right\}$ dir (Fiedler, 1989).

Teorem 2.4.5. $J\in M_n$ tüm girdileri 1 olan bir matris ve $I\in M_n$ birim matris olmak üzere $L(K_n)=nI-J$ dir (Fiedler, 1989).

Teorem 2.4.6. G, n köşeli bir graf olsun. $L\left(G\right)$ Laplacian matrisine ait 0 öz değerinin katlılığı G nin bileşen sayısına eşittir. n öz değerinin katlılığı ise 1 e eşit olup, $\overline{G}$ grafının bileşen sayısından küçüktür (Anderson ve Morley, 1985).

Tanım 2.4.6. G, köşe ve kenar kümesi sırasıyla $V\left(G\right)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ve $E\left(G\right)=\{e_1,\mathrm{e}_2,...,e_m\}$ olan bir graf olsun. $Q=\left(q_{ij}\right)$ olmak üzere,

$$q_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ köşesi } e_j \text{ kenarı ile etkide ise}\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlı $Q(G) \in M_{n,m}$ matrisine köşe-kenar etki (çakışım) matrisi denir. $|L(G)| = (|l_{ij}|)$ olmak üzere, $|L(G)| = A(G) + D(G) = Q(G)Q(G)^T$ dur.

Örnek 2.4.4. Şekil 2.1 deki G grafının köşe-kenar etki matrisi aşağıda verilmiştir:

$$Q(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.4.7. G, köşe ve kenar kümesi sırasıyla $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ile $E(G) = \{e_1, \mathrm{e}_2, ..., e_m\}$ olan yönlü bir graf ve $F = (f_{ij})$ olmak üzere,

$$f_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i,\ e_j \text{ nin pozitif bitimi ise} \\ -1, & v_i,\ e_j \text{ nin negatif bitimi ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $F(G) \in M_{n,m}$ matrisine yönlendirilmiş köşe-kenar etki (çakışım) matrisi denir. $L(G) = F(G)F(G)^T$ olup, $F(G)F(G)^T \in M_n$ matrisi G grafının kenar yönlendirmelerinden bağımsızdır.

Tanım 2.4.8. G, köşe kümesi $1, 2, \ldots, n$ ile etiketli bir graf ve $K(G) = (k_{ij})$ olsun.

$$k_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \text{ ise} \\ 1, & i \sim j \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $K(G) \in M_n$ matrisine G grafının işaretsiz (signless) Laplacian matrisi denir. Bir G grafının işaretsiz Laplacian matrisi, komşuluk matrisi ve derece matrisi türünden

$$K(G) = |L(G)| = D(G) + A(G)$$

şeklinde ifade edilir, burada $|L(G)| = (|l_{ij}|)$ dir. Ayrıca $K(G) = Q(G)Q(G)^T$ dur.

Tanım 2.4.9. G basit bir graf olsun. G nin G_{line} çizgi grafının komşuluk matrisi $A(G_{line})$ ile gösterilir. $uv, xy \in E(G)$ olmak üzere $A(G_{line})$ matrisinin (uv, xy). girdisi

$$\begin{cases} 1, & uv \approx xy \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.4.7. G grafının bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul $L(G)$ matrisinin indirgenmez olmasıdır (Brualdi ve Ryser, 1991).

Teorem 2.4.8. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$ olsun. A matrisine karşılık gelen $D(A)$ yönlü grafının köşe kümesi $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olsun. v_i den v_j ye bir yönlü kenarın var olması için gerek ve yeter koşul $a_{ij} \neq 0$ olmasıdır (Brualdi ve Ryser, 1991)

Tanım 2.4.10. G yönlü bir graf olsun. G nin herbir v_i, v_j köşe çifti için v_i den v_j ye bir yönlü yol varsa, G ye güçlü bağlantılı (strongly connected) graf denir.

Teorem 2.4.9. $A \in M_n$ matrisinin indirgenmez olması için gerek ve yeter koşul $D(A)$ yönlü grafının güçlü bağlantılı olmasıdır (Brualdi ve Ryser, 1991).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada basit ve sonlu grafların Laplacian spektral yarıçapının üst sınırları üzerine yazılmış makaleler, incelemeler, literatürde bulunan İngilizce kaynaklar ve kitaplar incelenmiş, Türkçe'ye çevrilerek bir araya getirilmiştir.

3.2. Yöntem

Bu çalışma; verilerin döküman incelemesi yapılarak oluşturulan bir çalışmadır. Çalışmada basit ve sonlu grafların Laplacian spektral yarıçapının üst sınırları üzerine yapılan çalışmalardaki teoremler ve ispatları incelenmiş ve bir araya getirilmiştir. Ayrıca çalışmalarda verilen bazı üst sınır değerleri iki farklı graf için hesaplanmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde basit ve sonlu bir grafın Laplacian spektral yarıçapı için elde edilmiş üst sınırları içeren çalışmalardaki teoremler ve ispatları detaylı olarak irdelenmiştir. Üst sınırlar için eşitliğin sağlandığı durumlardaki ispatlar ele alınmamıştır. Ayrıca çalışmalarda verilen bazı üst sınır değerleri iki farklı graf için hesaplanmıştır.

Grafın Laplacian spektral yarıçapı için ilk üst sınır grafın köşe sayısı olarak Fiedler tarafından 1973 yılında verilmiştir:

Teorem 4.1. G, n köşeli bir graf ve $b(G) = n - a(\overline{G})$ olarak tanımlanan $b(G)$ sayısı $W = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ e = (1,1,...,1)^T, x^T x = 1 \text{ ve } x^T e = 0\right\}$ olmak üzere,

$$b(G) = \max_{x \in W} \left\{x^T L(G) x\right\}$$

eşitliğini sağlar. Buna denk olarak $b(G)$, G grafının Laplacian matrisinin en büyük öz değeridir (Fiedler, 1973).

İspat: J; tüm girdileri 1 olan $n \times n$ matris ve $I \in M_n$ birim matris olmak üzere, $L(K_n) = nI - J$ ve $G \cup \overline{G} = K_n$ olduğundan

$$L(G) + L(\overline{G}) = L(K_n) = nI - J$$

dir. $x \in W$ için $x^T (nI - J) = n$ dir. Ayrıca ve $x^T \left(L(G) + L(\overline{G})\right) x = x^T (nI - J) x$ eşitliğinden $x^T L(G) x = n - x^T L(\overline{G}) x$ dir. Teorem 2.4.4 den

$a\left(\overline{G}\right)=\min_{x\in W} x^T L\left(\overline{G}\right)x$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\max_{x\in W} x^T L\left(G\right)x = n-\min_{x\in W} x^T L\left(\overline{G}\right)x = n-a\left(\overline{G}\right)=b\left(G\right)$$

elde edilir ve ispat biter.

Teorem 4.1 gereği;

$$\rho\left(G\right)\le n \tag{4.1}$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.2. G, n köşeli bir graf ve G grafının maksimum köşe derecesi Δ olsun. Bu durumda,

$$\rho\left(G\right)\le 2\Delta \tag{4.2}$$

dır. G grafı bağlantılı ise (4.2) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Fiedler, 1973).

İspat: Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.4 gereği,

$$\rho\left(G\right)=\rho\left(L\left(G\right)\right)\le\rho\left(\left|L\left(G\right)\right|\right)\le\max_{1\le i\le n} R_i\left(\left|L\left(G\right)\right|\right)=2\max_{1\le i\le n}\left\{d_{v_i}\right\}=2\Delta$$

olduğundan ispat biter.

Lemma 4.1. $L(K_n)$ matrisinin 0 ve n öz değerleri, sırasıyla 1 ve $n-1$ katlılığına sahiptir (Anderson ve Morley, 1985).

Teorem 4.3. G, n köşeli bir graf ve λ, $L(G)$ matrisinin bir öz değeri ise $0 \leq \lambda \leq n$ dir (Anderson ve Morley, 1985).

İspat: $\lambda(G)$, $L(G)$ matrisinin bir öz değeri olsun. Bu durumda $\|x\| = 1$ olan bir x vektörü için $L(G)x = \lambda x$ tir. $F = F(G)$, G grafının yönlendirilmiş köşe-kenar etki matrisi olmak üzere;

$$\lambda = <\lambda x, x> = <L(G)x, x> = <FF^T x, x> = \|F^T x\|^2$$

dir. Buradan λ negatif olmayan bir reel sayıdır. G, n köşeli bir graf olduğundan $L(G) + L(\overline{G}) = L(K_n)$ dir. u bütün bileşenleri 1 olan bir vektör ise $L(G)u + L(\overline{G})u = L(K_n)u = 0$ dır. u ya ortogonal olan bir x vektörü için $L(G)x = \lambda x$ olup, Lemma 4.1 kullanılırsa;

$$L(\overline{G})x = L(K_n)x - L(G)x = (n - \lambda)x$$

elde edilir. $L(\overline{G})$ matrisinin de öz değerleri negatif olmayan reel sayılar olduğundan $\lambda \leq n$ olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. G bir graf olsun.Bu takdirde

$$\rho(G) \leq \max_{(v,w)\in E(G)} \{d_v + d_w\} \tag{4.3}$$

dir. Eğer G bağlantılı ise (4.3) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Anderson ve Morley, 1985).

İspat: G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde Teorem 2.4.7 den $L(G)$ indirgenmezdir. $F = F(G)$, G grafının yönlendirilmiş köşe-kenar etki matrisi olmak üzere, $F(G)^T F(G)$ ile $L(G) = F(G)F(G)^T$ matrisleri aynı sıfır olmayan öz değerlere sahip olduğu için $F(G)^T F(G)$ matrisini göz önüne alalım. $F(G)^T F(G)$ matrisinin spektral yarıçapı λ olmak üzere, Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.4 den

$$\lambda\left(F(G)^T F(G)\right) \leq \lambda\left(\left|F(G)^T F(G)\right|\right) \leq \max R_i\left(\left|F(G)^T F(G)\right|\right)$$

dir. e, G nin v ve w köşelerini birleştiren bir kenar ise e ye karşılık gelen satırdaki girdilerin toplamı $\{d_v + d_w\}$ olduğundan

$$\lambda\left(F(G)^T F(G)\right) \leq \max_{(v,w)\in E(G)} \{d_v + d_w\}$$

dir. Buradan $\rho(G) \leq \max_{(v,w)\in E(G)} \{d_v + d_w\}$ dir. Bağlantılı graflar için eşitsizlik sağlanmış olur ve ispat biter.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.4 ün özel halidir.

Sonuç 4.1. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\rho(G) \leq 2\max\{d_u : u \in V(G)\}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Anderson ve Morley, 1985).

Teorem 4.5. G, $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ derece dizisine sahip bir graf ve $A(G_{line})$, G_{line} çizgi grafının komşuluk matrisi olsun. $\mu(A(G_{line}))$, $A(G_{line})$ matrisinin en büyük öz değeri ise

$$\mu(A(G_{line})) \leq \sqrt{(d_1 + d_2 - 2)(d_1 + d_3 - 2)} \tag{4.4}$$

eşitsizliği sağlanır. G bir bağlantılı graf ise (4.4) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler graf ya da 3 veya 4 köşeli bir yol olmasıdır (Li ve Zhang, 1997).

İspat: G sırasıyla $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ve $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ köşe ve kenar kümesine sahip bir graf olsun. v_i köşesinin derecesi d_1, v_j köşesinin derecesi d_2 olsun. $\{v_i, v_j\} = e_k$ ise e_k kenarının G_{line} çizgi grafındaki derecesi $R_k = d_1 + d_2 - 2$ dir. Burada R_k, $A(G_{line})$ matrisinin k. satır toplamıdır. $e_l = \{v_s, v_t\}$ bir başka kenar olsun. e_l kenarının G_{line} grafındaki derecesi $R_l = d_{v_s} + d_{v_t} - 2$ dir. Ayrıca $R_l = d_{v_s} + d_{v_t} - 2 \leq d_1 + d_3 - 2$ olduğu açıktır. $\{v_i, v_j\} \notin E(G)$ ise herbir e_t kenarı için $R_t \leq d_1 + d_3 - 2$ dir. Burada R_t, e_t kenarının G_{line} grafındaki derecesi yani $A(G_{line})$ matrisinin t. satır toplamıdır. $A(G_{line})$ matrisinin esas köşegen girdilerinin tümü 0 olduğundan $A(G_{line})$ matrisinin en büyük öz değeri olan $\mu(A(G_{line}))$, Brauer Teoremi'nden $Z = \bigcup_{i \neq j} Z_{ij}$ bölgesi içindedir. Burada tüm $i \neq j$ için $Z_{ij} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 \leq R_i' R_j'\right\}$ dir ve R_i', $A(G_{line})$ matrisinin silinmiş mutlak satır toplamı olmak üzere,

$$Z \subseteq \left\{z \in \mathbb{C} : |z|^2 \leq (d_1 + d_2 - 2)(d_1 + d_3 - 2)\right\}$$

olduğu açıktır. Bu durumda $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)^2 \leq \sqrt{\left(d_1+d_2-2\right)\left(d_1+d_3-2\right)}$ olur ve (4.4) eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.2. G, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ derece dizisine sahip bir graf ve $A\left(G_{line}\right)$, G_{line} çizgi grafının komşuluk matrisi olsun. $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)$, $A\left(G_{line}\right)$ matrisinin en büyük öz değeri olmak üzere, en büyük dereceli iki köşe komşu değilse;

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right) \leq d_1+d_3-2$$

dir (Li ve Zhang, 1997).

Lemma 4.2. G ; n köşeli, m kenarlı bir graf ve Q, G nin köşe-kenar etki matrisi ise $\left|Q^T Q\right| = 2I_m + A\left(G_{line}\right)$ dır (Brualdi ve Ryser, 1991).

Teorem 4.6. G, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ derece dizisine sahip bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\rho\left(G\right) \leq 2+\sqrt{\left(d_1+d_2-2\right)\left(d_1+d_3-2\right)} \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır. G bağlantılı graf ise (4.5) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da 3 veya 4 köşeli bir yol olmasıdır (Li ve Zhang, 1997).

İspat: $Q = Q(G)$, G grafının köşe-kenar etki matrisi olmak üzere, QQ^T ve $Q^T Q$ matrisleri aynı sıfır olmayan öz değerlere sahiptir. Teorem 2.3.2. ve Lemma 4.2. den

$$\begin{aligned}\rho\left(G\right) &= \rho(L(G)) \leq \rho(\left|L(G)\right|) = \rho\left(QQ^T\right) = \rho\left(Q^T Q\right)\\ &= \rho\left(2I_m + A\left(G_{line}\right)\right)\\ &\leq 2+\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)\end{aligned}$$

Teorem 4.5 gereği

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)\leq\sqrt{\left(d_1+d_2-2\right)\left(d_1+d_3-2\right)}$$

olduğundan

$$\rho\left(G\right)\leq 2+\sqrt{\left(d_1+d_2-2\right)\left(d_1+d_3-2\right)}$$

elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 4.3. Herhangi bir G grafı için (4.3) te $\rho\left(G\right)\leq \max\limits_{(u,v)\in E\left(G\right)}\left\{d_u+d_v\right\}$ idi. Benzer bir yolla; $a=\max\limits_{(u,v)\in E(G)}\left\{d_u+d_v\right\}$ ve $\left(x,y\right)\in E(G)$ için $d_x+d_y=a$ olduğu kabul edilip, $b=\max\limits_{(u,v)\in E(G)-\left(x,y\right)}\left\{d_u+d_v\right\}$ ile gösterilirse,

$$\rho\left(G\right)\leq 2+\sqrt{\left(a-2\right)\left(b-2\right)} \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.6) sınırı (4.3) sınırından daha iyidir (Li ve Zhang, 1997).

Sonuç 4.2 ve Teorem 4.6 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4. G, $d_1\geq d_2\geq \ldots \geq d_n$ derece dizisine sahip bir graf ve ρ , $L\left(G\right)$ Laplacian matrisinin en büyük öz değeri olsun. En büyük dereceli iki köşe komşu değilse, bu durumda

$$\rho\left(G\right)\leq d_1+d_3$$

eşitsizliği sağlanır (Li ve Zhang, 1997).

(Merris, 1998) çalışmasında verilen aşağıdaki teoremin ispatı açık biçimde ifade edilmiştir.

Teorem 4.7. G ; n köşeli bir graf olsun. v köşesinin derecesi d_v , v köşesine komşu olan köşelerin derecelerinin ortalaması ise m_v olsun. Bu takdirde;

$$\rho(G) \leq \max\{d_v + m_v : v \in V(G)\} \tag{4.7}$$

eşitsizliği sağlanır (Merris, 1998).

İspat: G nin hiçbir kenarı yoksa, eşitsizliğin her iki tarafı da sıfır olur. Aksi halde ispatı bağlantılı graflar için yapmak yeterlidir. $D(G) = diag(d_{v_1}, d_{v_2}, \ldots, d_{v_n})$; grafın köşe derecelerinin bir köşegen matrisi olmak üzere, $B = D(G)^{-1} L(G) D(G)$ matrisinin matrisinin (i, j). girdisi

$$\begin{cases} d_{v_i} \ , & i = j \text{ ise} \\ \dfrac{-d_{v_j}}{d_{v_i}}, & i \sim j \text{ ise} \\ 0 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Gershgorin Teoremi gereği; bir $B \in M_n$ matrisinin her λ öz değeri için $i \in \{1,2,3,...,n\}$ olmak üzere,

$$|\lambda - B_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |B_{ij}|$$

dir. Böylece $i \in \{1,2,3,...,n\}$ için

$$\left|\lambda - B_{ii}\right| = \left|\lambda - d_{v_i}\right| \leq \sum_{i \neq j} \left|B_{ij}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
&\left|\lambda - d_{v_1}\right| \leq \sum_{i \neq j} \left|B_{1j}\right| = \left|B_{12}\right| + \left|B_{13}\right| + \ldots + \left|B_{1n}\right| \\
&\left|\lambda - d_{v_2}\right| \leq \sum_{i \neq j} \left|B_{2j}\right| = \left|B_{21}\right| + \left|B_{23}\right| + \ldots + \left|B_{2n}\right| \\
&\vdots \\
&\left|\lambda - d_{v_n}\right| \leq \sum_{i \neq j} \left|B_{nj}\right| = \left|B_{n1}\right| + \left|B_{n2}\right| + \ldots + \left|B_{nn}\right|
\end{aligned}$$

dir. $i = 1$ için

$$\begin{aligned}
\left|\lambda - d_{v_1}\right| &\leq \left|B_{12}\right| + \left|B_{13}\right| + \ldots + \left|B_{1n}\right| \\
&= \frac{d_{v_2}}{d_{v_1}} + \frac{d_{v_3}}{d_{v_1}} + \ldots + \frac{d_{v_n}}{d_{v_1}}
\end{aligned}$$

olup, her i için işlemler düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&\left|\lambda - d_{v_i}\right| \leq \frac{1}{d_{v_i}} \left[d\left(v_1\right) + d\left(v_2\right) + \ldots + d\left(v_n\right) \right] \\
&\left|\lambda - d_{v_i}\right| \leq m_{v_i}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\lambda - d_{v_i} \leq \left|\lambda - d_{v_i}\right| \leq m_{v_i}$ dir. $B \in M_n$ matrisi ile $L(G)$ matrisi benzer matrisler olduğundan öz değerleri aynıdır. Bu nedenle

$$\rho\left(G\right) \leq d_v + m_v \leq \max\left\{ d_v + m_v : v \in V\left(G\right) \right\}$$

dir. Böylece ispat biter.

Lemma 4.3. $A(G_{line})$, G_{line} çizgi grafının komşuluk matrisi, I birim matris ve $A(G_{line})+2I$ matrisinin en büyük öz değeri λ olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \le \lambda \tag{4.8}$$

dır (Li ve Zhang, 1998).

Lemma 4.4. $C \in M_n$, spektral yarıçapı $\lambda(C)$ olan bir matris ve x, n bileşenli pozitif bir vektör olsun. Bu durumda

$$\lambda(C) \le \max\left\{\frac{(Cx)_i}{x_i} :\ 1 \le i \le n\right\} \tag{4.9}$$

dir. Burada x_i, x vektörünün i. bileşenidir (Berman ve Plemmons, 1979).

Teorem 4.8. G bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\rho(G) \le \max\left\{\frac{d_u(d_u+m_u)+d_v(d_v+m_v)}{d_u+d_v} :\ uv \in E(G)\right\} \tag{4.10}$$

eşitsizliği sağlanır (Li ve Zhang, 1998).

İspat: $A(G_{line})$ komşuluk matrisi tanımından eğer uv ve xy G nin kenarları olmak üzere; uv ve xy komşu ise $A(G_{line})$ matrisinin (uv, xy). girdisi 1 dir, aksi takdirde 0 dır. f, uv. bileşeni $d_u + d_v$ olan bir sütun vektörü olsun. Bu takdirde I birim matris olmak üzere, $\left(A(G_{line})+2I\right)f$ matrisinin uv. bileşeni

$$\begin{aligned}2\left(d_u+d_v\right)+\sum_{xy\sim uv}\left(d_x+d_y\right)&=2\left(d_u+d_v\right)+\sum_{uy\sim uv}\left(d_u+d_y\right)+\sum_{xv\sim uv}\left(d_x+d_v\right)\\&=2\left(d_u+d_v\right)+\sum_{y\sim u}\left(d_u+d_y\right)-\left(d_u+d_v\right)\\&\quad+\sum_{x\sim v}\left(d_x+d_v\right)-\left(d_v+d_u\right)\\&=d_u^2+d_u m_u+d_v^2+d_v m_v\\&=d_u\left(d_u+m_u\right)+d_v\left(d_v+m_v\right)\end{aligned}$$

olup, ayrıca

$$\frac{\left(\left(A\left(G_{line}\right)+2I\right)f\right)_{uv}}{f_{uv}}=\frac{d_u\left(d_u+m_u\right)+d_v\left(d_v+m_v\right)}{d_u+d_v}$$

dir. Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 ün kullanılması ile

$$\begin{aligned}\rho\left(G\right)\le\lambda\left(A\left(G_{line}\right)+2I\right)&\le\max_{uv\in E(G)}\left\{\frac{\left(\left(A\left(G_{line}\right)+2I\right)f\right)_{uv}}{f_{uv}}\right\}\\&=\max_{uv\in E(G)}\left\{\frac{d_u\left(d_u+m_u\right)+d_v\left(d_v+m_v\right)}{d_u+d_v}\right\}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat biter.

"(4.10) sınırı (4.7) sınırından daha iyidir" (Li ve Zhang, 1998).

Lemma 4.5. e, tüm bileşenleri 1 olan n bileşenli bir sütun vektörü ise $L(G)e=0$ dır. $M\left(G\right)$ matrisi; $M\left(G\right)=(m_{ij})=L(G)+ee^T$ olarak tanımlanırsa, matrisin $\left(i,j\right)$. girdisi

$$m_{ij} = \begin{cases} d_i + 1, & i = j \text{ ise} \\ 0 \quad , & i \sim j \text{ ise} \\ 1 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlı olup, negatif olmayan bir matristir (Rojo ve ark., 2000).

Lemma 4.6. G, n köşeli bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde $M(G)$ matrisinin spektrumu $\{\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, ..., \lambda_1, n\}$ kümesidir ve $M(G)$ nin spektral yarıçapı $\lambda(M(G)) = n$ ve $\lambda(M(G))$ öz değeri için e bir sağ öz vektördür (Rojo ve ark., 2000).

Lemma 4.7. Eğer $B = (b_{ij}) \geq 0$ matrisinin modül olarak ikinci en büyük öz değeri $\xi(B)$ olmak üzere, B matrisi $\lambda(B)$ spektral yarıçapına karşılık gelen bir w pozitif sağ öz vektörüne sahip ise

$$\xi(B) \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{k=1}^{n} w_k \left| \frac{b_{ik}}{w_i} - \frac{b_{jk}}{w_j} \right| \tag{4.12}$$

dir (Bauer ve ark., 1969).

(Rojo ve ark., 2000) çalışmasında örneklendirilen bazı graflar için (4.3), (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.10) sınırlarının grafın köşe sayısını aştığı gösterilmiştir. Ancak (Rojo ve ark., 2000) çalışmasında elde edilen aşağıdaki (4.13) sınırı grafın köşe sayısını aşamaz.

Teorem 4.9. G grafının köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \leq \max\left\{ d_i + d_j - \left| N_i \cap N_j \right| : \ 1 \leq i < j \leq n \right\} \tag{4.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada v_i köşesinin derecesi d_i, v_i ve v_j köşelerinin ortak komşularının sayısı ise $\left|N_i \cap N_j\right|$ dir. (4.13) de verilen üst sınır n yi aşamaz (Rojo ve ark., 2000).

İspat: G nin bağlantılı bir graf olduğunu kabul edelim. Lemma 4.6 dan e, $\lambda\left(M\left(G\right)\right)=n$ spektral yarıçapına karşılık gelen bir pozitif sağ öz vektör ve $\rho=\xi\left(M\left(G\right)\right)$ dir. Bu durumda Lemma 4.7 den

$$\begin{aligned}\rho\left(G\right) &\leq \frac{1}{2}\max_{1\leq i,j\leq n}\sum_{k=1}^{n}\left|m_{ik}-m_{jk}\right| \\ &= \frac{1}{2}\max_{1\leq i,j\leq n}\sum_{k=1}^{n}\left|m_{ik}-m_{jk}\right|\end{aligned}$$

dır. $\rho\left(G\right)$ ye ait bu üst sınırın açık halini bulmak için (4.11) ile verilen $M\left(G\right)$ matrisinin girdileri kullanılırsa, $v_iv_j \in E(G)$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left|m_{ik}-m_{jk}\right| &= \left|m_{ii}-0\right|+\left|m_{jj}-0\right|+\sum_{k\neq i,j}\left|m_{ik}-m_{jk}\right| \\ &= d_i+1+d_j+1+\left|N_i-N_j\right|-1+\left|N_j-N_i\right|-1 \\ &= d_i+d_j+\left|N_i-N_j\right|+\left|N_j-N_i\right| \\ &= d_i+d_j+d_i+d_j-2\left|N_i\cap N_j\right|\end{aligned}$$

dir. $v_iv_j \notin E(G)$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left|m_{ik}-m_{jk}\right| &= \left|m_{ii}-1\right|+\left|m_{jj}-1\right|+\sum_{k\neq i,j}\left|m_{ik}-m_{jk}\right| \\ &= d_i+d_j+\left|N_i-N_j\right|+\left|N_j-N_i\right| \\ &= d_i+d_j+d_i+d_j-2\left|N_i\cap N_j\right|\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\rho(G) \leq \max\left\{d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| : 1 \leq i < j \leq n\right\}$$

dir. Yani her i ve j için

$$\begin{aligned} d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| &= \left|N_i\right| + \left|N_j\right| - \left|N_i \cap N_j\right| \\ &= \left|N_i \cup N_j\right| \\ &\leq n \end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.

"(4.13) sınırı (4.3) sınırından iyi olduğu açıktır. Ancak (4.13) sınırı (4.5) ve (4.10) sınırından daima iyi değildir" (Rojo ve ark., 2000).

Lemma 4.8. G ; $\pi = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ köşe derece dizisine sahip, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf olsun. Bu takdirde

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right) \tag{4.14}$$

dir (de Caen, 1998).

(Li ve Pan, 2001) çalışmasında öncelikle Lemma 4.8 de verilen de Caen'in eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki üst sınır elde edilmiştir. Ayrıca iki farklı üst sınır daha verilerek tüm bu sınırların ulaştığı uç (extremal) graflar belirlenmiştir.

Teorem 4.10. G; n köşeli, m kenarlı bağlantılı bir graf ve $L(G)$ matrisi $\rho_1(G) \geq \rho_2(G) \geq \ldots \geq \rho_{n-1}(G) \geq \rho_n(G) = 0$ şeklinde öz değer dizisine sahip olsun. Bu durumda;

$$\rho_1(G) \leq \frac{2m + \sqrt{(n-2)m(n(n-1)-2m)}}{n-1} \tag{4.15}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.15) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin star graf veya K_n tam grafından biri olmasıdır (Li ve Pan, 2001).

İspat:

$$\rho_1(G) + \rho_2(G) + \ldots + \rho_{n-1}(G) = \dot{I}z(L(G)) = \sum_{v \in V(G)} d_v$$

$$\rho_1^2(G) + \rho_2^2(G) + \ldots + \rho_{n-1}^2(G) = \dot{I}z(L^2(G)) = \sum_{v \in V(G)} (d_v^2 + d_v)$$

eşitliklerinin sağlandığı açıktır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$(n-2)\left(\rho_2^2(G) + \rho_3^2(G) \ldots + \rho_{n-1}^2(G)\right) \geq \left(\rho_2(G) + \rho_3(G) \ldots + \rho_{n-1}(G)\right)^2$$

elde edilir. Buradan

$$(n-2)\left(\sum_{v \in V(G)} (d_v^2 + d_v) - \rho_1^2(G)\right) \geq \left(\sum_{v \in V(G)} d_v - \rho_1(G)\right)^2$$

dir. O halde Teorem 2.1.1 ve (4.14) eşitsizliğinden

$$\rho_1(G) \leq \frac{\sum_{v\in V(G)} d_v + \sqrt{(n-2)\left[(n-1)\sum_{v\in V(G)}\left(d_v^2+d_v\right)-\left(\sum_{v\in V(G)} d_v\right)^2\right]}}{n-1}$$

$$\leq \frac{2m+\sqrt{(n-2)\left[(n-1)\left(\sum_{v\in V(G)} d_v^2+2m\right)-(2m)^2\right]}}{n-1}$$

$$\leq \frac{2m+\sqrt{(n-2)m\left(n(n-1)-2m\right)}}{n-1}$$

elde edilir ve ispat biter.

Teorem 4.11. G ; $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ köşe derece dizisine sahip, n köşeli, m kenarlı bağlantılı bir graf ve $L(G)$ matrisi $\rho_1(G) \geq \rho_2(G) \geq \ldots \geq \rho_{n-1}(G) \geq \rho_n(G) = 0$ öz değer dizisine sahip olsun. Bu takdirde

$$\rho_1(G) \leq \sqrt{2d_1^2+4m-2d_n(n-1)+2d_1(d_n-1)} \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.16) da eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Li ve Pan, 2001).

İspat: $L(G)$ matrisinin $\rho_1(G)$ en büyük öz değerine karşılık gelen birim uzunluklu öz vektör $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$ olsun. $L(G)x=\rho_1(G)x$ dir. Buradan $u\in V(G)$ ve $A=(a_{uv})$, G grafının komşuluk matrisi olmak üzere;

$$\rho_1(G)x_u = d_u x_u - \sum_{u\in V(G)} a_{uv}x_v$$

elde edilir. Bu durumda

$$\rho_1(G)x_u = \sum_{u\sim v}(x_u - x_v) \tag{4.17}$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho_1^2(G)x_u^2 &\le \left(\sum_{u\sim v}1^2\right)\sum_{u\sim v}(x_u-x_v)^2 \\ &= d_u\left(\sum_{u\sim v}x_u^2 - 2x_u\sum_{u\sim v}x_v + \sum_{u\sim v}x_v^2\right)\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir.

$$-2x_u\sum_{u\sim v}x_v \le \sum_{u\sim v}\left(x_u^2+x_v^2\right) = d_u x_u^2 + \sum_{u\sim v}x_v^2 \tag{4.19}$$

olduğu açıktır. (4.18) ifadesinde (4.19) yerine yazılırsa;

$$\rho_1^2(G)x_u^2 \le d_u\left(\sum_{u\sim v}x_u^2 + d_u x_u^2 + \sum_{u\sim v}x_v^2 + \sum_{u\sim v}x_v^2\right)$$

$$\rho_1^2(G)x_u^2 \le d_u\left(d_u x_u^2 + d_u x_u^2 + 2\sum_{u\sim v}x_v^2\right)$$

$$\rho_1^2(G)x_u^2 \le 2d_u^2x_u^2 + 2d_u\sum_{u\sim v}x_v^2 \tag{4.20}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\rho_1^2(G) \le \rho_1^2(G)\sum_{u\in V(G)}x_u^2 &\le 2\sum_{u\in V(G)}d_u^2x_u^2 + \le 2\sum_{u\in V(G)}d_u\sum_{u\sim v}x_v^2 \\ &\le 2d_1^2 + 2\sum_{u\in V(G)}d_u\sum_{u\sim v}x_v^2\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\sum_{u\in V(G)} d_u \sum_{u\sim v} x_v^2 = \sum_{u\in V(G)} d_u \left(1 - \sum_{(v,u)\notin E} x_v^2\right) = 2m - \sum_{u\in V(G)} d_u \sum_{(v,u)\notin E} x_v^2$$

$$= 2m - \left(\sum_{u\in V(G)} d_u x_u^2 + \sum_{u\in V(G)} d_u \sum_{\substack{(v,u)\notin E \\ v\neq u}} x_v^2\right)$$

$$\leq 2m - \left(\sum_{u\in V(G)} d_u x_u^2 + \sum_{u\in V(G)} d_n \sum_{\substack{(v,u)\notin E \\ v\neq u}} x_v^2\right)$$

$$= 2m - \left(\sum_{u\in V(G)} d_u x_u^2 + \sum_{u\in V(G)} d_n \left(n - d_u - 1\right) x_u^2\right)$$

$$= 2m - \left(d_n\left(n-1\right) - \left(d_n - 1\right)\sum_{u\in V(G)} d_u x_u^2\right)$$

$$= 2m - d_n\left(n-1\right) + \left(d_n - 1\right)\sum_{u\in V(G)} d_u x_u^2$$

$$= 2m - d_n\left(n-1\right) + d_1\left(d_n - 1\right)$$

dir. Buradan

$$\rho_1^2\left(G\right) \leq 2d_1^2 + 4m - 2d_n\left(n-1\right) + 2d_1\left(d_n - 1\right)$$

olup, (4.16) eşitsizliği gerçeklenir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.12. G bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde

$$\rho\left(G\right) \leq \max\left\{\sqrt{2d_u\left(d_u + m_u\right)} : u \in V\left(G\right)\right\} \qquad (4.21)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.21) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Li ve Pan, 2001).

İspat: (4.20) den

$$\begin{aligned}\rho^2(G) &= \rho^2(G)\sum_{u\in V(G)} x_u^2 \\ &\leq \sum_{u\in V(G)}\left(2d_u^2x_u^2 + 2d_u\sum_{u\sim v}x_v^2\right) \\ &= 2\sum_{u\in V(G)} d_u^2x_u^2 + 2\sum_{u\in V(G)} x_u^2\left(\sum_{u\sim v} d_v\right) \\ &= 2\sum_{u\in V(G)}\left(d_u^2 + m_ud_u\right)x_u^2\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\rho(G) \leq \max\left\{\sqrt{2d_u\left(d_u + m_u\right)} : u \in V(G)\right\}$$

olup, ispat biter.

"(4.21) sınırı (4.7) ve (4.10) sınırlarından bazı durumlarda daha iyidir" (Li ve Pan, 2001).

Lemma 4.9. G bağlantılı bir graf olsun. $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)$, $A\left(G_{line}\right)$ matrisinin en büyük öz değeri olsun. Bu takdirde

$$\rho(G) \leq 2 + \mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin iki parçalı graf olmasıdır (Shu ve ark., 2002).

Lemma 4.10. G; $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ derece dizisine sahip, n köşeli, m kenarlı, basit bağlantılı bir graf ve $\mu(G)$; G grafının spektral yarıçapı olsun. Bu durumda

$$\mu(G) \le \frac{d_n - 1 + \sqrt{(d_n + 1)^2 + 4(2m - nd_n)}}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler graf ya da her bir köşesinin derecesi ya d_n ya da $n-1$ olan iki farklı dereceli (bidegreed) graf olmasıdır (Hong ve ark., 2001).

Hatırlatma 4.1. n' köşeli ve m' kenarlı G_{line} çizgi grafının minimal derecesi d' olsun. Burada

$$d' = \min\{d_u + d_v - 2 \ : \ uv \in E(G)\}$$

dir (Shu ve ark., 2002).

Lemma 4.11. G; n köşeli, m kenarlı ve basit bağlantılı bir graf olsun. $f(x) = x - 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4(2m - xn)}$ ile tanımlı f fonksiyonu $1 \le x \le n-1$ için x in bir azalan fonksiyonudur. Burada $n - 1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$ ve $2m \ge xn$ dir (Hong ve ark., 2001).

Teorem 4.13. G, $d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n$ derece dizisine sahip basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\rho(G) \le d_n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(d_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i (d_i - d_n)} \qquad (4.22)$$

dir. (4.22) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Shu ve ark., 2002).

İspat: G ve G_{line} grafları bağlantılı olduğundan ve Lemma 4.10 dan

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)\leq\frac{d'-1+\sqrt{\left(d'+1\right)^2+4\left(2m'-d'n'\right)}}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$n'=m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i \ \ , \ \ 2m'=\sum_{i=1}^{n}d_i\left(d_i-1\right) \ \ , \ \ d'\geq 2d_n-2$$

dir. Lemma 4.11 den

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)\leq d_n-\frac{3}{2}+\sqrt{\left(d_n-\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}d_i\left(d_i-d_n\right)}$$

dir. Lemma 4.9 kullanılırsa,

$$\rho\left(G\right)\leq 2+\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)\leq d_n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(d_n-\frac{1}{2}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}d_i\left(d_i-d_n\right)}$$

elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 4.5. G bağlantılı bir graf ise

$$\rho\left(G\right)\leq\frac{d'}{2}+\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{d'+1}{2}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}d_i\left(d_i-\frac{d'}{2}-1\right)} \tag{4.23}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.23) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin iki parçalı graf ya da $G_{r,r}$ bistar graf olmasıdır (Shu ve ark., 2002).

(4.13) sınırında maksimum tüm farklı köşe çiftleri üzerinden alınırken, (Das, 2003) çalışmasında (4.24) sınırı ile maksimum tüm komşu köşe çiftlerine kısıtlanmıştır.

Teorem 4.14. G , $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ köşe kümesine sahip bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G)\le \max\left\{d_i+d_j-\left|N_i\cap N_j\right|:1\le i<j\le n,\ v_iv_j\in E(G)\right\} \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\left|N_i\cap N_j\right|$, v_i ve v_j köşelerinin ortak komşularının sayısıdır. (4.24) te verilen üst sınır n yi aşamaz (Das, 2003).

İspat: G grafının kenarları yoksa, (4.24) ün her iki tarafı da sıfırdır. Aksi takdirde, G grafında en azından bir kenar için sonucu kanıtlamak yeterlidir. $L(G)$ matrisinin $\rho=\rho(G)$ öz değerine karşılık gelen X öz vektörünün bileşenleri $k=1,2,\ldots,n$ olmak üzere x_k olsun. x_i öz bileşeninin 1 e eşit diğer öz bileşenlerinin ise mutlak değerce 1 den küçük veya eşit olduğunu kabul edelim. Yani $x_i=1$ ve bütün k lar için $\left|x_k\right|\le 1$ olsun. Ayrıca $x_j=\min\limits_k\{x_k:v_iv_k\in E(G)\}$ dir. v_i ve v_j köşelerinin ortak komşularının sayısı c_{ij} olsun. Bu durumda $c_{ij}=\left|N_i\cap N_j\right|$ dir. $v_iv_k\in E(G)$ olacak şekilde tüm k lar için $x_j\le x_k$ olduğundan

$$\sum_k\left\{x_k:v_iv_k\in E(G)\ ve\ v_jv_k\notin E(G)\right\}\ge\left(d_j-c_{ij}\right)x_j$$

dir. Tüm k lar için $x_k\le 1$ olduğundan

$$\sum_k\left\{x_k:v_jv_k\in E(G)\text{ ve }v_iv_k\notin E(G)\right\}\le\left(d_j-c_{ij}\right)$$

dir.

$$L(G)X = \rho(G)X \tag{4.25}$$

olduğundan (4.25) in $i.$ denkleminden

$$\rho(G)x_i = d_i x_i - \sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G)\} \tag{4.26}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\rho(G) = d_i - &\sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G) \text{ ve } v_j v_k \in E(G)\} \\ &- \sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G) \text{ ve } v_j v_k \notin E(G)\}\end{aligned} \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilir. (4.25) in $j.$ denkleminden

$$\rho(G)x_j = d_j x_j - \sum_k \{x_k : v_j v_k \in E(G)\}$$

dir. Başka bir deyişle;

$$\begin{aligned}\rho x_j = d_j x_j - &\sum_k \{x_k : v_j v_k \in E(G) \text{ ve } v_i v_k \in E(G)\} \\ &- \sum_k \{x_k : v_j v_k \in E(G) \text{ ve } v_i v_k \notin E(G)\}\end{aligned} \tag{4.28}$$

dir. (4.27) den (4.28) çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}\rho(1 - x_j) = d_i - d_j x_j - &\sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G) \text{ ve } v_j v_k \notin E(G)\} \\ &- \sum_k \{x_k : v_j v_k \in E(G) \text{ ve } v_i v_k \notin E(G)\}\end{aligned}$$

$$\leq d_i - d_j x_j - \left(d_i - c_{ij}\right) x_j + \left(d_j - c_{ij}\right)$$
$$\leq \left(d_i + d_j - c_{ij}\right)\left(1 - x_j\right) \tag{4.29}$$

elde edilir. $x_j = 1$ ise $v_i v_k \in E(G)$ olacak biçimde tüm k lar için $x_k = 1$ dir. (4.26) dan dolayı

$$\rho = d_i - \sum_k \left\{ x_k : v_i v_k \in E(G) \right\} = d_i - d_i = 0$$

eşitsizliği sağlanır. Ancak bu durum en az bir kenarlı grafta bu mümkün değildir. Bu nedenle $x_j \neq 1$ dir. $v_i v_j \in E(G)$ olmak üzere, (4.29) dan

$$\rho \leq \left(d_i + d_j - c_{ij}\right)$$

dir. Böylece

$$\rho \leq \max\left\{ d_i + d_j - c_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n,\ v_i v_j \in E(G) \right\}$$

olur. Bu durumda

$$\rho \leq \max\left\{ d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| :\ 1 \leq i \leq j \leq n\ ,\ v_i v_j \in E(G) \right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca

$$\max\left\{ d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| :\ 1 \leq i < j \leq n\ ,\ v_i v_j \in E(G) \right\}$$
$$\leq \max\left\{ d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| :\ 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

olduğu aşikardır. Teorem 4.9 gereği

$$\max\left\{d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| : 1 \le i < j \le n \right\} \le n$$

olduğundan

$$\max\left\{d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| : 1 \le i < j \le n \text{ , } v_i v_j \in E(G)\right\} \le n$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (4.24) ile verilen üst sınırın n yi aşmadığı görülür.

$$\begin{aligned} &\max\left\{d_i + d_j - \left|N_i \cap N_j\right| : 1 \le i < j \le n \text{ , } v_i v_j \in E(G)\right\} \\ &\quad \le \max\left\{d_i + d_j : v_i v_j \in E(G)\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından (4.24) sınırı (4.3) sınırından daima daha iyidir (Das, 2003).

Teorem 4.15. G , $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ köşe kümesine sahip bir graf olmak üzere,

$$\rho(G) \le \max\left\{\sqrt{2\left(d_i^2 + d_i m_i'\right)} : 1 \le i \le n\right\} \tag{4.30}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$m_i' = \frac{\sum_j \left\{d_j - \left|N_i \cap N_j\right| : v_i v_j \in E(G)\right\}}{d_i}$$

dir (Das, 2003).

İspat: $L(G)$ matrisinin $\rho = \rho(G)$ en büyük öz değerine karşılık gelen X öz vektörünün bileşenleri $k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere x_k olsun. x_i öz bileşeninin 1 e eşit diğer öz bileşenlerinin ise mutlak değerce 1 den küçük veya eşit olduğunu kabul edelim. Yani $x_i = 1$ ve bütün k lar için $|x_k| \leq 1$ olsun. Ayrıca $x_j = \min_k \{x_k : v_i v_k \in E(G)\}$ dir. v_i ve v_j nin ortak komşularının sayısı c_{ij} yani $c_{ij} = |N_i \cap N_j|$ olsun. Bütün k lar için $x_k \geq -1$ olduğundan

$$\sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G) \text{ ve } v_j v_k \notin E(G)\} \geq -(d_i - c_{ij})$$

dir. Tüm k lar için $x_k \leq 1$ olduğundan

$$\sum_k \{x_k : v_j v_k \in E(G) \text{ ve } v_i v_k \notin E(G)\} \leq (d_j - c_{ij})$$

dir. Ayrıca

$$L(G)X = \rho X \tag{4.31}$$

olduğundan (4.31) in i. denkleminden

$$\rho x_i = d_i x_i - \sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G)\}$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \rho = d_i &- \sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G) \text{ ve } v_j v_k \in E(G)\} \\ &- \sum_k \{x_k : v_i v_k \in E(G) \text{ ve } v_j v_k \notin E(G)\} \end{aligned} \tag{4.32}$$

dir. (4.31) in j. denkleminden

$$\begin{aligned} &= d_j x_j - \sum_k \left\{ x_k : v_j v_k \in E(G) \text{ ve } v_i v_k \in E(G) \right\} \\ &\quad - \sum_k \left\{ x_k : v_j v_k \in E(G) \text{ ve } v_i v_k \notin E(G) \right\} \end{aligned} \tag{4.33}$$

yazılır. (4.33) ten (4.32) çıkarılırsa;

$$\begin{aligned} \rho\left(1 - x_j\right) &= d_i - d_j x_j - \sum_k \left\{ x_k : v_i v_k \in E(G) \text{ ve } v_j v_k \notin E(G) \right\} \\ &\quad + \sum_k \left\{ x_k : v_j v_k \in E(G) \text{ ve } v_i v_k \notin E(G) \right\} \\ &\leq 2\left(d_i + d_j - c_{ij}\right) \end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. $v_i v_j \in E(G)$ olmak üzere, (4.34) ün her iki tarafının j üzerinden toplamı alınırsa;

$$\rho^2 \leq 2\left(d_i^2 - \sum_j \left\{ d_j - c_{ij} : v_i v_j \in E(G) \right\} \right) \leq 2\left(d_i^2 + d_i m_i' \right)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\rho \leq \max\left\{ \sqrt{2\left(d_i^2 + d_i m_i' \right)} : 1 \leq i \leq n \right\}$$

dir. Burada

$$m_i' = \frac{\sum_j \left\{ d_i - \left| N_i \cap N_j \right| : v_i v_j \in E(G) \right\}}{d_i}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.12. $A(G)$, G grafının komşuluk matrisi, $D(G)$ ise köşe derecelerinin köşegen matrisi olmak üzere, $K(G) = D(G) + A(G)$, G grafının işaretsiz Laplacian matrisi olsun. G bağlantılı bir graf ise $K(G)$ negatif olmayan, simetrik ve indirgenmez bir matristir (Pan, 2002).

Lemma 4.13. $G = (V, E)$; n köşeli bağlantılı bir graf olsun. $\lambda(K(G))$, $K(G)$ matrisinin spektral yarıçapı olsun. Bu takdirde

$$\rho(G) \le \lambda(K(G))$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafının iki parçalı olmasıdır (Pan, 2002).

Teorem 4.16. $G = (V(G), E(G))$ bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \le \max\left\{ \frac{(d_u + d_v) + \sqrt{(d_u - d_v)^2 + 4m_u m_v}}{2} \ : \ uv \in E(G) \right\} \tag{4.35}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.35) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır. Burada d_u ve m_u sırasıyla u köşesinin derecesi ve u ya komşu köşelerin derecelerinin ortalamasıdır (Das, 2004).

İspat: Lemma 4.13 ten $\rho(G) \le \lambda(K(G))$ dir. Ayrıca

$$\lambda(K(G)) = \lambda\left(D(G)^{-1} K(G) D(G)\right)$$

dir. $D(G)^{-1}K(G)D(G)$ matrisinin (i,j). girdisi

$$\begin{cases} d_{v_i}\ , & i=j \text{ ise} \\ \dfrac{d_{v_i}}{d_{v_j}}, & i\sim j \text{ ise} \\ 0\ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}^T$, $D(G)^{-1}K(G)D(G)$ matrisinin $\lambda(K(G))$ spektral yarıçapına karşılık gelen bir öz vektör olsun. X öz vektörünün x_u öz bileşeninin 1 , diğer öz bileşenlerinin ise mutlak değerce 1 den küçük veya eşit olduğunu kabul edelim. Yani $x_u=1$ ve $\forall w\in V$ için $|x_w|\leq 1$ olsun. Öz değer denkleminden

$$D(G)^{-1}K(G)D(G)X=\lambda(K(G))X \tag{4.36}$$

dir. $u\in V(G)$ için

$$\lambda(K(G))x_u=d_ux_u+\sum_W\left\{\frac{d_w}{d_u}x_w : uw\in E(G)\right\}$$

yazılır. O halde

$$\lambda(K(G))\leq d_u+m_ux_v \tag{4.37}$$

eşitsizliği sağlanır. $v\in V(G)$ için

$$\lambda(K(G))x_v=d_vx_v+\sum\left\{\frac{d_w}{d_v}x_w : vw\in E(G)\right\}\leq d_vx_v+m_v \tag{4.38}$$

dir. (4.37) ve (4.38) den x_v yok edilirse,

$$\lambda^2(K(G)) - (d_u + d_v)\lambda(K(G)) + d_u d_v - m_u m_v \le 0 \tag{4.39}$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda(K(G)) \le \max\left\{ \frac{(d_u + d_v) + \sqrt{(d_u - d_v)^2 + 4m_u m_v}}{2} : uv \in E(G) \right\}$$

olup, Lemma 4.13 ten $\rho(G) \le \lambda(K(G))$ olduğu göz önüne alınırsa, ispat tamamlanır.

Lemma 4.14. $G = (V(G), E(G))$, n köşeli bir graf olsun. G grafının işaretsiz Laplacian matrisi $K(G)$ ve $P(\lambda)$ bir polinom olmak üzere;

$$\min_{v \in V(G)} R_v(P(K(G))) \le P(\rho(G)) \le \max_{v \in V(G)} R_v(P(K(G)))$$

eşitsizliği sağlanır. $P(K(G))$ matrisinin satır toplamları eşit değilse, her iki eşitsizlik de kesindir (Liu ve ark., 2004; Li ve Pan, 2004).

Teorem 4.17. $G = (V(G), E(G))$, n köşeli ve m kenarlı basit bir graf olsun. δ ve Δ sırasıyla G grafının minimum ve maksimum köşe dereceleri olsun. Bu takdirde,

$$\rho(G) \le \frac{(\delta + \Delta - 1) + \sqrt{(\delta + \Delta - 1)^2 + 4(4m - 2\delta(n-1))}}{2} \tag{4.40}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca G bağlantılı graf ise (4.40) ta eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Liu ve ark., 2004).

İspat: $K(G)=D(G)+A(G)$ olduğundan $K(G)$ matrisinin *v*. satır toplamı $R_v(K(G))=2d_v$ dir. Ayrıca $R_v(A(G)D(G))=R_v\left(A(G)^2\right)=\sum_{u\sim v} d_u$ dur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
R_v\left(K(G)^2\right) &= R_v\left(D(G)\left(D(G)+A(G)\right)+A(G)D(G)+A(G)^2\right)\\
&= d_v R_v\left(K(G)\right)+R_v\left(A(G)D(G)\right)+R_v\left(A(G)^2\right)\\
&= d_v R_v\left(K(G)\right)+R_v\left(A(G)D(G)\right)+R_v\left(A(G)^2\right)\\
&= d_v R_v\left(K(G)\right)+2\left(2m-d_v-\sum_{\substack{u\sim v\\ u\neq v}} d_u\right)\\
&\leq \Delta R_v\left(K(G)\right)+4m-2d_v-2\left(n-d_v-1\right)\delta\\
&= 4m+R_v\left(K(G)\right)\left(\Delta+\delta-1\right)-2\delta\left(n-1\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $\forall v\in V(G)$ için

$$R_v\left(K(G)^2-\left(\Delta+\delta-1\right)K(G)\right)\leq 4m-2\delta\left(n-1\right)$$

dir. Lemma 4.14 ten

$$\rho\left(K(G)\right)^2-\left(\Delta+\delta-1\right)\rho\left(K(G)\right)\leq 4m-2\delta\left(n-1\right)$$

olur. Bu ikinci derece eşitsizliğin çözülmesi ile

$$\rho\left(K(G)\right)\leq\frac{\left(\delta+\Delta-1\right)+\sqrt{\left(\delta+\Delta-1\right)^2+4\left(4m-2\delta\left(n-1\right)\right)}}{2}$$

elde edilir. Lemma 4.13 ten

$$\rho(G) \leq \frac{(\delta+\Delta-1)+\sqrt{(\delta+\Delta-1)^2+4\left(4m-2\delta(n-1)\right)}}{2}$$

olup, ispat tamamlanır.

Hatırlatma 4.2. G, $k-$regüler iki parçalı graf ise Teorem 4.17 den $\rho(G)=2k$ dır (Liu ve ark., 2004).

(Zhang, 2004) çalışmasında G_{line} çizgi grafının komşuluk matrisi için keskin bir üst sınır verilmiş ve bu üst sınır kullanılarak grafın Laplacian spektral yarıçapı için bir üst sınır belirlenmiştir. Ayrıca başka bir üst sınır daha verilmiş ve tüm bu üst sınırlara ulaşıldığı durumdaki uç graflar belirlenmiştir.

Lemma 4.15. $W=(w_{ij})\in M_n$ negatif olmayan indirgenmez simetrik bir matris olsun. $R_i(W)$, W matrisinin $i.$ satır toplamı olmak üzere, herbir i için $r_i(W)=\sum_{j=1}^{n} w_{ji}R_j$ ve $r(W)=\max\{r_i(W):1\leq i\leq n\}$ olsun. W matrisinin spektral yarıçapı olan $\lambda(W)$ için

$$\lambda(W)\leq\sqrt{r(W)} \tag{4.41}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.41) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul W matrisinin satır-regüler olmasıdır veya PAP^T matrisi $\begin{pmatrix} 0 & Y \\ Y^T & 0 \end{pmatrix}$ formunda olacak biçimde bir P permütasyon matrisinin var olmasıdır. Burada Y hem satır-regüler hem de sütun-regüler matristir (Cao, 1998).

Teorem 4.18. G basit bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde $\mu(A(G_{line}))$, $A(G_{line})$ matrisinin en büyük öz değeri olmak üzere,

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)\leq \max_{(u,v)\in E(G)}\left\{\sqrt{d_u\left(d_u+m_u-4\right)+d_v\left(d_v+m_v-4\right)+4}\right\} \tag{4.42}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada m_v, v köşesine komşu tüm köşelerin derecelerinin ortalamasıdır. Ayrıca (4.42) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafının regüler iki parçalı, yarı regüler iki parçalı ya da 4 köşeli bir yol olmasıdır (Zhang, 2004).

İspat: $A\left(G_{line}\right)$ komşuluk matrisinin tanımı ve Lemma 4.15 göz önüne alınırsa, ispat kolayca görülür.

G, m kenarlı bağlantılı bir graf ise G_{line} grafı da bağlantılıdır. $A\left(G_{line}\right)+2I_m$ negatif olmayan indirgenmez simetrik bir matristir. $A\left(G_{line}\right)+2I_m$ matrisine Lemma 4.15 uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6. G basit bağlantılı bir graf ve $A\left(G_{line}\right)$ matrisinin en büyük öz değeri $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)$ olsun. Bu durumda;

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)\leq \max_{(u,v)\in E(G)}\left\{\sqrt{d_u\left(d_u+m_u\right)+d_v\left(d_v+m_v\right)}-2\right\} \tag{4.43}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.43) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler ya da yarı-regüler graf olmasıdır (Zhang, 2004).

Teorem 4.19. G basit bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\rho\left(G\right)\leq \max_{(u,v)\in E(G)}\left\{2+\sqrt{d_u\left(d_u+m_u-4\right)+d_v\left(d_v+m_v-4\right)+4}\right\} \tag{4.44}$$

dür. (4.44) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafının regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Zhang, 2004).

İspat : Lemma 4.9 ve Teorem 4.18 den ispat açıktır.

Teorem 4.20. G , n köşeli basit bir graf olsun. Bu takdirde

$$\rho(G) \le \max_{(u,v)\in E(G)} \left\{ \sqrt{d_u\left(d_u + m_u\right) + d_v\left(d_v + m_v\right)} \right\} \tag{4.45}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.45) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Zhang, 2004).

İspat: Lemma 4.9 ve Sonuç 4.6 göz önüne alınırsa, ispat kolayca görülür.

Teorem 4.21. G basit bağlantılı bir graf olsun. Bu takdirde,

$$\rho(G) \le \max\left\{ d_v + \sqrt{d_v m_v} : \ v \in V(G) \right\} \tag{4.46}$$

dir. (4.46) da eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Zhang, 2004).

İspat: $v \in V(G)$ için $\|x\|_2 = 1$ olacak biçimde $\rho(G)$ ye karşılık gelen bir öz vektör $x = \left(x(v)\right)^T$ olsun. $L(G)x = \rho(G)x$ ve $L(G) = D(G) - A(G)$ olduğundan her $u \in V(G)$ için

$$\rho(G)x_u = d_u x_u - \sum_{v\in V(G)} a_{uv} x_v = \sum_{(u,v)\in E(G)} \left(x_u - x_v\right)$$

dir. Cauchy–Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\rho(G)^2 x_u^{\,2} &= \left(\sum_{(u,v)\in E(G)} 1^2\right)\left(\sum_{(u,v)\in E(G)} \left(x_u - x_v\right)^2\right)\\ &= d_u^{\,2} x_u^2 + 2d_u x_u^2 \left(\rho(G) - d_u\right) + d_u \sum_{(u,v)\in E(G)} x_v^2\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V(G)} \rho(G)^2 x_u^2 &\le \sum_{u\in V(G)} \left(2d_u\rho(G) - d_u^{\,2}\right)x_u^2 + \sum_{u\in V(G)} d_u \sum_{(u,v)\in E(G)} x_v^2\\ &= \sum_{u\in V(G)} \left(2d_u\rho(G) - d_u^{\,2}\right)x_u^2 + \sum_{u\in V(G)} d_u m_u x_u^2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{u\in V(G)} \left(\rho(G)^2 - 2d_u\rho(G) + d_u^{\,2} - d_u m_u\right)x_u^2 \le 0$$

dır. Bu durumda

$$\rho(G)^2 - 2d_u\rho(G) + d_u^{\,2} - d_u m_u \le 0$$

olacak biçimde bir $u \in V(G)$ vardır. O halde

$$\rho(G) \le d_u + \sqrt{d_u m_u}$$

eşitsizliği sağlanır ve ispat biter.

Her $u \in V(G)$ için $d_u + \sqrt{d_u + m_u} \le \sqrt{2d_u\left(d_u + m_u\right)}$ olduğundan (4.46) sınırı (4.21) den daima daha iyidir (Zhang, 2004).

Teorem 4.22. G; n köşeli, m kenarlı, köşelerinin maksimum derecesi Δ ve köşelerinin minimum derecesi δ olan bir graf olsun. Bu durumda;

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta-1)^2 + 8\left(\Delta^2 + 2m - (n-1)\delta\right)}}{2} \tag{4.47}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.47) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Li ve Pan, 2004).

İspat: $R_v(B)$, B matrisinin v. satır toplamı olmak üzere; G grafının $D(G)$ derece matrisi ve $A(G)$ komşuluk matrisi için

$$R_v\left(D(G)A(G)\right) = \sum_{u \in V(G)} d_v a_{vu} = d_v^2 = R_v\left(D(G)^2\right),$$

$$R_v\left(A(G)D(G)\right) = \sum_{u \in V(G)} a_{vu} d_u = \sum_{u \sim v} d_u \ ,$$

$$R_v\left(A(G)^2\right) = \sum_{(u,w) \in V(G)} a_{vu} = \sum_{u \sim v} \sum_{w \in V(G)} a_{uw} = \sum_{u \sim v} d_u = R_v\left(A(G)D(G)\right)$$

eşitlikleri sağlanır. $K(G) = D(G) + A(G)$ olduğundan

$$K(G)^2 = D(G)^2 + D(G)A(G) + A(G)D(G) + A(G)^2$$

dir. Bu durumda

$$R_v\left(K(G)^2\right) = 2d_v^2 + 2\sum_{u \sim v} d_u = 2d_v^2 + 4m - 2d_v - 2\sum_{\substack{(u,v) \notin E(G) \\ u \neq v}} d_u \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}&\leq 2\Delta^2+4m-2d_v-2\left(n-d_v-1\right)\delta\\&=2\Delta^2+4m+2\left(\delta-1\right)d_v-2\left(n-1\right)\delta\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda her $v\in V$ için

$$R_v\left(K(G)^2-\left(\delta-1\right)K(G)\right)\leq 2\Delta^2+4m-2\left(n-1\right)\delta$$

dır. Lemma 4.14 ten

$$\rho^2(K)-\left(\delta-1\right)\rho(K)\leq 2\Delta^2+4m-2\left(n-1\right)\delta$$

elde edilir. Lemma 4.13 ün kullanılmasıyla ispat biter.

Teorem 4.23. G; n köşeli, m kenarlı, köşelerinin maksimum derecesi Δ ve köşelerinin minimum derecesi δ olan bir graf ise

$$\rho\left(G\right)\leq\frac{\Delta+\delta-1+\sqrt{\left(\Delta+\delta-1\right)^2+8\left(2m-\left(n-1\right)\delta\right)}}{2}\tag{4.49}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.49) da eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Li ve Pan, 2004).

İspat: (4.48) den

$$\begin{aligned}R_v\left(K\left(G\right)^2\right)&=2d_v^2+4m-2d_v-2\sum_{\substack{(u,v)\notin E(G)\\u\neq v}}d_u\\&\leq 2d_v\Delta+4m-2d_v-2\left(n-d_v-1\right)\delta\\&=2\left(\Delta-\delta-1\right)d_v+4m-2\left(n-1\right)\delta\end{aligned}\tag{4.50}$$

dır. Buradan her $v \in V$ için $R_v\left(K(G)^2 - (\Delta - \delta - 1)K(G)\right) \leq 4m - 2(n-1)\delta$ dır. Böylece Lemma 4.14 ten $\rho^2(K) - (\Delta - \delta - 1)\rho(K) \leq 4m - 2(n-1)\delta$ olup, Lemma 4.13 göz önüne alınırsa ispat görülür.

Teorem 4.24. $G = \left(V(G), E(G)\right)$, n köşeli bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \leq \max\left\{\frac{d_i + \sqrt{d_i^2 + 8d_i m_i'}}{2} \ : v_i \in V(G)\right\} \tag{4.51}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.51) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır, burada

$$m_i' = \frac{\sum_j \left\{d_j - \left|N_i \cap N_j\right| : \ v_i v_j \in E(G)\right\}}{d_i}$$

dır (Guo, 2005).

İspat : $L(G)$ Laplacian matrisinin $\rho(G)$ Laplacian spektral yarıçapına karşılık gelen öz vektör $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ olsun. X öz vektörünün en büyük öz bileşeni x_i ve tüm k lar için diğer öz bileşenleri $\left|x_k\right| \leq x_i$ olduğunu kabul edelim.

$$L(G)X = \left(D(G) - A(G)\right)X = \rho(G)X$$

olduğundan

$$\left(\rho(G) - d_i\right)x_i = -\sum_{v_i v_j \in E} x_j \tag{4.52}$$

ve $\left(D(G)-A(G)\right)^2 X = \rho^2(G)X$ dir.

$$\left(D(G)-A(G)\right)^2 X = D(G)^2 X - D(G)A(G)X - A(G)D(G)X + A(G)^2 X$$

eşitliğinden

$$\rho^2(G)x_i = d_i^2 x_i - d_i \sum_{v_iv_j\in E} x_j - \sum_{v_iv_j\in E} x_j d_j + \sum_{v_iv_j\in E}\sum_{v_kv_j\in E} x_k \tag{4.53}$$

dir. (4.52) eşitliği (4.53) te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\rho^2(G)x_i &= d_i^2 x_i - d_i\left(\rho(G)-d_i\right)x_i - \sum_{v_iv_j\in E} d_j x_j + \sum_{v_iv_j\in E}\sum_{v_kv_j\in E} x_k \\
&= d_i\rho(G)x_i - \sum_{v_iv_j\in E} d_j x_j + \sum_{v_iv_j\in E}\sum_{\substack{v_kv_j\in E\\ v_kv_i\in E}} x_k - \sum_{v_iv_j\in E}\sum_{\substack{v_kv_j\in E\\ v_kv_i\in E}} x_k + \sum_{v_iv_j\in E}\sum_{v_kv_j\in E} x_k \\
&= d_i\rho(G)x_i - \sum_{v_iv_j\in E}\left(d_j - \left|N_i\cap N_j\right|\right)x_j + \sum_{v_iv_j\in E}\sum_{\substack{v_kv_j\in E\\ v_kv_i\notin E}} x_k \\
&\le d_i\rho(G)x_i + 2\sum_{v_iv_j\in E}\left(d_j - \left|N_i\cap N_j\right|\right)x_i \\
&= d_i\rho(G)x_i + 2d_i m_i' x_i
\end{aligned} \tag{4.54}$$

elde edilir. Buradan

$$\rho^2(G) - d_i\rho(G) - 2d_i m_i' \le 0 \tag{4.55}$$

dır. (4.55) eşitsizliğinin çözülmesi ile

$$\rho(G) \le \frac{d_i + \sqrt{d_i^2 + 8d_i m_i'}}{2}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

(Shu, 2002) çalışmasında (4.56) eşitsizliği Teorem 4.13 de bağlantılı graflar için ispatlanmıştır. (Zhou ve Cho, 2005) çalışmasında ise grafın bağlantılı olma koşulu kaldırılmıştır ve üst sınıra ulaşıldığı durumdaki uç graf belirlenmiştir.

Teorem 4.25. G, $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$ derece dizisine sahip bir graf olmak üzere

$$\rho(G) \leq d_n + \frac{1}{2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i (d_i - d_n) + \left(d_n - \frac{1}{2}\right)^2} \tag{4.56}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.56) da eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin en az bir bileşeni iki parçalı olan regüler graf ya da star graf ve K_2 graflarının ayrık bileşimi olmasıdır (Zhou ve Cho, 2002).

İspat: Öncelikle $d_n \geq 2$ kabul edelim. Eğer G grafı bağlantılı ise Teorem 4.13 ün ispatından (4.56) eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır.

G nin bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda G nin $\rho(G) = \rho(G_1)$ olacak şekilde G_1 bileşeni vardır. G_1 bileşeninin n_1 köşeli, m_1 kenarlı ve δ_1 minimal köşe dereceli G_{line} çizgi grafının n' köşeli, m' kenarlı ve δ' minimal köşe dereceli ve $(G_1)_{line}$ çizgi grafının ise n_1' köşeli, m_1' kenarlı ve δ_1' minimal köşe dereceli olduğunu kabul edelim. Dikkat edilirse;

$$n' = m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i \quad , \quad 2m' = \sum_{i=1}^{n} d_i (d_i - 1) \quad , \quad \delta' \geq 2d_n - 2$$

dir. $\delta_1' \geq \delta' \geq 2d_n - 2$ ve $2m' - n'\delta' \geq 2m_1' - n_1'\delta'$ olduğu göz önüne alınıp, Lemma 4.9 ve Lemma 4.10 kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\rho(G) = \rho(G_1) &\leq 2 + \mu\left(A\left(G_{line}\right)\right) \\
&\leq 2 + \frac{\delta_1' - 1}{2} + \sqrt{2m_1' - n_1'\delta_1' + \frac{\left(\delta_1' + 1\right)^2}{4}} \\
&\leq 2 + \frac{\delta' - 1}{2} + \sqrt{2m_1' - n_1'\delta' + \frac{\left(\delta' + 1\right)^2}{4}} \\
&\leq 2 + \frac{\delta' - 1}{2} + \sqrt{2m' - n'\delta' + \frac{\left(\delta' + 1\right)^2}{4}} \\
&\leq d_n + \frac{1}{2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i\left(d_i - d_n\right) + \left(d_n - \frac{1}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 4.16. G ; $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ derece dizisine sahip n köşeli, m kenarlı, basit bağlantılı bir graf ve $\mu(G)$, G grafının spektral yarıçapı olmak üzere;

$$\mu(G) \leq \sqrt{2e - (n-1)d_n + (d_n - 1)d_1}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler graf ya da star graf olmasıdır (Das, 2004).

Lemma 4.17. G ; $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ derece dizisine sahip n köşeli, e kenarlı, basit bir graf olsun. Bu durumda

$$d_i + m_i \leq \frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}d_1 + \left(d_1 - d_n\right)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right)$$

eşitsizliği her izole olmayan v_i köşesi için sağlanır (Das, 2004).

Lemma 4.18. G, n köşeli basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \leq \max\{d_i + m_i : 1 \leq i \leq \mathrm{n}\}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Pan, 2002).

Teorem 4.26. G basit bağlantılı ve $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ derece dizisine sahip bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \leq \begin{cases} 2 + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1) - \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i - 1\right)(2d_n - 2) + (2d_n - 3)(2d_1 - 2)}\ , & d_n \geq 2 \text{ ise} \\ 2 + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1) - d_1 + 1}\ , & d_n = 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.57}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.57) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da star graf olmasıdır (Das, 2005).

İspat: G ve G_{line} grafları bağlantılı olduğundan Lemma 4.16 dan

$$\mu(A(G_{line})) \leq \sqrt{2e' - (n' - d_1' - 1)d_{n'}' - d_1'} \tag{4.58}$$

dir. Burada $n' = e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$, $2e' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)$ $d_1 + d_n - 2 \leq d_1' \leq 2d_1 - 2$ ve $d_{n'}' \geq 2d_n - 2$ dir. Bu ifadeler (4.58) de yerine yazılırsa;

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i\left(d_i-1\right)-\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i - d_1' - 1\right)d_{n'}' - d_1'}$$
$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i\left(d_i-1\right)-\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i - d_1' - 1\right)\left(2d_n-2\right) - d_1'} \tag{4.59}$$

elde edilir ve $d_{n'}' \ge 2d_n - 2$ olduğundan

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i\left(d_i-1\right)-\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i - 1\right)\left(2d_n-2\right)+\left(2d_n-3\right)d_1'} \tag{4.60}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.60) da $d_1 + d_n - 2 \le d_1' \le 2d_1 - 2$ eşitsizliği kullanılırsa;

$$\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right) \le \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i\left(d_i-1\right)-\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i - 1\right)\left(2d_n-2\right)+\left(2d_n-3\right)\left(2d_1-2\right)}\ , & d_n \ge 2 \text{ ise} \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i\left(d_i-1\right)-d_1+1}\ , & d_n = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Lemma 4.9 kullanılırsa, ispat biter.

Teorem 4.27. G, $d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n$ derece dizisine sahip, n köşeli, e kenarlı basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda;

$$\rho(G) \le \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 + 4\left[\frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}d_1 + \left(d_1 - d_n\right)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right)\right]m_{\max}}}{2} \tag{4.61}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada m_i; v_i köşesine komşu köşelerin derecelerinin ortalaması olmak üzere m_i lerin maksimumu $m_{\max}$ dur. (4.61) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Das, 2005).

İspat: Eğer G grafı P_2 yolu ise (4.61) de eşitlik sağlanır. Şimdi $n>2$ için (4.61) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. $K(G)$, G grafının işaretsiz Laplacian matrisi olmak üzere, $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $D(G)^{-1}K(G)D(G)$ matrisinin $\lambda(G)$ öz değerine karşılık gelen bir öz vektör olsun. Bir x_i öz bileşeninin 1 e eşit ve diğer öz bileşenlerinin ise 1 den küçük veya eşit olduğunu yani $x_i=1$ ve tüm k lar için $0<x_k\leq 1$ olduğunu kabul edelim. $D(G)^{-1}K(G)D(G)$ matrisinin (i,j). girdisi

$$\begin{cases} d_i, & v_i=v_j \text{ ise} \\ \dfrac{d_j}{d_i}, & v_iv_j\in E(G) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\left\{D(G)^{-1}K(G)D(G)\right\}X=\lambda(G)X \tag{4.62}$$

dir. (4.62) nin i. denkleminden

$$\lambda(G)x_i=d_ix_i+\sum_j\left\{\frac{d_jx_j}{d_i}:v_iv_j\in E(G)\right\}$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\lambda(G)=d_i+\sum_j\left\{\frac{d_jx_j}{d_i}:v_iv_j\in E(G)\right\} \tag{4.63}$$

dir. (4.62) nin j. denkleminden

$$\lambda(G)x_j = d_j x_j + \sum_k \left\{ \frac{d_k x_k}{d_j} : v_j v_k \in E(G) \right\} \tag{4.64}$$

dir. (4.63) ün her iki tarafı $\lambda(G)$ ile çarpılıp, $\lambda(G)x_j$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda^2(G) &= d_i\lambda(G) + \sum_j \left\{ \frac{d_j}{d_i}\left[d_j x_j + \sum_k \left\{ \frac{d_k x_k}{d_j} : v_j v_k \in E(G) \right\} \right] : \; v_i v_j \in E(G) \right\} \\
&= d_i\lambda(G) + \sum_j \left\{ \frac{d_j^2 x_j}{d_i} : v_i v_j \in E(G) \right\} \\
&\quad + \sum_j \left\{ \frac{1}{d_i} \sum_k \left\{ d_k x_k : v_j v_k \in E(G) \right\} : \; v_i v_j \in E(G) \right\} \\
&\le d_i\lambda(G) + \sum_j \left\{ \frac{d_j^2}{d_i} : v_i v_j \in E(G) \right\} + \sum_j \left\{ \frac{d_j m_j}{d_i} : v_i v_j \in E(G) \right\} \\
&= d_i\lambda(G) + \sum_j \left\{ \frac{d_j\left(d_j + m_j\right)}{d_i} : v_i v_j \in E(G) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.17 deki eşitsizlik kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\lambda^2(G) &\le d_i\lambda(G) + \left[\frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}d_1 + \left(d_1 - d_n\right)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right) \right] m_i \\
&\le d_i\lambda(G) + \left[\frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}d_1 + \left(d_1 - d_n\right)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right) \right] m_{\max}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\lambda(G) \le \frac{d_1 + \sqrt{d_1^2 + 4\left[\frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}d_1 + \left(d_1 - d_n\right)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right) \right] m_{\max}}}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 4.13 gereği $\rho(G) \leq \lambda(K(G))$ dir. $\lambda(K(G)) = \lambda(G)$ olduğundan ispat biter.

Teorem 4.28. G ; n köşeli, e kenarlı basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \leq \frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} d_1 + (d_1 - d_n)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right) \tag{4.65}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.65) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin star graf ya da regüler iki parçalı graf olmasıdır (Das, 2005).

İspat: Lemma 4.17 ve Lemma 4.18 den

$$\begin{aligned} \rho(G) &\leq \max\{d_i + m_i : \ 1 \leq i \leq \mathrm{n}\} \\ &\leq \max\left\{\frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} d_1 + (d_1 - d_n)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right)\right\} \\ &= \frac{2e}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} d_1 + (d_1 - d_n)\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 4.19. $G = (V(G), E(G))$, en az bir kenarı olan bir graf olsun. G grafının köşelerinin maksimum derecesi Δ olmak üzere;

$$\rho(G) \geq \Delta + 1$$

dir. Ayrıca G grafı bağlantılı ise eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\Delta = |V(G)| - 1$ olmasıdır (Grone ve Merris, 1994).

Lemma 4.20. $\mathcal{F}=\left\{(x_1,x_2,...,x_n):\ x_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$ olsun. Bu durumda

$$1-\frac{1}{\omega(G)}=\max\langle x, Ax\rangle$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\omega(G)$, G grafının klik sayısı olmak üzere, maksimum bütün $x\in\mathcal{F}$ ler üzerinden alınmaktadır (Motzkin, 1965).

(Lu ve ark., 2007) çalışmasında grafın klik sayısı için grafın maksimum köşe derecesi, kenar sayısı ve Laplacian spektral yarıçapına bağlı bir alt sınır bulunmuştur ki bu sınırın düzenlemesi ile grafın Laplacian spektral yarıçapı için aşağıdaki üst sınır elde edilir.

Teorem 4.29. $G=(V(G),E(G))$; n köşeli, m kenarlı ve köşelerinin maksimum derecesi Δ olan bir graf ise

$$\rho(G)\leq\Delta+\sqrt{2m\left(1-\frac{1}{\omega(G)}\right)} \tag{4.66}$$

eşitsizliği sağlanır (Lu ve ark., 2007).

İspat: $\lambda(K)$, G grafının işaretsiz Laplacian matrisi $K=K(G)$ matrisinin en büyük öz değeri olmak üzere $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\lambda(K)$ öz değerine karşılık gelen normalize edilmiş öz vektör olsun. Bu durumda

$$\lambda(K)=\sum_{i\sim j}(y_i+y_j)^2=\sum_i d_i y_i^2+\sum_{i\sim j}2y_iy_j$$

$$\le \Delta\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i\sim j} 2y_i y_j = \Delta + \sum_{i\sim j} 2y_i y_j$$

eşitsizliği sağlanır. Lemma 4.13 ve Lemma 4.19 dan

$$\lambda(K) - \Delta \ge \rho(G) - \Delta \ge 1$$

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(\rho(G) - \Delta\right)^2 \le \left(\sum_{i\sim j} 2y_i y_j\right)^2 \le 2m\left(2\sum_{i\sim j} 2y_i^2 y_j^2\right)$$

dir. $\left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2\right) \ge 0$ ve $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1$ olduğundan Lemma 4.20 den

$$2\sum_{i\sim j} y_i^2 y_j^2 \le 1 - \frac{1}{\omega(G)}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\left(\rho(G) - \Delta\right)^2}{2m} \le 1 - \frac{1}{\omega(G)}$$

olup,

$$\omega(G) \ge \frac{2m}{2m - \left(\rho(G) - \Delta\right)^2}$$

dir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\rho(G) \le \Delta + \sqrt{2m\left(1-\frac{1}{\omega}\right)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Brauer Teoremi'nin sadeleştirilmiş şekli (Li, 1999) çalışmasında aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

Lemma 4.21. $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n$, bir kompleks matris ve her $i=1,2,3,\ldots,n$ için $R_i' = \sum_{i\neq j}\left|a_{ij}\right|$ ve $E(A)=\left\{(i,j):\ a_{ij}\neq 0,\ 1\le i\neq j\le n\right\}$ olsun. Bu durumda A indirgenmez bir matris ise A matrisinin bütün öz değerleri $(i,j)\in E(A)$ için

$$Z_{ij}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{ii}\right|\left|z-a_{jj}\right|\le R_i' R_j'\right\}$$

ovallerinin birleşimi tarafından belirlenen bölge içinde bulunur (Li, 1999).

Teorem 4.30. G, basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G)\le \max\left\{\frac{d_u+d_v+\sqrt{\left(d_u-d_v\right)^2+4\sqrt{d_u m_u}\sqrt{d_v m_v}}}{2}:\ uv\in E(G)\right\} \tag{4.67}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.67) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Wang, 2007).

İspat: $D(G)=D$ derece matrisinin tanımından $D^{1/2}=diag\left(\sqrt{d_u}:u\in V(G)\right)$ dir. G grafının işaretsiz Laplacian matrisi $K(G)$ olmak üzere, $M=D^{-1/2}KD^{1/2}$ benzer matrisini ele alalım. G basit bağlantılı bir graf olduğundan M indirgenmez ve negatif olmayan bir matristir. M matrisinin (u,v). girdisi

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{d_v}}{\sqrt{d_u}}, & v \sim u \text{ ise} \\ d_u \ , & u = v \text{ ise} \\ 0 \ , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $R_u(M)$, M matrisinin u. satır toplamı ve $R'_u(M) = R_u(M) - d_u$ ise M matrisinin silinmiş mutlak satır toplamıdır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$R'_u(M)^2 = \left(\sum_{u \sim v} \frac{\sqrt{d_v}}{\sqrt{d_u}} \right)^2 \leq \sum_{u \sim v} 1^2 . \sum_{u \sim v} \frac{d_v}{d_u} = \sum_{u \sim v} d_v = d_u m_u \tag{4.68}$$

dur. $\lambda(M)$, M matrisinin en büyük öz değeri olsun. M indirgenmez ve negatif olmayan bir matris olduğundan Lemma 4.21 den $\lambda(M)$ öz değeri Z_{uv} oval bölgesinde kapsanacak şekilde az bir $uv \in E(G)$ kenarı vardır ve (4.68) den

$$\left|\lambda(M) - d_u\right| \left|\lambda(M) - d_v\right| \leq R'_u(M) R'_v(M) \leq \sqrt{d_u m_u} \sqrt{d_v m_v}$$

dir. Lemma 4.13 ve Lemma 4.19 dan $\lambda(K(G)) \geq \rho(G) \geq \Delta + 1$ dir. Böylece $\lambda(M) = \lambda(K) \geq \max\{d_u : u \in V(G)\} + 1 > \max\{d_u, d_v\}$ dir. Bu durumda önceki eşitsizlik çözülürse;

$$\lambda(M) \le \frac{d_u + d_v + \sqrt{(d_u - d_v)^2 + 4\sqrt{d_u m_u}\sqrt{d_v m_v}}}{2}$$

elde edilir. Lemma 4.13 ten $\rho(G) \le \lambda(K) = \lambda(M)$ olduğundan (4.67) eşitsizliği sağlanır.

(Wang, 2007) çalışmasında köşe derecesi ve köşeye komşu derecelerin ortalamasına bağlı iki üst sınır belirlenmiştir. Ayrıca şimdiye kadar elde edilen üst sınırlardan farklı olarak kenar derecelerinin maksimumu ve minimumuna bağlı olan bir üst sınır daha verilmiştir.

Teorem 4.31. G basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \le 2 + \max\left\{ \sqrt{\frac{(d_u + d_v - 2)(d_u^2 m_u + d_v^2 m_v - 2d_u d_v)}{d_u d_v}} \; : \; uv \in E(G) \right\} \quad (4.69)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.69) da eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf, yarı-regüler iki parçalı graf ya da 4 köşeli bir yol olmasıdır (Wang, 2007).

İspat: $U = diag(d_u d_v : uv \in V(G_{line}))$ ve $N = U^{-1/2} A(G_{line}) U^{1/2}$ olsun. Burada $uv = (u,v) \in V(G_{line}) = E(G)$, G_{line} grafının bir köşesi ya da G grafının bir kenarıdır. $A(G_{line})$, G_{line} grafının komşuluk matrisi olmak üzere, N matrisinin (uv, pq). girdisi

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{d_p d_q}}{\sqrt{d_u d_v}}, & pq \approx uv \text{ ise} \\ 0 & \text{,diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. G basit bağlantılı bir graf olduğundan N indirgenmez ve negatif olmayan bir matristir. N matrisinin uv. satır toplamı

$$\begin{aligned} R_{uv}^2(N) &= \left(\sum_{pq \approx uv} \frac{\sqrt{d_p d_q}}{\sqrt{d_u d_v}} \right)^2 \\ &\le (d_u + d_v - 2). \sum_{pq \approx uv} \frac{\sqrt{d_p d_q}}{\sqrt{d_u d_v}} \\ &= \frac{d_u + d_v - 2}{d_u d_v}.\left(\sum_{q \sim u} d_u d_q + \sum_{p \sim v} d_p d_v - 2 d_u d_v \right) \\ &= \frac{d_u + d_v - 2}{d_u d_v}.\left(d_u^2 m_u + d_v^2 m_v - 2 d_u d_v \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. Teorem 2.3.4 ve Lemma 4.9 dan

$$\rho(G) \le 2 + \mu(A(G_{line})) = 2 + \mu(N) \le 2 + \max\left\{ R_{uv}(N) : uv \in V(G_{line}) \right\}$$

elde edilir ve ispat biter.

Lemma 4.22. G, basit bağlantılı bir graf olsun. O halde

$$\sum_{(w,v) \in E(G)} (d_w + d_v) = \sum_{u \in V(G)} d_u^2$$

dir (Wang, 2007)

Teorem 4.32. G, $n > 2$ olmak üzere; n köşeli, m kenarlı ve basit bağlantılı bir graf olsun. O halde

$$\rho(G) \le 2 + \sqrt{\sum_{u \in V(G)} d_u^2 - 2m - (m-1) r_0 + (r_0 - 1) r^*} \tag{4.70}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $r_{uv} = d_u + d_v - 2$, uv kenarının derecesi olmak üzere, $r_0 = \min\{r_{uv} : uv \in E(G)\}$ ve $r^* = \max\{r_{uv} : uv \in E(G)\}$ ise sırasıyla minimum ve maksimum kenar dereceleridir. (4.70) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafının regüler iki parçalı, yarı-regüler iki parçalı ya da 4 köşeli bir yol graf olmasıdır (Wang, 2007).

İspat: $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)$, $A\left(G_{line}\right)$ matrisinin en büyük öz değeri ve bu öz değere karşılık gelen normu 1 olan öz vektör $x = \left(x_{uv},\ uv \in V\left(G_{line}\right)\right)^T$ olsun. $V\left(G_{line}\right) = E(G)$ olduğundan $A\left(G_{line}\right)x = \mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)x$ eşitliği sağlanır. Her $uv \in V\left(G_{line}\right)$ için $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)x_{uv} = \sum\limits_{pq \approx uv} x_{pq}$ dur. Burada $pq \approx uv$, pq ve uv nin komşu kenarlar olduğunu gösterir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\mu^2\left(A\left(G_{line}\right)\right)x_{uv}^2 \le \left(\sum_{pq \approx uv} 1^2\right)\left(\sum_{pq \approx uv} x_{pq}^2\right) = r_{uv} . \sum_{pq \approx uv} x_{pq}^2$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \mu^2\left(A\left(G_{line}\right)\right) &= \sum_{uv \in V\left(G_{line}\right)} \mu^2\left(A\left(G_{line}\right)\right)x_{uv}^2 \\ &\le \sum_{uv \in V\left(G_{line}\right)} r_{uv} \sum_{pq \approx uv} x_{pq}^2 \end{aligned} \tag{4.71}$$

dir. İspatın kalan kısmında; kenarlar üzerinden alınan toplamlardaki tüm pq ve uv kenarları farklıdır ve $pq \neq uv$ gösterimi ile pq ve uv kenarlarının komşu olmadığı kastedilmektedir. $\sum\limits_{uv \in V\left(G_{line}\right)} x_{uv}^2 = 1$ olduğu göz önüne alınırsa, Lemma 4.22 ve (4.71) den

$$
\begin{aligned}
\mu^2\left(A\left(G_{line}\right)\right) &\le \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}\left(1-\sum_{pq\neq uv} x_{pq}^2\right) \\
&= \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv} - \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}\sum_{pq\neq uv} x_{pq}^2 \\
&= \sum_{u\in V(G)} d_u^2 - 2m - \left(\sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}x_{uv}^2 + \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}\sum_{pq\neq uv} x_{pq}^2\right) \\
&\le \sum_{u\in V(G)} d_u^2 - 2m - \left(\sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}x_{uv}^2 + \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_0\sum_{pq\neq uv} x_{pq}^2\right) \\
&= \sum_{u\in V(G)} d_u^2 - 2m - \left(\sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}x_{uv}^2 + \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} \left(\sum_{pq\neq uv} r_0\right) x_{uv}^2\right) \\
&= \sum_{u\in V(G)} d_u^2 - 2m - \left(\sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}x_{uv}^2 + \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} \left(m-r_{uv}-1\right) r_0 x_{uv}^2\right) \\
&= \sum_{u\in V(G)} d_u^2 - 2m - \left(\left(m-1\right)r_0 + \sum_{uv\in V\left(G_{line}\right)} r_{uv}\left(1-r_0\right)x_{uv}^2\right) \\
&\le \sum_{u\in V(G)} d_u^2 - 2m - \left(m-1\right)r_0 + \left(r_0-1\right)r^*
\end{aligned}
$$

dır. Lemma 4.9 un kullanılmasıyla (4.70) eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür.

Teorem 4.33. $G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$ bir graf olsun. Bu durumda

$$
\rho\left(G\right)\le\sqrt{2}\max_{v\in V(G)}\left(d_v^2+\sum_{(u,v)\in E(G)} d_u\right)^{1/2} \tag{4.72}
$$

eşitsizliği sağlanır. G bağlantılı ise (4.72) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ve tüm $v\in V\left(G\right)$ için $d_v^2+\sum_{(u,v)\in E(G)} d_u$ değerinin aynı olmasıdır (Shi, 2007).

İspat: $R_v(B)$, B matrisinin v. satır toplamı ve $A(G)$, G grafının komşuluk matrisi olsun. $\forall v \in V(G)$ için $R_v(A(G)) = d_v$ dir. $R_v\left(A(G)^2\right)$ aslında G grafındaki 2 uzunluğunda ve bir ucu v de olan yürümelerin sayısı olduğundan

$$R_v\left(A(G)^2\right) = \sum_{uv \in E(G)} d_u$$

dur. Ayrıca

$$R_v(K(G)) = 2d_v \quad \text{ve} \quad R_v(A(G)D(G)) = R_v\left(A(G)^2\right) = \sum_{(u,v)\in E(G)} d_u$$

olduğundan

$$\begin{aligned} R_v\left(K(G)^2\right) &= R_v\left(D(G)K(G) + A(G)D(G) + A(G)^2\right) \\ &= d_v R_v(K(G)) + 2\sum_{(u,v)\in E(G)} d_u = 2d_v^2 + \sum_{(u,v)\in E(G)} d_u \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Lemma 4.13 ve Teorem 2.3.4 ten

$$\rho(G) \le \lambda(K) \le \sqrt{2}\max_{v\in V(G)}\left(d_v^2 + \sum_{(u,v)\in E(G)} d_u\right)^{1/2}$$

elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 4.7. G ; n köşeli, m kenarlı ve izole köşe içermeyen bir graf olsun. Burada G grafının maksimum ve minimum köşe dereceleri sırasıyla Δ ve δ olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \le \left[2\Delta^2 + 4m - 2\delta(n-1) + 2\Delta(\delta-1)\right]^{1/2} \tag{4.73}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer G grafı bağlantılı ise (4.73) eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Shi, 2007).

İspat: Teorem 4.33 ten

$$\begin{aligned}
\rho(G) &\leq \sqrt{2}\max_{v\in V(G)}\left(d_v^2+\sum_{(u,v)\in E(G)} d_u\right)^{1/2} \\
&\leq \max_{v\in V(G)}\left[2\Delta^2+2\left(2m-d_v-\sum_{(u,v)\notin E(G)} d_u\right)\right]^{1/2} \\
&\leq \max_{v\in V(G)}\left[2\Delta^2+4m-2d_v-2\left(n-d_v-1\right)\delta\right]^{1/2} \\
&= \max_{v\in V(G)}\left[2\Delta^2+4m-2\left(\delta-1\right)d_v-2\delta\left(n-1\right)\right]^{1/2} \\
&\leq \left[2\Delta^2+4m-2\delta\left(n-1\right)+2\Delta\left(\delta-1\right)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.34. $G=\left(V(G),E(G)\right)$, n köşeli bağlantılı bir graf ve $b_i\in\mathbb{R}^+\left(1\leq i\leq n\right)$ olsun. Bu durumda

$$\textbf{(1)}\ \ \rho(G)\leq \max\left\{d_i+\frac{1}{b_i}\sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} b_j:\ v_i\in V(G)\right\} \tag{4.74}$$

dir. (4.74) te eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin iki parçalı bir graf ve $1\leq i\leq n$ için $d_i+\frac{1}{b_i}\sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} b_j$ ifadesinin bir sabit olmasıdır.

$$\textbf{(2)}\ \ \rho(G)\leq \max\left\{\sqrt{\sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} \tilde{b}_j}:\ v_i\in V(G)\right\} \tag{4.75}$$

dir. Burada $\tilde{b}_i = \frac{1}{b_i^2} \sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} b_j^2$ dir ve (4.75) te eşitlik sağlanırsa; G iki parçalı bir graftır ve $1 \le i \le n$ için $d_i + \sqrt{\sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} \tilde{b}_j}$ ifadesi bir sabittir.

$$\textbf{(3)}\ \ \rho(G) \le \max\left\{ \frac{d_i + d_j + \sqrt{\left(d_i - d_j\right)^2 + 4b_i'b_j'}}{2} :\ \left(v_i, v_j\right) \in E(G) \right\} \qquad (4.76)$$

dir, burada $1 \le i \le n$ için $b_i' = \frac{1}{b_i} \sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} b_j$ dir (Guo, 2008).

İspat (1): $B = diag\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right) \in M_n$ bir diyagonal matris olsun. $B^{-1}\left(D(G) + A(G)\right)B$ matrisini göz önüne alalım. $R_i(C)$, C matrisinin *i*. satır toplamı olmak üzere,

$$R_i\left(B^{-1}\left(D(G) + A(G)\right)B\right) = d_i + \frac{1}{b_i} \sum_{(v_i,v_j)\in E(G)} b_j$$

dir. λ, $B^{-1}\left(D(G) + A(G)\right)B$ matrisinin en büyük öz değeri olmak üzere, Lemma 4.13 ten

$$\rho(G) \le \lambda\left(K(G)\right) = \lambda\left(D(G) + A(G)\right) = \lambda\left(B^{-1}\left(D(G) + A(G)\right)B\right)$$

olur. Lemma 4.13 ve Teorem 2.3.4 den (4.74) eşitsizliği ispatlanmış olur.

İspat (2): Perron-Frobenius Teoremi'nden $B^{-1}\left(D(G) + A(G)\right)B$ matrisinin λ en büyük öz değerine karşılık gelen bir pozitif X öz vektörü vardır. X öz vektörünün bir x_i öz bileşeninin 1 e eşit ve diğer öz bileşenlerinin ise 1 den küçük veya eşit olduğunu yani $x_i = 1$ ve $1 \le k \le n$ olacak biçimde tüm k lar için $x_k \le 1$ olduğunu kabul edelim. $x_j = \max\{x_k : v_i v_k \in E(G)\}$ olsun.

$$\left(B^{-1}\left(D(G)+A(G)\right)B\right)X = \lambda X \tag{4.77}$$

denkleminden ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left[(\lambda - d_k)x_k\right]^2 = \left(\sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} \frac{b_h}{b_k} x_h\right)^2 \le \sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} \frac{b_h^2}{b_k^2} \sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} x_h^2 = \tilde{b}_k \sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} x_h^2$$

dir. Bu durumda toplam alınırsa;

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda - d_k)^2 x_k^2 \le \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k \sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} x_h^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} \tilde{b}_h\right) x_k^2$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(\lambda - d_k)^2 - \sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} \tilde{b}_h\right] x_k^2 \le 0$$

dir. Böylece

$$(\lambda - d_k)^2 - \sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} \tilde{b}_h \le 0$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir k vardır. Buradan $\lambda \le d_k + \sqrt{\sum_{(v_k,v_h)\in E(G)} \tilde{b}_h}$ olup, Lemma 4.13 kullanılırsa, ispat tamamlanır.

İspat (3): (4.77) den

$$\lambda - d_i = \frac{1}{b_i} \sum_{(v_k, v_i) \in E(G)} b_k x_k \le \frac{1}{b_i} \sum_{(v_k, v_i) \in E(G)} b_k x_j \tag{4.78}$$

$$\left(\lambda - d_j\right) x_j = \frac{1}{b_j} \sum_{(v_k, v_j) \in E(G)} b_k x_k \le \frac{1}{b_j} \sum_{(v_k, v_j) \in E(G)} b_k \tag{4.79}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.78) ve (4.79) eşitsizliklerinden

$$\left(\lambda - d_i\right)\left(\lambda - d_j\right) \le \frac{1}{b_i b_j} \sum_{(v_i, v_k) \in E(G)} b_k \sum_{(v_j, v_k) \in E(G)} b_k = b_i' b_j'$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda \le \frac{d_i + d_j + \sqrt{\left(d_i - d_j\right)^2 + 4 b_i' b_j'}}{2}$$

dir. Lemma 4.13 göz önüne alınırsa;

$$\rho\left(G\right) \le \lambda \le \frac{d_i + d_j + \sqrt{\left(d_i - d_j\right)^2 + 4 b_i' b_j'}}{2}$$

olduğu görülür ve ispat biter.

Hatırlatma 4.3. Teorem 4.34 ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

(1) Eşitsizlik (4.76) da $b_i = 1$ alınırsa; (4.3) üst sınırı elde edilir.

(2) Eşitsizlik (4.74) de $b_i = d_i$ alınırsa; (4.7) üst sınırı elde edilir.

(3) Eşitsizlik (4.76) da $b_i = d_i$ alınırsa; (4.35) üst sınırı elde edilir.

(4) Eşitsizlik (4.75) de $b_i = 1$ alınırsa; (4.46) üst sınırı elde edilir.

Teorem 4.35. $G = (V(G), E(G))$ bağlantılı bir graf ise

$$\rho(G) \leq \max\left\{ d_i + \frac{1}{\sqrt{d_i}} \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} \sqrt{d_j} : \ v_i \in V(G) \right\} \tag{4.80}$$

dir. (4.80) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin iki parçalı graf ve $1 \leq i \leq n$ için $d_i + \frac{1}{\sqrt{d_i}} \sum_{(v_i, v_j) \in E(G)} \sqrt{d_j}$ ifadesinin bir sabit olmasıdır (Guo, 2008).

İspat: (4.74) te $b_i = \sqrt{d_i}$ alınırsa, Teorem 2.3.4 den ispat görülür.

$\rho(G) \leq \max_{(v,w) \in E(G)} \{d_v + d_w\}$ ile verilen (4.3) sınırı G_{line} çizgi grafının maksimum derecesine bağlı olarak (4.81) eşitsizliği ile şu şekilde ifade edilebilir:

Lemma 4.23. G bağlantılı bir graf ve G_{line} çizgi grafının derece dizisi $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_m$ olmak üzere

$$\rho(G) \leq 2 + t_1 \tag{4.81}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.81) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G grafının regüler iki parçalı veya yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Anderson ve Morley, 1985).

Lemma 4.24. $G = (V(G), E(G))$, n köşeli bir graf olsun. Bu durumda, G grafının bağımsızlık sayısı $\alpha(G)$ ve G grafının örtü (covering) sayısı $\beta(G)$ olmak üzere,

$$\alpha(G)+\beta(G)=n$$

dir (Bondy ve Murty, 1976).

Lemma 4.25. $G=G_{k,k}$ $(k\geq 1)$ bistar grafı için

$$\rho(G_{k,k})=\frac{k+3+\sqrt{(k+1)^2+4k}}{2}$$

dir (Yu, 2010).

(Yu, 2010) çalışmasında bağlantılı bir G grafının G_{line} çizgi grafının derece dizisinin terimlerine bağlı olarak iki üst sınır verilmiş, ayrıca G_{line} grafının maksimum ve ikinci en büyük köşe derecesine bağlı olarak bir üst sınır daha belirlenmiştir.

Teorem 4.36. G, m kenarlı bağlantılı bir graf ve G_{line} çizgi grafının derece dizisi $t_1\geq t_2\geq\ldots\geq t_m$ olsun. Bu durumda $1\leq i\leq m$ için

$$\rho(G)\leq\frac{t_i+3+\sqrt{(t_i+1)^2+4(i-1)(t_1-t_i)}}{2} \tag{4.82}$$

eşitsizliği sağlanır. $i=1$ durumunda (4.82) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır. $2\leq i\leq m$ iken (4.82) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $i=2$ ve $G\cong G_{k,k}$ olmasıdır (Yu, 2010).

İspat: $i=1$ veya $t_i=t_1$ ise (4.82) eşitsizliği

$$\rho(G) \le 2 + t_1$$

şeklinde olup, Lemma 4.23 gereği yukarıdaki eşitsizlik doğrudur ve eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır. $2 \le i \le m$, $t_1 \ge \ldots \ge t_{i-1} > t_i \ge \ldots \ge t_m$ ve $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)$, $A\left(G_{line}\right)$ matrisinin en büyük öz değeri olsun. $A\left(G_{line}\right) = \left(a_{ij}\right) \in M_{m,m}$ olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} A\left(G_{line}\right)_{11} & A\left(G_{line}\right)_{12} \\ A\left(G_{line}\right)_{21} & A\left(G_{line}\right)_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\left(A\left(G_{line}\right)\right)_{11} \in M_{i-1,i-1}$ ve $\left(A\left(G_{line}\right)\right)_{22} \in M_{m-i+1,m-i+1}$ dir.

$$U = \begin{pmatrix} xI_{i-1} & 0 \\ 0 & I_{m-i+1} \end{pmatrix}$$

olsun. Burada $x > 1$ dir ve $I_{i-1} \in M_{i-1,i-1}$ ve $I_{m-i+1} \in \mathrm{M}_{m-i+1,m-i+1}$ dir. O halde

$$\left(A\left(G_{line}\right)\right)' = U^{-1} A\left(G_{line}\right) U = \begin{pmatrix} \left(A\left(G_{line}\right)\right)_{11} & \frac{1}{x}\left(A\left(G_{line}\right)\right)_{12} \\ x\left(A\left(G_{line}\right)\right)_{21} & \left(A\left(G_{line}\right)\right)_{22} \end{pmatrix}$$

dir ve $A\left(G_{line}\right)$ ile $\left(A\left(G_{line}\right)\right)'$ benzer matrisler olup aynı öz değerlere sahiptir. Özel olarak, $\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right) = \mu\left(\left(A\left(G_{line}\right)\right)'\right)$ dür. $1 \le j \le m$ için $R_j\left(\left(A\left(G_{line}\right)\right)'\right)$, $\left(A\left(G_{line}\right)\right)'$ matrisinin $j.$ satır toplamı olsun. $1 \le l \le i-1$ için

$$R_j\left(\left(A\left(G_{line}\right)\right)'\right)=\sum_{j=1}^{i-1}a_{lj}+\frac{1}{x}\sum_{j=i}^{m}a_{lj}=\frac{1}{x}\sum_{j=1}^{m}a_{lj}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{j=1}^{i-1}a_{lj}$$
$$=\frac{1}{x}t_l+\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{j=1}^{i-1}a_{lj}$$

dir. $i\le k\le m$ için

$$R_k\left(A\left(G_{line}\right)'\right)=x\sum_{j=1}^{i-1}a_{kj}+\sum_{j=i}^{m}a_{kj}=\sum_{j=1}^{m}a_{kj}+\left(x-1\right)\sum_{j=1}^{i-1}a_{kj}$$
$$=t_k+\left(x-1\right)\sum_{j=1}^{i-1}a_{kj}$$

eşitliği sağlanır. $x>1$ ve $t_1\ge\ldots\ge t_{i-1}>t_i\ge\ldots\ge t_m$ olduğundan $1\le l\le i-1$ için

$$R_l\left(\left(A\left(G_{line}\right)\right)'\right)\le\frac{1}{x}t_1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(i-2\right)$$

ve $i\le k\le m$ için

$$R_k\left(\left(A\left(G_{line}\right)\right)'\right)\le t_i+\left(x-1\right)\left(i-1\right)$$

dir. Bu durumda

$$\max_{1\le j\le m}R_j\left(\left(A\left(G_{line}\right)\right)'\right)\le\max\left\{\frac{1}{x}t_1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(i-2\right),\ \ t_i+\left(x-1\right)\left(i-1\right)\right\}$$

olduğu kolayca görülür.

$$\frac{1}{x}t_1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(i-2\right)=t_i+\left(x-1\right)\left(i-1\right)$$

denkleminin çözümü

$$x=\frac{2i-3-t_i+\sqrt{\left(2i-3-t_i\right)^2+4\left(i-1\right)\left(t_1-i+2\right)}}{2\left(i-1\right)}$$

$$=\frac{2i-3-t_i+\sqrt{\left(t_i+1\right)^2+4\left(i-1\right)\left(t_1-t_i\right)}}{2\left(i-1\right)}$$

dir. $i\geq 2$ ve $t_1>t_i$ olduğundan $x>1$ dir. Lemma 4.9 dan

$$\begin{aligned}\rho\left(G\right)&\leq 2+\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)=2+\mu\left(\left(A\left(G_{line}\right)\right)'\right)\\&\leq 2+t_i+\left(x-1\right)\left(i-1\right)\\&=2+\frac{t_i-1+\sqrt{\left(t_i+1\right)^2+4\left(i-1\right)\left(t_1-t_i\right)}}{2}\\&=\frac{t_i+3+\sqrt{\left(t_i+1\right)^2+4\left(i-1\right)\left(t_1-t_i\right)}}{2}\end{aligned}$$

olup, ispat tamamlanır.

Sonuç 4.8. G, bağlantılı bir graf olsun. G_{line} çizgi grafının maksimum derecesi ve ikinci en büyük derecesi sırasıyla $\Delta\left(G_{line}\right)$ ve $\Delta'\left(G_{line}\right)$ olsun. G_{line} grafının $\Delta\left(G_{line}\right)$ maksimum dereceli p köşesi varsa, bu durumda

$$\rho\left(G\right)\leq\frac{\Delta'\left(G_{line}\right)+3+\sqrt{\left(\Delta'\left(G_{line}\right)+1\right)^2+4p\left(\Delta\left(G_{line}\right)-\Delta'\left(G_{line}\right)\right)}}{2}\qquad(4.83)$$

eşitsizliği sağlanır (Yu, 2010).

İspat: Teorem 4.36 da $\Delta(G_{line}) = t_1$ ve $\Delta'(G_{line}) = t_i$ ve $p = i-1$ alınırsa, ispat görülür.

Hatırlatma 4.4. $4p \leq \Delta(G_{line}) + \Delta'(G_{line}) + 2$ iken Sonuç 4.8 den

$$\rho(G) \leq \frac{\Delta(G_{line}) + \Delta'(G_{line})}{2} + 2$$

elde edilir (Yu, 2010).

Sonuç 4.9. G, m kenarlı bağlantılı bir graf ve G_{line} çizgi grafının derece dizisi $t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_m$ olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{t_i + 3 + \sqrt{(t_i + 1)^2 + 4(i-1)(t_1 - t_i)}}{2} \right\} \tag{4.84}$$

eşitsizliği sağlanır (Yu, 2010).

Teorem 4.37. G bir basit graf ve m_u; u köşesine komşu köşelerin derecelerinin ortalaması ve $\forall\, w \in V(G)$ için $t_w = d_w + m_w$ olmak üzere,

$$\rho(G) \leq \max \left\{ \frac{d_u t_u + d_v t_v}{d_u + d_v} - 2\frac{\sum\limits_{w \in N_u \cap N_v} d_w}{d_u + d_v} : (u,v) \in E(G) \right\} \tag{4.85}$$

eşitsizliği sağlanır (Zhu, 2010).

(4.85) sınırının (Li ve Zhang, 1998) çalışmasındaki (4.10) sınırının bir iyileştirmesi olduğu aşikardır.

Hatırlatma 4.5. $G=(V(G),E(G))$ bir graf ve $f:V\times V\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, $\forall(u,v)\in E(G)$ için $f(u,v)>0$ ise f fonksiyonuna "kenarlar üzerinde pozitiftir" denir (Zhu, 2010).

Teorem 4.37 nin ispatını yapmak yerine öncelikle Teorem 4.37 yi gerektiren aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 4.38. $G=(V(G),E(G))$ basit bir graf olsun. $f:V\times V\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ kenarlar üzerinde pozitif olan negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\rho(G)\le\max\left\{|N_u\cap N_v|+\frac{\sum_{w\in N_u\setminus N_v}f(u,w)+\sum_{w\in N_v\setminus N_u}f(v,w)}{f(u,v)}:(u,v)\in E(G)\right\} \tag{4.86}$$

eşitsizliği sağlanır (Zhu, 2010).

İspat: $L(G)$ Laplacian matrisinin $\rho=\rho(G)$ en büyük öz değerine karşılık gelen öz vektör $X=(x_1,\ldots,x_n)$ olsun. Bu durumda;

$$L(G)X=\rho(G)X \tag{4.87}$$

dir. (4.87) nin j. denkleminden

$$\rho(G)x_j=d_{v_j}x_j-\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k=d_{v_j}x_j-\sum_{v_k\in N_j}x_k$$

dır. Burada kolaylık olması bakımından N_{v_j} yerine $N(j)$ yi, $N_i\cap N_j=N_{v_i}\cap N_{v_j}$ yerine de $N(i,j)$ yazalım. Bu durumda

$$\rho(G)x_j = \sum_{v_k \in N_j} \left(x_j - x_k\right) \tag{4.88}$$

dır. $1 \le i, j \le n$ için (4.88) den

$$\begin{aligned}\rho\left(x_j - x_i\right) &= \sum_{v_k \in N(j)} \left(x_j - x_k\right) - \sum_{v_k \in N(i)} \left(x_i - x_k\right) \\ &= \sum_{v_k \in N(i,j)} \left(x_j - x_k\right) + \sum_{v_k \in N(j)\backslash N(i,j)} \left(x_j - x_k\right) - \left(\sum_{v_k \in N(i,j)} \left(x_i - x_k\right) + \sum_{v_k \in N(j)\backslash N(i,j)} \left(x_i - x_k\right) \right)\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\rho\left(x_j - x_i\right) = \sum_{v_k \in N(i,j)} \left(x_j - x_i\right) + \sum_{v_k \in N(j)\backslash N(i,j)} \left(x_j - x_k\right) - \sum_{v_k \in N(i)\backslash N(i,j)} \left(x_i - x_k\right)$$

dır. Başka bir deyişle;

$$\rho\left(x_j - x_i\right) = \left|N(i,j)\right|\left(x_j - x_i\right) + \sum_{v_k \in N(j)\backslash N(i,j)} \left(x_j - x_k\right) - \sum_{v_k \in N(i)\backslash N(i,j)} \left(x_i - x_k\right) \tag{4.89}$$

dır. $f\left(v_j, v_i\right)$ yerine $f\left(i, j\right)$ alalım. $g\left(i, j\right) = \dfrac{x_j - x_i}{f\left(i, j\right)}$ olsun. $\left(v_i, v_j\right) \in E(G)$ için (4.89) dan

$$\left(\rho - \left|N(i,j)\right|\right) f\left(i,j\right) g\left(i,j\right) = \sum_{v_k \in N(j)\backslash N(i,j)} f\left(j,k\right) g\left(j,k\right) - \sum_{v_k \in N(i)\backslash N(i,j)} f\left(i,k\right) g\left(i,k\right)$$

dır. $\left(v'_j, v'_i\right) \in E\left(G\right)$ ve $\left|g\left(j', i'\right)\right| = \max\left\{\left|g\right|\left(j,i\right) : \left(v_j, v_i\right) \in E\left(G\right)\right\}$ olacak şekilde i', j' seçelim. $\left|g\left(j', i'\right)\right| \ne 0$ olduğu açıktır. Aksi takdirde; $\left(v_i, v_j\right) \in E\left(G\right)$ olacak biçimde tüm kenarlar için $x_j - x_i = 0$ dır. Bu durumda (4.88) den $\rho(G) = 0$ olur ki bu mümkün değildir. Buradan

$$\begin{aligned}\left(\rho - \left|N(i',j')\right|\right) f(j',i') &\le \sum_{v_k \in N(j')\setminus N(i',j')} f(j',k)\left|\frac{g(j',k)}{g(j',i')}\right| + \sum_{v_k \in N(i')\setminus N(i',j')} f(i',k)\left|\frac{g(j',k)}{g(j',i')}\right| \\ &\le \sum_{v_k \in N(j')\setminus N(i',j')} f(j',k) + \sum_{v_k \in N(i')\setminus N(i',j')} f(i',k)\end{aligned}$$

dır. Bu durumda

$$\rho \le \left|N(i',j')\right| + \frac{1}{f(j',i')} \sum_{v_k \in N(j')\setminus N(i',j')} f(j',k) + \frac{1}{f(j',i')} \sum_{v_k \in N(i')\setminus N(i',j')} f(i',k)$$

elde edilir ve ispat biter.

Hatırlatma 4.6.

1) (4.86) eşitsizliğinin sağ tarafında $\forall\ u,v \in V(G)$ için $f(u,v) = 1$ alınırsa; eşitsizlik $d_u + d_v - \left|N_u \cap N_v\right|$ ifadesine eşit olur. Böylece Teorem 4.38 gereği (4.24) eşitsizliği elde edilir.

2) (4.86) eşitsizliğinin sağ tarafında $\forall\ u,v \in V(G)$ için $f(u,v) = d_u + d_v$ alınırsa;

$$\begin{aligned}&\sum_{w\in N(u)\setminus N(v)} (d_u + d_v) + \sum_{w\in N(v)\setminus N(u)} (d_v + d_w) \\ &= \sum_{w\in N(u)} (d_u + d_w) + \sum_{w\in N(v)} (d_v + d_w) - \sum_{w\in N(u)\cap N(v)} (d_u + d_v + 2d_w) \\ &= d_u(d_u + m_u) + d_v(d_v + m_v) - \left|N(u)\cap N(v)\right|(d_u + d_v) - 2\sum_{w\in N(u)\cap N(v)} d_w\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.85) ve (4.86) eşitsizliklerinin sağ tarafları çakışır ve Teorem 4.37 ispatlanmış olur.

Teorem 4.39. $G=(V(G),E(G))$ basit bir graf ve m_u; u köşesine komşu köşelerin derecelerinin ortalaması olmak üzere, $T(u,v)=\frac{d_u}{d_v}m_u+\frac{d_v}{d_u}m_v$ olsun. O halde

$$\rho(G)\le \max\left\{2+\sqrt{\left(T(u,v)-2\right)-\left(T(u,w)-2\right)}:(u,v),(u,w)\in E(G),v\neq w\right\} \quad (4.90)$$

eşitsizliği sağlanır (Zhu, 2010).

Teorem 4.39 un ispatını yapmak yerine öncelikle Teorem 4.39 u gerektiren aşağıdaki teorem ifade edilecektir.

Teorem 4.40. $G=(V(G),E(G))$ basit bir graf olsun. $f:V\times V\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ fonksiyonu kenarlar üzerinde pozitif ve $u,v\in V(G)$ için $f(u,v)\neq 0$ iken $\overline{f}(u,v)=\dfrac{\sum\limits_{w\in N(u)\setminus\{v\}} f(u,w)+\sum\limits_{w\in N(v)\setminus\{u\}} f(v,w)}{f(u,v)}$ olsun. $(x,y)\in E(G)$ için $R=\max\left\{\overline{f}(u,v):(u,v)\in E(G)\right\}$ ve $S=\max\left\{\overline{f}(u,v):(u,v)\in E(G)-(x,y)\right\}$ olmak üzere, $\overline{f}(x,y)=R$ olsun. Bu durumda

$$\rho(G)\le 2+\sqrt{RS} \quad (4.91)$$

dir. Ayrıca her $u,v\in V(G)$ için $f(u,v)=f(v,u)$ ise

$$\rho(G)\le \max\left\{2+\sqrt{\overline{f}(u,v)\,\overline{f}(u,w)}:(u,v),(u,w)\in E(G),v\neq w\right\} \quad (4.92)$$

dir (Zhu, 2010).

İspat: $K = K(G)$, G grafının işaretsiz Laplacian matrisi ve $\lambda(K)$, K matrisinin spektral yarıçapı olmak üzere; $\lambda = \lambda(K)$ öz değerine karşılık gelen öz vektör $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun. Bu durumda

$$KX = \lambda X \tag{4.93}$$

dir. $1 \le j \le n$ için $\lambda x_j = d_{v_j} x_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = d_{v_j} x_j + \sum_{v_k \in N_j} x_k$ dir.

Burada kolaylık olması bakımından N_{v_j} yerine $N(j)$ yi, $N_i \cap N_j = N_{v_i} \cap N_{v_j}$ yerine de $N(i,j)$ yazalım. Bu durumda

$$\lambda x_j = \sum_{v_k \in N(j)} (x_j + x_k) \tag{4.94}$$

dır. (4.94) ten

$$\lambda(x_j + x_i) = \sum_{v_k \in N(j) \setminus \{v_i\}} (x_j + x_k) + (x_j + x_i) + \sum_{v_k \in N(i) \setminus \{v_j\}} (x_i + x_k) + (x_i + x_j)$$

elde edilir. Bir başka deyişle;

$$(\lambda - 2)(x_j + x_i) = \sum_{v_k \in N(j) \setminus \{v_i\}} (x_j + x_k) + \sum_{v_k \in N(i) \setminus \{v_j\}} (x_i + x_k)$$

dır. $g(j,i) = \dfrac{x_j + x_i}{f(j,i)}$ olsun. $(v_i, v_j) \in E(G)$ ise

$$(\lambda - 2) f(j,i) g(j,i) = \sum_{v_k \in N(j) \setminus \{v_i\}} f(j,k) g(j,k) + \sum_{v_k \in N(i) \setminus \{v_j\}} f(i,k) g(i,k) \tag{4.95}$$

dir. $\left|g\left(j_1,i_1\right)\right|=M_1=\max\left\{\left|g\left(j,i\right)\right|:v_jv_i\in E\left(G\right)\right\}$ ve $\left(v_{j_1},v_{i_1}\right)\in E\left(G\right)$ olacak biçimde j_1,i_1 seçelim. $\left|g\left(j_2,i_2\right)\right|=M_2=\max\left\{\left|g\right|\left(j,i\right):v_jv_i\in E\left(G\right)\right\}$ ve $\left(v_{j_2},v_{i_2}\right)\in E\left(G\right)$ olacak biçimde j_2,i_2 seçelim. $M_1=0$ ise bütün (v_i,v_j) kenarları için $x_i+x_j=0$ dır. Bu durumda (4.94) ten $\lambda=0$ olur ki bu mümkün değildir. $M_2=0$ ise $\left(v_{j_1},v_{i_1}\right)$ dışındaki bütün (v_i,v_j) kenarları için $x_i+x_j=0$ dır. Bu durumda (4.94) ten $\left(\lambda-2\right)f\left(j,i\right)g\left(j,i\right)=0$ olur. O halde $\lambda=2$ dir ve böylece (4.91) sağlanır.

$M_1\geq M_2>0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\left|\left(\lambda-2\right)f\left(j_2,i_2\right)g\left(j_2,i_2\right)\right|\leq\sum_{v_k\in N\left(j_2\right)\setminus\left\{v_{i_2}\right\}}f\left(j_2,k\right)M_1+\sum_{v_k\in N\left(i_2\right)\setminus\left\{v_{j_2}\right\}}\left(i_2,k\right)M_1 \tag{4.96}$$

ve

$$\left|\left(\lambda-2\right)f\left(j_1,i_1\right)g\left(j_1,i_1\right)\right|\leq\sum_{v_k\in N\left(j_1\right)\setminus\left\{v_{i_1}\right\}}f\left(j_1,k\right)M_2+\sum_{v_k\in N\left(i_1\right)\setminus\left\{v_{j_1}\right\}}f\left(i_1,k\right)M_2 \tag{4.97}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.96) ve (4.97) den

$$\left(\lambda-2\right)^2\leq\frac{\displaystyle\sum_{v_k\in N\left(j_1\right)\setminus\left\{v_{i_1}\right\}}f\left(j_1,k\right)+\sum_{v_k\in N\left(i_1\right)\setminus\left\{v_{j_1}\right\}}f\left(i_1,k\right)}{f\left(j_1,i_1\right)}\times\frac{\displaystyle\sum_{v_k\in N\left(j_2\right)\setminus\left\{v_{i_2}\right\}}f\left(j_2,k\right)+\sum_{v_k\in N\left(i_2\right)\setminus\left\{v_{j_2}\right\}}f\left(i_2,k\right)}{f\left(j_2,i_2\right)} \tag{4.98}$$

elde edilir. $\left(v_{j_1},v_{i_1}\right)$ ve $\left(v_{j_2},v_{i_2}\right)$, G grafının farklı kenarları olduğundan $\lambda\left(K\left(G\right)\right)\leq2+\sqrt{RS}$ dir. (4.93) eşitsizliğinin ispatı için j_2 ve i_2 nin seçimini değiştirerek devam edelim:

$$\left(v_{j_2},v_{i_2}\right)\in E\left(G\right)-\left(v_{j_1},v_{i_1}\right),\qquad\left\{v_{j_1},v_{i_1}\right\}\cap\left\{v_{j_2},v_{i_2}\right\}\neq\varnothing$$

ve $\left|g\left(j_2,i_2\right)\right| = M_3 = \max\left\{\left|g\left(k_1,k_2\right)\right| : \left(v_{k_1},v_{k_2}\right) \in E\left(G\right), \left\{v_{j_1},v_{i_1}\right\} \cap \left\{v_{k_1},v_{k_2}\right\} = 1\right\}$ olacak biçimde j_2,i_2 yi seçelim. Genelliği bozmaksızın $v_{j_2} = v_{j_1}$ olduğunu kabul edelim. Aksi halde $v_{i_2} = v_{i_1}$ olur. $g\left(i_1,j_1\right) = g\left(j_1,i_1\right) = M_1$, $g\left(i_1,j_2\right) = g\left(j_2,i_1\right) = M_3$ dür. (4.91) eşitsizliğinin ispatına benzer olarak (4.98) eşitsizliği $v_{j_1} = v_{j_2}$ için sağlanır. O halde

$$\left(\lambda-2\right)^2 \leq \overline{f}\left(v_{j_1},v_{i_1}\right)\overline{f}\left(v_{j_1},v_{i_2}\right)$$

elde edilir. Lemma 4.13 göz önüne alınırsa; (4.92) eşitsizliğinin sağlandığını görülür.

Hatırlatma 4.7.

1. Teorem 4.40 ın ifadesinde bütün $u,v \in V\left(G\right)$ için $f\left(u,v\right)=1$ alınırsa; $\overline{f}\left(u,v\right) = d_u + d_v - 2$ olur. Böylece Teorem 4.40 ın (4.6) sınırının bir genelleştirmesi olduğu görülür.

2. $f\left(u,v\right) = d_u d_v$ olsun. Bu durumda Teorem 4.40, Teorem 4.39 u gerektirir.

Teorem 4.39 un direkt sonucu olarak (4.99) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.10. G basit bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho\left(G\right) \leq \max\left\{\frac{d_u}{d_v}m_u + \frac{d_v}{d_u}m_v : \ (u,v) \in E\left(G\right)\right\} \tag{4.99}$$

dir (Zhu, 2010).

Teorem 4.41. G ; n köşeli basit bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda

$$\rho(G) \le \max\left\{ d_u + \frac{d_u\left(m_u + \sqrt{m_u}\right)}{d_u + \sqrt{d_u}} : u \in V(G) \right\} \tag{4.100}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.100) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf olmasıdır (Wang ve ark, 2011).

İspat: G grafının işaretsiz Laplacian matrisi $K(G)$ olmak üzere, $D = diag\left(d_u + \sqrt{d_u} : u \in V(G)\right)$ için $K(G)$ matrisine benzer olan $M = D^{-1/2}K(G)D$ matrisini göz önüne alalım. G basit bağlantılı bir graf olduğundan M indirgenmez negatif olmayan bir matristir. M matrisinin (u,v). girdisi

$$m_{uv} = \begin{cases} d_u & , u = v \text{ ise} \\ \dfrac{d_v + \sqrt{d_v}}{d_u + \sqrt{d_u}}, & u \sim v \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olup, M matrisinin u. satır toplamı

$$R_u(M) \le d_u + \sum_{u\sim v}\left(\frac{d_v + \sqrt{d_v}}{d_u + \sqrt{d_u}}\right) = d_u + \frac{d_u m_u}{d_u + \sqrt{d_u}} + \frac{\sum_{u\sim v}\sqrt{d_v}}{d_u + \sqrt{d_u}} \tag{4.101}$$

dur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{u\sim v}\sqrt{d_v}\right)^2 \le d_u \sum_{u\sim v} d_v = d_u^2 m_u \tag{4.102}$$

olur. (4.102) eşitsizliği (4.101) de yerine yazılırsa;

$$R_u\left(M\right) \le d_u + \frac{d_u\left(m_u + \sqrt{m_u}\right)}{d_u + \sqrt{d_u}} \tag{4.103}$$

elde edilir. Teorem 2.3.4 ve Lemma 4.13 ten

$$\rho\left(G\right) \le \lambda\left(K\right) = \lambda\left(M\right) \le \max\left\{R_u\left(M\right) : u \in V\left(G\right)\right\}$$

olup, ispat tamamlanır.

Teorem 4.42. G; n köşeli basit bağlantılı bir graf ve her $uv \in E(G)$ için $f\left(u,v\right) = \sqrt{\dfrac{\left(d_u - d_v - 2\right)\left(d_u^2 m_u + d_v^2 m_v - 2d_u d_v\right)}{d_u d_v}}$ olsun. Bu durumda

$$\rho\left(G\right) \le 2 + \sqrt{ab} \tag{4.104}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $a = \max\left\{f\left(u,v\right) : uv \in E(G)\right\}$ ve $a = f\left(p,q\right)$ ise $b = \max\left\{f\left(u,v\right) : uv \in E(G) - \left\{pq\right\}\right\}$ olur. (4.104) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı graf veya yarı-regüler iki parçalı graf ya da 4 köşeli bir yol olmasıdır (Wang ve ark, 2011).

İspat: $U = diag\left(d_u d_v : uv \in E\left(G\right)\right)$ ve $N = U^{-1/2} A\left(G_{line}\right) U^{1/2}$ olsun. N matrisinin (uv, pq). girdisi

$$n_{uv,pq} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{d_p d_q}}{\sqrt{d_u d_v}}, & pq \approx uv \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. G bağlantılı olduğundan G_{line} grafı da bağlantılıdır. Bu nedenle $A(G_{line})$ ve N matrisleri indirgenmez ve negatif olmayan matrislerdir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden N matrisinin (uv). satır toplamı

$$\begin{aligned} R_{uv}^2(N) &= \left(\sum_{uv \approx pq} \frac{\sqrt{d_p d_q}}{\sqrt{d_u d_v}} \right)^2 \\ &\leq (d_u + d_v - 2). \sum_{uv \approx pq} \frac{d_p d_q}{d_u d_v} \\ &= \frac{d_u + d_v - 2}{d_u d_v}. \left(\sum_{u \sim q} d_u d_q + \sum_{v \sim p} d_p d_v - 2 d_u d_v \right) \\ &= f^2(u,v) \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. $\lambda(N)$, N matrisinin en büyük öz değeri olsun. Brauer Teoremi'nden en az bir $uv \neq pq$ için $\lambda(N)$ öz değeri $Z_{uv,pq}$ oval bölgesindedir. Bu durumda

$$\lambda(N)^2 \leq R_{uv}(N).R_{pq}(N)$$

eşitsizliği sağlanır. a,b ve $f(u,v)$ nin tanımından

$$\lambda(N)^2 \leq f(u,v).f(p,q) \leq ab$$

$\lambda(N) = \mu(A(G_{line}))$ olup, Lemma 4.9 gereği

$$\rho(G) \leq 2 + \mu(A(G_{line}))$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.43. G ; n köşeli basit bağlantılı bir graf ise

$$\rho(G) \le \max\left\{ \frac{d_u\left(d_u+m_u\right)+d_v\left(d_v+m_v\right)-2\left(\Delta_u+\Delta_v\right)}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|} : uv \in E(G) \right\} \qquad (4.105)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada Δ_u , u köşesine karşılık gelen üçgenlerin sayısıdır. (4.105) de eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G nin regüler iki parçalı ya da yarı-regüler iki parçalı graf olmasıdır (Wang ve ark, 2011).

İspat: $\left|N_u \cap N_v\right|$; u ve v köşelerinin ortak komşularının sayısı olmak üzere, $B = diag\left(d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right| : uv \in E(G)\right)$ olsun. $N = B^{-1}A\left(G_{line}\right)B$ matrisi $A\left(G_{line}\right)$ matrisi ile benzerdir. N matrisinin (uv, pq). girdisi

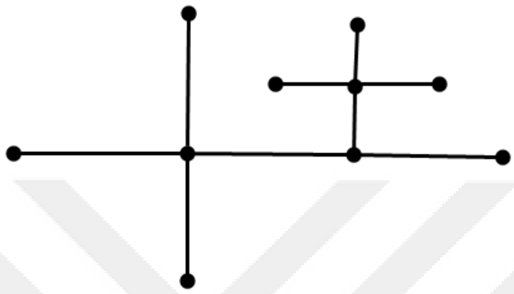
$$n_{uv,pq} = \begin{cases} \dfrac{d_p+d_q-\left|N_p \cap N_q\right|}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|}, & uv \approx pq \text{ ise} \\ 0 & \text{, diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. G bağlantılı olduğundan $A\left(G_{line}\right)$ ve N matrisleri indirgenmez ve negatif olmayan matrislerdir. N matrisinin $uv.$ satır toplamı

$$\begin{aligned} R_{uv}(N) &= \sum_{uv \approx pq}\left(\frac{d_p+d_q-\left|N_p \cap N_q\right|}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|} \right) \\ &= \frac{\sum_{u \sim q}\left(d_u+d_q\right)+\sum_{v \sim p}\left(d_p+d_v\right)-2\left(d_u+d_v\right)}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|} - \frac{\sum_{u \sim q}\left|N_u \cap N_q\right|+\sum_{v \sim p}\left|N_p \cap N_v\right|-2\left|N_u \cap N_v\right|}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|} \\ &= \frac{d_u\left(d_u+m_u\right)+d_v\left(d_v+m_v\right)-2\left(d_u+d_v\right)}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|} - \frac{2\left(\Delta_u+\Delta_v\right)-2\left|N_u \cap N_v\right|}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|} \\ &= \frac{d_u\left(d_u+m_u\right)+d_v\left(d_v+m_v\right)-2\left(\Delta_u+\Delta_v\right)}{d_u+d_v-\left|N_u \cap N_v\right|} - 2 \end{aligned}$$

dir. $\lambda(N)=\mu\left(A\left(G_{line}\right)\right)$ olduğu ve Lemma 4.9 ile Teorem 2.3.4 göz önüne alınırsa, ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.



Şekil 4.1. *G* Grafı

Şekil 4.1 de verilen G grafı $n=10$ köşeli bir ağaçtır. G grafının Laplacian matrisi

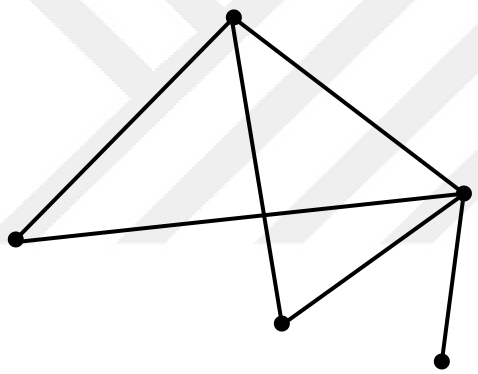
$$L(G)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. G grafının Laplacian spektral yarıçapı $\rho(G)=5.52$ dir. G grafının Laplacian spektral yarıçapı için bazı üst sınır değerleri aşağıda hesaplanmıştır:

(4.3)	(4.7)	(4.10)	(4.21)	(4.22)	(4.24)	(4.30)
7	6	5.71	6.92	7	7	6.63

(4.35)	(4.40)	(4.44)	(4.45)	(4.46)	(4.51)
5.67	6.69	6	6.32	6.44	6

Örnek 4.2.



Şekil 4.2. *G* Grafı

Şekil 4.2 de verilen G grafı $n=5$ köşeli, $m=6$ kenarlı basit bağlantılı bir graftır. G grafının Laplacian matrisi

$$L(G)=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, G grafının Laplacian spektral yarıçapı $\rho(G)=5$ tir. $\rho(G)$ için bazı üst sınır değerleri hesaplanmış ve aşağıda verilmiştir:

(4.47)	(4.49)	(4.57)	(4.61)	(4.65)	(4.66)	(4.70)	(4.100)
6.92	6.47	6.35	7.29	6	6.82	6.12	6.27

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Literatürde spektral graf teorisi hakkında kapsamlı bir Türkçe kaynak bulunmadığı bilinmektedir. Bu çalışmada; öncelikle grafın Laplacian spektral yarıçapının üst sınırlarını analiz etmek için gerekli olan temel graf ve matris teorisi kavramları verilmiştir. Daha sonra literatürdeki basit ve sonlu grafların Laplacian spektral yarıçapının üst sınırları üzerine yapılan çalışmalar incelenmiş ve Türkçe'ye çevrilerek bir araya getirilmiştir. Belirlenen üst sınırların yer aldığı teoremler ve ispatları detaylı olarak incelenmiş ve gerekli lemmalar ispata girilmeksizin verilmiştir. Ayrıca incelenen bu üst sınırların bazılarının değerleri iki graf için hesaplanmıştır.

Yapılan çalışma sonucunda; basit ve sonlu grafların Laplacian spektral yarıçapı için elde edilmiş üst sınırların özellikle grafın köşe derecesi, maksimal ve minimal köşe derecesi, kenar sayısı, çizgi grafın derece dizisinin terimleri, klik sayısı gibi graf parametrelerine bağlı olduğu, son yıllarda yapılan bazı çalışmaların ise önceki bazı üst sınırları genelleştiren nitelikte çalışmalar olduğu görülmüştür.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada basit ve sonlu grafların Laplacian spektral yarıçapının üst sınırları üzerine yapılmış çalışmaların analizi; yönlü graf, ağırlıklı graf vb. graf çeşitlerinin Laplacian spektral yarıçapının sınırları için veya işaretsiz Laplacian spektral yarıçapın sınırları için yapılabilir.

KAYNAKLAR

ANDERSON, W. N. and MORLEY, T. D., 1985. Eigenvalues of the Laplacian of a graph. Linear and Multilinear Algebra, 18(2): 141-145.

BAPAT, R. B., 2014. Graphs and Matrices (second edition). Hindustan Book Agency, New Delhi, India, 168p.

BERMAN, A. and PLEMMONS, R. J., 1979. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic press, Inc. New York, USA, 316p.

BONDY, J. A. and MURTY, U.S.R., 1976. Graph Theory with Applications. Elsevier Science Publishing Co. Inc, New York, USA, 264p.

BAUER, F. L., DEUTSCH, E. and STOER, J., 1969. Abschatzungen fur eigenvalue positiver linearer operatoren. Linear Algebra Appl., 2: 275-301.

BRUALDI, R. A. and RYSER, H. J., 1991. Combinatorial Matrix Theory. Cambridge U. P., New York, 362p.

CAO, D., 1998. Bounds on eigenvalues and chromatic numbers. Linear Algebra Appl., 270: 1-13.

CHUNG, F. R. K., 1997. Spectral Graph Theory, CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Am. Math. Soc.,Providence, RI ,USA, no. 92, 207p.

DAS, K. C., 2003. An improved upper bound for Laplacian graph eigenvalues. Linear Algebra and its Applications, 368: 269-278.

DAS, K. C., 2004. A characterization on graphs which achieve the upper bound for the largest Laplacian eigenvalue of graphs. Linear Algebra and its Applications, 376: 173-186.

DAS, K. C., 2004. Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph. Discrete Math., 285: 57-66.

DAS, K.C., 2005. Sharp upper bounds on the spectral radius of the Laplacian matrix of graphs. Acta Math. Univ. Comenian,74: 185–198.

de CAEN, D., 1998. An upper bound on the sum of squares of degrees in a graph. Discrete Math., 185.

FIEDLER, M., 1989. Laplacian of graphs and algebraic connectivity. Combinatorics graph Theory, 25: 57-70.

GANTMACHER, F. R., 1959. The Theory of Matrices. Volume 2, AMS Chelsea Publishing, Rhode Island, USA, 276p.

GUO, J. M., 2005. A new upper bound for the Laplacian spectral radıus of graphs. Linear Algebra and its Applications, 400: 61-66.

GUO, J. M., 2008. Sharp upper and lower bounds for the Laplacian spectral radius and the spectral radius of graphs. Acta Math. Appl., 24: 289–296.

GUTMAN, I., GINEITYTE, V., LEPOVIC, M. and PETROVIC, M., 1999. The high energy band in the photo-electron spectrum of alkanes and its dependence on molecular structure. J. Serb. Chem. Soc., 64: 673–680.

GUTMAN, I., VIDOVIC, D. and STEVONOVIC, D., 2002. Chemical applications of the Laplacian spectrum. IV. On the largest Laplacian eigenvalue of alkanes. J. Serb. Chem. Soc., 67: 407–413.

GRONE, R. and MERRIS, R., 1994. The Laplacian spectrum of a graph. Discrete Math., 7: 221-229.

HONG, Y., SHU, J. L. and FANG, K. F., 2001. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs. J. Combin. Theory Ser. B, 81: 177-183.
HORN, R. A. and JOHNSON, C. R., 1985. Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, USA, 643p.
KÖNIG, D., 1916. Über Grabhen und ihre anvendung auf determinanten theorie and mengenlehre. Math. Ann., 77: 453-465.
LI, J. S. and ZHANG, X. D., 1997. A new upper bound for eigenvalues of the Laplacian matrix of a graph. Linear and Multilinear Algebra Appl., 265: 93 100.
LI, J. S. and ZHANG, X. D., 1998. On the Laplacian eigenvalues of a graph. Linear Algebra and its Applications, 285: 305-307.
LI, L. L., 1999. A simplified Brauer's theorem on matrix eigenvalues. Linear Algebra Appl., 355: 287-295.
LI, J. S. and PAN, Y. L., 2001. de Caen's Inequality and bounds on the largest Laplacian eigenvalue of a graph. Linear Algebra and its Applications, 328: 153-160.
LI, J. S. and PAN, Y. L., 2004. Upper bounds for the Laplacian graph eigenvalues. Acta Math. Sin., 20: 803–806.
LIU, H. , LU, M. and TIAN, F., 2004. On the Laplacian spectral radius of a graph. Linear Algebra and its Applications, 376: 135-141.
LU, M., LIU, H. and TIAN, F., 2007. Laplacian spectral bounds for clique and independence numbers of graphs. J. Combin. Theory, 97: 726-732.
MERRIS, R., 1994. Laplacian matrices of graphs, a survey. Linear Algebra Appl., 197/198: 143-176.
MERRIS, R., 1998. A note on Laplacian graph eigenvalues. Linear Algebra and its Applications, 285: 33-35.
MOHAR, B. and POLJAK, S., 1990. Eigenvalues and max-cut problem. Czechoslovak Math. J., 40(115): 343–352.
MOHAR, B. and POLJAK, S., 1993. Eigenvalues in combinatorial optimization. Combinatorial and graph-theoretical problems in linear algebra, Vol. Math. Appl., 50, Springer, New York, 107–151.
MOTZKIN, T. and STRAUS, E. G., 1965. Maximal for graphs and a new proof of a theorem of Turan. Canad. J. Math., 17: 533-540
PAN, Y. L., 2002. Sharp upper bounds for the Laplacian graph eigenvalues. Linear Algebra Appl., 355: 287-295.
PATRA, K. L. and SAHOO B. K., 2017. Bounds fort the Laplacian spectral radius of graphs. Electronic Journal of Graph Theory and Appl., 5(2): 276-303.
ROJO, O. SOTO, R. and ROJO, H., 2000. An always nontrivial upper bound for Laplacian graph eigenvalues. Linear Algebra Appl., 312: 155–159.
SHI, L., 2007. Bounds on the (Laplacian) spectral radius of graphs. Linear Algebra Appl., 422: 755–770.
SHU, J. L. HONG, Y. and REN, K., 2002. A sharp upper bound on the largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph. Linear Algebra and its Applications, 347: 123-129.
SOLE, P., 1995. Expanding and forwarding. Discrete Appl. Math., 58: 67–78.
WANG, T. F., 2007. Several sharp upper bounds for the largest Laplacian eigenvalue of a graph, Science in China Math., 50(12): 1755–1764.

WANG, T., YANG, J. and LI, B., 2011. Improved upper bounds for the Laplacian spectral radius of a graph. Electron. J. Combin., 18(1): p35, 1-11.

YU, A., 2010. A new upper bound for the Laplacian spectral radius of a graph. Electron. J. Linear Algebra, 20: 730–738.

ZHANG, X. D. and LUO, R., 2002. The spectral radius of triangle-free graphs. Australas. J. Combin., 26: 33-39.

ZHANG, X. D., 2004. Two sharp upper bounds for the Laplacian eigenvalues. Linear Algebra and its Applications, 376: 207-213.

ZHOU, B. and CHO, H. H., 2005. Remarks on spectral radius and Laplacian eigenvalues of a graph. Czechoslovak Math. J., 55(130): 781–790.

ZHU, D., 2010. On upper bounds for Laplacian graph eigenvalues. Linear Algebra Appl., 432: 2764–2772.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Duygu BARUT
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri	**:** DİYARBAKIR
Doğum Tarihi	**:** 02/02/1989
Telefon	**:** 0551 726 59 20
e-mail	**:** duygulu21.db@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: Nafiye Ömer Şevki Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Kayapınar, DİYARBAKIR	2010
Üniversite	: Harran Üniversitesi, Haliliye, ŞANLIURFA	2014
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Haliliye, ŞANLIURFA	2018