T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

$[-1,1] \times [-1,1]$ BÖLGESİ ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-KANTOROVICH POLİNOMLARININ YAKLAŞIMI

Döne KARAHAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Prof. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, Döne KARAHAN'ın hazırladığı "$[-1,1] \times [-1,1]$ **bölgesi üzerinde iki değişkenli Bernstein-Kantorovich polinomlarının yaklaşımı**" konulu bu çalışma 30/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

			İmza
Danışman	:	Prof. Dr. Aydın İZGİ	....
Üye	:	Prof. Dr. Mahmut IŞIK	....
Üye	:	Prof. Dr. Seyit TEMİR	....
Üye	:	Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN	....
Üye	:	Doç. Dr. Mahmut MODANLI	....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi

$[-1,1]\times[-1,1]$ BÖLGESİ ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-KANTOROVICH POLİNOMLARININ YAKLAŞIMI

Döne KARAHAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2019, Sayfa: 69

Bu tezde, kompakt bir küme üzerinde tanımlı iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayında genelleştirilmiş Bernstein-Kantorovich tip operatörler tanımlanmış ve bazı yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. Süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar kullanılarak yakınsaklık hızı hesaplanmıştır. Voronovskaya tip teorem verilmiş ve bazı diferansiyel özellikleri ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş Bernstein-Kantorovich tip operatörlerin GBS operatörleri tanımlanmış ve karışık düzgünlük modülü yardımıyla yakınsaklık hızı incelenmiştir. Son olarak, operatörlerin bazı fonksiyonlara yakınsaması için Maple'daki bazı örnekleyici grafiklerle yapılan karşılaştırmalar gösterilmiş ve sayısal örnekler verilerek yaklaşık değerdeki hata tahmin edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein-Kantorovich polinomları, lineer pozitif operatörler, süreklilik modülü, Lipschitz koşulu, GBS operatörleri, karışık düzgünlük modülü, Peetre's K-fonksiyoneli.

ABSTRACT

PhD Thesis

APPROXIMATION OF BERNSTEIN-KANTOROVICH POLYNOMIALS ON RANGE $[-1,1]\times[-1,1]$

Döne KARAHAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2019, Page: 69

In this study, the generalized Bernstein-Kantorovich type operators are introduced and some approximation properties of these operators are studied in the space of continuous functions of two variables on a compact set . The convergence rate of these operators are obtained by means of the modulus of continuity and Lipschitz class function. A Voronovskaya type theorem is given and some differential properties of these operators are proved. The GBS operators of the generalized Bernstein-Kantorovich type operators are introduced and the degree of approximation in terms of the mixed modulus of smoothness is investigated. Lastly, comparisons by some illustrative graphics in Maple for the convergence of the operators to some functions are showed and the error in the approximation by giving numerical examples are estimated.

KEYWORDS: Bernstein-Kantorovich polynomials, linear positive operators, modulus of continuity, Lipschitz condition, GBS operators, mixed modulus of smoothness, Peetre's K-functional.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama sürecinde akademik bilgisini ve manevi desteğini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye teşekkürü borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca bütün sorularıma sabırla ve hoşgörüyle cevap veren kıymetli hocam Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERANBAY'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu tezi yazarken teknik bilgisinden yararlandığım değerli hocam Doç. Dr. Haydar ALICI'ya teşekkür ederim.

Doktora eğitimimde burs desteği sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Her zaman ve her koşulda yanımda olduklarını hissettiren sevgili aileme çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$B_n(f;x)$	f fonksiyonunun Bernstein polinomu
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$\|f\|_{C(G)}$	$C(G)$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm
$f_{nm} \rightrightarrows f$	(f_{nm}) iki indisli fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\mathbb{A}$	$[-1,1]\times[-1,1]$ karesi
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun tam süreklilik modülü
$\omega^{(1)}(f;\delta)$	f fonksiyonunun x değişkenine göre kısmi süreklilik modülü
$\omega^{(2)}(f;\delta)$	f fonksiyonunun y değişkenine göre kısmi süreklilik modülü
$[\|\lambda\|]$	λ sayısının tam kısmı
$Lip\alpha$	İki değişkenli Lipschitz sınıfı
$Lip_x\alpha$	x değişkenine göre Lipschitz sınıfı
$Lip_y\alpha$	y değişkenine göre Lipschitz sınıfı
A	$A : X \to Y$ lineer pozitif operatör
$\mathfrak{D}(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$\mathfrak{R}(A)$	A operatörünün değer kümesi
A_{nm}	Lineer pozitif operatörler dizisi
$C_b(D)$	D bölgesinde sürekli ve $\mathbb{R}^m$ de sınırlı fonksiyonlar uzayı
$D_{n,m}$	Genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü
$\kappa_{nim}^{i,j}$	$D_{n,m}$ operatörünün merkezi momentleri
GBS	Generalized Boolean Sum operatörü
$R_{n,m}$	$D_{n,m}$ operatörünün GBS operatörü
$C_B(\mathbb{A})$	$\mathbb{A}$ üzerinde B-sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_B(\mathbb{A})$	$\mathbb{A}$ üzerinde B-sınırlı fonksiyonlar uzayı

ω_{mixed}	$f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonunun karışık düzgünlük modülü
$\mathcal{D}_B^{r,s} f$	$f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonunun sürekli karışık kısmi türevi
$\mathcal{K}_{mixed}$	$f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonunun karışık K-fonksiyoneli

1. GİRİŞ

Herhangi bir topolojik uzayda, her bir elemanın uzayın yoğun bir alt uzayının elemanlarından oluşan dizinin yakınsadığı nokta olarak ifade edilebileceğinden hareketle 1885 yılında Karl-Weierstrass, reel sayılar kümesinin kompakt altkümeleri üzerinde tanımlı $P[a, b]$ polinomlar uzayının, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayında yoğun olduğunu göstermiştir. O halde kompakt kümeler üzerinde sürekli her f fonksiyonuna bir $p_n(x)$ polinomlar dizisi ile düzgün olarak yaklaşılabileceğini ispatlamıştır.

Fakat topolojik yöntemler kullanılarak ispatlanan bu yöntem uzun ve karmaşık bulunduğundan dönemin Carl Runge (1885), Henri Lebesgue (1908), Charles de la Vallée-Poussin, Lipot Fejér (1916) gibi bir çok matematikçisi tarafından farklı ispat yöntemleri verilmeye çalışılmıştır. Bu matematikçilerden biri olan Weierstrass'ın yaklaşım teoreminin ispatı için verdiği yöntemler olasılık teorisi ve lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisi gibi farklı bilimsel çalışma alanlarının doğmasına yardımcı olmuştur.

1912 yılında Segej N. Bernstein, Weierstrass yaklaşım teoriminin ispatında kullandığı yöntemde Bernstein polinomları olarak adlandırılan yeni polinomlar tanımlamıştır. Ancak Bernstein polinomlarının Weierstrass yaklaşım teoeminin ispatına basit bir yöntem sunmasının dışında asıl önemi 20. yy ortalarına kadar anlaşılamamıştır. Paul de Faget'in Citroën firmasında ve Pierre Bézier'in Renault firmasında endüstriyel dizaynları yaparken Bernstein polinomlarından faydalanmasından sonra, Bernstein polinomlarının önemi artmış ve birçok matematikçi tarafından üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. Bu çalışmaların ardından lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisi alanı ortaya çıkmıştır.

1952 ve 1953 yıllarında Bohman ve Korovkin, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsadığını gösteren önemli bir teoremi ispatlamışlardır. Bu teoremde, sonlu bir aralıkta düzgün yakınsamanın gerçeklenmesi için üç koşulun sağlanmasının yeterli olduğu gösterilmiştir. Bunun sayesinde daha sonra birçok matematikçi Meyer-König ve Zeller operatörleri, Szasz operatörleri, Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri gibi farklı lineer pozitif operatörler tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Bernstein operatörleri ve tanımlanan yeni operatörler kullanılarak farklı genellemeleri yapılmıştır. Örneğin, 1930 yılında Kantorovich, 1967 de Durrmeyer, 1981 de ise Derriennic analizin bilinen temel teoremlerini kullanarak Bernstein operatörlerinin integral tipli genellemelerini tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Temel olarak Durrmeyer ve Kantorovich tipli genellemeler şeklinde ifade edilen integral tipli bu genellemeler, integrallenebilir fonksiyonlar uzayındaki yakınsaklığın incelenebilmesinden ortaya çıkmıştır.

Bu çalışmada ise $\mathbb{A} = [-1,1] \times [-1,1]$ karesel bölgesinde tanımlı ve sürekli $f(x,y)$ fonksiyonlarına bağlı iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörleri tanımlanmış ve bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Tezde, iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörlerinin $\mathbb{A}$ bölgesinde bu fonksiyonlara düzgün yakınsadığı gösterilmiş ve f fonksiyonun süreklilik modüllerinin özellikleri kullanılarak yakınsamanın hızı hesaplanmıştır. Tanımlanan iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörleri için Voronovskaya-tip teorem ispatlanmıştır. İki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörünün her iki değişkene göre de diferansiyellerinin yaklaşım özellikleri incelenmiş ve yakınsamanın düzgün olduğu gösterilmiştir. İki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü için Peetre's K-Fonksiyoneli tanımlanmış ve bununla ilgili önemli bir teorem ispat edilmiştir. Daha sonra, iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörünün GBS (Generalized Boolean Sum) operatörü inşa edilmiş ve buna bağlı olarak karışık düzgünlük modülü tanımlanmıştır. Karışık düzgünlük modülü kullanılarak iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörünün GBS operatörü ile yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Lipschitz sınıfından olan foksiyonlar için operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiş ve süreklilik modülleri ile arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Son olarak farklı sürekli fonksiyonlar için Maple programı kullanılarak grafik çizimleri ve nümerik tablolar elde edilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Weierstrass (1885) ın sürekli fonksiyonlara polinomlar yardımıyla yaklaşmanın mümkün olduğunu ispatlamasıyla yaklaşım teorisinde çalışmalar başlamıştır. Weiestrass tarafından verilen bu teoremin ispatı diğer matematikçiler tarafından uzun ve karmaşık bulunmasıyla yeni ispat yöntemleri arayışı başlamıştır. 1912 yılına gelindiğinde S.N. Bernstein kendi adını verdiği

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad n\in\mathbb{N},\quad 0\leq x\leq 1,$$

polinomlar dizisi ile sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşmanın daha basit bir ispatını vermiştir (Bernstein (1912-1913)). Bernstein polinomlarını üreten lineer pozitif Bernstein operatörleri temel alınarak bir çok farklı operatör kurulmuş ve bunların farklı genelleştirmeleri yapılmıştır. Günümüzde hala bu operatörler kullanılarak çalışmalar yapılmaktadır. Bernstein operatörlerinin kurulmasının ardından Kantorovich (1930), $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir f fonksiyonları için

$$K_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)dt,$$

biçiminde tanımlı K_n operatörlerini tanımlamıştır. K_n operatörlerine Kantorovich operatörleri denilmektedir.

Chlodovsky (1937), Bernstein operatörlerinin sınırlarını sonsuz aralıklara genişleterek

$$C_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}b_n\right),\quad n\in\mathbb{N}$$

Bernstein-Chlodowsky operatörleri adı verilen C_n operatörlerini tanımlamıştır. Burada $0\leq x\leq b_n$ ve (b_n) aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif terimli artan bir reel sayı dizisidir:

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0.$$

Mirakyan (1941), $[0,\infty)$ yarı ekseninde Bernstein polinomlarından yararlanarak ağırlıklı uzayda f sürekli fonksiyonları için

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

S_n operatörünü tanımlamıştır. Daha sonra bu operatör Favard (1944) ve Szasz (1950) tarafından ele alınmış ve bir takım yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bunun üzerine bu operatör Favard-Szasz-Mirakyan operatörü olarak adlandırılmıştır. Yukarıda bahsedilen lineer pozitif operatörler kurulduktan sonra bu operatörlerin f sürekli fonksiyonuna yaklaşımı problemi incelenmiştir. Bu yaklaşımın düzgün olması için gerekli kriterler ispatlanmaya çalışılmıştır. Popoviciu (1951), Bohman (1952) ve Korovkin (1953) birbirinden habersiz şekilde bu teoremi ispatlamıştır. Ancak bu üç matematikçiden P.P. Korovkin problemin çözümüne daha büyük katkılar sunmuş ve lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde çalışmaları bir adım daha öne götürmüştür. P.P. Korovkin ispatında $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli f fonksiyonuna lineer pozitif operatörler dizisi ile düzgün yaklaşmak için gerek ve yeter koşul olarak test foksiyonları adı verilen 1, t ve t^2 fonksiyonlarının operatör altında sırasıyla 1, x ve x^2 fonksiyonlarına düzgün yakınsamasının yeterli olduğunu göstermiştir.

Yukarıda bahsedilen Korovkin teoreminin ispatının ardından lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisindeki çalışmalar hız kazanmış ve farklı lineer pozitif operatörlerin üretilmesine yardımcı olmuştur.

Baskakov (1957), $[0, \infty)$ aralığında tanımlı ve Mirakyan (1941) deki ile aynı koşulları sağlayan f fonksiyonları için

$$V_n(f;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{x+1}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

V_n Baskakov operatörlerini tanımlamış ve yaklaşım özellikleri üzerine incelemeler yapmıştır.

Daha sonraki yıllarda Meyer-König ve Zeller (1960) tarafından Meyer-König-Zeller operatörü, Durrmeyer (1967) tarafından $[0, 1]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar için Durrmeyer operatörü tanımlanmıştır.

Stancu (1968), $0 \leq \alpha \leq \beta$ için Bernstein operatörünün bir genellemesi olan

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Bernstein-Stancu operatörünü tanımlamıştır. Buradan görüldüğü gibi $\alpha = \beta = 0$ olması halinde $P_n^{(\alpha,\beta)}$ operatörü Bernstein operatörüne dönüşür.

Bleimann ve ark (1980) tarafından Bleimann-Butzer-Hahn operatörü ve başka diğer operatörler de tanımlanmış ve bu operatörler kullanılarak bir çok genelleştirmeleri elde edilmiştir.

Abel (1998) çalışmasında Kantorovich operatörlerinin asimptotik yaklaşımını incelemiştir. Kivinukk ve Metsmagi (2011) ise Kantorovich operatörlerini sınırlı salınımlı fonksiyonlar için ele alıp salınımlarını araştırmıştır.

Lineer pozitif operatörler teorisinde ele alınan operatörler farklı fonksiyonlar ve farklı uzaylarda tanımlandığı gibi bu operatörlerin iki değişkenli fonksiyonlar için de genellemeleri yapılmıştır. Büyükyazıcı (1999) tez çalışmasında $[0,1;0,1]$ birim karesinde iki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonları için

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) C_n^k C_m^j k(1-x)^{n-k} y^j (1-y)^{m-j}$$

Bernstein polinomlarını tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

İki değişkenli fonksiyonlar için lineer pozitif opartörlerin tanımlanması konusunda yapılmış en çok bilinen çalışmalardan biri de Volkov (1957)'un yapmış olduğu "On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variable" başlıklı çalışmasıdır.

Açıkgöz ve Aracı (2010), Büyükyazıcı ve İbikli (2004), Butzer (1953) ve Stancu (1963) çalışmalarında, iki değişkenli fonksiyonlar için Bernstein polinomlarının farklı genellemelerini tanımlamışlar ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

İzgi (2009), çalışmasında iki değişkenli fonksiyonlara Gamma operatörleri ile yaklaşımı ele almıştır. İzgi (2012), Szasz-Mirakyan ve Durrmeyer-Chlodowsky operatörlerinin bir kompozisyonunu oluşturmuş ve yaklaşım özelliklerini araştırmıştır. İzgi ve Büyükyazıcı (2006), Bernstein-Chlodovsky polinomları ile iki değişkenli fonksiyonlara yaklaşımı çalışmışlardır.

Lineer pozitif operatörler teorisi çalışılmaya başlandığından beri operatörlerin farklı genelleştirmeleri ve modifikasyonları yapılmış, fonksiyonların tanımlandığı uzaylar değiştilmiş ya da farklı bölgeler veya yüzeyler üzerinde yaklaşımlar incelenmiştir. Bu genelleştirmelerden biri de operatörlerin q ve (p,q)-analoglarının tanımlanmasıdır.

Acu ve Muraru (2015), çalışmasında iki değişkenli fonksiyonlar için Bernstein–Schurer–Kantorovich operatörünün q-analogunu tanımlamıştır.

Acar ve ark. (2016) ise (p, q)-Baskakov operatörünün Kantorovich modifikasyonu üzerine çalışmalar yapmıştır.

Karahan ve İzgi (2018) çalışmalarında genelleştirilmiş q-Bernstein ve (p, q)-Bernstein polinomlarını tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini inceleyerek Voronovskaya-tip teorem ispatlamışlardır.

Agraval ve ark. (2015), q-Bernstein–Schurer–Kantorovich operatörünü iki değişkenli fonksiyonlar için ele almıştır.

Mishra ve Pandey (2016), (p, q)-Kantorovich–Stancu–Schurer operatörünün Chlodowsky varyantı üzerine çalışmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tezin bu bölümünde, Araştırma Bulguları ve Tartışma bölümünde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler hakkında bilgiler verilmiştir.

3.1. Bernstein Polinomları

1912 yılından beri matematiğin birçok alanında kullanılan ve çalışılmaya hala devam edilen Bernstein polinomları a ve b pozitif sayılar, n bir doğal sayı olmak üzere $(a+b)^n$ ifadesinin Binom formülüne dayanmaktadır.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

formülünde $x \in [0,1]$ olmak üzere $a = x$ ve $b = 1-x$ alınırsa

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik Bernstein polinomlarının temelini oluşturur.

f, $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu f fonksiyonu $\frac{k}{n}$ noktalarında bilinen değerler alıyorsa o halde,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ifadesine Bernstein polinomları denir. Buradan görülmektedir ki; her belirli n sayısına karşılık $B_n(f;x)$, n. mertebeden bir polinomdur.

Bernstein polinomları tanımlandıktan sonra 1930 yılında Kantorovich, Bernstein polinomlarından yola çıkarak kendi adını verdiği Kantorovich operatörlerini tanımlamıştır.

n doğal sayı olmak üzere $f \in L_1[0,1]$ için

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanan $K_n : L_1[0,1] \to C[0,1]$ operatörüne Kantorovich operatörü denir.

Daha sonra Kantorovich operatörünün farklı genelleştirmeleri yapılmış ve yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise Bernstein ve Kantorovich opertörünün birleşiminden oluşan genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü incelenmiştir. Operatörün tanımı ve özellikleri daha sonraki bölümde verilecektir.

3.2. İki Değişkenli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 3.1 *$X, Y \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f : (x, y) \to z$ biçiminde tanımlı fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $X \times Y$ üzerinde tanımlı iki reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar sınıfı denir. $G = X \times Y$ olarak işaretlenirse G üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar sınıfı $C(G)$ ile gösterilir ve bu uzay üzerinde norm*

$$\|f\|_{C(G)} = \sup_{(x,y)\in G} |f(x, y)| \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.2 *A, B, C ve D reel sayılar ve $G' = [A, B]\times[C, D]$ olmak üzere $C(G')$ uzayında norm*

$$\|f\|_{C(G')} = \max_{(x,y)\in G'} |f(x, y)| \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $C(G')$ ile sınırlı kapalı bölgede tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı gösterilmektedir.

Tanım 3.3 *s iki indisli bir fonksiyon dizisi olmak üzere*

$$s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C(G')$$
$$s : (n, m) \to f_{nm}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.4 *f_{nm}, $C(G')$ de tanımlı bir fonksiyon dizisi olmak üzere*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|f_{nm} - f\|_{C(G')} = 0 \tag{3.3}$$

eşitliği sağlanıyorsa, o halde f_{nm} fonksiyon dizisi G' bölgesinde f sürekli fonksiyonuna yakınsaktır denir.

Tanım 3.5 *Eğer $\forall\epsilon > 0$ ve $\forall(x,y) \in G'$ için $n,m > N$ iken*

$$|f_{nm}(x,y) - f(x,y)| < \epsilon \tag{3.4}$$

olacak şekilde $\exists N = N(\epsilon)$ sayısı varsa, f_{nm} fonksiyon dizisi G' bölgesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_{nm} \rightrightarrows f$, $n,m \to \infty$ ile gösterilir.

Gösterilebilir ki $C(G')$ uzayında (3.1) normuna göre yakınsaklık ile düzgün yakınsaklık çakışmaktadır; yani,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|f_{nm} - f\|_{C(G')} = 0 \Leftrightarrow G' \quad de \quad f_{nm} \rightrightarrows f \tag{3.5}$$

dir.

Gerçekten; Tanım 3.5 ten $\forall\epsilon > 0$ verildiğinde $n,m > N$ olmak üzere G' bölgesine ait tüm (x,y) noktaları için (3.4) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $N = N(\epsilon)$ sayısı bulunursa (f_{nm}) dizisi f fonksiyonuna G' bölgesinde düzgün yakınsaktır. Kabul edelim ki (3.4) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda, (3.4) eşitsizliği tüm $(x,y) \in G'$ noktaları için sağlandığından, $n,m > N$ olduğunda

$$\max_{(x,y)\in G'} |f_{nm}(x,y) - f(x,y)| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise (3.2) normuna göre $n,m > N$ için

$$\|f_{nm} - f\|_{C(G')} < \epsilon \tag{3.6}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla (f_{nm}) dizisi G' bölgesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunda her $\epsilon > 0$ sayısına göre öyle bir $N = N(\epsilon)$ sayısı bulunur ki $n,m > N$ için (3.7) eşitsizliği sağlanır. Bu ise (3.3) eşitsizliğinin sağlandığını göstermektedir ve ifadenin yeterlilik kısmı ispatlanmış olur.

Şimdi gereklilik kısmını ispatlayalım. Kabul edelim ki (3.3) sağlansın. O halde limitin tanımından $\forall\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N = N(\epsilon)$ sayısı bulunur ki $n,m > N$ için

$$\max_{(x,y)\in G'} |f_{nm}(x,y) - f(x,y)| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda G' bölgesinde olan tüm (x,y) noktaları için (3.4) eşitsizliği sağlanır. O halde (f_{nm}) fonksiyon dizisi G' bölgesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Böylece (3.5) ifadesi ispatlanmış olur.

3.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Süreklilik modülü ilk olarak 1966 yılında Lorentz tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 3.6 *$I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için*

$$\omega(f;\delta) := \omega(\delta) = \sup_{\substack{|x-t|\leq\delta \\ x,t\in I}} |f(x) - f(t)| \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

$\delta > 0$ için $\omega(\delta)$ nın, δ değişkenine göre pozitif bir fonksiyon olduğu (3.7) ifadesinden görülmektedir. Süreklilik modülünün bazı özelliklerini veren lemmayı ifade edelim.

Lemma 3.7 *$I \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık ve f, I üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonunun süreklilik modülü olan $\omega(\delta)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.*

i. $\omega(\delta)$, $\delta \geq 0$ *ın monoton artan bir fonksiyonudur.*

ii. $m \in \mathbb{N}$ ***için*** $\omega(m\delta) \leq m\omega(\delta)$.

iii. $\lambda > 0$ ***için*** $\omega(\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(\delta)$.

iv. $f \in C(I)$ *sınırlı fonksiyon ise* $\lim_{\delta\to 0^+} \omega(\delta) = 0$.

v. $f \in C(I)$ *sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyon* $\Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0^+} \omega(\delta) = 0$.

vi. $\omega(\delta) = 0 \Leftrightarrow f \equiv sabit$.

vii. $\delta_1 < \delta_2$ *iken* $\frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2} \leq 2\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1}$ *dir. Buradan f hemen hemen her yerde sabit olmadıkça* $\lim_{\delta\to 0^+} \frac{\omega(\delta)}{\delta} > 0$ *dır.*

viii. *(δ_n) sıfıra yakınsayan pozitif terimli bir dizi ve C_f, f fonksiyonu ve (δ_n) dizisine bağlı bir sabit olmak üzere $\omega(\delta_n) \geq C_f\delta_n$ dir.*

Şimdi iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modüllerini tanımlayalım ve bazı özelliklerini inceleyelim.

Tanım 3.8 *f fonksiyonu $\mathbb{A} = [-1,1] \times [-1,1]$ karesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega(f;\delta) = \max_{\substack{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \leq \delta \\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{A}}} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \tag{3.8}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

Şimdi süreklilik modülünün sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı özelliklerini verelim.

Lemma 3.9 *$\omega(f;\delta)$, δ değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere:*

1. *$\omega(f;\delta)$ negatif olmayan monoton artan bir fonksiyondur.*
2. *$\omega(f;\delta) = 0 \Leftrightarrow f \equiv sabit.$*
3. *$\lim_{\delta \to 0^+} \omega(f;\delta) = 0$.*

İspat.

1. $\omega(f;\delta)$ fonksiyonu, (3.8) tanımından görüldüğü gibi negatif fonksiyon değildir. Monoton artan olduğunu göstermek için $\delta_1 < \delta_2$ kabul edersek,

   $$\Psi_1 = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{A} : \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \leq \delta_1\}$$

   ve

   $$\Psi_2 = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{A} : \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \leq \delta_2\}$$

   olmak üzere $\Psi_1 \subset \Psi_2$ olacağından ve küme genişledikçe maksimum azalmadığından dolayı

   $$\omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$$

   elde edilir.

2. C keyfi bir sabit sayı olmak üzere $f(x,y) \equiv C$ olsun. Bu durumda (3.8) den $\omega(f;\delta) \equiv 0$ bulunur. Diğer taraftan $\omega(f;\delta) \equiv 0$ ise bu durumda

   $$\max_{\substack{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \leq \delta \\ (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{A}}} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \equiv 0$$

olur. O halde, $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| = 0$ ve böylece $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ bulunur. (x_i, y_i) noktaları $\mathbb{A}$ karesel bölgesinin keyfi noktarı olduğundan f in sabit fonksiyon olduğu gösterilmiş olur.

3. f fonksiyonu $\mathbb{A}$ karesel bölgesinde sürekli ve $\mathbb{A}$ kapalı olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{A}$ da düzgün süreklidir. Öyle ki, $\forall\epsilon > 0$ için yalnızca ϵ a bağlı bir δ_1 vardır öyle ki $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \delta_1$ olduğunda

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$$

kalır.

$\delta \to 0^+$ olduğundan $\delta < \delta_1$ seçilebilir ve böylece $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \delta$ eşitsizliğinden $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \delta_1$ elde edilir ve bu durumda da (3.3.) eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\max_{\substack{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \leq \delta \\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{A}}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$$

olur. Yani, $\omega(f; \delta) < \epsilon$ elde edilir.

$\square$

Lemma 3.10 *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\omega(f; n\delta) \leq n\omega(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $h > 0$ olmak üzere $x_1 = x + h$, $x_2 = x$, $y_1 = y + h$ ve $y_2 = y$ seçilirse $(x_1, y_1) = (x + h, y + h)$, $(x_2, y_2) = (x, y)$ için

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{2}h$$

elde edilir. Bu durumda (3.8) tam süreklilik modülü tanımından

$$\omega(f; \delta) = \max_{\substack{h \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}} \\ (x,y)\in\mathbb{A}}} |f(x + h, y + h) - f(x, y)| \tag{3.9}$$

yazılır. Böylece

$$\omega(f; n\delta) = \max_{\substack{h \leq \frac{n\delta}{\sqrt{2}} \\ (x,y)\in\mathbb{A}}} |f(x + h, y + h) - f(x, y)|$$

bulunur. Son ifadede h yerine nh yazılırsa

$$\omega(f;n\delta) = \max_{\substack{h\leq\frac{\delta}{\sqrt{2}} \\ (x,y)\in\mathbb{A}}} |f(x+nh,y+nh)-f(x,y)| \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilir. (3.10) eşitliğinin sağ tarafındaki fark ifadesi ele alınırsa

$$\begin{aligned}
&f(x+nh,y+nh)-f(x,y)\\
&= f(x+nh,y+nh)-f(x+(n-1)h,y+(n-1)h)\\
&+ f(x+(n-1)h,y+(n-1)h)-f(x+(n-2)h,y+(n-2)h)\\
&+ f(x+(n-2)h,y+(n-2)h)-...+f(x+h,y+h)+f(x,y)\\
&= \sum_{k=1}^{n}[f(x+kh,y+kh)-f(x+(k-1)h,y+(k-1)h)]
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafından mutlak değer alınırsa

$$|f(x+nh,y+nh)-f(x,y) \leq \sum_{k=1}^{n}|f(x+kh,y+kh)-f(x+(k-1)h,y+(k-1)h)|$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte $\forall(x,y)\in\mathbb{A}$ noktalarına ve $h\leq\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ eşitsizliğini sağlayan h değerlerine göre maksimum alınırsa (3.9) ve (3.10) ifadelerinden

$$\omega(f;n\delta)\leq\sum_{k=1}^{n}\omega(f;\delta)=n\omega(f;\delta)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır. □

Lemma 3.11 *Herhangi bir $\lambda>0$ sayısı için*

$$\omega(f;\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $[|\lambda|]$ ile λ sayısının tam kısmı gösterilsin. Bu durumda tam değer tanımından

$$[|\lambda|]\leq\lambda\leq[|\lambda|]+1$$

eşitsizliği yazılabilir. $\omega(f;\delta)$ fonksiyonu monoton olduğundan

$$\omega(f;\lambda\delta)\leq\omega(f;([|\lambda|]+1)\delta)$$

elde edilir. $[|\lambda|]+1$ sayısı bir tam sayı olduğundan Lemma 3.10 dan

$$\omega(f;([|\lambda|]+1)\delta)\leq([|\lambda|]+1)\omega(f;\delta)$$

bulunur. Böylece son iki eşitsizlikten

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq ([|\lambda|]+1)\omega(f;\delta)$$

elde edilir. Burada $[|\lambda|] < \lambda$ olduğu kullanılırsa istenen eşitsizlik elde edilmiş olur. $\square$

Aşağıda f fonksİyonuna göre kısmi süreklilik modüllerinin tanımları verilmiştir.

Tanım 3.12 *f, $\mathbb{A}$ karesel bölgesinde sürekli fonksiyon ve $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega^{(1)}(f;\delta) = \max_{\substack{(x_1,y),(x_2,y)\in\mathbb{A} \\ |x_1-x_2|\leq\delta}} |f(x_1,y)-f(x_2,y)| \tag{3.11}$$

ve

$$\omega^{(2)}(f;\delta) = \max_{\substack{(x,y_1),(x,y_2)\in\mathbb{A} \\ |y_1-y_2|\leq\delta}} |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \tag{3.12}$$

fonksiyonlarına sırasıyla f fonksiyonun x ve y değişkenlerine göre kısmi süreklilik modülleri denir.

Tam süreklilik modulünde olduğu gibi kısmi süreklilik modülleri de aynı özellikleri sağlamaktadır.

Tanım 3.13 *f fonksiyonu $\mathbb{A}$ karesel bölgesinde tanımlı ve $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ bu bölgede keyfi noktalar olsun. Eğer f fonksiyonu,*

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| \leq C\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad 0<\alpha<1 \tag{3.13}$$

koşulunu sağlarsa bu durumda f fonksiyonuna $\mathbb{A}$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlar yada $Lip\alpha$ sınıfındandır denir. Burada C Lipschitz sabiti olarak adlandırılan keyfi bir sabit sayıdır.

Tanım 3.14 *f fonksiyonu $\mathbb{A}$ karesel bölgesinde tanımlı ve $(x_1,y),(x_2,y)$ bu bölgede keyfi noktalar olsun. Eğer f fonksiyonu,*

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)| \leq C|x_1-x_2|^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1 \tag{3.14}$$

koşulunu sağlarsa bu durumda f fonksiyonuna $\mathbb{A}$ üzerinde x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar ya da x değişkenine göre $Lip\alpha$ sınıfındandır denir ve $f \in Lip_x\alpha$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $(x,y_1),(x,y_2)$ bu bölgede keyfi noktalar olsun. Eğer f fonksiyonu,

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq C|y_1-y_2|^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1 \tag{3.15}$$

koşulunu sağlarsa bu durumda f fonksiyonuna $\mathbb{A}$ üzerinde y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar ya da y değişkenine göre $Lip\alpha$ sınıfındandır denir ve $f \in Lip_y\alpha$ şeklinde gösterilir.

(3.13) eşitsizliğinden,

$$\lim_{(x_1,y_1)\to(x_2,y_2)} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| = 0$$

elde edilir ve böylece $\mathbb{A}$ üzerinde $f \in Lip\alpha$ ise, $\forall(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{A}$ için

$$\lim_{(x_1,y_1)\to(x_2,y_2)} f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$$

olmasından f fonksiyonunun $\mathbb{A}$ üzerinde sürekli olduğu görülür. Benzer şekilde f fonksiyonunun $\mathbb{A}$ üzerinde $f \in Lip_x\alpha$ ve $f \in Lip_y\alpha$ olması durumlarında da sırasıyla x ve y değişkenine göre sürekli oldukları gösterilebilir.

Tam süreklilik modülünün (3.8) formülünde (3.15) Lipschitz koşulu yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\omega(f;\delta) &= \max_{\substack{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\le\delta \\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{A}}} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \\
&\le C \max_{\substack{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\le\delta \\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{A}}} \left((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\le C\delta^\alpha,
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $f \in Lip\alpha$ ise

$$\omega(f;\delta) \le C\delta^\alpha \tag{3.16}$$

eşitsizliği doğrudur. Benzer şekilde (3.11) ve (3.12) kısmi süreklilik modüllerinin tanımlarından $f \in Lip_x\alpha$ ve $f \in Lip_y\alpha$ olduğunda sırasıyla,

$$\omega^{(1)}(f;\delta) \le C\delta^\alpha \tag{3.17}$$

ve

$$\omega^{(2)}(f;\delta) \le C\delta^\alpha \tag{3.18}$$

eşitsizliklerinin doğru olduğu görülür.

Ayrıca tam ve kısmi süreklilik modüllerinin tanımlarından $\mathbb{A}$ karesel bölgesinin keyfi noktalarında

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \omega\left(f; \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) \tag{3.19}$$

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \omega^{(1)}\left(f; |x_1 - x_2|\right) \tag{3.20}$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \omega^{(2)}\left(f; |y_1 - y_2|\right) \tag{3.21}$$

eşitsizliklerinin doğru olduğu açıktır.

3.4. Lineer Pozitif Operatörler

Bu bölümde operatör teorisinin temel tanım ve teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

Tanım 3.15 *X ve Y fonksiyon uzayları ve $G \subset X$ olsun. G nin her bir elemanına Y nin bir elemanını karşılık getiren kurala G den Y ye bir operatör veya dönüşüm denir.*

G den Y ye tanımlanan A operatörü $A : G \to Y$ ile gösterilir. G kümesine operatörün tanım kümesi denir ve $G = \mathfrak{D}(A)$ ile gösterilir. $x \in G$ elemanlarının $A(x) \in Y$ operatör altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye de A operatörünün değer kümesi denir ve

$$\mathfrak{R}(A) = \{y \in Y : y = A(x), x \in \mathfrak{D}(A)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.16 *$A : \mathfrak{D}(A) \subset X \to Y$ ve X, Y bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlı lineer uzaylar, $\mathfrak{D}(A)$ lineer alt uzay olmak üzere aşağıdaki iki koşul sağlansın:*

i. $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{D}(A)$ *için* $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$,

ii. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathfrak{D}(A)$ *için* $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Bu durumda A operatörüne lineer operatör denir.

Başka bir ifadeyle, A operatörü $\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{D}(A)$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ için

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2)$$

eşitliğini sağlıyorsa A operatörüne lineer operatör denir.

Bu tezde X ve Y lineer uzayları fonksiyon sınıfları olarak düşünülmüştür. Bunun için tanım kümesi U olan fonksiyonlar sınıfı X ve tanım kümesi V olan fonksiyonlar sınıfı Y olsun. $A : X \to Y$ operatörü için $f \in X$ fonksiyonunun, A operatörü altındaki görüntüsünün bir $x \in V$ noktasındaki gösterimi

$$A\left(f(t);x\right) = g(x)$$

biçimindedir. Kolaylık olması için $A(f;x) = g(x)$ yazılabilir.

Tanım 3.17 *$A : X \to Y$ operatörü, her negatif olmayan f fonksiyonu için*

$$A(f;x) \geq 0, \quad x \in V$$

koşulunu sağlıyorsa A operatörüne pozitif operatör denir.

Böylece hem lineer hem de pozitif olan operatöre lineer pozitif operatör denir.

Ayrıca lineer pozitif operatörler monoton artandır. Gerçekten; $\forall t \in U$ ve $f_1, f_2 \in X$ için $f_1(t) \geq f_2(t)$ olsun. Bu durumda $f_1(t) - f_2(t) \geq 0$ olur. Böylece A lineer pozitif operatör ise

$$A(f_1 - f_2;x) \geq 0 \Rightarrow A(f_1;x) - A(f_2;x) \geq 0$$

olur. O halde

$$A(f_1;x) \geq A(f_2;x) \tag{3.22}$$

elde edilir.

Her $t \in U$ için, A lineer pozitif bir operatör olmak üzere

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$$

eşitsizliğine A operatörü uygulanırsa

$$-A\left(|f|;x\right) \leq A\left(f;x\right) \leq A\left(|f|;x\right)$$

bulunur ve böylece

$$\left|A\left(f;x\right)\right| \leq A\left(|f|;x\right)$$

elde edilir.

Tanım 3.18 *X ve Y normlu lineer uzaylar, X ve Y üzerindeki normlar sırasıyla $\|.\|_X$ ve $\|.\|_Y$ ile gösterilsin. $A : X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda eğer*

$$\|A(f)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan bir C pozitif sayısı bulunuyorsa A operatörüne sınırlı operatör denir.

Bu koşulu sağlayan C sayılarının infimumuna A operatörünün normu denir ve $\|A\|_{X\to Y}$ ya da $\|A\|$ ile gösterilir.

3.5. Lineer Pozitif Operatörler İçin Korovkin Teoremi

İlk olarak 1952 yılında H. Bohman, toplam şeklinde verilen lineer pozitif operatörler dizisi ile $[0,1]$ aralığında tanımlanan sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşım problemini incelemiştir.

H. Bohman, $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olmak üzere, genel terimi

$$A_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n})p_{k,n}(x), \quad p_{k,n}(x) \geq 0$$

olan dizinin $[0,1]$ üzerinde $n \to \infty$ iken f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$A_n(t^r;x) \to x^r, \quad r = 0,1,2 \tag{3.23}$$

olduğunu ispatlamıştır. Burada operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P.P. Korovkin Bohman teoreminin koşullarının genel durumda da geçerli olduğunu ispatlayan bir teorem vermiştir.

Teorem 3.19 *(A_n) lineer pozitif operatörler dizisi (3.23) koşullarını $[a,b]$ aralığında düzgün alarak sağlıyorsa, bu durumda tüm reel eksende sınırlı ve $C[a,b]$ ye ait olan her bir f fonksiyonu için*

$$A_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

olur.

Korovkin teoreminin ispatına bir çok kaynaktan ulaşmak mümkündür.

1962 yılında Baskakov, Korovkin teoremindeki koşullardan biri olan f fonksiyonunun tüm reel eksende sınırlı olması koşulunun yerine, M_f, f fonksiyonuna bağlı bir sabit sayı olmak üzere, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f(1+x^2) \tag{3.24}$$

koşulunun sağlanması durumunda da düzgün yakınsamanın olacağını ispatlamıştır.

1995 yılında Akif HACIYEV, Korovkin teoreminin yalnızca $\mathbb{R}$ uzayında değil aynı zamanda $\mathbb{R}^m$ uzayında da geçerli olduğunu ifade ve ispat etmiştir.

Teorem 3.20 *$D \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı bir bölge olmak üzere $C_b(D)$ ile D bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ uzayında sınırlı olan reel değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. Eğer (A_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $K \subset D$ kompakt bölgesinde $n \to \infty$ için*

$$\begin{array}{lll} A_n(1;x) & \rightrightarrows & 1 \\ A_n(t_i;x) & \rightrightarrows & x_i \quad i=1,2,3,...,m \\ A_n(|t|^2;x) & \rightrightarrows & |x|^2 \end{array} \tag{3.25}$$

$(m+2)$ sayıda koşulu sağlıyorsa, bu durumda keyfi $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için K üzerinde $n \to \infty$ iken

$$A_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

olur. (3.25) koşullarındaki $|x|^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2$ dir.

İspat. $\forall \epsilon > 0, \forall t \in \mathbb{R}^m$ ve $\forall x \in K$ için f fonksiyonu sınırlı olduğundan $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. O halde $x, t \in K$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \tag{3.26}$$

olur. f sürekli fonksiyon olduğundan her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $x \in K, t \in \mathbb{R}$ ve $|t-x| < \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \epsilon \tag{3.27}$$

bulunur. $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 0$ olduğundan (3.27) eşitsizliğinin sağ tarafına eklenebilir. Böylece

$$|f(t) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \tag{3.28}$$

elde edilir. Lineer pozitif operatörlerin özelliğinden

$$
\begin{aligned}
|A_n(f(t);x)-f(x)| &\leq |A_n(f(t)-f(x);x|+|f(x)||A_n(1;x)-1| \\
&\leq A_n(|f(t)-f(x)|;x)+|f(x)||A_n(1;x)-1| \\
&\leq \epsilon+\frac{2M}{\delta^2}A_n(|t-x|^2;x)+|f(x)||A_n(1;x)-1| \\
&\leq \epsilon+\frac{2M}{\delta^2}\{A_n(|t|^2;x)-2\sum_{k=1}^{m}x_kA_n(t_k;x)+|x|^2A_n(1;x)\} \\
&+|f(x)||A_n(1;x)-1| \\
&\leq \epsilon+\frac{2M}{\delta^2}\{[A_n(|t|^2;x)-|x|^2]-2\sum_{k=1}^{m}x_k[A_n(t_k;x)-x_k] \\
&+|x|^2[A_n(1;x)-1]\}+|f(x)||A_n(1;x)-1|
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.25) koşullarından $n\to\infty$ ve $\forall x\in K$ için son eşitsizliğin her iki tarafından limit alınırsa $|A_n(f(t);x)-f(x)|\rightrightarrows 0$, yani $A_n(f(t);x)\rightrightarrows f(x)$ bulunur. □

Yukarıda ispatı verilen teoremin koşullarındaki f fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}^m$ uzayında sınırlı olması koşulu yerine f fonksiyounun

$$|f(x)|\leq M_f(1+|x|^2) \tag{3.29}$$

koşulunu sağlaması da yeterlidir. Burada M_f, f fonksiyonuna bağlı sabit sayıdır.

Teorem 3.21 *$C_{M_f}(D)$, $D\subset\mathbb{R}^m$ sınırlı bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de (3.29) koşulunu sağlayan foksiyonların sınıfı olmak üzere eğer, (A_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $K\subset D$ kompakt bölgesinde $n\to\infty$ iken (3.28) koşullarını sağlıyorsa, bu durumda herhangi $f\in C_{M_f}(D)$ için K üzerinde $n\to\infty$ iken*

$$A_n(f;x)\rightrightarrows f(x)$$

olur.

İspat. Teoremin hipotezinden $f\in C_{M_f}(D)$ olsun. Bu durumda f sürekli olduğundan süreklilik tanımından $\forall x,y\in D$ ve $\forall\epsilon>0$ için $|t-x|<\delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)|<\epsilon$ olacak şekilde bi $\delta>0$ sayısı vardır. $t\in\mathbb{R}^m$ ve $x\in K$ olmak üzere $|t-x|\geq\delta$ olsun. Bu durumda (3.29) koşulundan ekle çıkar yaparak

$$
\begin{aligned}
|f(t)-f(x)| &\leq M_f(2+|t|^2+|x|^2) \\
&= M_f(2+|t-x|^2+2x(t-x)+2|x|^2) \\
&\leq M_f(2+|t-x|^2+2\sum_{k=1}^{m}x_k(t_k-x_k)+2|x|^2)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeye Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}|f(t)-f(x)| &\leq M_f(2+|t-x|^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{m}x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(t_k-x_k)^2}+2|x|^2) \\ &\leq M_f(2+|t-x|^2+2|x||t-x|+2|x|^2)\end{aligned}$$

bulunur. $|t-x| \geq \delta$ iken $\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından

$$\begin{aligned}|f(t)-f(x)| &\leq M_f|t-x|^2\left(\frac{2}{\delta^2}+1+\frac{2}{\delta}|x|+\frac{2}{\delta^2}|x|^2\right) \\ &\leq \frac{M_f}{\delta^2}|t-x|^2\left(2|x|^2+2\delta|x|+3\right) \\ &\frac{M_f}{\delta^2}|t-x|^2\left(4|x|^2+4\delta|x|+\delta^2+3\right) \\ &= \frac{M_f}{\delta^2}|t-x|^2\left((2|x|+\delta)^2+3\right)\end{aligned}$$

ifadesi bulunur. $x \in K$ olduğundan, $|x| \leq C_1$ olacak şekilde bir C_1 pozitif sayısı vardır. Yukadarıdaki son eşitsizlikte eşitsizliğin sağ tarfındaki ifade için $C = \frac{M_f}{\delta^2}\left((2C_1+\delta)^2+3\right)$ seçilir ve süreklilikten dolayı elde edilen ifade göz önüne alınırsa, $\forall x \in K$ ve $\forall t \in \mathbb{R}^m$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq \epsilon + C|t-x|^2$$

bulunur.

Lineer pozitif operatörlerin özellikleri ve

$$|t-x|^2 = |t|^2 - 2\sum_{k=1}^{m}x_k t_k + |x|^2$$

ifadesi birlikte değerlendirildiğinde,

$$\begin{aligned}A_n(f(t);x)-f(x) &= A_n(f(t);x)-A_n(f(x);x)+A_n(f(x);x)-f(x) \\ &= A_n(f(t)-f(x);x)+f(x)\left(A_n(1;x)-1\right)\end{aligned}$$

eşitliğinin her iki tarafından mutlak değer alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&|A_n(f(t);x) - f(x)| \\
&\le |A_n(f(t) - f(x);x)| + |f(x)|\,|\,(A_n(1;x) - 1)\,| \\
&\le A_n(|f(t) - f(x)|;x) + |f(x)|\,|\,(A_n(1;x) - 1)\,| \\
&\le \epsilon + CA_n\left(|t-x|^2;x\right) + |f(x)|\,|\,(A_n(1;x) - 1)\,| \\
&\le \epsilon + C\left(A_n(|t|^2;x) - 2\sum_{k=1}^{m} x_k A_n(t_k;x) + |x|^2 A_n(1;x)\right) + |f(x)|\,|\,(A_n(1;x) - 1)\,| \\
&\le \epsilon + C\left(A_n\left(|t|^2;x) - |x|^2\right) - 2\sum_{k=1}^{m} x_k (A_n(t_k;x) - x_k) + |x|^2 A_n(1;x)\right) \\
&+ |f(x)|\,|\,(A_n(1;x) - 1)\,|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada (3.25) düzgün yakınsaklık koşulları değerlendirildiğinde K üzerinde $n \to \infty$ iken

$$|A_n(f(t);x) - f(x)| \rightrightarrows 0,$$

yani,

$$A_n(f(t);x) \rightrightarrows f(x)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Aşağıda 1957 yılında Volkov tarafından lineer pozitif operatörler için verilen teorem ifade edilmiştir.

Teorem 3.22 *A_{nm} lineer pozitif operatörler dizisi için*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|A_{nm}(1;x,y) - 1\|_{C(X)} = 0$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|A_{nm}(t_1;x,y) - x\|_{C(X)} = 0$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|A_{nm}(t_2;x,y) - y\|_{C(X)} = 0$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|A_{nm}(t_1^2 + t_2^2;x,y) - (x^2 + y^2)\|_{C(X)} = 0$$

koşulları sağlansın. Bu durumda keyfi bir $C_b(X)$ fonksiyonu için

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|A_{nm}(f;x,y) - f(x,y)\|_{C(X)} = 0$$

olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü tanımlanmış ve bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Tanımlanan Bernstein-Kantorovich operatörünün süreklilik modüllerinin özellikleri kullanılarak yakınsaklık hızı hesaplanmıştır. Maple programı kullanılarak sürekli fonksiyonlar uzayına ait bazı fonksiyonlar için grafikler ve nümerik değer tabloları elde edilmiştir.

4.1. Operatörün Tanımlanması

$\mathbb{A} = [-1,1] \times [-1,1]$ olmak üzere $f \in C(\mathbb{A})$ için

$$D_{n,m}(f;x,y) = \frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1} f(t,u)dtdu, \quad (4.1)$$

iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü (4.1) ile tanımlansın. Burada $n, m \in \mathbb{N}$

$$\phi_{n,m}^{k,j}(x,y) = \varphi_n^k(x)\varphi_m^j(y) \quad (4.2)$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_n^k(x) &= \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \\ \varphi_m^j(y) &= \frac{1}{2^m}\binom{m}{j}(1+y)^j(1-y)^{m-j} \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Öncelikle $D_{n,m}$ operatörünün lineer ve pozitif operatör olduğunu gösterelim.

Lineerlik özelliği;

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{A}$ bölgesinde tanımlı $\forall f, g$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
&D_{n,m}(\alpha f + \beta g; x, y) \\
&= \frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y) \\
&\times \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(\alpha f(t,u)+\beta g(t,u))\,dtdu \\
&= \alpha\left(\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}f(t,u)dtdu\right) \\
&+ \beta\left(\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}g(t,u)dtdu\right) \\
&= \alpha D_{n,m}(f; x, y) + \beta D_{n,m}(g; x, y)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlandığından $D_{n,m}$ lineer operatördür.

Pozitiflik Özelliği;

$\forall k, n, j, m \in \mathbb{N}$ ve $\forall x, y \in \mathbb{A}$ için

$$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \geq 0$$

ve

$$\varphi_m^j(y) = \frac{1}{2^m}\binom{m}{j}(1+y)^j(1-y)^{m-j} \geq 0$$

olduğundan

$$\phi_{n,m}^{k,j}(x,y) = \varphi_n^k(x)\varphi_m^j(y) \geq 0$$

elde edilir. Eğer $f \geq 0$ ise

$$\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}f(t,u)dtdu \geq 0$$

olacağından $D_{n,m}$ operatörü pozitiftir.

4.2. $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich Operatörü ile Yaklaşım

Bu bölümde (4.1) ile tanımlanan $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörünün bazı yaklaşım özelliklerini gösterdikten sonra sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteren teoremi ispatlayalım.

Lemma 4.1 *$\forall(x,y) \in \mathbb{A}$ ve $\forall n,m \in \mathbb{N}$ için, (4.1) Bernstein-Kantorovich operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar:*

$$D_{n,m}(1;x,y) = 1, \tag{4.4}$$

$$D_{n,m}(t;x,y) = x - \frac{x}{n+1}, \tag{4.5}$$

$$D_{n,m}(u;x,y) = y - \frac{y}{m+1}, \tag{4.6}$$

$$D_{n,m}(t^2+u^2;x,y) = x^2 - \frac{3nx^2+x^2-n-\frac{1}{3}}{(n+1)^2} + y^2 - \frac{3my^2+y^2-m-\frac{1}{3}}{(m+1)^2}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} D_{n,m}(t^3+u^3;x,y) = x^3 &- \frac{x^3+6n^2x^3+3nx^3-3n^2x+6n+7nx+6nx^2}{(n+1)^3} \\ &+ y^3 - \frac{y^3+6m^2y^3+3my^3-3m^2y+6m+7my+6my^2}{(m+1)^3}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} D_{n,m}(t^4+u^4;x,y) = x^4 &- \frac{10n^3x^4-5n^2x^4+10nx^4-x^4+6n^3x^2+6nx^2}{(n+1)^4} \\ &+ \frac{10n^2x^2+4nx-3n^2-4n-\frac{1}{5}}{(n+1)^4} \\ &+ y^4 - \frac{10m^3y^4-5m^2y^4+10my^4-y^4+6m^3y^2+6my^2}{(m+1)^4} \\ &+ \frac{10m^2y^2+4my-3m^2-4m-\frac{1}{5}}{(m+1)^4} \end{aligned} \tag{4.9}$$

İspat. Öncelikle (4.4) eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned} &D_{n,m}(1;x,y) \\ &= \frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1} dtdu \\ &= \frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\frac{2}{m+1}\frac{2}{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y) \\ &= \frac{1}{2^n}(1+x+1-x)^n\frac{1}{2^m}(1+y+1-y)^m \\ &= 1. \end{aligned}$$

(4.5) eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$
\begin{aligned}
&D_{n,m}(t;x,y)\\
&=\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}tdtdu\\
&=\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\frac{2}{m+1}\\
&\times\frac{1}{2}\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^2-\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^2\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\left(\frac{2k+1}{n+1}-1\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k}{n+1}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\\
&=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n}\frac{n(n-1)!k}{k(k-1)!(n-k)!}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\sum_{j=0}^{m}\varphi_m^j(y)\\
&+\frac{1}{n+1}-1\\
&=\frac{n}{n+1}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^{k+1}(1-x)^{n-k-1}+\frac{1}{n+1}-1\\
&=\frac{n(1+x)}{2^{n-1}(n+1)}(1+x+1-x)^{n-1}+\frac{1}{n+1}-1\\
&=x-\frac{x}{n+1}.
\end{aligned}
$$

(4.6) eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$
\begin{aligned}
&D_{n,m}(u;x,y)\\
&=\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}udtdu\\
&=\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\frac{2}{n+1}\\
&\times\frac{1}{2}\left(\left(2\frac{j+1}{m+1}-1\right)^2-\left(2\frac{j}{m+1}-1\right)^2\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\left(\frac{2j+1}{m+1}-1\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{2j}{m+1}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)
\end{aligned}
$$

eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&D_{n,m}(u;x,y)\\
&=\frac{2}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2^m}\frac{m(m-1)!j}{j(j-1)!(m-j)!}(1+y)^j(1-y)^{m-j}\\
&+\frac{1}{m+1}-1\\
&=\frac{m}{m+1}\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}(1+y)^{j+1}(1-y)^{m-j-1}+\frac{1}{m+1}-1\\
&=\frac{m(1+y)}{2^{m-1}(m+1)}(1+y+1-y)^{m-1}+\frac{1}{m+1}-1\\
&=y-\frac{y}{m+1}.
\end{aligned}
$$

(4.7) eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$
\begin{aligned}
&D_{n,m}(t^2+u^2;x,y)\\
&=\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(t^2+u^2)dtdu\\
&=\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\frac{2}{m+1}\frac{1}{3}\left(\left(2\frac{k+1}{n+1}-1\right)^3-\left(2\frac{k}{n+1}-1\right)^3\right)\\
&+\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\frac{2}{n+1}\frac{1}{3}\left(\left(2\frac{j+1}{m+1}-1\right)^3-\left(2\frac{j}{m+1}-1\right)^3\right)\\
&=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\left(\frac{12k^2+12k+4}{(n+1)^2}-\frac{12k+6}{n+1}+3\right)\\
&+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\left(\frac{12j^2+12j+4}{(m+1)^2}-\frac{12j+6}{m+1}+3\right)\\
&=\frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\left(k(k-1)+k\right)\frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)k\\
&+\frac{4}{3(n+1)^2}-\frac{4}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)k-\frac{2}{n+1}+1\\
&+\frac{4}{(m+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\left(j(j-1)+j\right)\frac{4}{(m+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)j\\
&+\frac{4}{3(m+1)^2}-\frac{4}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)j-\frac{2}{m+1}+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)k(k-1) + \left(\frac{8}{(n+1)^2} - \frac{4}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)k \\
&+ \frac{4}{3(n+1)^2} - \frac{2}{n+1} + 1 \\
&+ \frac{4}{(m+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=2}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)j(j-1) + \left(\frac{8}{(m+1)^2} - \frac{4}{m+1}\right)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)j \\
&+ \frac{4}{3(m+1)^2} - \frac{2}{m+1} + 1 \\
&= \frac{4n(n-1)(1+x)^2}{(n+1)^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2} \\
&+ \frac{n(4-4n)(1+x)}{(n+1)^2}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1} + \frac{4}{3(n+1)^2} + \frac{n-1}{n+1} \\
&+ \frac{4m(m-1)(1+y)^2}{(m+1)^2}\frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m-2}{j}(1+y)^j(1-y)^{m-j-2} \\
&+ \frac{m(4-4nm)(1+y)}{(m+1)^2}\frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}(1+y)^j(1-y)^{m-j-1} + \frac{4}{3(m+1)^2} + \frac{m-1}{m+1} \\
&= \frac{n(n-1)(1+2x+x^2)}{(n+1)^2} + \frac{n(2-2n)(1+x)}{(n+1)^2} + \frac{4}{3(n+1)^2} + \frac{n^2-1}{(n+1)^2} \\
&+ \frac{m(m-1)(1+2y+y^2)}{(m+1)^2} + \frac{m(2-2m)(1+y)}{(m+1)^2} + \frac{4}{3(m+1)^2} + \frac{m^2-1}{(m+1)^2} \\
&= x^2 - \frac{3nx^2 + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} + y^2 - \frac{3my^2 + y^2 - m - \frac{1}{3}}{(m+1)^2}
\end{aligned}
$$

Benzer şekilde (4.8) ve (4.9) eşitliklerinin doğru olduğunu gösterebiliriz. □

Tanım 4.2 $\kappa_{n,m}^{i,k}(x,y) = D_{n,m}((t-x)^i + (u-y)^k; x, y) \quad \{i,k = 1,2,...\}$ *ile tanımlanan ifadelere* $D_{n,m}$ *oparatörünün* i *ve* k *ya bağlı merkezi momentleri denir.*

Lemma 4.1 den yararlanarak $D_{n,m}$ operatörü için merkezi momentleri hesaplayalım.

Lemma 4.3 *(4.1) ile tanımlanan* $D_{n,m}$ *operatörü her* $(x,y) \in \mathbb{A}$ *ve her* $n,m \in \mathbb{N}$ *için aşağıdaki eşitlikleri sağlar:*

$$D_{n,m}((t-x)^2; x, y) = \frac{3x^2 - 3nx^2 + 3n + 1}{3(n+1)^2}, \tag{4.10}$$

$$D_{n,m}((u-y)^2; x, y) = \frac{3y^2 - 3my^2 + 3m + 1}{3(m+1)^2}, \tag{4.11}$$

$$
\begin{aligned}
D_{n,m}((t-x)^4;x,y) &= \frac{n^2x^4+8nx^4+x^4+44nx^2+20n^2x^2+24n^2x+24n^2x^3}{(n+1)^4} \\
&+ \frac{24nx^3+20nx+2x^2+3n^2+4n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4},
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{n,m}((u-y)^4;x,y) &= \frac{m^2y^4+8my^4+y^4+44my^2+20m^2y^2+24m^2y+24m^2y^3}{(m+1)^4} \\
&+ \frac{24my^3+20my+2y^2+3m^2+4m+\frac{1}{5}}{(m+1)^4}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

İspat. Lemma 4.1. de (4.4)-(4.7) eşitliklerini kullanırsak;

$$
\begin{aligned}
D_{n,m}((t-x)^2;x,y) &= D_{n,m}((t^2-2tx+x^2);x,y) \\
&= D_{n,m}(t^2;x,y) - 2xD_{n,m}(t;x,y) + x^2D_{n,m}(1;x,y) \\
&= x^2 - \frac{3nx^2+x^2-n-\frac{1}{3}}{(n+1)^2} - 2x\left(x-\frac{x}{n+1}\right) + x^2 \\
&= \frac{3x^2-3nx^2+3n+1}{3(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

(4.10) eşitliği elde edilir. Şimdi (4.11) eşitliğinin doğruluğunu gösterelim:

$$
\begin{aligned}
D_{n,m}((u-y)^2;x,y) &= D_{n,m}((u^2-2uy+y^2);x,y) \\
&= D_{n,m}ut^2;x,y) - 2yD_{n,m}(u;x,y) + y^2D_{n,m}(1;x,y) \\
&= y^2 - \frac{3my^2+y^2-m-\frac{1}{3}}{(m+1)^2} - 2y\left(y-\frac{y}{m+1}\right) + y^2 \\
&= \frac{3y^2-3my^2+3m+1}{3(m+1)^2}.
\end{aligned}
$$

(4.4)-(4.9) eşitlerini kullanırsak;

$$
\begin{aligned}
& D_{n,m}((t-x)^4;x,y) \\
& = D_{n,m}(\left(t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4\right);x,y) \\
& = D_{n,m}(t^4;x,y) - 4xD_{n,m}(t^3;x,y) + 6x^2D_{n,m}(t^2;x,y) \\
& - 4x^3D_{n,m}(t;x,y) + x^4D_{n,m}(1;x,y) \\
& = x^4 - \frac{10n^3x^4 - 5n^2x^4 + 10nx^4 - x^4 + 6n^3x^2 + 6nx^2}{(n+1)^4} \\
& + \frac{10n^2x^2 + 4nx - 3n^2 - 4n - \frac{1}{5}}{(n+1)^4} \\
& - 4x\left(x^3 - \frac{x^3 + 6n^2x^3 + 3nx^3 - 3n^2x + 6n + 7nx + 6nx^2}{(n+1)^3}\right) \\
& + 6x^2\left(x^2 - \frac{3nx^2 + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2}\right) - 4x^3\left(x - \frac{x}{n+1}\right) + x^4 \\
& = \frac{n^2x^4 + 8nx^4 + x^4 + 44nx^2 + 20n^2x^2 + 24n^2x + 24n^2x^3}{(n+1)^4} \\
& + \frac{24nx^3 + 20nx + 2x^2 + 3n^2 + 4n + \frac{1}{5}}{(n+1)^4}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.13) eşitliğini gösterim:

$$
\begin{aligned}
& D_{n,m}((u-y)^4;x,y) \\
& = D_{n,m}(\left(u^4 - 4u^3y + 6u^2y^2 - 4uy^3 + y^4\right);x,y) \\
& = D_{n,m}(u^4;x,y) - 4yD_{n,m}(u^3;x,y) + 6y^2D_{n,m}(u^2;x,y) \\
& - 4y^3D_{n,m}(u;x,y) + y^4D_{n,m}(1;x,y) \\
& = y^4 - \frac{10m^3y^4 - 5m^2y^4 + 10my^4 - y^4 + 6m^3y^2 + 6my^2}{(m+1)^4} \\
& + \frac{10m^2y^2 + 4my - 3m^2 - 4m - \frac{1}{5}}{(m+1)^4} \\
& - 4y\left(y^3 - \frac{y^3 + 6m^2y^3 + 3my^3 - 3m^2y + 6m + 7my + 6my^2}{(m+1)^3}\right) \\
& + 6y^2\left(y^2 - \frac{3my^2 + y^2 - m - \frac{1}{3}}{(m+1)^2}\right) - 4y^3\left(y - \frac{y}{m+1}\right) + y^4 \\
& = \frac{m^2y^4 + 8my^4 + y^4 + 44my^2 + 20m^2y^2 + 24m^2y + 24m^2y^3}{(m+1)^4} \\
& + \frac{24my^3 + 20my + 2y^2 + 3m^2 + 4m + \frac{1}{5}}{(m+1)^4}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 4.4 *$x_0 \in [-1,1]$ sabit bir sayı olmak üzere her $(x_0, y) \in \mathbb{A}$ için pozitif bir $M_1(x_0)$ vardır öyleki $n \in \mathbb{N}$ için,*

$$D_{n,n}((t-x_0)^4; x_0, y) \leq M_1(x_0)(n+1)^{-2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem (4.1) ile tanımlanan $D_{n,m}$ lineer pozitif operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermektedir.

Teorem 4.5 *$f \in C(\mathbb{A})$ ve tüm $\mathbb{R}^2$ de sınırlı olsun. O halde, (4.1) ile tanımlı $D_{n,m}$ lineer pozitif operatörü $n, m \to \infty$ iken $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Yani,*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|D_{n,m}(f; x, y) - f\|_{C(\mathbb{A})} = 0.$$

İspat. $D_{n,m}$ lineer pozitif operatörünün $n, m \to \infty$ iken $C(\mathbb{A})$ normuna göre sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermek için Korovkin teoreminin şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir.

İlk olarak (4.4) eşitliğinden

$$\|D_{n,m}(1; x, y) - 1\|_{C(\mathbb{A})} = 0$$

olduğu açıktır. O halde buradan

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|D_{n,m}(1; x, y) - 1\|_{C(\mathbb{A})} = 0$$

elde edilir. Yani, $n, m \to \infty$ iken $D_{n,m}(1; x, y) \rightrightarrows 1$ dir.

(4.5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|D_{n,m}(t; x, y) - x\|_{C(\mathbb{A})} &= \max_{\substack{-1\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 1}} \left| x - \frac{x}{n+1} - x \right| \\ &= \max_{\substack{-1\leq x\leq 1 \\ -1\leq y\leq 1}} \left| -\frac{x}{n+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|D_{n,m}(t; x, y) - x\|_{C(\mathbb{A})} = 0$$

olduğu bulunur. Yani, $n, m \to \infty$ iken $D_{n,m}(t; x, y) \rightrightarrows x$ dir.

Yukarıdaki işlemlere benzer olarak (4.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|D_{n,m}(u; x, y) - y\|_{C(\mathbb{A})} &= \max_{\substack{-1\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1}} \left| y - \frac{y}{m+1} - y \right| \\
&= \max_{\substack{-1\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1}} \left| -\frac{y}{m+1} \right| \\
&\leq \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \|D_{n,m}(u; x, y) - y\|_{C(\mathbb{A})} = 0$$

olduğu bulunur. Yani, $n, m \to \infty$ iken $D_{n,m}(u; x, y) \rightrightarrows y$ dir.

Son olarak $n, m \to \infty$ iken $D_{n,m}(t^2 + u^2; x, y) \rightrightarrows x^2 + y^2$ olduğunu gösterelim. (4.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
&\|D_{n,m}(t^2 + u^2; x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(\mathbb{A})} \\
&= \max_{\substack{-1\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1}} \left| x^2 - \frac{3nx^2 + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} + y^2 - \frac{3my^2 + y^2 - m - \frac{1}{3}}{(m+1)^2} - x^2 - y^2 \right| \\
&= \max_{\substack{-1\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1}} \left| -\frac{3nx^2 + x^2 - n - \frac{1}{3}}{(n+1)^2} - \frac{3my^2 + y^2 - m - \frac{1}{3}}{(m+1)^2} \right| \\
&\leq \frac{n + \frac{1}{3}}{(n+1)^2} + \frac{m + \frac{1}{3}}{(m+1)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n, m \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \|D_{n,m}(t^2 + u^2; x, y) - (x^2 + y^2)\|_{C(\mathbb{A})} = 0$$

bulunur. Yani, $n, m \to \infty$ iken $D_{n,m}(t^2 + u^2; x, y) \rightrightarrows x^2 + y^2$ dir.

Böylece Korovkin teoreminin tüm koşullarının sağlandığı gösterilmiştir ve adı geçen teoreme göre Teorem 4.5 ispatlanmış olur. □

4.3. $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich Operatörünün Süreklilik Modülü ile Yaklaşım Hızının İncelenmesi

Bu bölümde (4.1) ile tanımlanan $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörü için

$$|D_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)|$$

ifadesinin f fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri arasındaki bağıntıyı elde edelim.

Teorem 4.6 *$f \in C(\mathbb{A})$ ve ω, $\omega^{(1)}$ ve $\omega^{(2)}$ f fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri olsun. O halde $\forall(x,y) \in \mathbb{A}$ için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:*

$$\left\| D_{n,m}(f;x,y) - f \right\|_{C(\mathbb{A})} \leq 2\left(\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)\right), \tag{4.14}$$

$$\left\| D_{n,m}(f;x,y) - f \right\|_{C(\mathbb{A})} \leq 2\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m+1}}\right). \tag{4.15}$$

İspat. (4.1) ve (4.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} D_{n,m}(f;x,y) - f(x,y) &= D_{n,m}(f;x,y) - D_{n,m}(f(x,y);x,y) \\ &= D_{n,m}\left((f(t,u) - f(x,y));x,y\right) \\ &= D_{n,m}\left((f(t,u) - f(t,y) + f(t,y) - f(x,y));x,y\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan her iki tarafın mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq D_{n,m}(|f(t,u)-f(t,y)|;x,y)+D_{n,m}(|f(t,y)-f(x,y)|;x,y)$$

elde edilir.

$$I_1 := D_{n,m}(|f(t,u) - f(t,y)|;x,y)$$

ve

$$I_2 := D_{n,m}(|f(t,y) - f(x,y)|;x,y)$$

olarak işaretleyelim. O halde

$$|D_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| \leq I_1 + I_2 \tag{4.16}$$

yazabiliriz. (3.12) kısmi süreklilik modülünün tanımından

$$|f(t,u) - f(t,y)| \leq \omega^{(2)}(f;|u-y|)$$

ifadesini I_1 de yerine yazarsak

$$I_1 \leq \frac{m+1}{2} \sum_{j=0}^{m} \varphi_m^j(y) \int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1} \omega^{(2)}(f;|u-y|)du \tag{4.17}$$

buluruz. Süreklilik modülünün özelliklerinden keyfi pozitif bir δ_m dizisi için

$$\omega^{(2)}(f;|u-y|) = \omega^{(2)}\left(f;\frac{|u-y|}{\delta_m}\delta_m\right) \leq \left(\frac{|u-y|}{\delta_m}+1\right)\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)$$

elde ediir. Bu ifadeyi (4.17) de yerine yazarsak ,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{m+1}{2}\sum_{j=0}^{m}\varphi_m^j(y)\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}\left(\frac{|u-y|}{\delta_m}+1\right)\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)du \\
&= \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\frac{m+1}{2}\sum_{j=0}^{m}\varphi_m^j(y)\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}|u-y|du\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte, eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygularsak,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\frac{m+1}{2}\sum_{j=0}^{m}\varphi_m^j(y)\left(\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(u-y)^2du\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}du\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_m^j(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varphi_m^j(y)\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(u-y)^2du\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

son eşitsizliğin sağ tarafında yeniden Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygulayalım.

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{m}\varphi_m^j(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varphi_m^j(y)\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(u-y)^2du\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\left(\frac{m+1}{2}\sum_{j=0}^{m}\varphi_m^j(y)\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(u-y)^2du\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\left(D_{n,m}\left((u-y)^2;x,y\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

elde ederiz. (4.18) eşitsizliğindeki

$$
D_{n,m}\left((u-y)^2;x,y\right)=\frac{y^2-my^2+m+\frac{1}{3}}{(m+1)^2}
$$

ifadesini ele alalım. Son ifadeden maximum alırsak

$$
\max_{-1\leq y\leq 1}\frac{y^2-my^2+m+\frac{1}{3}}{(m+1)^2}=\frac{m+\frac{1}{3}}{(m+1)^2}\leq\frac{1}{m+1}
$$

buluruz. Son ifadeyi (4.18) de yerine yazarsak

$$
I_1\leq\omega^{(2)}\left(f;\delta_m\right)\left[1+\frac{1}{\delta_m}\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right]
$$

elde ederiz. Burada $\delta_m=\frac{1}{\sqrt{m+1}}$ seçersek

$$
I_1\leq 2\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right) \tag{4.19}
$$

eşitsizliğini buluruz.

Şimdi benzer işlemleri I_2 için yapalım.

(3.11) kısmi süreklilik modülünün tanımından

$$|f(t,y)-f(x,y)|\leq \omega^{(1)}(f;|t-x|)$$

ifadesini I_2 de yerine yazarsak

$$I_2\leq \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\omega^{(1)}(f;|t-x|)du \tag{4.20}$$

buluruz. Süreklilik modülünün özelliklerinden keyfi pozitif bir δ_n dizisi için

$$\omega^{(1)}(f;|t-x|)=\omega^{(1)}\left(f;\frac{|t-x|}{\delta_n}\delta_n\right)\leq\left(\frac{|t-x|}{\delta_n}+1\right)\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)$$

elde edilir. Bu ifadeyi (4.20) de yerine yazarsak ,

$$\begin{aligned}I_2&\leq \frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\left(\frac{|t-x|}{\delta_n}+1\right)\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)dt\\&=\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{m}\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}|t-x|dt\right]\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizlikte, eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}I_2&\leq\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(x)\left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\&=\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{m}\left(\varphi_m^j(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varphi_m^j(y)\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

son eşitsizliğin sağ tarafında yeniden Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}I_2&\leq\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{n}\varphi_n^k(y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\&=\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}n\varphi_n^k(x)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}(t-x)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\&=\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\left(D_{n,m}\left((t-x)^2;x,y\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde ederiz. (4.21) eşitsizliğindeki

$$D_{n,m}\left((t-x)^2;x,y\right)=\frac{x^2-nx^2+n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$$

ifadesini ele alalım. Son ifadeden maximum alırsak

$$\max_{-1\leq x\leq 1}\frac{x^2-nx^2+n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}=\frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}\leq\frac{1}{n+1}$$

buluruz. Son ifadeyi (4.21) de yerine yazarsak

$$I_2\leq\omega^{(1)}\left(f;\delta_n\right)\left[1+\frac{1}{\delta_n}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$$

elde ederiz. Burada $\delta_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ seçersek

$$I_2\leq 2\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \tag{4.22}$$

eşitsizliğini buluruz. (4.19) ve (4.22) eşitsizliklerini (4.16) de yerine yazarsak

$$|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|\leq 2\left(\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)+\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi (4.15) eşitsizliğini ispatlayalım. (4.14) eşitsizliğinin ispatında olduğu gibi

$$\begin{aligned}D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)&=D_{n,m}(f;x,y)-D_{n,m}(f(x,y);x,y)\\&=D_{n,m}\left(\left(f(t,u)-f(x,y)\right);x,y\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|\leq D_{n,m}(|f(t,u)-f(x,y)|;x,y)$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta=\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}$ alınır ve süreklilik modülünün özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}|f(t,u)-f(x,y)|&\leq\omega\left(f;\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}\right)\\&=\omega\left(f;\frac{\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}}{\delta_{n,m}}\delta_{n,m}\right)\\&\leq\left(1+\frac{\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}}{\delta_{n,m}}\right)\omega(f;\delta_{n,m})\end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}&|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|\\&\leq D_{n,m}(\left(1+\frac{\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}}{\delta_{n,m}}\right)\omega(f;\delta_{n,m});x,y)\\&\leq\omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\Bigg[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\\&\times\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}dtdu\Bigg]\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizlikte $\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}dtdu$ ifadesine Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
&\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2}dtdu \\
&\leq \left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}((t-x)^2+(u-y)^2)dtdu\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}dtdu\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}((t-x)^2+(u-y)^2)dtdu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n+1}\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Elde edilen bu ifade (4.23) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \\
&\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\right. \\
&\left.\times\left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(t-x)^2+(u-y)^2dtdu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n+1}\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\left(\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\right. \\
&\left.\times\left(\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(t-x)^2+(u-y)^2dtdu\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\left(\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\left.\times\left(\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(t-x)^2+(u-y)^2dtdu\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\left(\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\right.\right. \\
&\left.\left.\times\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1}(t-x)^2+(u-y)^2dtdu\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left[1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\left(D_{n,m}((t-x)^2+(u-y)^2;x,y)\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece (4.10) ve (4.11) ifadelerinden

$$
\begin{aligned}
&|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \\
&\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left(1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\left(\frac{3x^2-3xn^2+3n+1}{3(n+1)^2}+\frac{3y^2-3xym^2+3m+1}{3(m+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\leq \omega\left(f;\delta_{n,m}\right)\left(1+\frac{1}{\delta_{n,m}}\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m+1}}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\delta_{n,m}=\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m+1}}$ seçilirse

$$|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq 2\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m+1}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde ispat tamamlanmış olur. □

Aşağıda $f \in C^2(\mathbb{A})$ fonksiyonu ile $D_{n,m}$ operatörü için Voronovskaya-tip teorem ispatlanmıştır.

Teorem 4.7 *$f \in C^2(\mathbb{A})$ yani; f sürekli fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevleri var ve sürekli olsun. O halde aşağıdaki eşitlik doğrudur:*

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\{D_{n,n}(f;x,y)-f(x,y)\} \\
&= -xf_x(x,y)-yf_y(x,y)+\frac{1}{2}\{(1-x^2)f_{xx}(x,y)+(1-y^2)f_{yy}(x,y)\}. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

İspat. $(x,y)\in\mathbb{A}$ ve $f \in C^2(\mathbb{A})$ olsun. ψ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$
\begin{aligned}
&\psi(t,u;x,y) \\
&= \begin{cases} \frac{f(t,u)-f(x,y)-f_x(t-x)-f_y(u-y)-\frac{1}{2}\{f_{xx}(t-x)^2+2f_{xy}(t-x)(u-y)+f_{yy}(u-y)^2\}}{\sqrt{(t-x)^4+(u-y)^4}} & , \quad (t,u)\neq(x,y) \\ 0 & , \quad (t,u)=(x,y) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Teoremin ifadesindeki varsayımlardan $\psi(.,.;x,y)=\psi(.,.)\in C(\mathbb{A})$ olur. $f\in C(\mathbb{A})$ foksiyonu için Taylor formülü kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
f(t,u) &= f(x,y)+f_x(x,y)(t-x)+f_y(x,y)(u-y) \\
&\quad+\frac{1}{2}\{f_{xx}(x,y)(t-x)^2+2f_{xy}(x,y)(t-x)(u-y)+f_{yy}(x,y)(u-y)^2\} \\
&\quad+\psi(t,u)\sqrt{(t-x)^4+(u-y)^4}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(4.1) ile tanımlı $D_{n,n}$ operatörü lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}
&D_{n,n}(f(t,u);x,y)\\
&= f(x,y) + f_x(x,y)D_{n,n}((t-x);x,y) + f_y(x,y)D_{n,n}((u-y);x,y)\\
&+ \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x,y)D_{n,n}((t-x)^2;x,y) + 2f_{xy}(x,y)D_{n,n}((t-x);x,y)D_{n,n}((u-y);x,y)\\
&+f_{yy}(x,y)D_{n,n}((u-y)^2;x,y)\Big]\\
&+ D_{n,n}\left(\psi(t,u)\sqrt{(t-x)^4+(u-y)^4};x,y\right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

yazılabilir. (4.25) eşitliğinin sağ tarafınaki son terime Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&|D_{n,n}\left(\psi(t,u)\sqrt{(t-x)^4+(u-y)^4};x,y\right)|\\
&\le \{D_{n,n}\left(\psi^2(t,u);x,y\right)\}^{\frac{1}{2}}\{D_{n,n}\left((t-x)^4+(u-y)^4;x,y\right)\}^{\frac{1}{2}}\\
&= \{D_{n,n}\left(\psi^2(t,u);x,y\right)\}^{\frac{1}{2}}\{D_{n,n}\left((t-x)^4;x,y\right)+D_{n,n}\left((u-y)^4;x,y\right)\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\psi \in C(\mathbb{A})$ olduğundan Theorem 4.5 ten dolayı

$$\lim_{n\to\infty} D_{n,n}\left(\psi^2(t,u);x,y\right)\} = \psi^2(x,y) = 0 \tag{4.26}$$

bulunur. O halde (4.26) eşitliğinden ve Lemma 4.4 ten,

$$\lim_{n\to\infty} nD_{n,n}\left(\psi(t,u)\sqrt{(t-x)^4+(u-y)^4};x,y\right) = 0 \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.25) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
&D_{n,n}(f(t,u);x,y) - f(x,y)\\
&= f_x(x,y)D_{n,n}((t-x);x,y) + f_y(x,y)D_{n,n}((u-y);x,y)\\
&+ \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x,y)D_{n,n}((t-x)^2;x,y) + 2f_{xy}(x,y)D_{n,n}((t-x);x,y)D_{n,n}((u-y);x,y)\\
&+f_{yy}(x,y)D_{n,n}((u-y)^2;x,y)\Big]\\
&+ D_{n,n}\left(\psi(t,u)\sqrt{(t-x)^4+(u-y)^4};x,y\right)
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitlikte her iki tarafı n ile çarpıp $n \to \infty$ iken limite geçilirse, (4.27) ve Lemma 4.4 ten (4.24) ispatlanmış olur. □

Teorem 4.8 *Her $f \in C^1(\mathbb{A})$ öyle ki; $f_x, f_y \in C(\mathbb{A})$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial x} D_{n,n}(f;x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad x \neq -1, 1 \tag{4.28}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial y} D_{n,n}(f;x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad y \neq -1,1 \tag{4.29}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat. Öncelikle (4.28) eşitliğinin doğruluğu ispatlanırsa (4.29) eşitliği benzer şekilde gösterilebilir. $x \neq -1,1$ için $(x,y) \in \mathbb{A}$ sabit bir nokta olsun. (4.1) ile verilen $D_{n,n}$ operatörü x değişkenine göre diferansiyellenirse

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} D_{n,n}(f(t,u);x,y) &= -\frac{n}{1-x} D_{n,n}(f(t,u);x,y)\\ &\quad + \frac{2}{(1+x)(1-x)} D_{n,n}(kf(t,u);x,y), \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

elde edilir. $f \in C^1(\mathbb{A})$ olduğundan f fonksiyonu için Taylor formülü yazılırsa

$$\begin{aligned}f(t,u) &= f(x,y) + f_x(x,y)(t-x) + f_y(x,y)(u-y)\\ &\quad + \chi(t,u;x,y)\sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2}, \quad (t,u) \in \mathbb{A}\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\chi(.,.;x,y) = \chi(.,.) \in C$ ve $\chi(x,y) = 0$ dır. f fonksiyonunun Taylor açılımı yukarıdaki eşitlikte yerine yazılır ve (4.4) ve (4.10) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x} D_{n,n}(f(t,u);x,y)\\ &= f(x,y)\Big\{ -\frac{n}{1-x} D_{n,n}(1;x,y) + \frac{2}{(1-x)(1+x)} D_{n,n}(k;x,y)\Big\}\\ &+ f_x(x,y)\Big\{ -\frac{n}{1-x} D_{n,n}(t-x;x,y) + \frac{2}{(1-x)(1+x)} D_{n,n}(k(t-x);x,y)\Big\}\\ &+ f_y(x,y)\Big\{ -\frac{n}{1-x} D_{n,n}(u-y;x,y) + \frac{2}{(1-x)(1+x)} D_{n,n}(k(u-y);x,y)\Big\}\\ &+ \frac{n}{(1-x)(1+x)} D_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n} - x - 1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} D_{n,n}(f(t,u);x,y) &= \frac{n}{n+1} f_x(x,y) + \frac{n}{(1-x)(1+x)} D_{n,n}\Bigg(\left(2\frac{k}{n} - x - 1\right)\\ &\quad \times \chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\Bigg)\end{aligned} \tag{4.30}$$

eşitliği elde edilir. (4.30) eşitliğinin sağ tarafındaki son terime Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&n\left|D_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n}-x-1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\right)\right| \\
&\leq \left\{D_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n}-x-1\right)^2;x,y\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{n^2D_{n,n}\left(\chi^2(t,u)((t-x)^2+(u-y)^2);x,y\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{D_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n}-x-1\right)^2;x,y\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{n^2D_{n,n}\left(\chi^4(t,u);x,y\right)\left[D_{n,n}\left((t-x)^4);x,y\right)\right.\right. \\
&\left.\left.+\,2D_{n,n}\left((t-x)^2;x,y\right))D_{n,n}\left((u-y)^2);x,y\right)+D_{n,n}\left((u-y)^4);x,y\right)\right]\right\}^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.17) ile verilen operatörün ifadesinden,

$$
\begin{aligned}
D_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n}-x-1\right)^2;x,y\right) &= D_{n,n}\left(4\frac{k^2}{n^2}-4\frac{k}{n}(x+1)+(x+1)^2;x,y\right) \\
&= \frac{4}{n^2}D_{n,n}(k^2;x,y)-\frac{4}{n}(x+1)D_{n,n}(k;x,y) \\
&+(x+1)^2D_{n,n}(1;x,y)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. $D_{n,m}(1;x,y)=1$,

$$
D_{n,n}(k^2;x,y)=\frac{n(n-1)(1+x)^2}{4}+\frac{n(1+x)}{2},
$$

ve

$$
D_{n,n}(k;x,y)=\frac{n(1+x)}{2}
$$

eşitlikleri birlikte düşünülürse,

$$
D_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n}-x-1\right)^2;x,y\right)=\frac{1-x^2}{n}.
$$

elde ederiz. Böylece, yukarıdaki son eşitsizlikte Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&n\left|D_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n}-x-1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\right)\right| \\
&\leq M(x,y)n^{-1}\left(D_{n,n}\left(\chi^4(t,u);x,y\right)\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.5 ten,

$$
\lim_{n\to\infty}D_{n,n}\left(\chi^4(t,u);x,y\right)=\chi^4(x,y)=0,\quad (x,y)\in\mathbb{A}
$$

yazılır. Bu ifade (4.31) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$
\lim_{n\to\infty}nD_{n,n}\left(\left(2\frac{k}{n}-x-1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\right)=0
$$

limiti elde edilir. Sonuç olarak buradan elde edilen son ifade (4.30) eşitliğinde kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial}{\partial x} D_{n,n}(f; x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

eşitliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi (4.29) eşitliğinin doğru olduğunu ispatlayalım. $y \neq -1, 1$ için $(x, y) \in \mathbb{A}$ sabit bir nokta olsun. (4.1) ile verilen $D_{n,n}$ operatörü y değişkenine göre diferansiyellenirse

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} D_{n,n}(f(t,u); x, y) &= -\frac{n}{1-y} D_{n,n}(f(t,u); x, y)\\ &+ \frac{2}{(1+y)(1-y)} D_{n,n}(jf(t,u); x, y), \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

elde edilir. $f \in C^1(\mathbb{A})$ olduğundan f fonksiyonu için Taylor formülü yazılırsa

$$\begin{aligned}f(t,u) &= f(x,y) + f_x(x,y)(t-x) + f_y(x,y)(u-y)\\ &+ \chi(t,u;x,y)\sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2}, \quad (t,u) \in \mathbb{A}\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\chi(.,.;x,y) = \chi(.,.) \in C$ ve $\chi(x,y) = 0$ dır. f fonksiyonunun Taylor açılımı yukarıdaki eşitlikte yerine yazılır ve (4.4) ve (4.10) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y} D_{n,n}(f(t,u); x, y)\\ &= f(x,y)\Big\{-\frac{n}{1-y} D_{n,n}(1; x, y) + \frac{2}{(1-y)(1+y)} D_{n,n}(j; x, y)\Big\}\\ &+ f_x(x,y)\Big\{-\frac{n}{1-y} D_{n,n}(u-y; x, y) + \frac{2}{(1-y)(1+y)} D_{n,n}(j(u-y); x, y)\Big\}\\ &+ f_y(x,y)\Big\{-\frac{n}{1-y} D_{n,n}(u-y; x, y) + \frac{2}{(1-y)(1+y)} D_{n,n}(j(u-y); x, y)\Big\}\\ &+ \frac{n}{(1-y)(1+y)} D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n} - y - 1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2}; x, y\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 den

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} D_{n,n}(f(t,u); x, y) &= \frac{n}{n+1} f_y(x,y) + \frac{n}{(1-y)(1+y)} D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n} - y - 1\right)\right.\\ &\left.\times\ \chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2}; x, y\right)\end{aligned} \tag{4.32}$$

eşitliği elde edilir. (4.32) eşitliğinin sağ tarafındaki son terime Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&n|D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n}-y-1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\right)| \\
&\leq \left\{D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n}-y-1\right)^2;x,y\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{n^2D_{n,n}\left(\chi^2(t,u)((t-x)^2+(u-y)^2);x,y\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n}-y-1\right)^2;x,y\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\Bigg\{n^2D_{n,n}\left(\chi^4(t,u);x,y\right)\Big[D_{n,n}\left((t-x)^4);x,y\right) \\
&+2D_{n,n}\left((t-x)^2;x,y\right)D_{n,n}\left((u-y)^2);x,y\right)+D_{n,n}\left((u-y)^4);x,y\right)\Big]\Bigg\}^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

bulunur.

(4.17) ile verilen operatörün ifadesinden,

$$
\begin{aligned}
D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n}-y-1\right)^2;x,y\right) &= D_{n,n}\left(4\frac{j^2}{n^2}-4\frac{j}{n}(y+1)+(y+1)^2;x,y\right) \\
&= \frac{4}{n^2}D_{n,n}(j^2;x,y)-\frac{4}{n}(y+1)D_{n,n}(j;x,y) \\
&+(y+1)^2D_{n,n}(1;x,y)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. $D_{n,m}(1;x,y)=1$,

$$D_{n,n}(j^2;x,y)=\frac{n(n-1)(1+y)^2}{4}+\frac{n(1+y)}{2},$$

ve

$$D_{n,n}(j;x,y)=\frac{n(1+y)}{2}$$

eşitlikleri birlikte düşünülürse,

$$D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n}-y-1\right)^2;x,y\right)=\frac{1-y^2}{n}.$$

elde edilir. Böylece, yukarıdaki son eşitsizlikte Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&n|D_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n}-y-1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\right)| \\
&\leq M(x,y)n^{-1}\left(D_{n,n}\left(\chi^4(t,u);x,y\right)\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.5 ten,

$$\lim_{n\to\infty}D_{n,n}\left(\chi^4(t,u);x,y\right)=\chi^4(x,y)=0,\quad (x,y)\in\mathbb{A}$$

yazılır. Bu ifade (4.33) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\lim_{n\to\infty} nD_{n,n}\left(\left(2\frac{j}{n}-y-1\right)\chi(t,u)\sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2};x,y\right)=0$$

limiti elde edilir. Sonuç olarak buradan elde edilen son ifade (4.32) eşitliğinde kullanılırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial}{\partial y}D_{n,n}(f;x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

eşitliğinin doğru olduğu gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.4. $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich Operatörü İçin Peetre's K-Fonksiyoneli

$C^2(\mathbb{A})$, tüm $f\in C(\mathbb{A})$ fonksiyonlarının uzayı olsun öyle ki; $i=1,2$ için $\frac{\partial^i f}{\partial x^i},\frac{\partial^i f}{\partial y^i}\in C(\mathbb{A})$ dır. $C^2(\mathbb{A})$ uzayında norm

$$\|f\|_{C^2(\mathbb{A})}=\|f\|_{C(\mathbb{A})}+\sum_{i=1}^{2}\left(\|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}\|_{C(\mathbb{A})}+\|\frac{\partial^i f}{\partial y^i}\|_{C(\mathbb{A})}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

$f\in C(\mathbb{A})$ fonksiyonunun Peetre's K-fonksiyoneli

$$\mathcal{K}(f;\delta)=\inf_{g\in C^2(\mathbb{A})}\{\|f-g\|_{C(\mathbb{A})}+\delta\|g\|_{C^2(\mathbb{A})},\quad \delta>0\}$$

şeklinde tanımlanır (Bleimann ve ark (1980)).

Teorem 4.9 *Her $f\in C(\mathbb{A})$ fonksiyonu için*

$$\|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\|_{C(\mathbb{A})}\le 2\mathcal{K}\left(f;\frac{\delta_{n,m}}{2}\right)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\delta_{n,m}=\max\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{m+1}\right)$ dir.

İspat. $g\in C^2(\mathbb{A})$ olsun. Taylor teoreminden,

$$\begin{aligned}
g(t,u)-g(x,y)&=g(t,y)-g(x,y)+g(t,u)-g(t,y)\\
&=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(t-x)+\int_x^t(t-\xi)\frac{\partial^2 g(\xi,y)}{\partial^2\xi^2}d\xi\\
&+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(u-y)+\int_y^u(u-\eta)\frac{\partial^2 g(x,\eta)}{\partial^2\eta^2}d\eta\\
&=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(t-x)+\int_0^{t-x}(t-x-\xi)\frac{\partial^2 g(\xi+x,y)}{\partial^2\xi^2}d\xi\\
&+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(u-y)+\int_0^{u-y}(u-y-\eta)\frac{\partial^2 g(x,\eta+y)}{\partial^2\eta^2}d\eta
\end{aligned}$$

elde ederiz. Son eşitliğin her iki tarafına $D_{n,m}$ operatörünü uygular ve daha sonra mutlak değer alırsak,

$$\begin{aligned}|D_{n,m}(g;x,y)-g(x,y)| \leq & \left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right| |D_{n,m}((t-x);x,y)| \\ & \left|D_{n,m}\left(\int_0^{t-x}(t-x-\xi)\frac{\partial^2 g(\xi+x,y)}{\partial^2\xi^2}d\xi;x,y\right)\right| \\ & + \left|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right| |D_{n,m}((u-y);x,y)| \\ & + \left|D_{n,m}\left(\int_0^{u-y}(u-y-\eta)\frac{\partial^2 g(x,\eta+y)}{\partial^2\eta^2}d\eta;x,y\right)\right|\end{aligned}$$

buluruz. Lemma 4.1 den $D_{n,m}(t-x;x,y) = -\frac{x}{n+1}$ ve $D_{n,m}(u-y;x,y) = -\frac{y}{m+1}$ eşitlikleri elde edilir. Bu ifadeleri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak, $\forall(x,y) \in \mathbb{A}$ için,

$$\begin{aligned}\|D_{n,m}(g;x,y)-g(x,y)\|_{C(\mathbb{A})} \leq & \frac{1}{n+1}\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{C(\mathbb{A})} + \frac{1}{m+1}\left\|\frac{\partial g}{\partial y}\right\|_{C(\mathbb{A})} \\ & + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right\|_{C(\mathbb{A})} |D_{n,m}((t-x)^2;x,y)| \\ & + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right\|_{C(\mathbb{A})} |D_{n,m}((u-y)^2;x,y)|\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.10) ve (4.11) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\|D_{n,m}(g;x,y)-g(x,y)\|_{C(\mathbb{A})} \leq & \frac{1}{n+1}\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{C(\mathbb{A})} + \frac{1}{m+1}\left\|\frac{\partial g}{\partial y}\right\|_{C(\mathbb{A})} \\ & + \frac{1}{2(n+1)}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right\|_{C(\mathbb{A})} + \frac{1}{2(m+1)}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right\|_{C(\mathbb{A})} \\ & \leq \max\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{m+1}\right)\left(\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\right\|_{C(\mathbb{A})} + \left\|\frac{\partial g}{\partial y}\right\|_{C(\mathbb{A})}\right. \\ & \left. + \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right\|_{C(\mathbb{A})} + \left\|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right\|_{C(\mathbb{A})}\right) \\ & \leq \delta_{n,m}\|g\|_{C^2(\mathbb{A})}\end{aligned}$$

buluruz. Burada $\delta_{n,m} = \max\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{m+1}\right)$ dir. $D_{n,m}$ operatörü lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}\|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\|_{C(\mathbb{A})} \leq & \|D_{n,m}(f;x,y)-D_{n,m}(g;x,y)\|_{C(\mathbb{A})} \\ & + \|D_{n,m}(g;x,y)-g(x,y)\|_{C(\mathbb{A})} + \|f-g)\|_{C(\mathbb{A})} \\ & \leq \|(f-g)\|_{C(\mathbb{A})}|D_{n,m}(1;x,y)| \\ & + \|D_{n,m}(g;x,y)-g(x,y)\|_{C(\mathbb{A})} + \|f-g)\|_{C(\mathbb{A})}\end{aligned}$$

yazabiliriz. (4.36) ve (4.4.) eşitsizliklerini birlikte düşünürsek,

$$\|D_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\|_{C(\mathbb{A})} \leq 2\left(\|f-g)\|_{C(\mathbb{A})} + \frac{\delta_{n,m}}{2}\|g\|_{C^2(\mathbb{A})}\right)$$

elde ederiz. $g \in C^2(\mathbb{A})$ üzerinde son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadeden infimum alırsak ispat tamamlanmış olur. □

4.5. $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich Operatörü için GBS Operatörünün Kurulması

X ve Y kompakt reel aralıklar olsun ve $\forall(x,y),(t,u) \in X \times Y$ için

$$\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y] = f(x,y) - f(x,u) - f(t,y) + f(t,u)$$

olmak üzere $\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y]$, f fonksiyonunun karışık fark denklemini tanımlasın.

Eğer $(x_0,y_0) \in X \times Y$ için

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Delta_{(x,y)}f[x_0,y_0;x,y] = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $f; X \times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $(x_0,y_0) \in X \times Y$ noktasında B-sürekli fonksiyon denir (Bögel (1962-1963)).

Eğer $\forall(x,y),(t,u) \in X \times Y$ için

$$|\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y]| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa $\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y]$ fonksiyonuna $X \times Y$ üzerinde B-sınırlı fonksiyon denir. Ayrıca $X \times Y$, $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir alt kümesi ise o halde $X \times Y$ üzerinde her B-sürekli fonksiyon aynı zamanda B-sınırlıdır.

Bu tezde, $B_B(\mathbb{A})$ ile $\mathbb{A}$ üzerinde B-sınırlı foksiyonlar uzayını, $C_B(\mathbb{A})$ ile de $\mathbb{A}$ üzerinde B-sürekli fonksiyonlar uzayını işaretleyeceğiz ve bu uzaylar üzerinde $\|.\|_\infty$ supremum normu tanımlıdır.

$f \in C_B(\mathbb{A})$, $m,n \in \mathbb{N}$ ve $\forall(x,y) \in \mathbb{A}$ için, iki değişkenli Bernstein-Kantorovich $D_{n,m}$ operatörünün Generalized Boolean Sum (GBS) operatörü,

$$R_{n,m}(f(t,u);x,y) := D_{n,m}(f(t,y) + f(x,u) - f(t,u);x,y)$$

şeklinde gösterelim. Daha açık yazacak olursak

$$R_{n,m}(f;x,y) = \frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)$$
$$\times \int_{2^{\frac{k}{n+1}}-1}^{2^{\frac{k+1}{n+1}}-1}\int_{2^{\frac{j}{m+1}}-1}^{2^{\frac{j+1}{m+1}}-1}[f(t,y)+f(x,u)-f(t,u)]dtdu$$

biçimdedir. Burada $f \in C_B(\mathbb{A})$ ve $C_B(\mathbb{A})$ uzayı, $C(\mathbb{A})$ uzayının içinde olduğundan $R_{n,m}$ operatörü iyi tanımlıdır.

4.6. $R_{n,m}$ GBS Operatörüne Yaklaşım Hızının İncelenmesi

$f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonunun karışık düzgünlük modülü, $\forall(x,y),(t,u) \in \mathbb{A}$ ve $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2) := sup\{\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y] : |x-t| < \delta_1, \quad |y-u| < \delta_2\}$$

olmak üzere $\omega_{mixed} : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ile tanımlanır. Badea ve ark. (1986) tarafından ω_{mixed} fonksiyonunun temel özellikleri verilmiş ve genel süreklilik modülünün özelliklerine benzediği gösterilmiştir.

Şimdi $R_{n,m}$ GBS operatörünün yakınsaklık hızını $f \in C_B(\mathbb{A})$ için karışık düzgünlük modülünü kullanarak hesaplayalım.

Bunun için Badea ve ark. (1986) tarafından tanımlanan B-sürekli fonksiyonlar için iyi bilinen Shisha-Mond teoremini kullanalım.

Teorem 4.10 $\forall f \in C_B(\mathbb{A})$ *için* $\forall(x,y) \in \mathbb{A}$ *noktasında* $R_{n,m}$ *GBS operatörü aşağıdaki eşitsizliği sağlar:*

$$|R_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| \leq 4\omega_{mixed}\left(f; \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right). \tag{4.34}$$

İspat. $\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)$ fonksiyonunun tanımından ve $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ için

$$\omega_{mixed}(f;\lambda_1\delta_1,\lambda_2\delta_2) \leq (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)$$

eşitsizliğinden, $\forall(x,y),(t,u) \in \mathbb{A}$ ve $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\begin{aligned} |\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y]| &\leq \omega_{mixed}(f;|t-x|,|u-y|) \\ &\leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{|u-y|}{\delta_2}\right)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2) \end{aligned} \tag{4.35}$$

yazabiliriz. $\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y]$ fonksiyonunun tanımından

$$f(x,u)+f(t,y)-f(t,u)=f(x,y)-\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y]$$

buluruz. Bu eşitliğin her iki tarafına $D_{n,m}$ operatörünü uygularsak

$$R_{n,m}(f;x,y)=f(x,y)D_{n,m}(1;x,y)-D_{n,m}\left(\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y];x,y\right)$$

elde ederiz. $D_{n,m}(1;x,y)=1$ olduğundan,

$$R_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)=-D_{n,m}\left(\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y];x,y\right)$$

olur. Bu eşitlikte her iki tarafın mutlak değerini alırsak

$$|R_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|\leq D_{n,m}\left(|\Delta_{(x,y)}f[t,u;x,y]|;x,y\right)$$

buluruz. Burada (4.35) eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$|R_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|\leq D_{n,m}\left(\left|\left(1+\frac{|t-x|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{|u-y|}{\delta_2}\right)\omega_{mixed}\left(f;\delta_1,\delta_2\right)\right|;x,y\right)$$

eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadeye Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygulayalım:

$$\begin{aligned}|R_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|\leq&\Big[D_{n,m}(1;x,y)+\frac{1}{\delta_1}\sqrt{D_{n,m}((t-x)^2;x,y)}\\&+\frac{1}{\delta_2}\sqrt{D_{n,m}((u-y)^2;x,y)}\\&+\frac{1}{\delta_1\delta_2}\sqrt{D_{n,m}((t-x)^2;x,y)D_{n,m}((u-y)^2;x,y)}\Big]\\&\times\omega_{mixed}\left(f;\delta_1,\delta_2\right).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Lemma 4.3 te (4.10) ve (4.11) eşitliklerinden, $\forall(x,y)\in\mathbb{A}$ için

$$D_{n,m}((t-x)^2;x,y)\leq\frac{1}{n+1}$$

ve

$$D_{n,m}((u-y)^2;x,y)\leq\frac{1}{m+1}$$

eşitsilikleri elde edilir. Bu durumda $\delta_1=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ve $\delta_2=\frac{1}{\sqrt{m+1}}$ seçersek (4.36) eşitsizliğinden istenen sonuca ulaşırız. □

Şimdi B-diferansiyellenebilir fonksiyonlara $R_{n,m}$ operatörü ile yaklaşımın hızını verelim. Öncelikle B-diferansiyellenebilir fonksiyonun tanımını verelim.

Eğer,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\Delta_{(x,y)}f[x_0,y_0;x,y]}{(x-x_0)(y-y_0)}$$

limiti var ve sonlu ise, o halde $f : X \times Y \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(x_0, y_0) \in X \times Y$ noktalarında B-diferansiyellenebilir (Bögel diferansiyellenebilir) bir fonksiyondur denir ve $\mathcal{D}_{xy} f(x_0, y_0) := \mathcal{D}_B(f; x_0, y_0)$ ile gösterilir. Tüm B-diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı $\mathcal{D}_B(X \times Y)$ ile gösterilir. Bu tezde ise, $\mathbb{A}$ üzerinde B-diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı $\mathcal{D}_B(\mathbb{A})$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teorem Pop (2007) tarafından B-diferansiyellenebilir fonksiyonlar için yaklaşım hızının hesaplanmasını veren önemli bir teoremdir.

Teorem 4.11 *$f \in \mathcal{D}_B(\mathbb{A})$ ve $\mathcal{D}_B f \in B_B(\mathbb{A})$ olsun. O halde $\forall (x, y) \in \mathbb{A}$ için,*

$$|R_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq \frac{7}{\sqrt{(n+1)(m+1)}} \Big(\|\mathcal{D}_B f\|_\infty + \omega_{mixed}\left(\mathcal{D}_B f; \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)\Big) \tag{4.37}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $f \in \mathcal{D}_B(\mathbb{A})$ ise , $x < \xi < t$ ve $y < \eta < u$ için

$$\Delta_{(x,y)} f[t, u; x, y] = (t - x)(u - y)\mathcal{D}_B(\xi, \eta) \tag{4.38}$$

eşitliği sağlanır (Bögel (1962-1963)).

Açıktır ki,

$$\Delta_{(x,y)} f[\xi, \eta; x, y] = f(x, y) - f(x, \eta) - f(\xi, y) + f(\xi, \eta)$$

ifadesinin her iki tarafına B-diferansiyeli uygulanırsa,

$$\mathcal{D}_B f(\xi, \eta) = \Delta_{(x,y)} \mathcal{D}_f[\xi, \eta; x, y] + \mathcal{D}_B f(\xi, y) + \mathcal{D}_B f(x, \eta) - \mathcal{D}_B f(x, y)$$

eşitliği elde edilir.

$\mathcal{D}_B f \in B_B(\mathbb{A})$ olduğundan ve (4.38) özdeşliğinden,

$$\begin{aligned}
&|D_{n,m}\left(\Delta_{(x,y)} f[t, u; x, y]; x, y\right)| \\
&= |D_{n,m}\left((t - x)(u - y)\mathcal{D}_B f(\xi, \eta); x, y\right)| \\
&\leq D_{n,m}\left(|t - x||u - y|\left|\Delta_{(x,y)}\mathcal{D}_B f(\xi, \eta)\right|; x, y\right) \\
&+ D_{n,m}\left(|t - x||u - y|\left(|\mathcal{D}_B f(\xi, y)| + |\mathcal{D}_B f(x, \eta)| + |\mathcal{D}_B f(x, y)|\right); x, y\right) \\
&\leq D_{n,m}\left(|t - x||u - y|\omega_{mixed}\left(\mathcal{D}_B f; |\xi - x|, |\eta - y|; x, y\right)\right) \\
&+ 3\|\mathcal{D}_B f\|_\infty D_{n,m}\left(|t - x||u - y|; x, y\right)
\end{aligned}$$

yazılır. ω_{mixed} karışık düzgünlük modülü azalmayan fonksiyon alduğundan,

$$\begin{aligned}\omega_{mixed}\left(\mathcal{D}_B f; |\xi - x|, |\eta - y|; x, y\right) &\leq \omega_{mixed}\left(\mathcal{D}_B f; |t - x|, |u - y|; x, y\right)\\ &\leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_1}\right)\left(1 + \frac{|u-y|}{\delta_2}\right)\omega_{mixed}(\mathcal{D}_B f; \delta_1, \delta_2)\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Yukarıdaki eşitsizlikten ve $D_{n,m}$ operatörü lineer olduğundan,

$$\begin{aligned}|R_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &= |D_{n,m}\left(\Delta_{(x,y)} f[t, u; x, y]; x, y\right)|\\ &\leq [D_{n,m}\left(|t-x||u-y|; x, y\right)\\ &+ \frac{1}{\delta_2} D_{n,m}\left(|t-x|(u-y)^2; x, y\right)\\ &+ \frac{1}{\delta_1\delta_2} D_{n,m}\left((t-x)^2(u-y)^2; x, y\right)\Big]\,\omega_{mixed}(\mathcal{D}_B f; \delta_1, \delta_2)\\ &+ 3\|\mathcal{D}_B f\|_\infty D_{n,m}\left(|t-x||u-y|; x, y\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadelere Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}|R_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \Big[\sqrt{D_{n,m}\left((t-x)^2(u-y)^2; x, y\right)}\\ &+ \frac{1}{\delta_2}\sqrt{D_{n,m}\left((t-x)^2(u-y)^4; x, y\right)}\\ &+ \frac{1}{\delta_1\delta_2} D_{n,m}\left((t-x)^4(u-y)^4; x, y\right)\Big]\,\omega_{mixed}(\mathcal{D}_B f; \delta_1, \delta_2)\\ &+ 3\|\mathcal{D}_B f\|_\infty \sqrt{D_{n,m}\left((t-x)^2(u-y)^2; x, y\right)}\end{aligned}$$

bulunur. $D_{n,m}\left((t-x)^2; x, y\right) \leq \frac{1}{n+1}$ ve $D_{n,m}\left((u-y)^2; x, y\right) \leq \frac{1}{m+1}$ eşitsizliklerinden ve $(x, y), (t, u) \in \mathbb{A}$, $a, b \in \{1, 2\}$ için

$$D_{n,m}\left((t-x)^{2a}(u-y)^{2b}; x, y\right) = D_{n,m}\left((t-x)^{2a}; x, y\right) D_{n,m}\left((u-y)^{2b}; x, y\right)$$

olduğundan $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ve $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{m+1}}$ seçelirse

$$\begin{aligned}|R_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq \frac{7}{\sqrt{(n+1)(m+1)}}\Big(&\|\mathcal{D}_B f\|_\infty\\ &+ \omega_{mixed}\left(\mathcal{D}_B f; \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)\Big)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Cottin (1990) da, $f \in C_B(\mathbb{A})$ için karışık K-fonksiyonelini

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2) = \inf_{g_1, g_2, h}\{&\|f - g_1 - g_2 - h\|_\infty + t_1\|\mathcal{D}_B^{2,0} g_1\|_\infty\\ &+ t_2\|\mathcal{D}_B^{0,2} g_2\|_\infty + t_1 t_2\|\mathcal{D}_B^{2,2} h\|_\infty\}\end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $g_1 \in C_B^{2,0}$, $g_2 \in C_B^{0,2}$, $h \in C_B^{2,2}$ ve $0 \leq a, b \leq 2$ için $C_B^{a,b}$ uzayı, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq s \leq b$ olmak üzere $\mathcal{D}_B^{r,s} f$ sürekli karışık kısmi türevleri ile $f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonlarının uzayını göstermektedir.

$f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonunun kısmi türevleri;

$$\mathcal{D}_x f(t,u) := \mathcal{D}_B^{1,0}(f;t,u) = \lim_{x \to t} \frac{\Delta_x f\left([t,x];u\right)}{(x-t)}$$

ve

$$\mathcal{D}_y f(t,u) := \mathcal{D}_B^{0,1}(f;t,u) = \lim_{y \to u} \frac{\Delta_y f\left(t;[u,y]\right)}{(y-u)}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\Delta_x f\left([t,x];u\right) = f(x,u) - f(t,u)$ ve $\Delta_y f\left(t;[u,y]\right) = f(t,y) - f(t,u)$ dur. İkinci derecen kısmi türevler, adi türevlerde olduğu gibi alınır. Örneğin; $\Delta_x f(t,u)$ ifadesinin (t,u) noktasında y değişkenine göre türevi

$$\mathcal{D}_y \mathcal{D}_x f(t,u) := \mathcal{D}_B^{0,1} \mathcal{D}_B^{1,0}(f;t,u) = \lim_{y \to u} \frac{\Delta_y (\mathcal{D}_x f)\left(t;[u,y]\right)}{(y-u)}$$

şeklindedir.

Şimdi $R_{n,m}$ operatörünün $f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonları için yaklaşım hızını karışık K-fonksiyoneli ile verelim.

Teorem 4.12 *$R_{n,m}$ GBS operatörü, $\forall f \in C_B(\mathbb{A})$ fonksiyonu için,*

$$|R_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| \leq 2\mathcal{K}_{mixed}\left(f; \frac{1}{2(n+1)}, \frac{1}{2(m+1)}\right)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. $g_1 \in C_B^{2,0}$ fonksiyonunun Taylor açılımından,

$$g_1(t,u) = g_1(x,y) + (t-x)\mathcal{D}_B^{1,0} g_1(x,y) + \int_x^t (t-\xi)\mathcal{D}_B^{2,0} g_1(\xi,y)d\xi$$

yazılabilir (Bögel (1962-1963)).

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarfına $R_{n,m}$ operatörü uygulanırsa, $R_{n,m}((t-x);x,y) = 0$ olduğundan

$$R_{n,m}(g_1;x,y) = g_1(x,y) + R_{n,m}\left(\int_x^t (t-\xi)\mathcal{D}_B^{2,0} g_1(\xi,y)d\xi; x, y\right)$$

elde edilir. $R_{n,m}$ GBS operatörü tanımından,

$$\begin{aligned}\Big|R_{n,m}(g_1;x,y)-g_1(x,y)\Big| &= \Big|D_{n,m}\left(\int_x^t (t-\xi)\left[\mathcal{D}_B^{2,0}g_1(\xi,y)-\mathcal{D}_B^{2,0}g_1(\xi,u)\right]d\xi;x,y\right)\Big|\\ &\leq D_{n,m}\left(\Big|\int_x^t |t-\xi|\Big|\mathcal{D}_B^{2,0}g_1(\xi,y)-\mathcal{D}_B^{2,0}g_1(\xi,u)\Big|d\xi;x,y\Big|\right)\\ &\leq \Big\|\mathcal{D}_B^{2,0}g_1\Big\|_\infty D_{n,m}\left((t-x)^2;x,y\right)\\ &\leq \frac{1}{n+1}\Big\|\mathcal{D}_B^{2,0}g_1\Big\|_\infty\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde, $g_2\in C_B^{0,2}$ fonksiyonunun Taylor açılımından,

$$g_2(t,u)=g_2(x,y)+(u-y)\mathcal{D}_B^{0,1}g_2(x,y)+\int_y^u (u-\eta)\mathcal{D}_B^{0,2}g_2(x,\eta)d\eta$$

yazılabilir.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $R_{n,m}$ operatörü uygulanırsa, $R_{n,m}((u-y);x,y)=0$ olduğundan

$$R_{n,m}(g_2;x,y)=g_2(x,y)+R_{n,m}\left(\int_y^u (u-\eta)\mathcal{D}_B^{0,2}g_2(x,\eta)d\eta;x,y\right)$$

elde edilir. $R_{n,m}$ GBS operatörü tanımından,

$$\begin{aligned}\Big|R_{n,m}(g_2;x,y)-g_2(x,y)\Big| &= \Big|D_{n,m}\left(\int_y^u (u-\eta)\left[\mathcal{D}_B^{0,2}g_2(x,\eta)-\mathcal{D}_B^{0,2}g_2(x,\eta)\right]d\eta;x,y\right)\Big|\\ &\leq D_{n,m}\left(\Big|\int_y^u |u-\eta|\Big|\mathcal{D}_B^{0,2}g_2(x,\eta)-\mathcal{D}_B^{0,2}g_2(t,\eta)\Big|d\eta;x,y\Big|\right)\\ &\leq \Big\|\mathcal{D}_B^{0,2}g_2\Big\|_\infty D_{n,m}\left((u-y)^2;x,y\right)\\ &\leq \frac{1}{m+1}\Big\|\mathcal{D}_B^{0,2}g_2\Big\|_\infty\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi, $h\in C_B^{2,2}$ fonksiyonu Taylor açılımıdan,

$$\begin{aligned}h(t,u) &= h(x,y)+(t-x)\mathcal{D}_B^{1,0}h(x,y)+(u-y)\mathcal{D}_B^{0,1}h(x,y)\\ &\quad+(t-x)(u-y)\mathcal{D}_B^{1,1}h(x,y)+\int_x^t (t-\xi)\mathcal{D}_B^{2,0}h(\xi,y)d\xi\\ &\quad+\int_y^u (u-\eta)\mathcal{D}_B^{0,2}h(x,\eta)d\eta+\int_x^t (u-y)(t-\xi)\mathcal{D}_B^{2,1}h(\xi,y)d\xi\\ &\quad+\int_y^u (t-x)(u-\eta)\mathcal{D}_B^{1,2}h(x,\eta)d\eta+\int_x^t\int_y^u (t-\xi)(u-\eta)\mathcal{D}_B^{2,2}h(\xi,\eta)d\eta d\xi\end{aligned}$$

yazılır.

Bu ifade $R_{n,m}$ operatör tanımında yerine yazılır ve $R_{n,m}((t-x);x,y) = 0$, $R_{n,m}((u-y);x,y) = 0$ olduğu düşünülürse,

$$\begin{aligned}
\Big|R_{n,m}(h;x,y) - h(x,y)\Big| &= \Big|D_{n,m}\left(\int_x^t\int_y^u (t-\xi)(u-\eta)\mathcal{D}_B^{2,2}h(\xi,\eta)d\eta d\xi;x,y\right)\Big| \\
&\le D_{n,m}\left(\Big|\int_x^t\int_y^u (t-\xi)(u-\eta)\mathcal{D}_B^{2,2}h(\xi,\eta)d\eta d\xi\Big|;x,y\right) \\
&\le D_{n,m}\left(\int_x^t\int_y^u |t-\xi||u-\eta|\Big|\mathcal{D}_B^{2,2}h(\xi,\eta)\Big|d\eta d\xi;x,y\right) \\
&\le \frac{1}{4}\Big\|\mathcal{D}_B^{2,2}h\Big\|_\infty D_{n,m}\left((t-x)^2(u-y)^2;x,y\right) \\
&\le \frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)(m+1)}\Big\|\mathcal{D}_B^{2,2}h\Big\|_\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f \in C_B(\mathbb{A})$ için,

$$\begin{aligned}
\Big|R_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\Big| &\le \Big|(f-g_1-g_2-h)(xx,y)\Big| + \Big|(g_1 - R_{n,m}g_1)(x,y)\Big| \\
&+ \Big|(g_2 - R_{n,m}g_2)(x,y)\Big| + \Big|(h - R_{n,m}h)(x,y)\Big| \\
&+ \Big|R_{n,m}\left((f-g_1-g_2-h);x,y\right)\Big| \\
&\le 2\|f-g_1-g_2-h\|_\infty + \frac{1}{n+1}\Big\|\mathcal{D}_B^{2,0}g_1\Big\|_\infty \\
&+ \frac{1}{m+1}\Big\|\mathcal{D}_B^{0,2}g_2\Big\|_\infty + \frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)(m+1)}\Big\|\mathcal{D}_B^{2,2}h\Big\|_\infty \\
&\le 2\Bigg(\|f-g_1-g_2-h\|_\infty + \frac{1}{2(n+1)}\Big\|\mathcal{D}_B^{2,0}g_1\Big\|_\infty \\
&+\frac{1}{2(m+1)}\Big\|\mathcal{D}_B^{0,2}g_2\Big\|_\infty + \frac{1}{4}\frac{1}{(n+1)(m+1)}\Big\|\mathcal{D}_B^{2,2}h\Big\|_\infty\Bigg)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada tüm $g_1 \in C_B^{2,0}$, $g_2 \in C_B^{0,2}$ ve $h \in C_B^{2,2}$ fonksiyonları üzerinde infimum alınırsa istenen ifade elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

□

4.7. $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich Operatörünün Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar ile Yaklaşım Hızının İncelenmesi

Bu bölümde, Lipschitz sınıfından seçilen f fonksiyonları için $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörlerinin yakınsaklık hızı hesaplanmıştır.

Teorem 4.13 *Eğer f fonksiyonu (3.13) Lipschitz koşulunu sağlarsa, bu durumda*

$$|D_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)| \le C\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \tag{4.40}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (4.15) eşitsizliği Teorem 4.6 da ispatlanmıştı. Bu eşitsizlikte

$$\omega(f;\delta) \leq C\delta^{\alpha}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|D_{n,m}(f;x,y)-f| &\leq 2\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m+1}}\right) \\
&\leq 2C\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq C'\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{m+1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C' = 2C$ dir. Böylece (4.40) eşitsizliği ispatlanmış olur. □

Teorem 4.14 *Eğer f fonksiyonu (3.14) ve (3.15) Lipschitz koşullarını sağlarsa, bu durumda*

$$|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)| \leq C\left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}}+\frac{1}{(m+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\right) \tag{4.41}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (4.14) eşitsizliği Teorem 4.6 da ispatlanmıştı. Bu eşitsizlikte $f \in Lip_y^{\alpha}$ iken

$$\omega^{(1)}(f;\delta) \leq C\delta^{\alpha}$$

ve $f \in Lip_x^{\alpha}$ iken

$$\omega^{(2)}(f;\delta) \leq C\delta^{\alpha}$$

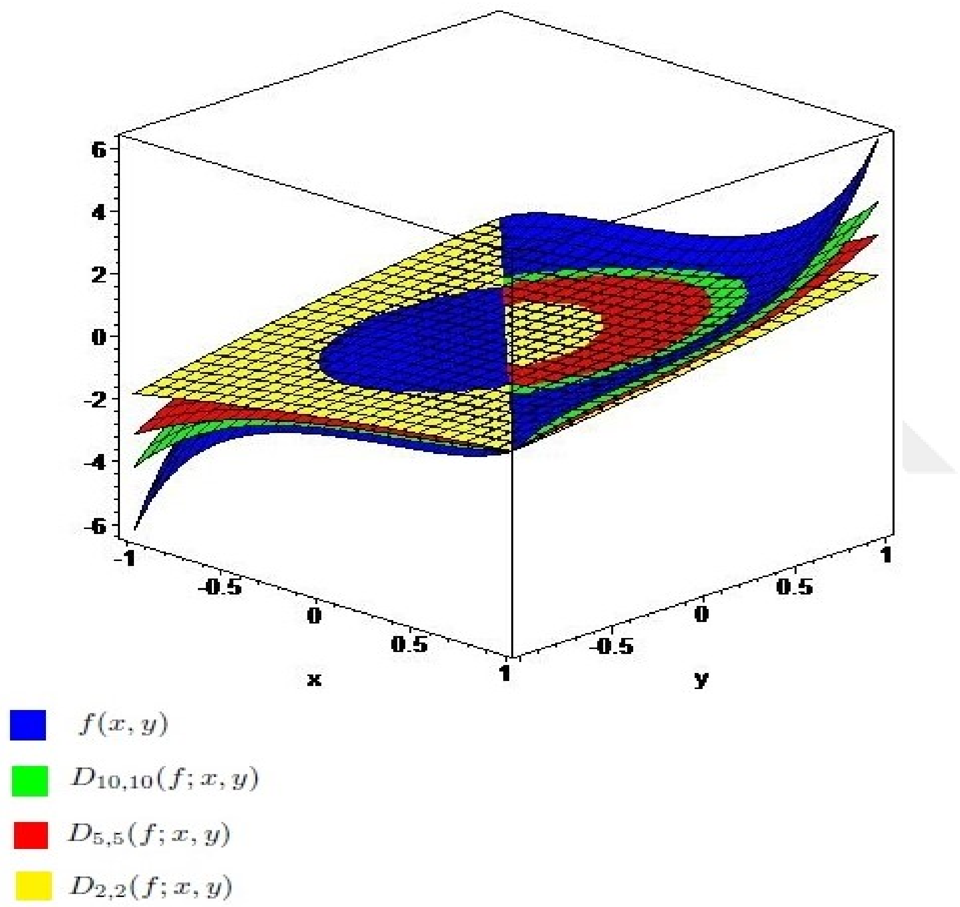
eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|D_{n,m}(f;x,y)-f| &\leq 2\left(\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)+\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)\right) \\
&\leq 2\left(C_1\frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}}+C_2\frac{1}{(m+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\right) \\
&\leq C'\left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}}+\frac{1}{(m+1)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C' = max\{2C_1, 2C_2\}$ dir. Böylece (4.41) eşitsizliği ispatlanmış olur.
□

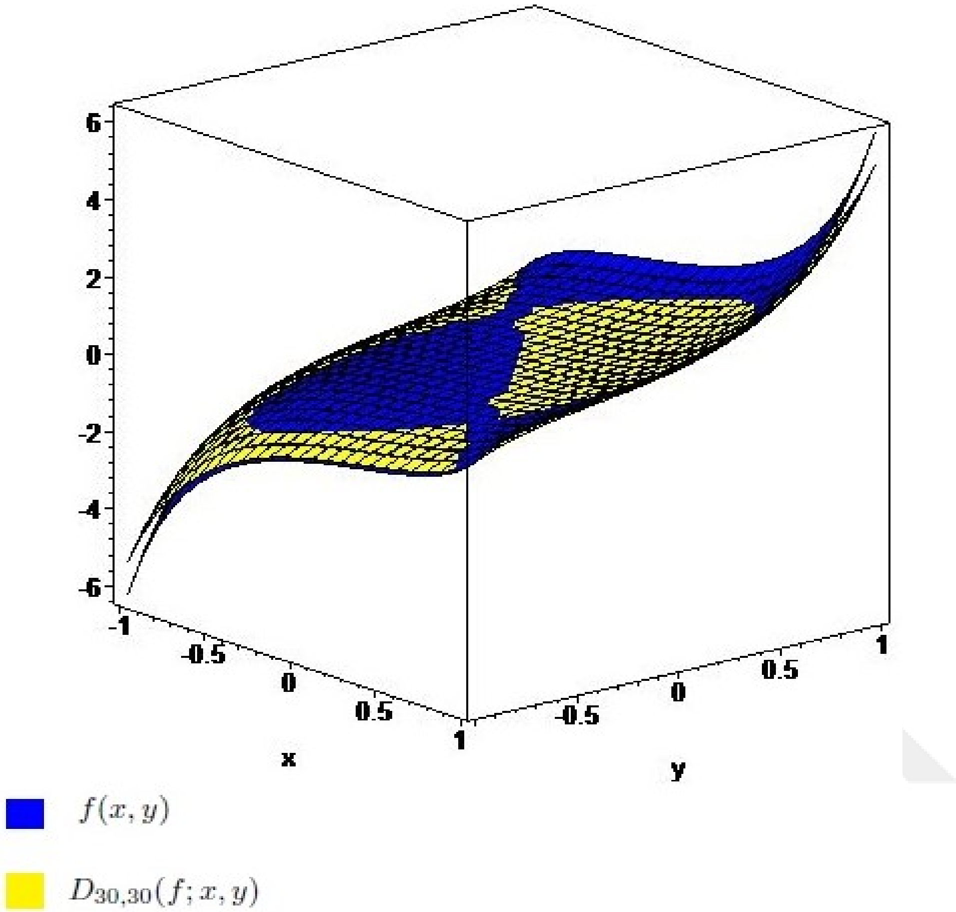
4.8. $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich Operatörü İçin Nümerik Örnekler

Örnek 4.15 *Aşağıda iki değişkenli* $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\sin(\frac{x+y}{2})$ *fonksiyonuna* $D_{n,m}$ *Bernstein-Kantorovich operatörü uygulanarak Maple programında grafikler çizdirilmiştir. Şekil 4.1 de mavi renkli grafik* f *fonksiyonunu, yeşil, kırmızı ve sarı renkli grafikler sırasıyla* f *fonksiyonunun* $D_{10,10}$, $D_{5,5}$ *ve* $D_{2,2}$ *Bernstein-Kantorovich operatörü altındaki görüntüsünü göstermektedir.*



Şekil 4.1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\sin(\frac{x+y}{2})$ iki değişkenli fonksiyonu için $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörünün düzgün yaklaşımı.

Aşağıdaki şekilde n ve m değerleri büyüdükçe operatör ile fonksiyona daha iyi yaklaşıldığı görülmektedir.



Şekil 4.2. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\sin(\frac{x+y}{2})$ iki değişkenli fonksiyonu için $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörünün düzgün yaklaşımı.

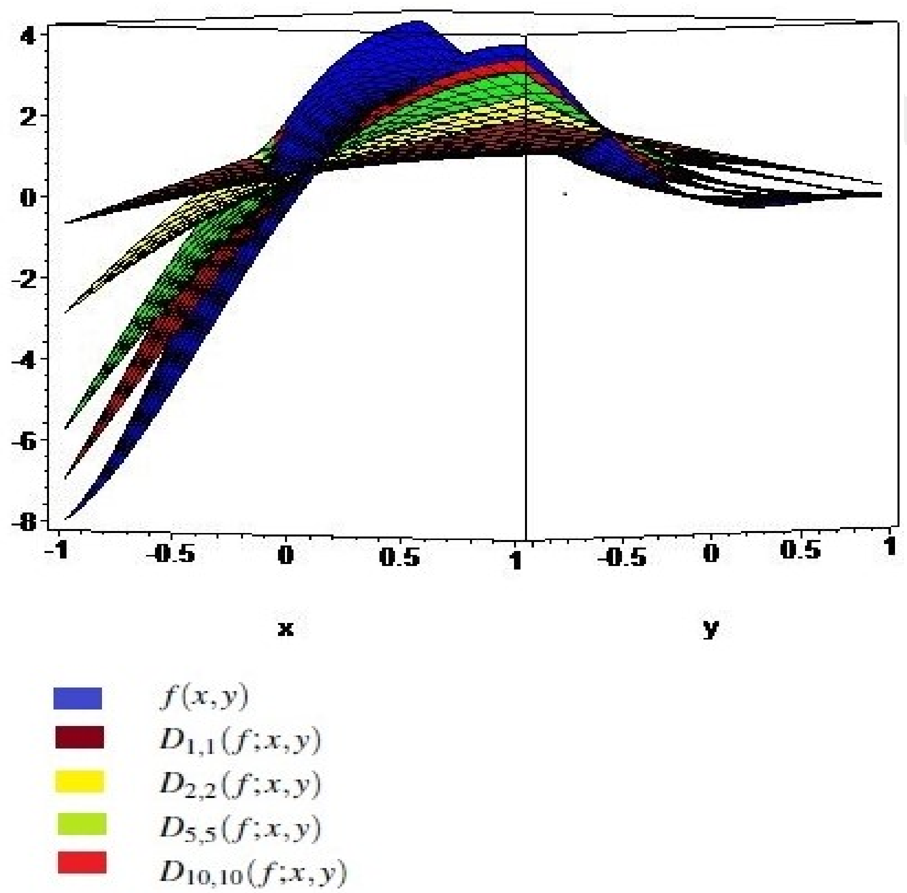
Şekil 4.2 de mavi renkli grafik f fonksiyonunu, sarı renkli grafik ise f fonksiyonunun $D_{30,30}$ Bernstein-Kantorovich operatörü altındaki görüntüsünü göstermektedir.

Şimdi $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\sin(\frac{x+y}{2})$ fonksiyonu için $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörünün nümerik değer tablosunu verelim.

Çizelge 4.1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}\sin(\frac{x+y}{2})$ fonksiyonu için nümerik hata değerleri.

$n=m$	$\lvert D_{n,m}(f;x,y) - f(x,y)\rvert$	
	$x=y=-0.9$	$x=y=0.9$
10	0.890234762	0.890234762
100	0.106190139	0.106190111
200	0.053608153	0.053608123
500	0.21566528	0.02156450810
1000	0.010804014	0.01080607247
5000	0.002160829548	0.002146994323
10000	0.0009124020548	0.001033300210

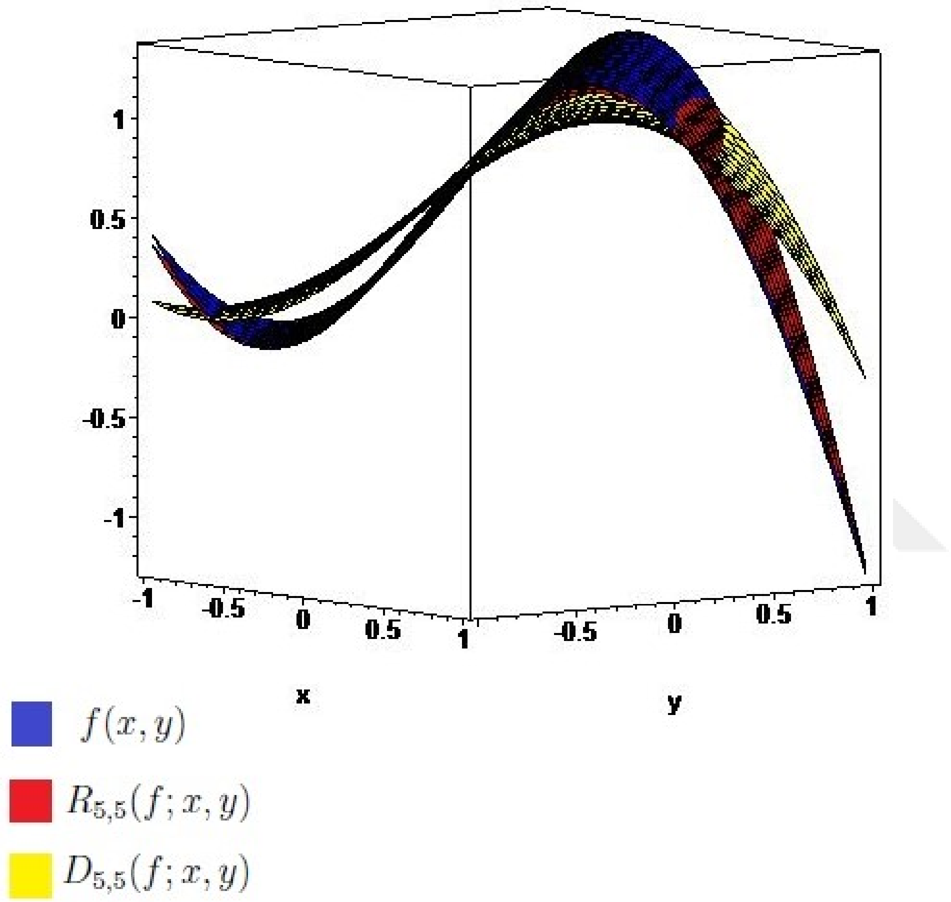
Örnek 4.16 *Aşağıda iki değişkenli* $f(x,y) = ((x-1)^2+(y-1)^2)\cos(x+y)$ *fonksiyonuna* $D_{n,m}$ *Bernstein-Kantorovich operatörü uygulanarak Maple programında grafikler çizdirilmiştir. Burada mavi renkli şekil f fonksiyonunu, mor, sarı, yeşil ve kırmızı renkli şekiller sırasıyla f fonksiyonunun* $D_{1,1}$, $D_{2,2}$, $D_{5,5}$ *ve* $D_{10,10}$ *Bernstein-Kantorovich operatörü altındaki görüntüsünü göstermektedir.*



Şekil 4.3. $f(x,y) = ((x-1)^2+(y-1)^2)\cos(x+y)$ iki değişkenli fonksiyonu için iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörünün düzgün yaklaşımı.

Örnek 4.17 *Aşağıda iki değişkenli $f(x,y) = (1+x+y)cos(x+y)$ fonksiyonuna $D_{n,m}$ iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü ve $R_{n,m}$ GBS operatörü ile yaklaşımların grafikleri ve nümerik değer tablosu verilmiştir.*

Şekil 4.4 te mavi renk f fonksiyonunu, sarı renk $D_{n,m}$ operatörünü ve kırmızı renk ise $R_{n,m}$ operatörünü göstermektedir.



Şekil 4.4. $f(x,y) = (1+x+y)\cos(x+y)$ iki değişkenli fonksiyonu için $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich ve $R_{n,m}$ GBS operatörlerinin düzgün yaklaşımı.

Şekil 4.4 ten de görüldüğü gibi $R_{n,m}$ GBS operatörü, f fonksiyonuna $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatöründen daha iyi yaklaşmaktadır.

Şimdi $R_{n,m}$ ve $D_{n,m}$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşma oranlarını inceleyelim. Şekil 4.4 ten de görüldüğü gibi $R_{n,m}$, $D_{n,m}$ den daha hızlı f fonksiyonuna yaklaştığı için

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{\left|R_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|}{\left|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\right|}$$

limit değerinin 0 olması gerekir.

Aşağıda $\frac{|R_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|}{|D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)|}$ oranı için nümerik değer tablosu verilmiştir.

Çizelge 4.2. $f(x,y)=(1+x+y)cos(x+y)$ fonksiyonu için nümerik hata değerleri.

$n=m$	$\frac{\lvert R_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\rvert}{\lvert D_{n,m}(f;x,y)-f(x,y)\rvert}$	
	$x=y=-0.9$	$x=y=0.9$
2	1.34657587	0.1734633994
5	0.2981842558	0.06920811806
10	0.1287749154	0.03370763366
50	0.02296071511	0.0064696935599
100	0.01138421001	0.003212264255
200	0.005401342461	0.001600276959
500	0.006587724028	0.0002066270426

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tezde $\mathbb{A} = [-1,1] \times [-1,1]$ olmak üzere $f \in C(\mathbb{A})$ için

$$D_{n,m}(f;x,y) = \frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{j}{m+1}-1}^{2\frac{j+1}{m+1}-1} f(t,u)dtdu,$$

genelleştirilmiş Bernstein-Kantorovich operatörü tanımlanmıştır. Burada $n, m \in \mathbb{N}$

$$\phi_{n,m}^{k,j}(x,y) = \varphi_n^k(x)\varphi_m^j(y)$$

ve

$$\varphi_n^k(x) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

ile verilmektedir. $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Öncelikle tanımlanan iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörünün lineer ve pozitif operatör olduğu gösterilmiştir. Daha sonra 3.Bölümde verilen Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığı kontrol edilmiştir. Sürekli fonksiyonlar uzayına ait keyfi bir f fonksiyonuna $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörü ile yaklaşımın düzgün olacağı ispatlanmış ve $f \in C(\mathbb{A})$ sürekli fonksiyon için $n, m \to \infty$ iken

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|D_{n,m}(f;x,y) - f\|_{C(\mathbb{A})} = 0$$

sonucu elde edilmiştir.

Daha sonra $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörü için

$$\omega(f;\delta) = \max_{\substack{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\leq\delta \\ (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{A}}} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)|$$

tam süreklilik modülü ve

$$\omega^{(1)}(f;\delta) = \max_{\substack{(x_1,y),(x_2,y)\in\mathbb{A} \\ |x_1-x_2|}} |f(x_1,y) - f(x_2,y)|$$

$$\omega^{(2)}(f;\delta) = \max_{\substack{(x,y_1),(x,y_2)\in\mathbb{A} \\ |y_1-y_2|}} |f(x,y_1) - f(x,y_2)|$$

sırasıyla x ve y değişkenlerine göre kısmi süreklilik modülleri tanımlanmış ve tanımlanan bu süreklilik modülleri kullanılarak yaklaşımın hızı hesaplanmıştır.

$D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörü için merkezi momentler hesaplanmış ve bu momentler kullanılarak Voronovskaya teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty} n\{D_{n,n}(f;x,y)-f(x,y)\}$$
$$=-xf_x(x,y)-yf_y(x,y)+\frac{1}{2}\{(1-x^2)f_{xx}(x,y)+(1-y^2)f_{yy}(x,y)\}$$

asimptotik yaklaşımı elde edilmiştir.

Daha sonra, $D_{n,m}$ operatörünün Peetre's K-fonksiyoneli ile yaklaşım hızı hesaplanmıştır. $D_{n,m}$ operatörü için

$$R_{n,m}(f(t,u);x,y):=D_{n,m}(f(t,y)+f(x,u)-f(t,u);x,y)$$

şeklinde tanımlanan $R_{n,m}$ GBS operatörü kurulmuş ve karışık düzgünlük modülü kullanılarak $R_{n,m}$ GBS operatörünün yaklaşım hızı hesaplanıştır.

Tezde Lipschitz koşulları tanımlanmış ve Lipschitz koşulları ile tam ve kısmi süreklilik modülleri arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlara $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörü ile yaklaşımlar hesaplanmış ve bu yaklaşımların da düzgün olduğu gösterilmiştir.

Tezin son bölümünde ise Maple programı kullanılarak nümerik örnekler verilmiştir. İki farklı sürekli fonksiyon için $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörünün belirli n ve m değerlerindeki grafikleri çizdirilmiştir. $[-1,1]\times[-1,1]$ bölgesine ait çeşitli (x,y) değerleri için $D_{n,m}$ Bernstein-Kantorovich operatörü ile f fonksiyonunun bu noktalardaki hata payı hesaplanmış ve bu değerlere karşılık gelen nümerik tabloları hazırlanmıştır.

5.2. Öneriler

Lineer pozitif operatörler ile yaklaşım alanında yukarıdaki bölümlerde gördüğümüz gibi bir çok operatör üretilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Günümüzde hala bu çalışmalar devam ederken matematiğe ve diğer disiplinlere katkı sunmaya ve yeni çalışma alanlarının oluşmasına yardımcı olmaktadır. Bu bağlamda bundan sonraki çalışmalar için bu tezde ele alınan genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü için tanım kümesi değiştirilerek sürekli yüzeylerde geometrik açıdan yaklaşımı ve hızı hesaplanabilir. Mühendislik ve tıp gibi birçok alandaki uygulama yöntemleri araştırılıp somut çalışmalar elde edilibilir.

Tezde ele alınan Bernstein-Kantorovich operatörü L_p uzayları veya ağırlıklı uzaylarda ele alınıp yaklaşım özellikleri incelenebilir.

İki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü için son yıllarda bir çok alanda uygulaması olan ve yeni çalışma alanları sunan q ve (p, q)-analog operatörleri tanımlanıp bu uzaylarda yaklaşım özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

ABEL, U., 1998. Asymptotic approximation with Kantorovich polynomial. Approx. Theory and Its Appl., 14: 106.

ACAR, T. and KAJLA, A., 2018. Degree of approximation for bivariate generalized Bernstein type operators. Results in Math., 73(79):1-20

ACAR, T., ARAL, A. and Mohiudine, S. A., 2016. On Kantorovich modification of (p,q)-Baskakov operators. J Inequal Appl 98.

ACU, A. M. and Muraru, C. V. 2015. Approximation properties of bivariate extension of q-Bernstein–Schurer–Kantorovich operators. Result Math 67(3): 265–279.

AÇIKGÖZ, M., and ARACI, S., 2010. New generating function of Bernstein type polynomial for two variables. ICNAAM, Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference. 1281: 1141-1143.

AGRANTINI, O., 2011. An approximation process of Kantorovich type. Mathematical Notes Miskolc, 2(1):3–10.

AGRAVAL, P. N., FINTA, Z. and KUMAR, A. S., 2015. Bivariate q-Bernstein–Schurer–Kantorovich operators. Result Math., 67(3): 365–380.

AKSOP, C., 2009. On a modification of operators. International Mathematic Forum, 45(4): 2211-2215.

ALTOMARE, F. and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type approximation theory and its applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter De Gruyter Berlin- New York, 627s.

BADEA, C., BADEA, I. and GONSKA, H. H., 1986. A test function theorem and approximation by pseudopolynomials. Bull. Aust. Math. Soc., 34:53-64.

BALCI, M., 2012. Reel analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 144s.

BARBOSU, D., 2004. Kantrovich-Stancu type operators. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5(3): 53-54.

BASKAKOV, V. A., 1957. An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk, 113: 249-251.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel analiz, Gazi Kitapevi, Ankara, 320s.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilites. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

BLEIMANN, G., BUTZER, P. L. and HAHN, L., 1980. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. Indag. Math., 42: 255-262.

BOHMAN, H., 1952. On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Mat., 2: 43-56.

BOGEL, K., 1962-1963. Über die mehrdimansionale differentation. Jber. Deutsch. Math. Verein, 65: 45-71.

BUTZER, P., 1953. On two-dimensional Bernstein polynomials. Canadian Journal of Mathematics, 5: 107-113.

BÜYÜKYAZICI, İ., 1999. İki değişkenli fonksiyonların Bernstein polinomları. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

BÜYÜKYAZICI, İ., İBİKLİ, E., 2004. The approximation properties of generalized Bernstein polynomials of two variables. Appl. Math. Comput., 156(2): 367-380.

CAO, J. D., 1997. A generalization of the Bernstein polynomials. J. Math. Anal. Apply, 209(1): 140-146.

CHLODOVSKY, I., 1937. Sur le developpment des functions definies dans un interval infini en series de polynomes de M. S. Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393.

COTTIN, C., 1990. Mixed $K-$-functionals: a measure of smoothness for blending-type approximation. Math. Z., 204:69-83.

DEO, N., NOOR, M. A. and SIDDIQUU, M. A., 2008. On approximation by a class of new Bernstein type operators. Applied Math. and Comp., 201:604-612.

DÖKMEN, A. B., 2009. Bernstein polinomlarının q-analogu. Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale, 65s.

DOĞRU, O. and DUMAN, O., 2006. Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on q-integers. Publ. Math. Debrecen, 68: 1-2, 199-214.

DOĞRU, O., DUMAN, O. and ORHAN, C., 2003. Statistical approximation by generalized Meyer-König and Zeller type operators. Stud. Sci. Math. Hun., 40: 359-371.

DUCHON, M., 2011. A generalized Bernstein approximation theorem. Mathematical Publications, 49: 99-109.

DURRMEYER, J. L., 1967. Une formule d'inversion de la transformee de Laplace application a la theorie des moments. These De 3e Cyele. Faculte Des Sciences de l'Universite de Paris, 4: 149-150.

FAVARD, J., Sur les multiplicateurs d'interpolation. J. Math. Pures Aplll. 23(9):219-247.

FINTA, Z., 1999. On approximation by modified Kantorovich polynomials. Mathematica Balcanica (New Ser.) 13(3-4):205-211.

GADJIEV, A. D. and ORHAN, C., 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32: 129-138.

HACISALİHOĞLU, H. and HACIYEV, A., 1995. Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

HERZOG, F. and HILL, J. D., 1946. The Bernstein polynomials for discontinuous functions. Amer. J. Math., 68: 109-124.

HILDEBRANT, T. H. and SCHOENBERG, I. J., 1933. On linear functional operations and the moment problem. Ann. of Math., 34(2): 317-328.

İZGİ, A., 2009. Order of approximation of functions of two variables by new type gamma operators. General Mathematics, 17(1), 23-32.

İZGİ, A., 2012. Approximation by composition of Szasz-Mirakyan and Durrmeyer-Chlodowsky operators. Eurasian Math. J., 3:63–71.

İZGİ, A., 2013. Approximation by a class of new type Bernstein polynomials of one and two variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 9(1), p.55.

İZGİ, A. and BÜYÜKYAZICI, İ., 2006. On a generalization of Bernstein-Chlodovsky polynomials for two variables. Int. Math. Forum 1, 1001–1015.

İZGİ, A., BÜYÜKYAZICI, İ. and İBİKLİ, E., 2009. Rate of convergence by Chlodowsky–Taylor polynomials. Applied Mathematics and Computation, 213(2): 426-431.

KAC, M., 1938. Une remarque sur les polynomes de M. S. Bernstein. Studia Math., 7: 49-51.

KAHVECİBAŞI, İ., 2014. $[-1,1]$ aralığında Bernstein-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özellikleri. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa.

KANTOROVICH, L. V., 1930. Sur certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein I, II. C.R. Acad. Sci. URSSS, 563-568, 595-600.

KARAHAN, D. and İZGİ, A., 2018. On approximation properties of generalised (p, q)-Bernstein operators. Eur. J. of Pure and App. Math., 11(2): 457-467.

KARAHAN, D. and İZGİ, A., 2018. On approximation properties of generalized q-Bernstein operators. Numerical Functional Analysis and Optimization, 39(9): 990-998.

KIVINUKK, A. and METSMAGI, T., 2011. Approximation in variation by the Kantorovich operators. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 60(4):201-209.

KOROVKIN, P. P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)MR 15,236.Sc. 1.2. 90:961-964.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein polynomials. University of Toronto Press, Toronto.

LUPAS, A., 1987. A q-analogue of the Bernstein operator. University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9: 85-92.

MEYER-KONIG, W., ZELLER, K., 1960. Bernsteinsche otenzreihen. Studia Math., 19:89-94.

MIRAKYAN, G. M., Approximation of continuos functions with the aid of poynomials. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 31:201-205.

MISHRA, V. N. and PANDEY, S., 2016. On Chlodowsky variant of (p, q) Kantorovich–Stancu–Schurer operators. Int. J. Anal. Appl. 11(1): 28–39.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N. and EKİNCİOĞLU, İ., 2007. Teori ve çözümlü problemlerle analiz 1. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 593s.

NEAMMANEE, K., 2001. Approximation of Lipschitz functions on B_n by Bernstein polynomials. Science Asia, 27: 63-66.

ÖZARSLAN, M. A. and DUMAN, O. A., 2009. New approach in obtaining a better estimation in approximation by positive linear operators. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1., 58: 17-22.

PAPANICOLAU, C. G., 1975. Some Bernstein type operators. Amer. Math. Month, 82:674-677.

PEETRE, J., 1963. A theory of interpolation of normed spaces lecture notes. Brazilia.

PINKUS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J. Approx, Theory, 107: 1-66.

PINKUS, A., 2005. Weierstrass and approximation theory. Surveys in Approximation Theory, 1: 1-37.

POP, O. T., 2007. Approximation of B-differentiable functions by BGS operators. Anal. Unıv. Oredea Fasc. Mat., 14:53-60.

POPOVICIU, T., 1951. On the proof of Weierstrass theorem using interpolation polynomials. Lucraile Sesiunii Gen.ġt. Acad. Romane, 2: 2-12.

PYCH-TABERSKA, P., 1997. Rate of pointwise convergence of Bernstein polynomials for some absolutely continuous functions. J. Math. Anal. Appl., 2: 212, 9-19.

SHEVCHUK, I. A., 1992. Approximation by polynomials and traces of functions continuous on a segment. Naukova Dymka, Kiev, 324s.

STANCU, D. D., 1968. Approximation of function by a new class of polynomial operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8): 1173–1194.

STANCU, D. D., 1963. A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables. The American Mathematical Monthly, 70(3), 260-264.

SZASZ, O., Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Res. Nat.Bureau of St., 45:239-245.

VORONOVSKAJA, E., 1932. Determination de la forme asymplotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 4: 79-

85.

VOLKOV, V. I., 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variable. Math. Sb. N.S. 43(85):504 (in Russian).

WEIERSTRASS, K., 1885. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willküricher 55 funktionen einer reellen veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1): 633-639, 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Döne KARAHAN
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi: Sivas, 26.05.1990
e-mail : dkarahan@harran.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Sivas Kongre Lisesi, Sivas	2008
Üniversite	:	Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas	2013
Yüksek Lisans	:	Mersin Üniversitesi, Mersin	2015
Doktora	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014 – -	Harran Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLAR

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1. KARAHAN DÖNE, SERENBAY KIRCI SEVİLAY, İZGİ AYDIN (2019). Approximation by generalized complex Szász Mirakyan operators in compact disks. Turkish Journal of Mathematics, 43(5), 2193–2202.
2. KARAHAN DÖNE, İZGİ AYDIN (2019). Approximation properties of Bernstein Kantorovich type operators of two variables. Communications Faculty Of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 68(2), 2313–2323. (Doktora tezinden yapılmıştır.)
3. KARAHAN DÖNE, İZGİ AYDIN (2018). On approximation properties of generalized q-Bernstein operators. Numerical Functional Analysis and Optimization, 39(9), 990-998.
4. KARAHAN DÖNE, İZGİ AYDIN (2018). On approximation properties of generalised (p, q)-Bernstein operators. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 11(2), 457-467.

5. KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR (2017). On an inverse problem for Sturm-Liouville equation. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 10(3), 535-543.
6. RESIDOGLU HANLAR, KARAHAN DÖNE (2016). On the main equation of inverse Sturm Liouville operator with discontinuous coefficient. Mathematical Inverse Problems, 3(2), 26-43.
7. HASIMOGLU ILYAS, KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR (2015). On main equation for inverse Sturm Liouville operator with discontinuous coefficient. Sylwan, 159(10), 89-101.
8. RESIDOGLU HANLAR, KARAHAN DÖNE (2015). On an inverse spectral problem for Sturm Liouville operator with discontinuous coefficient. Ufa Mathematical Journal, 7(3), 125-137. (Yüksek lisans tezinden yapılmıştır.)
9. KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR (2014). Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm Liouville operator. National Academy of Sciences of Azerbaijan Proceedings of the Institue of Mathematics and Mechanics, 40, Special Issue, 233-244.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında (proceedings) basılan bildiriler

1. KARAHAN DÖNE, İZGİ AYDIN (2018). On Approximation by Generalized Bernstein-Kantorovich Operator of Two Variable. International Conference On Analysis And Its Applications, Kırşehir, Turkey. (Yayın No:4381636)
2. KARAHAN DÖNE, KIRCI SERENBAY SEVILAY, IZGI AYDIN (2018). Approximation By Generalized Complex Szasz-Mirakyan Operators In Compact Disk. International Conference On Analysis And Its Applications, Kırşehir, Turkey. (Yayın No:4381627)
3. KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR, HASIMOGLU ILYAS (2017). On The Gelfand-Levitan Type Equation Of A Class Sturm-Liouville Problem. VII International Youth Scientific Practical Conference Mathematical ModelinG Of Processes And Systems, Ufa, Rusya. (Yayın No:3881908)
4. KARAHAN DÖNE, İZGİ AYDIN, KARAKUS ECEM (2017). On Approximation Theorems for (p, q)- Bernstein Operators. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Sanlıurfa, Turkey. (Yayın No:3881562)
5. KARAKUS ECEM, İZGİ AYDIN, KARAHAN DÖNE (2017). Approximation by Composition of q-Szasz- Mirakyan and q-Durrmeyer-Chlodowsky Operators. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Sanlıurfa, Turkey. (Yayın No:3881710)
6. HASIMOGLU ILYAS, KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR (2017). The Direct and Inverse Spectral Problem for Sturm-Liouville Operator with Discontinuous Coefficient. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Sanlıurfa, Turkey. (Yayın No:3881421)

7. RESIDOGLU HANLAR, KARAHAN DÖNE (2016). The Direct and Inverse Spectral Problem for Sturm Liouville Operator With Discontinuous Coefficient. 3th International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference, Mersin, Turkey. (Yayın No:3118743)
8. KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR, AZAMT AKHTYAMOV (2015). On the Inverse Problem for a Neumann Problem. Second International Intuitionistic Fuzzy Sets Conference, Mersin, Turkey. (Yayın No:2214521)
9. KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR (2015). On an Inverse Problem for Sturm Liouville Operator with Discontinuous Coefficient. 2nd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, İstanbul, Turkey.(Yayın No:2211448)
10. KARAHAN DÖNE, RESIDOGLU HANLAR (2014). Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm Liouville operator. Spectral Theory of Differential Operators, Bakü, Azerbaycan. (Yayın No:2221814)

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1. KARAHAN DÖNE, İZGİ AYDIN (2016). q-Bernstein Tip Operatörlerin Yaklasım Özellikleri. 11. Ankara Matematik Günleri, Ankara, Turkey. (Yayın No:3118923)

Ödüller

1. ON THE GELFAND-LEVITAN TYPE EQUATION OF A CLASS STURM-LIOUVILLE PROBLEM, The Best Presentation/ Bashkir State University, RUSYA FEDERASYONU, 2017