T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$[-1,1]$ ARALIĞINDA BERSTEİN-STANCU OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Ömer Seyfettin YÜCEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, Ömer Seyfettin YÜCEL'in hazırladığı **"[-1,1] Aralığında Bernstein-Stancu Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri ve Yaklaşım Hızı"** konulu bu çalışma 29/01/2019 tarihinde oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Aydın İZGİ ....

Üye : Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN ....

Üye : Doç. Dr. Üyesi Mehmet GÜLBAHAR ....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanıla özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$[-1,1]$ ARALIĞINDA BERSTEİN-STANCU OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Ömer Seyfettin YÜCEL

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2019, Sayfa:52

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu tezde ele alınan konu ve konu ile bağlantılı literatürdeki çalışmalardan kısaca söz edilmiştir. Aynı zamanda bu tez kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde Berstein ve Stancu polinomlar ile ilgili yapılan çalışmalar kısaca sunulmuştur. Üçüncü bölümde tezde kullanılacak materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise, operatörümüzün yaklaşım teorileri ile ilgili önceki çalışmalardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde bu tezde kullanılan materyal ve yöntemden kısaca bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise**,** operatörümüz ile ilgili lineer pozitif operatörlerde kullanılan bir takım yöntem ve hesaplamalar yapılmıştır, Maple bilgisayar programından faydalanarak operatörümüzle yapılan yaklaşım için bazı grafikler çizdirilmiş ve hata miktarları için nümerik değerler hesaplanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein polinomları, korovkin teoremi, yaklaşım, yaklaşım hızı, lineer pozitif operatörler.

ABSRACT

MasterThesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF BERNSTEİN-STANCU OPERATORS AND RATE OF APPROXIMATION ON INTERVAL [-1,1]

Ömer Seyfettin YÜCEL

Harran University
Graduate School of Natural andAppliedSciences
Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2019, Page:52

This present thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introdiction. The topic of thesis and papers dealing to this topic in the literature are briefly mentioned. Furthermore , basic definitions and theorems used in this thesis are given. In the second chapter, studies related to Berstein and Stantu's polynomial are presented. In the third chapter, materials and methods which are used throughout the thesis are mentoined . In the fourth chapter there are calculations and methods used in operators are made for our operator. Using computer program, Maple some graphics are drown and numerical values are calculated for miscalculations about our approach with operator.

KEY WORDS: Bernstein polynomial, korovkin theorem, approximation, rate of approximation, linear positive operators.

TEŞEKKÜR

Bu alanda çalışma fırsatı veren her türlü konuda yardımcı olan hocam Sayın Doç. Dr. Aydın İZGİ'ye, sonsuz şükranlarımı arz ederim. Ayrıca katkılarıyla destekleyen Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI'ya, ve Arş Gör.Harun ÇİÇEK'e maddi manevi destekleyen Annem Ayşe YÜCEL'e ve Babam Ahmet YÜCEL'e yazma sürecinde yardımcı olan eşim Tuba YÜCEL'e her konuda yanımda olan Ömer KAPLAN'a ve fikirleriyle destekleyen Dr. Öğr. Üyesi Muhammed Yaşar DÖRTBUDAK'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$S_{\boldsymbol{n}}(f;x)$	$S_{\boldsymbol{n}}$Tanımladığımız operatör
$C[a,b]$	$[a,b]$deki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\lVert.\rVert$	norm
$\omega(f;\delta)$	süreklilik modülü
$\rightrightarrows$	düzgün yakınsaması
$B_{\boldsymbol{n}}(f;x)$	Bernsteinpolinom dizisi

1.GİRİŞ

Günümüzde nitelikleri ve çalışması zor olan fonksiyonları daha kullanışlı hale getirmek için dönüştürücü bir polinom fonksiyonuna ihtiyaç duyuluyor. Bu durumda yaklaşım teorisi devreye giriyor.

K. Weierstrass tarafından 1885'te ve Weierstrass yaklaşım teoremi olarak bilinen teorem, yaklaşım teorisinin temek bir sonucudur. Herhangi bir $f \in C[a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde,reel katsayılı öyle bir p polinomu vardır ki her $x \in [a,b]$ için $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

Weierstrass teoreminin ilk ispatı, uzun ve karmaşıktı. Bu durum, daha kısa ve anlaşılır bir ispat için pek çok ünlü matematikçiyi harekete geçirmiştir.

E. Borel 1905'te (Borel,E. 1905). (1871-1956) aşağıdaki f fonksiyonundan üretilen polinom dizileri ile f ‘ e yaklaşılabileceğini göstermiştir.

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) q_{m,n}(x)$$

Burada $q_{m,n}(x)$, f ten bağımsız bir polinomdur.

$$g_{n,m}(x) = \begin{cases} 0, & \left|x - \frac{m}{n}\right| > \frac{1}{n} \\ nx - (m-1), & \frac{m-1}{n} \leq x \leq \frac{m}{n} \\ -nx + (m+1), & \frac{m}{n} \leq x \leq \frac{m+1}{n} \end{cases}$$

Burada $g_{m,n}\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ negatif olmayıp en fazla 1 değerini alır ve $g_{m,n}\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ dır.

$q_{n,m}$, her $x \in [0,1]$ için

$$|g_{n,m}(x) - q_{n,m}(x)| < \frac{1}{n^2}$$

şartını sağlayan bir polinom olsun. p_n nin f yakınsadığını göstermek zor değildir. Ancak Bernstein polinomları ile bunu ispatlamak daha tatmin edicidir.

Bernstein polinomları 1912 de

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad 0 \le x \le 1$$

şeklinde tanımlanmıştır. Stancu 1969' da Bernstein polinomlarını

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \qquad 0 \le \alpha \le \beta$$

şeklinde genelleştirmiştir. Bu çalışmada

$x \in [-1,1]$ ve $0 \le \alpha \le \beta$ olmak üzere;

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+\beta} - 1\right)$$

modifikasyonunun yaklaşımını ve yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Tanımladığımız operatörün Korovkin (1953) teoremin şartlarını ve $[-1,1]$ simetrik aralığında lineer pozitif tanımlı olduğu incelenmiştir. Ayrıca süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı ve momentleri hesaplanmıştır.

1.1.Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı olsun. X ' den alınan herhangi bir f fonksiyonunu Y ' de bir g fonksiyonuna karşılık getiren $L: X \to Y$ fonksiyonuna dönüşüm veya operatör denir.

Tanım 1.1.2 Lineer operatör

X ve Y aynı A cismi üzerinde tanımlı iki lineer fonksiyon uzay olsun. $L: X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

koşulunu sağlıyorsa o zaman L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.1.3 Operatörün pozitifliği

$X^+ = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g \geq 0\}\, x$ olmak üzere L operatörü X^+ kümesinin her elemanı Y^+ kümesinin bir elemanı eşliyorsa yani, f bir fonksiyon L bir operatör olmak üzere $f \geq 0 \; için \; L(f; x) \geq 0$sağlanıyorsa L operatörüne pozitif operatör denir. Hem lineerlik hem de pozitif şartını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

Teorem 1.1.4

Lineer pozitif operatör monotondur .Yani ;

$h(x) \leq r(x) \Rightarrow L(h; x) \leq L(r; x)$ dir.

İspat 1.1.4

L lineer pozitif operatör olduğundan, $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani$f(x) \geq 0$ olduğunda $L(h; x) \geq 0$ olur. O halde her x için

$$h(x) \leq r(x)$$

ise

$$r(x) - h(x) \geq 0$$

olur. L operatörü pozitif olduğundan;

$$L(r(x) - h(x); x) \geq 0$$

olur. L operatörü lineer olduğundan

$$L(r(x); x) - L(h(x); x) \geq 0 \quad \Rightarrow L(h(x); x) \leq L(r(x); x)$$

olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.5

L lineer pozitif operatör olmak üzere, $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat 1.1.5

Herhangi bir h fonksiyonu için ;

$$-|h| \leq h \leq |h| \qquad (1.1.1)$$

dır. L operatörü lineer olduğundan dolayı monoton artandır. O halde;

$$L(-|h|) \leq L(h) \leq L|(h)|$$

yazabiliriz. L lineer olduğundan

$$L(-|h|) = -L(|h|)$$

dir. Elde edilen bu eşitlikte(1.1.1)'de yerine yazılırsa;

$$-L(|h|) \leq L(h) \leq L(|h|) \Rightarrow |L(h)| \leq L(|h|)$$

olur ki buda ispatı tamamlar (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.6

$X \subset \mathbb{R}$ ve X üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$ olsun. $d: \mathbb{N} \rightarrow F(X)$ şeklinde tanımlı d fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir. Terimler f_1, f_2, f_3 ile gösterilir. Dizi (f_n) ile gösterilir.

Tanım 1.1.7

$T = \{L: C[a.b] \rightarrow C[a,b]: L$ lineer pozitif operatör $\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots\}$ olsun. $L: \mathbb{N} \rightarrow T$ şeklinde tanımlı L fonksiyonun lineer pozitif operatörü dizisi adı verilir ve $(L_n) = (L_1, L_2, L_3, \ldots\ldots)$.

Tanım 1.1.8

$f \in C[a,b]$ olmak üzere $C[a,b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.1.9

$A \subset \mathbb{R}, F: A \rightarrow \mathbb{R}$bir fonksiyon ve $a \epsilon A$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x-a| < \delta$ olduğundan $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.10

$X \subset \mathbb{R}$ $f: X \to \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun, eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_1, x_2 \epsilon X$ noktaları için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε'na bağlı $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Teorem 1.1.11

$x \epsilon [0,1]$, $0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{k,n}) P_{k,n}(x) \,, \quad P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif operatör dizisinin $n \to \infty$için$[0,1]$ aralığında f fonksiyonu düzgün yakınsak olabilmesi için gerekli ve yeterli üç koşul vardır. H. Bohman bunları;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows 1 \qquad (1.1.2)$$
$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \qquad (1.1.3)$$
$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \qquad (1.1..4)$$

şeklinde ifade etmiştir. Aşikadır ki Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında P.P.Korovkin, Bohman'ın koşullarının genel halde de geçerli olduğunu görmüş ve genel bir teorem ispatlamıştır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995; Korovkin,1953).

Teorem 1.1.12 (P.P Korovkin Teoremi):

Eğer L_n lineer pozitif dizisi $[a,b]$ aralığında $(1.1.2), (1.1.3)$ ve $(1.1.4)$ koşullarını sağlıyorsa o takdirde $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı her hangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \qquad a \leq x \leq b$$

olur. Bu ifadeye eş değer olarak aşağıdaki gösterimler de kullanılır.

$$\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \le x \le b} |L_n(f;x) - f(x)| = 0$$

İspat 1.1.12

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir $M > 0$ sayısı bulabilir ki; tüm x' ler için

$$|f(x)| \le M \tag{1.1.5}$$

sağlanır. Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty, +\infty)$ve $x \in [a,b]$ için

$$|t - x| < \delta$$

olduğunda;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.1.6}$$

(1.1.6) eşitsizliği; $x, t \in [a,b]$ olduğundan f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğu için $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise f fonksiyonu a ve b noktalarında sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için sağlanır.

Her $x \epsilon [a,b]$; $f(x) \le M \quad M > 0$ vardır.

$$|t - x| \ge \delta \Rightarrow \frac{|t - x|}{\delta} \ge 1 \Rightarrow 1 \le \frac{|t - x|}{\delta} \le \frac{|t - x|^2}{\delta^2}$$

$|t - x| \ge \delta$olduğunda ise (1.1.5) ve üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)|+|f(x)| \leq 2M \leq 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

olur. O halde;

$|t-x|<\delta$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$

$|t-x| \geq \delta$

için

$$|f(t)-f(x)| \leq 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall\ t \in \mathbb{R}$ ve $x\epsilon\ [a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon+2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \tag{1.1.7}$$

dır. Şimdi (1.1.2), (1.1.3) ve (1.1.4) koşullarını gerçekleyen (L_n) lineer operatör dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f)-\ f\|_{C[a,b]}=0$$

eşitliğini sağladığını göstermelidir. (L_n) operatörünün lineerliğinden;

$$|L_n(f(t);x)-\ f(x)|=\ |L_n(f(t);x)-\ f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)|$$

$$=\ |L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|$$
$$=\ |L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)L_n(\ 1;x)-1|$$

dır. Burada üçgen eşitsizliğini kullanılarak;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\ \leq |L_n(f(t)-f(x);x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1| \tag{1.1.8}$$

elde edilir.(1.1.2)' den

$$|L_n f(t) - f(x); x| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|; x)|$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (1.1.2)ve (1.1.5)' den dolayı (1.1.8) eşitsizliği;

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M|L_n(1; x) - 1|$$

olarak yazılabilir.(L_n) monoton artan olduğundan (1.1.7)' den;

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right); x\right) + M|L_n(1; x) - 1| \quad (1.1.9)$$

elde edilir. Öte yandan (L_n) lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa;

$$L_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right); x\right) = L_n(\varepsilon; x) + L_n\left(2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}; x\right)$$

$$= \varepsilon L_n(1; x) + 2\frac{M}{\delta^2} L_n(t^2 - 2xt + x^2; x)$$

$$= \varepsilon L_n(1; x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2x\, L_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)\}$$

$$= \varepsilon L_n(1; x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2x\, L_n(t; x) + x^2 L_n(1; x) - x^2\}$$

$$= \varepsilon L_n(1; x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2; x) - x^2) - 2x(L_n(t; x) - x) + x^2(L_n(1; x) - 1)\}$$

elde edilir. Bu ifadenin (1.1.9)' de yerine yazılmasıyla;

$$|L_n(f(t) - f(x); x)| \leq \varepsilon L_n(1; x)$$

$$+2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2; x) - x^2) - 2x(L_n(t; x) - x) + x^2(L_n(1; x) - 1) + M|L_n(1; x) - 1|\}$$

elde edilen bu ifade de (1.1.2), (1.1.3)ve(1.1.4) koşullarının kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t) - f(x); x)| \leq \varepsilon + \varepsilon 2\frac{M}{\delta^2} = \varepsilon\left(1 + 2\frac{M}{\delta^2}\right)$$

elde edilen bu ifadeyi her $\varepsilon' \geq 0$ için

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon'$$

sağlanır.Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev,1995).

Tanım 1.1.12

f $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir denir.

Bu değer $f'(x_0)$ veya $\frac{df(x_0)}{dx}$ ile gösterilir.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

dir (Thomas,Finney, 1984).

Teorem 1.1.13

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli (a,b) aralığında türevlenebilir ve $f(a) = f(b)$ olsun. Bu durumda $f'(c) = 0$ olacak biçimde en az bir $c \in (a,b)$vardır (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.14

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığında $(n+1)$. mertebeden türevlenebilen $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $x_0 \in (a,b)$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda

$$f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

dır (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.15

S.Bernstein' in 1912 yılında bahsettiği Weierstrass yaklaşım teoremi polinomu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$0 \leq x \leq 1$olmak üzere bu polinom

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k \,(1-x)^{n-k} \tag{1.9}$$

şeklindedir (Bernstein,1912). C_n^k burada

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

dir.

(1.9) tanımlanan Bernstein operatörü için;

$$B_n(1;x) = 1 \tag{1.10}$$

$$B_n(t;x) = x \tag{1.11}$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \tag{1.12}$$

şartları sağlanır.

Tanım 1.1.16

$[a, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin.$[0, b-a]$ aralığında tanımlı

$$\omega(\delta) \coloneqq \omega(f, \delta) \coloneqq \{sup|f(x_2) - f(x_1)|: |x_2 - x_1| \leq \delta, x_1, x_2 \in [a, b]\}$$

fonksiyonuna f' in süreklilik modülü denir (Shevchuk, 1992).

Teorem 1.1.17

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonunun sürekli modülü

$\boldsymbol{y_1}$) $\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$

$\boldsymbol{y_2}$) $0 < \delta_1 < \delta_2 \text{ise} \omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$

$\boldsymbol{y_3}$) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

$\boldsymbol{y_4}$) $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta), n \in Z^+$

$\boldsymbol{y_5}$) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$

$\boldsymbol{y_6}$) $\omega(f; |t - x|) \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right)\omega(f; \delta)$

özelliklerini sağlar (Altomare ve Campiti, 1994).

2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1912 yılında Bernstein tarafından $x \in [0,1]$aralığında

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k \, (1-x)^{n-k}$$

şeklinde gösterilmiştir. [0,1] aralığı üzerinde olan bir f fonksiyonuna yaklaşılabileceği ispatlanmıştır.

1932 yılında Voronswkaja tarafından $f \in C^2[-1,1]$ ve f, f', f''fonksiyonları [0,1] aralığında sınırlı ise;

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n(f;x) - f(x)\right) = \frac{-x(1-x)}{2} f''(x)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

1935 yılında T. Popoviciu tarafından $\omega(f;\delta)$ ile f fonkisyonunun süreklilik modülü gösterilmek üzere

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olduğuna ispatlanmıştır.

H.Bohman 1951 yılında lineer pozitif operatör dizisinin sürekli bir fonksiyona yakınsaklığını [0,1] aralığında incelemiştir. Bohman'ın tanımladığı operatör şöyledir.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(a_{k,n}\right) P_{k,n}, \qquad P_{k,n} \geq 0$$

dır. 1912 yılından günümüze kadar Bernstein polinomunu bir çok genelleşmesi tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Stancu tarafından 1969 yılında α, β

$0 \leq \alpha \leq \beta$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan $P_{n,\alpha,\beta}: C[0,1] \to C[0,1]$ Berstein-Stancu polinomudur. Bernstein-Stancu polinomlar dizisinin $[0,1]$ aralığında $0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan her α, β reel sayı için f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yaklaştığını göstermiştir.

2011 yılında Ayşegül Çilo'nun Doç.Dr Aydın İZGİ danışmalığında 2012 yılında bitirdiği yüksek lisans tezinde çalıştığı operatör Schurer tipinde modifiye edilmiştir.

Ayşegül Cilo'nun çalıştığı operatör aşağıdaki şekildedir.

$$C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{2k}{n}-1\right), \qquad -1 \leq x \leq 1$$

bu çalışmamızda aşağıdaki operatörü inceleyeceğiz.

$x \in [-1,1]$ve$0 \leq \alpha \leq \beta$

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+\beta}-1\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Materyal

Bu çalışmada ilgili kaynak kitaplar, makaleler ve internet üzerinden yapılan araştırmalardan yararlanılmıştır.

3.2 Yöntem

Bernstein ve Stancu ile ilgili çalışmalar incelenmiş ve $S_n(f;x)$ operatörü diğer operatörlerle karşılaştırılmıştır. Elde edilen çalışmanın sonucunda grafik ve nümerik tablosu oluşturulmuştur.

Bu çalışmada elde edilen grafikler ve nümerik değerler hesaplanırken bilgisayar programı Maple kullanılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde tanımlamış olduğumuz $S_n(f;x)$ operatörün lineer pozitif olduğu ve Korovkin teoremi şartlarını sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca$S_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentleri, yaklaşım hızı ve asimptotik yaklaşım hesaplanacaktır.

Tanım 4.1

Kabul edelim ki $x \in [-1,1]$ ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olsun

$$S_n(1;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+\beta}-1\right)$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $S_n(f;x)$ operatöre denir. $S_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif bir operatör olduğu inceleyelim.

Lineerlik:

Her $f,g \in [-1,1]$ ve her $a,b \in \mathbb{R}$ için,

$$S_n\Big(\big(af(t)+bg(t)\big);x\Big) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}(af)\left(2\frac{k+\alpha}{n+\beta}-1\right)$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}(bg)\left(2\frac{k+\alpha}{n+\beta}-1\right)$$

$$= a\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+\beta}-1\right)$$

$$+b\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} g\left(2\frac{k+\alpha}{n+\beta}-1\right)$$

$$= aS_n(f(t);x) + bS_n(g(t);x)$$

olduğundan $S_n(f;x)$ lineer operatördür.

Pozitiflik:

$k, n \in$ Niçin ve $x \in [-1,1]$ için

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \geq 0$$

olduğundan $f \geq 0$ ise $S_n(f;x) \geq 0$ olur. Buna göre $S_n(f;x)$ lineer pozitif bir operatördür.

Lemma 4.1.1

Her $x \in [-1,1]$ için(4.1)'de tanımış olduğumuz operatör aşağıdaki sonuçları sağlar.

$\boldsymbol{y_1}$) $S_n(1;x) = 1$

$\boldsymbol{y_2}$) $S_n(t;x) = x - \dfrac{\beta}{(n+\beta)}x + \dfrac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}$

$\boldsymbol{y_3}$) $S_n(t^2;x) = x^2 - \dfrac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \dfrac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2}x + \dfrac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$

$\boldsymbol{y_4}$) $S_n(t^3;x) = x^3 - \dfrac{3(1+\beta)n^2+(3\beta^2-2)n+\beta^3}{(n+\beta)^3}x^3$

$$+\frac{-3(\beta-2\alpha)n^2-3(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^3}x^2 + \frac{-3n^2-(2-3\beta^2+12\alpha\beta)n}{(n+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6n^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)n-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+\beta)^3}$$

$\boldsymbol{y_5}$) $S_n(t^4;x) = x^4 - \dfrac{-2(3-2\beta)n^3+(-11+6\beta^2)n^2+2(3+2\beta^3)n+\beta^4}{(n+\beta)^4}x^4$

$$+\frac{-4\beta(n^2-3n+2)n}{(n+\beta)^4}x^3$$

$$+\frac{6(1-4\alpha)n^3+2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)n^2-(6-4\alpha\beta+\beta^2)n}{(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\frac{12(1-2\alpha)n^3+4(22-12\alpha^2-6\beta)n^2-4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)n}{(n+\beta)^4}\,x$$

$$+\frac{-8n^3\alpha+(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)n^2-2(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)n}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{-32\alpha^3\beta+24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3+\beta^4}{(n+\beta)^4}$$

İspat:

***y_1*)**

$$S_n(1;x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$

$$(1+x+1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$2^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{2^n}.2^n=1$$

$$S_n(1;x)=1$$

***y_2*)**

$$S_n(t;x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)}-1\right)$$

$$=\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)}-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}.1$$

$$=\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)}$$

$$+\frac{2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$=\frac{2}{2^n(n+\beta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}+\frac{2\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$= \frac{2n}{2^n(n+\beta)}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1} + \frac{2\alpha}{(n+\beta)} - 1$$

$$= \frac{2n}{2^n(n+\beta)}(1+x)2^{n-1} + \frac{2\alpha}{2^n(n+\beta)} - 1$$

$$= \frac{n(1+x)}{(n+\beta)} + \frac{2\alpha}{(n+\beta)} - 1 \ = x - \frac{\beta}{(n+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}$$

$$S_n(t;x) = x - \frac{\beta}{(n+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}$$

$\boldsymbol{y_3}$**)**

$$S_n(t^2;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} - 1\right)^2$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[4\frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta)^2} - 4\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} + 1\right]$$

$$= \frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)}$$

$$+\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ .1$$

$$= \frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k^2+2k\alpha+\alpha^2)}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} + 1$$

$$= \frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{8\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k}{(n+\beta)^2} + \frac{4\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)}-\frac{4\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k(k-1)+k}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{8\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^2}+\frac{4\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{4}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)}-\frac{4\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$-\frac{4n}{2^n(n+\beta)}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}-\frac{4\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=\frac{4n(n-1)}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{4n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\frac{8\alpha n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}+\frac{4\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\frac{4n(n-1)}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)^2 2^{n-2}+\frac{4n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)2^{n-1}$$

$$+\frac{8\alpha n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)2^{n-1}+\frac{4\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{4n}{2^n(n+\beta)}(1+x)2^{n-1}-\frac{4\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{(n+\beta)^2}(1+x)^2+\frac{2n}{(n+\beta)^2}(1+x)+\frac{4\alpha n}{(n+\beta)^2}(1+x)+\frac{4\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{2n}{(n+\beta)}(1+x)-\frac{4\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=x^2-\frac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2}x+\frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$$

$$S_n(t^2;x) = x^2 - \frac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$$

y_4)

$$S_n(t^3;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)}-1\right)^3$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\left[8\frac{(k+\alpha)^3}{(n+\beta)^3} - 12\frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta)^2} + 6\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)}$$

$$-\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ .1$$

$$= \frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k^3+3k^2\alpha+3k\alpha^2+\alpha^3)}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k^2+2k\alpha+\alpha^2)}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} - 1$$

$$= \frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k^3}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k^2}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k}{(n+\beta)^3} + \frac{8\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{24\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k}{(n+\beta)^2}-\frac{12\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)}+\frac{6\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$=\frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k(k-1)(k-2)+3k^2-2k}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k(k-1)+k}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k}{(n+\beta)^3}+\frac{8\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k(k-1)+k}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{24\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k}{(n+\beta)^2}-\frac{12\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)}+\frac{6\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$=\frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k(k-1)(k-2)}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k(k-1)}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{16}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\ \frac{k}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^3}+\frac{8\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{12}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{24\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^2}-\frac{12\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)}+\frac{6\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$=\frac{8}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}k\,(k-1)(k-2)(1+x)^k \times(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{24}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k\times(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{24}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{16}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{24\alpha}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k\times(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{24\alpha}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{24\alpha^2}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}+\frac{8\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^n(n+\beta)^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k\times(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{12}{2^n(n+\beta)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{24\alpha}{2^n(n+\beta)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}-\frac{12\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^n(n+\beta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}+\frac{6\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$=\frac{8n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^3\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-3}$$

$$+\frac{24n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{24n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$-\frac{16n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\frac{24\alpha n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{24\alpha n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\frac{24\alpha^2 n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}+\frac{8\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{12n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$-\frac{12n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$-\frac{24\alpha n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}-\frac{12\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6n}{2^n(n+\beta)}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}+\frac{6\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$=\frac{8n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^3 2^{n-3}+\frac{24n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2 2^{n-2}$$

$$+\frac{24n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)2^{n-1}-\frac{16n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)2^{n-1}$$

$$+\frac{24\alpha\, n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2 2^{n-2}+\frac{24\alpha\, n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)2^{n-1}$$

$$+\frac{24\alpha^2 n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)2^{n-1}+\frac{8\alpha^3}{(n+\beta)^3}-\frac{12n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2 2^{n-2}$$

$$-\frac{12n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)2^{n-1}-\frac{24\alpha\, n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)2^{n-1}-\frac{12\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{6n}{2^n(n+\beta)}(1+x)2^{n-1}+\frac{6\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+\beta)^3}(1+x)^3+\frac{6n(n-1)}{(n+\beta)^3}(1+x)^2+\frac{12n}{(n+\beta)^3}(1+x)$$

$$-\frac{8n}{(n+\beta)^3}(1+x)+\frac{6\alpha\, n(n-1)}{(n+\beta)^3}(1+x)^2+\frac{12\alpha n}{(n+\beta)^3}(1+x)$$

$$+\frac{12.\alpha^2.n}{(n+\beta)^3}(1+x)+\frac{8\alpha^3}{(n+\beta)^3}-\frac{3n(n-1)}{(n+\beta)^3}(1+x)^2-\frac{6n}{(n+\beta)^2}(1+x)$$

$$-\frac{12\alpha n}{(n+\beta)^2}(1+x)-\frac{12\alpha^2}{(n+\beta)^2}+\frac{3n}{(n+\beta)}(1+x)+\frac{6\alpha}{(n+\beta)}-1$$

$$= x^3 - \frac{3(1+\beta)n^2 + (3\beta^2 - 2)n + \beta^3}{(n+\beta)^3} x^3$$

$$+ \frac{-3(\beta - 2\alpha)n^2 - 3(2\alpha - \beta)n}{(n+\beta)^3} x^2 + \frac{-3n^2 - (2 - 3\beta^2 + 12\alpha\beta)n}{(n+\beta)^3} x$$

$$+ \frac{6n^2\beta + 3(2\alpha - \beta - 4\alpha^2)n - 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 - \beta^3}{(n+\beta)^3}$$

$$S_n(t^3; x) = x^3 - \frac{3(1+\beta)n^2 + (3\beta^2 - 2)n + \beta^3}{(n+\beta)^3} x^3$$

$$+ \frac{-3(\beta - 2\alpha)n^2 - 3(2\alpha - \beta)n}{(n+\beta)^3} x^2 + \frac{-3n^2 - (2 - 3\beta^2 + 12\alpha\beta)n}{(n+\beta)^3} x$$

$$+ \frac{6n^2\beta + 3(2\alpha - \beta - 4\alpha^2)n - 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 - \beta^3}{(n+\beta)^3}$$

y_5)

$$S_n(t^4; x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} - 1 \right)^4$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \left[16\frac{(k+\alpha)^4}{(n+\beta)^4} - 32\frac{(k+\alpha)^3}{(n+\beta)^3} \right.$$

$$\left. +24\frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta)^2} \quad - 8\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} + 1 \right]$$

$$= \frac{16}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \frac{(k+\alpha)^4}{(n+\beta)^4}$$

$$- \frac{32}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \frac{(k+\alpha)^3}{(n+\beta)^3}$$

$$+ \frac{24}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$$

$$- \frac{8}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+x)^k (1-x)^{n-k} \frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)} + 1$$

$$= \frac{16}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{(k^4+4k^3\alpha+6k^2\alpha^2+4k\alpha^3+\alpha^4)}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{32}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{(k^3+3k^2\alpha+3k\alpha^2+\alpha^3)}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{(k^2+2k\alpha+\alpha^2)}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{(k+\alpha)}{(n+\beta)}+1$$

$$= \frac{16}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k^4}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{64\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k^3}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{96\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k^2}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{64\alpha^3}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^4}+\frac{16\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{32}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{96\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k^2}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{96\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^3}-\frac{32.\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k^2}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{48\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^2}+\frac{24\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)}-\frac{8\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=\frac{16}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)+6k^3-11k^2+6k}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{64\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)+3k^2-2k}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{96\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)+k}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{64\alpha^3}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}+\frac{16\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{32}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)+3k^2-2k}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{96\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)+k}{(n+\beta)^3}$$

$$-\frac{96\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^3}-\frac{32\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)+k}{(n+\beta)^2}$$

$$+\frac{48\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^2}+\frac{24\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)}-\frac{8\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=\frac{16}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{96}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{288}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{288}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{192}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{176}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{176}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{96}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{64\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)(k-2)}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{192\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{192\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{128\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{96\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{96\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{64\alpha^3}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{(n+\beta)^4}+\frac{16\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{32}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k(k-1)(k-2)}{(n+\beta)^3}\\
&-\frac{96}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^3}\\
&-\frac{96}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^3}\\
&+\frac{64}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^3}\\
&-\frac{96\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^3}\\
&-\frac{96\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^3}\\
&-\frac{96\alpha^2}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^3}\\
&+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k(k-1)}{(n+\beta)^2}\\
&+\frac{24}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^2}\\
&+\frac{48\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)^2}+\frac{24\alpha^2}{(n+\beta)^2}\\
&-\frac{8}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}\,\frac{k}{(n+\beta)}-\frac{8\alpha}{(n+\beta)}+1
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{16}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=4}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!}k\,(k-1)(k-2)
$$
$$
\times(k-3)(1+x)^k(1-x)^{n-k}
$$

$$+\frac{96}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}k\,(k-1)(k-2)$$
$$\times(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{288}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k$$
$$\times(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{288}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{192}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{176}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k\times(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{176}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{64\alpha}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}k\,(k-1)(k-2)$$
$$\times(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{192\alpha}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{192\alpha}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{128}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{96\alpha^2}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k$$
$$\times(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{96\alpha^2}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{64\alpha^3}{2^n(n+\beta)^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}+\frac{16\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{32}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=3}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)(k-3)!}k\,(k-1)(k-2)$$
$$\times(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{96}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k\times(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{96}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{64}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{96\alpha}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k\times(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{96\alpha}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{96\alpha^2}{2^n(n+\beta)^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}-\frac{32\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24}{2^n(n+\beta)^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!\,k(k-1)(k-2)!}k\,(k-1)(1+x)^k\times(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{24}{2^n(n+\beta)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{48}{2^n(n+\beta)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{24\alpha^2}{(n+\beta)^2}-\frac{8}{2^n(n+\beta)}\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-k)!\,k(k-1)!}k\,(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{8\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=\frac{16n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^4\sum_{k=0}^{n-4}\binom{n-4}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-4}$$

$$+\frac{96n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^3\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-3}$$

$$+\frac{288n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{288n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$-\frac{192n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$-\frac{176n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$-\frac{176n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k}$$

$$+\frac{64\alpha n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^3\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-3}$$

$$+\frac{192\alpha n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{192\alpha n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$-\frac{128n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\frac{96\alpha^2 n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{96\alpha^2 n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\frac{64\alpha^3 n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}+\frac{16\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{32n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^3\sum_{k=0}^{n-3}\binom{n-3}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-3}$$

$$-\frac{96n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$-\frac{96n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\frac{64n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$-\frac{96\alpha n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$-\frac{96\alpha n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$-\frac{96\alpha^2 n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}-\frac{32\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$+\frac{24n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$+\frac{24n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$+\frac{48\alpha n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}+\frac{24\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-\frac{8n}{2^n(n+\beta)}(1+x)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k-1}-\frac{8\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$=\frac{16n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^4 2^{n-4}+\frac{96n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^3 2^{n-3}$$

$$+\frac{288n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2 2^{n-2}+\frac{288n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)\,2^{n-1}$$

$$-\frac{192n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)2^{n-1}-\frac{176n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2 2^{n-2}$$

$$-\frac{176n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)2^{n-1}+\frac{64\alpha n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^3 2^{n-3}$$

$$+\frac{192\alpha n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2 2^{n-2}+\frac{192\alpha n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)2^{n-1}$$

$$-\frac{128n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)2^{n-1}+\frac{96\alpha^2 n(n-1)}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)^2 2^{n-2}$$

$$+\frac{96\alpha^2 n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)2^{n-1}+\frac{64\alpha^3 n}{2^n(n+\beta)^4}(1+x)2^{n-1}+\frac{16\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$-\frac{32n(n-1)(n-2)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^3 2^{n-3}-\frac{96n(n-1)}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)^2 2^{n-2}$$

$$-\frac{96\alpha n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\,2^{n-1}+\frac{64n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\,2^{n-1}$$

$$-\frac{96\alpha\, n(n-1)}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)^2 2^{n-2}-\frac{96n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\,2^{n-1}$$

$$-\frac{96\alpha^2 n}{2^n(n+\beta)^3}(1+x)\,2^{n-1}-\frac{32\alpha^3}{(n+\beta)^3}+\frac{24n(n-1)}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)^2 2^{n-2}$$

$$+\frac{24n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\,2^{n-1}+\frac{48\alpha\, n}{2^n(n+\beta)^2}(1+x)\,2^{n-1}$$

$$+\frac{24\alpha^2}{(n+\beta)^2}-\frac{8n}{2^n(n+\beta)}(1+x)\,2^{n-1}-\frac{8\alpha}{(n+\beta)}+1$$

$$= x^4 - \frac{-2(3-2\beta)n^3 + (-11+6\beta^2)n^2 + 2(3+2\beta^3)n + \beta^4}{(n+\beta)^4}x^4$$

$$+ \frac{-4\beta(n^2-3n+2)n}{(n+\beta)^4}x^3$$

$$+ \frac{6(1-4\alpha)n^3 + 2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)n^2 - (6-4\alpha\beta+\beta^2)n}{(n+\beta)^4}x^2$$

$$+ \frac{12(1-2\alpha)n^3 + 4(22-12\alpha^2-6\beta)n^2 - 4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)n}{(n+\beta)^4}x$$

$$+ \frac{-8n^3\alpha + (23-24\alpha\beta-24\alpha^2)n^2 - 2(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)n}{(n+\beta)^4}$$

$$+ \frac{-32\alpha^3\beta + 24\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta^3 + \beta^4}{(n+\beta)^4}$$

$$S_n(t^4;x) = x^4 - \frac{-2(3-2\beta)n^3 + (-11+6\beta^2)n^2 + 2(3+2\beta^3)n + \beta^4}{(n+\beta)^4}x^4$$

$$+ \frac{-4\beta(n^2-3n+2)n}{(n+\beta)^4}x^3$$

$$+ \frac{6(1-4\alpha)n^3 + 2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)n^2 - (6-4\alpha\beta+\beta^2)n}{(n+\beta)^4}x^2$$

$$+ \frac{12(1-2\alpha)n^3 + 4(22-12\alpha^2-6\beta)n^2 - 4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)n}{(n+\beta)^4}x$$

$$+ \frac{-8n^3\alpha + (23-24\alpha\beta-24\alpha^2)n^2 - 2(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)n}{(n+\beta)^4}$$

$$+ \frac{-32\alpha^3\beta + 24\alpha^2\beta^2 - 8\alpha\beta^3 + \beta^4}{(n+\beta)^4}$$

Teorem 4.1.1

$f \in C[-1,1]$ ve f bütün reel eksende sınırlı olsun o zaman;

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{C[-1,1]} = 0$$

dır.

İspat:

Korovkin teoreminden yararlanılarak $n \to \infty$ için

$S_n(1;x) \rightrightarrows 1$

$S_n(t;x) \rightrightarrows x$

$S_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterip ispatı tamamlamış oluruz

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n 1 - 1\|_{C[-1,1]} = 0$$

olduğu görünüyor. Bulduğumuz sonuçları yerine yazarsak

$$\|S_n t - x\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1} \left| x - \frac{\beta}{(n+\beta)} x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)} - x \right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1} \left| -\frac{\beta}{(n+\beta)} x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)} \right| = \left| \frac{2\alpha}{(n+\beta)} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2\alpha}{(n+\beta)} \right| \to 0$$

$$\|S_n t^2 - t^2\|_{C[-1,1]} =$$

$$\max_{-1\le x\le 1} \left| x^2 - \frac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2} x^2 + \frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2} x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2} - x^2 \right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1} \left| -\frac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2} x^2 + \frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2} x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{-4\big((n+\alpha)\beta-\alpha^2\big)}{(n+\beta)^2} \right| \to 0$$

Lemma 4.1.2

$S_n((t-x)^m;x)$= m= 0,1,2..... olmak üzere

$\boldsymbol{y_1}$) $S_n((t-x)^0;x) = 1$

$\boldsymbol{y_2}$) $S_n((t-x)^1;x) = -\dfrac{\beta}{(n+\beta)}x + \dfrac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}$

$\boldsymbol{y_3}$) $S_n((t-x)^2;x) = \dfrac{-n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \dfrac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x + \dfrac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$

$\boldsymbol{y_4}$) $S_n((t-x)^3;x) = \dfrac{(2+3\beta)n-\beta^3}{(n+\beta)^3}x^3$

$$+\frac{-3n^2\beta-3(2\alpha-\beta)n+6\alpha^2\beta^2-\beta^3}{(n+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{(-2-6\alpha\beta-3\beta-12\alpha^2)n-3\beta^3+6\alpha\beta^2-12\alpha^2\beta}{(n+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6n^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)n-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+\beta)^3}$$

$\boldsymbol{y_5}$) $S_n((t-x)^4;x) = \dfrac{3n^2-2(3+4\beta-3\beta^2)n+\beta^4}{(n+\beta)^4}x^4$

$$+\frac{-8\alpha n^3+24n^2+4\beta(6\alpha-3\beta-2)n-8\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+\beta)^4}x^3$$

$$+\frac{-24\alpha n^3+2(31+3\alpha^2)n^2+4(2\beta-9+3\alpha^2\beta)n+6\beta^4-24\alpha\beta^3+6\alpha^2\beta^2}{(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\left(\frac{-12(\beta+2\alpha)n^3+4(22-3\beta-6\alpha-6\beta^2)n^2-4(12-2\beta+6\alpha\beta-3\beta^2-12\alpha^2\beta)n}{(n+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{48\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+\beta)^4}\right)x+\frac{-8n^3\alpha-(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)n^2}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{-2(16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)n+24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3-32\alpha^3\beta+\beta^4}{(n+\beta)^4}$$

İspat:

$\boldsymbol{y_1}$) $S_n((t-x)^0;x) = S_n(1;x)=1$

$\boldsymbol{y_2}$) $S_n((t-x)^1;x)$=$S_n(t;x)$+$S_n(-x;x)$

$$= S_n(t;x) - xS_n(1;x)$$

$$= -\frac{\beta}{(n+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}$$

$\boldsymbol{y_3}$) $S_n((t-x)^2;x) = S_n\big((t^2-2xt+x^2);x\big)$

$$= S_n(t^2;x) - 2xS_n(t;x) + x^2S_n(1;x)$$

$$= x^2 - \frac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-2x\left(x - \frac{\beta}{(n+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}\right) + x^2$$

$$= \frac{-n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}$$

$\boldsymbol{y_4}$) $S_n((t-x)^3;x) = S_n\big((t^3-3x^2t+3xt^2+t^3);x\big)$

$$= S_n(t^3;x) - 3xS_n(t^2;x) + 3x^2S_n(t;x) - x^3S_n(1;x)$$

$$= x^3 - \frac{3(1+\beta)n^2+(3\beta^2-2)n+\beta^3}{(n+\beta)^3}x^3 + \frac{6(1-n)n+3\alpha\beta}{(n+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{-3(3+4\alpha)n^2+3(2+\beta^2-4\alpha\beta)n}{(n+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6(\alpha-1)n^2+(2-3\beta-12\alpha^2)n-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+\beta)^3}$$

$$-3x\left(x^2 - \frac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}\right)$$

$$+3x^2\left(x-\frac{\beta}{(n+\beta)}x+\frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}\right)-x^3$$

$$=\frac{(2+3\beta)n-\beta^3}{(n+\beta)^3}x^3+\frac{-3n^2\beta-3(2\alpha-\beta)n+6\alpha^2\beta^2-\beta^3}{(n+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{(-2-6\alpha\beta-3\beta-12\alpha^2)n-3\beta^3+6\alpha\beta^2-12\alpha^2\beta}{(n+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6n^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)n-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+\beta)^3}$$

$\boldsymbol{y_5}$) $S_n((t-x)^4;x)=S_n\big((t^4-4t^3x+6t^2x^2-4tx^3+x^4);x\big)$

$$=S_n(t^4;x)-4xS_n(t^3;x)+6x^2S_n(t^2;x)-4x^3S_n(t;x)+x^4S_n(1;x)$$

$$=x^4+\frac{-2(3+2\beta)n^3+(11-6\beta^2)n^2-2(3+2\beta^3)n-\beta^4}{(n+\beta)^4}x^4$$

$$+\frac{-4n^3+12n^2\beta-8n\beta}{(n+\beta)^4}x^3$$

$$+\frac{6(1-4\alpha)n^3+2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)n^2-6(1+\beta^2)n}{(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\frac{12(\beta-2\alpha)n^3+8(11-3\beta-6\alpha^2)n^2-4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)n}{(n+\beta)^4}x$$

$$+\frac{4n^3\beta-(25+24\alpha+24\alpha\beta+24\alpha^2)n^2+2(37+24\alpha+3\beta^2)n}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{-8\alpha n^3+(23-24\alpha^2-24\alpha\beta)n^2-6(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\alpha\beta^2)n-32\alpha^3+24\alpha^2\beta^2}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{-8\alpha\beta^3+\beta^4}{(n+\beta)^4}$$

$$-4x\left(x^3-\frac{3(1+\beta)n^2+(3\beta^2-2)n+\beta^3}{(n+\beta)^3}x^3+\frac{3(2\alpha-\beta)n^2+3(\beta-2\alpha)n}{(n+\beta)^3}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{3n^2+(3\beta^2-12\alpha\beta-2)n}{(n+\beta)^3}x+\frac{6n^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)n-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+\beta)^3}\right)$$

$$+6x^2\left(x^2-\frac{(1+2\beta)n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+\beta)^2}x+\frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}\right)$$

$$-4x^3\left(x-\frac{\beta}{(n+\beta)}x+\frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}\right)+x^4$$

$$=\frac{3n^2-2(3+4\beta-3\beta^2)n+\beta^4}{(n+\beta)^4}x^4$$

$$+\frac{-8\alpha n^3+24n^2+4\beta(6\alpha-3\beta-2)n-8\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+\beta)^4}x^3$$

$$+\frac{-24\alpha n^3+2(31+3\alpha^2)n^2+4(2\beta-9+3\alpha^2\beta)n+6\beta^4-24\alpha\beta^3+6\alpha^2\beta^2}{(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\left(\frac{-12(\beta+2\alpha)n^3+4(22-3\beta-6\alpha-6\beta^2)n^2-4(12-2\beta+6\alpha\beta-3\beta^2-12\alpha^2\beta)n}{(n+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{48\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+\beta)^4}\right)x+\frac{-8n^3\alpha-(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)n^2}{(n+\beta)^4}$$

$$+\frac{-2(16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)n+24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3-32\alpha^3\beta+\beta^4}{(n+\beta)^4}$$

$$(n+\beta)S_n((t-x)^4;x)\leq(n+\beta)\left(\frac{3n^2+\beta^2 n+\beta^4}{(n+\beta)^4}x^4\right.$$

$$+\frac{+24n^2+24\alpha\beta n+4\beta^4}{(n+\beta)^4}x^3$$

$$+\frac{+2(31+3\alpha^2)n^2+4(2\beta+3\alpha^2\beta)n+6\beta^4+6\alpha^2\beta^2}{(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\frac{+88n^2+4(2\beta+3\beta^2+12\alpha^2\beta)n+48\alpha^2\beta^2+4\beta^4}{(n+\beta)^4}x$$

$$\left.+\frac{(24\alpha\beta+24\alpha^2)n^2+6\beta^2 n+24\alpha^2\beta^2+\beta^4}{(n+\beta)^4}\right)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)S_n((t-x)^4;x)=0$$

için$x\in[-1,1]$ elde edilir.

Teorem 4.1.3

$f \in C[-1,1]$ ve her $x \in [-1,1]$ için $|f(x)| \leq M$
ise bu durumda

$$|S_{\boldsymbol{n}}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}}\right)$$

İspat

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leq |S_n(f;x) - f(x)S_n(1;x)|$$

$$\leq |S_n(f(t);x) - S_n(f(x);x)|$$

$$\leq |S_n(f(t) - f(x);x)|$$

$$\leq S_n(|f(t) - f(x)|;x)$$

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leq S_n\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)$$

$\omega(f,\delta)$ süreklilik modülünün özelliği kullanırsak

$$\leq \left(S_n(1;x) + \frac{1}{\delta}S_n(|t-x|;x)\right)\omega(f,\delta)$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{S_n((t-x)^2;x)}\right)\omega(f,\delta)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{-n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \frac{2\beta^2 - 4\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}}\right)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}}\right)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}}$$

kabul edersek

$$|S_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f;\ \sqrt{\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}}\right)$$

Teorem 4.1.3

$f \in C^2[-1,1]$ ve f, f', f''fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında sınırlı ise bu, takdirde

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)\left(S_n(f;x) - f(x)\right) = (-\beta x + 2\alpha - \beta^2)f'(x) + \frac{1-x^2}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

f fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımı;

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2 + (t-x)^2\mu(t;x)$$

dir.

$$(t-x)^2\mu(t;x) = (t-x)^2\left(\frac{1}{3!}f'''(x)(t-x) + \frac{1}{4!}f^4(x)(t-x)^2 + \ldots\right)$$

$$S_n(f;x) - f(x) = S_n(f(t);x) - S_n(1;x)f(x)$$

$$= S_n\big((f;x) - f(x);x\big)$$

$$= S_n\big((t-x);x\big)f'(x) + \frac{1}{2}S_n((t-x)^2;x)f''(x) + S_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$

$$= \left(-\frac{\beta}{(n+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+\beta)}\right)f'(x)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{-n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2 + \frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}\right)f''(x)$$

$$+ S_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$

eşitliğin her iki tarafını $n+\beta$ çarpılırsa

$$(n+\beta)\big(S_n(f;x) - f(x)\big) = (-\beta x + 2\alpha - \beta)f'(x)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{-n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x+\frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}\right)f''(x)$$

$$+(n+\beta)S_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$

$$\lim_{t\to x}\mu(t-x)=0$$

olduğundan μ fonksiyonu sınırlıdır.

$$(n+\beta)\ S_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$

$$\leq\sqrt{(n+\beta)S_n((t-x)^4;x)}\sqrt{(n+\beta)S_n(\mu(t-x)^2;x)}$$

Burada lemma 4.1.2 deki ispat $(n+\beta)S_n((t-x)^4;x)$= 0 olduğu gösterilmiştir.

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)\left(S_n(f;x)-f(x)\right)=\ (-\beta x+2\alpha-\beta^2)f'(x)+\frac{1-x^2}{2}f''(x)$$

Teorem

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, bu takdirde

$$\|S_n(f;x)-f(x)\|_{C[-1,1]}\leq M\left(\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

İspat:

$S_n(1;x)=1$ olduğundan ve bu operatörün lineerliğinden

$$|S_n(f;x)-f(x)|=|S_n(f;x)-f(x)S_n(1;x)|$$

$$=|S_n(f;x)-S_n(f(x);x)|$$

$$\leq|S_n(f(t)-f(x);x)|$$

dır.

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından

$$|f(t)-f(x)|\leq M|t-x|^{\alpha}$$

dır. Bu durumda

$$|S_n(f;x)-f(x)| \leq (S_n M|t-x|^{\alpha};x)$$

Hölder eşitsizliğinden

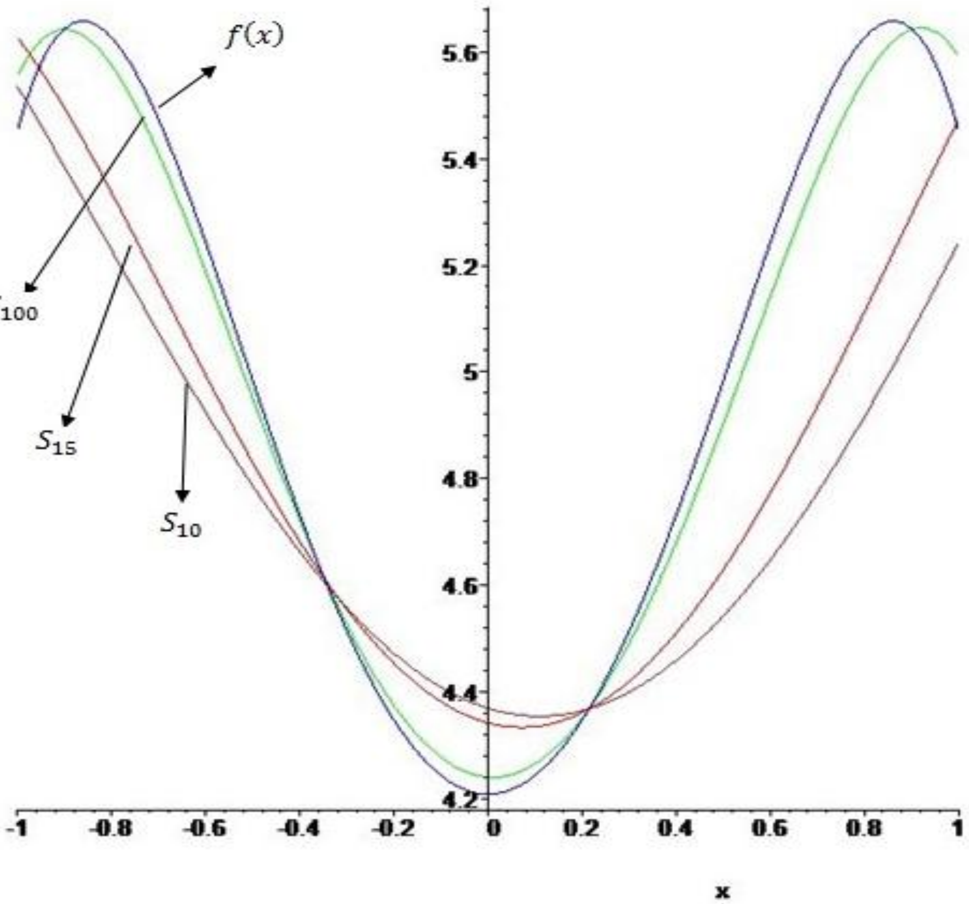
$$\leq MS_n((t-x)^2;x)^{\alpha/2}.S_n(1;x)^{\alpha/2}$$

$$=MS_n((t-x)^2;x)^{\alpha/2}$$

$$\leq M\left(\frac{-n+\beta^2}{(n+\beta)^2}x^2+\frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+\beta)^2}x+\frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

$$\leq M\left(\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

$f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$ ve $\alpha = 2,\ \beta = 5$ için grafik ve nümerik değerler tablosu.



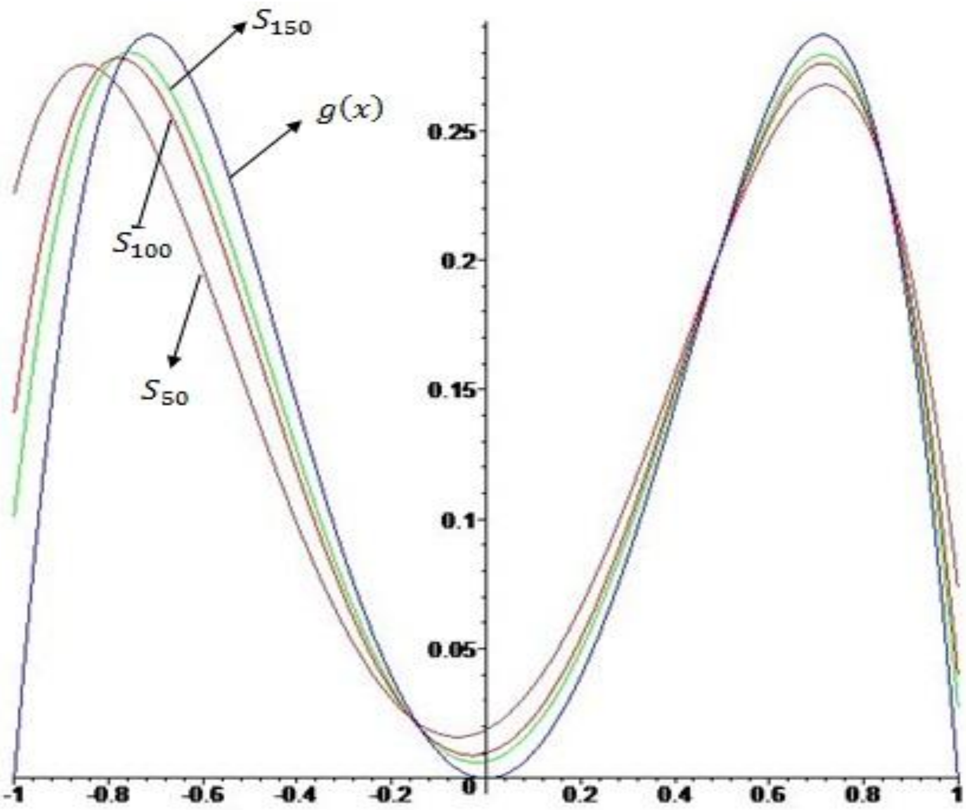
Şekil 4.1. $f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$ ve $\alpha = 2, \beta = 5$ için yaklaşım grafiği.

Çizelge 4.1.$f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$ ve $\alpha = 2, \beta = 5$ için nümerik değerler tablosu.

n \ x	-1	- 0,8	0	0,8	1
10	0.07897	0.39932	0.16146	0.71131	0.21443
100	0.10112	0.05180	0.03206	0.07733	0.13760
500	0.02427	0.01064	0.00694	0.01481	0.03575
1000	0.01241	0.00539	0.00351	0.00735	0.01845
10000	0.00127	0.00054	0.00035	0.00073	0.00190

$|S_n(f;x) - f(x)|$ değeri yukarıda verilen değer için hesaplanan nümerik değer tablosudur.

$g(x) = \sin\left((1+x^2)\frac{\Pi}{2}\right)\ln(1+x^2)$ ve $\alpha = 4,\ \beta = 5$ için grafik ve nümerik değerler tablosu.



Şekil 4.2. $g(x) = \sin\left((1+x^2)\frac{\Pi}{2}\right)\ln(1+x^2)$ ve $\alpha = 4, \beta = 5$ için yaklaşım grafiği.

Çizelge 4.2.$g(x) = \sin\left((1+x^2)\frac{\Pi}{2}\right)\ln(1+x^2)$ ve $\alpha = 4, \beta = 5$ için nümerik değerler tablosu

n \ x	-1	- 0,6	0	0,8	1
10	0	0.19696	0.07141	0.01778	0
100	0	0.03306	0.00973	0.00615	0
300	0	0.01135	0.00330	0.00230	0
500	0	0.00685	0.00199	0.00141	0
990	0	0.00347	0.00101	0.00072	0

$|S_n(g;x) - g(x)|$ değeri yukarıda verilen değer için hesaplanan nümerik değer tablosudur.

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada operatörünün her $f, g \in [-1,1]$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$S_n\left(\left(af(t) + bg(t)\right); x\right)$ lineerlik ve $k, n \in$ N için ve $x \in [-1,1]$ için

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} \geq 0$$

olduğundan $f \geq 0$ ise $S_n(f; x) \geq 0$ olur. Buna göre $S_n(f; x)$ lineer pozitif bir operatörü gösterilmiştir.$f \in$ C$[-1,1]$ve$f$ bütün reel eksende sınırlı olsun o zaman;

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{C[-1,1]} = 0$$

Korovkin şartları ispatlanmıştır. $S_n((t-x)^m; x)$= m= 0,1,2..... olmak üzere merkezi momentleri hesaplanmıştır. $f \in C[-1,1]$ ve her $x \in [-1,1]$ için $|f(x)| \leq M$

ise bu durumda

$$|S_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}}\right)$$

süreklilik modülü hesaplanmıştır. $f \in C^2[-1,1]$ ve f, f', f''fonksiyonları$[-1,1]$ aralığında sınırlı ise bu, takdirde

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)\left(S_n(f; x) - f(x)\right) = (-\beta x + 2\alpha - \beta^2)f'(x) + \frac{1-x^2}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır.f fonksiyonu Lipschitz koşulu

$$\|S_n(f; x) - f(x)\|_{C[-1,1]} = M\left(\frac{n+4\beta^2}{(n+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

hesaplanmıştır.

5.2. Öneriler

Şuana kadar yapılan çalışmalar $[0,1]$ aralığında olup pozitif yarı eksendedir. Negatif eksende katılan simetrik bir aralık kullanmak istediğinde çalıştığımız operatöre uygun olmalıdır.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theoryan its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Berlin –New York , 640s.

BALCI, M., 2012 Reel Analiz, Balcı Yayınları , Ankara 144s.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du Theoreme de Weierstrass Fondee Sur le Calcul Des Probabilities. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2):1-2.

HACISALİHOĞLU, H., and HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

KOROVKİN, P.P. , 1953 On Comvergense of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl Akad Nauk SSSR, 90(961-4):324-337.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N., EKİNCİOĞLU, İ. 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz1, Ankara,362s.

SHEVCHUK, I.A., 1992. Approximation by Polynomialsand Tracers of Functions Continuous on a Segment Naukova Dymka, Kiev, 324s.

STANCU, D. D., 1968. Approximation of Functionby a New Class of Polynomial Operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8):1173-1194.

THOMAS, G.B., Finney, R.L., 1984. " Calculusand Analytic Geometry", Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1142s.

WEIERSTRASS, K., 1885. Über Die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willküricher 55 Funktionen Einer Reelen Veranderlichen, Sitzungsberichte Der Akademiezu, 2(1):633-639.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ömer Seyfettin YÜCEL
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : BOZOVA 1984
Telefon : 05072884324
e-mail : omersycl@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Bitirme Yılı		
Lise	: Davut Zeki Akpınar Lisesi, Şanlıurfa	2001
Üniversite	: Bakü Devlet Üniversitesi ,Bakü / Azerbaycan	2009
Üniversite	: Anadolu Üniversitesi , Eskişehir	2018
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2009-2010	M.E.B	Vekil Öğretmenlik
2010-2012	Özel Uğur Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2012-2014	Özel Atılım Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2014-2019	Özel Atılım Temel Lise (Devam)	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce (Orta Düzey), Rusça (Orta Düzey), Azerice (İyi Düzey)