T.C
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MODİFİYE (p,q)-BERNSTEİN TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Engin ÇEVİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, Engin ÇEVİK'in hazırladığı **"Modifiye (p,q)-Bernstein Tipi Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri"** konulu bu çalışma 27/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Aydın İZGİ ……………………..........

Üye : Doç. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY ……………………..........

Üye : Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN ……………………..........

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin , çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MODİFİYE (p,q)-BERNSTEİN TİPİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Engin ÇEVİK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2019, Sayfa: 43

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde lineer pozitif operatör dizisi ve temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca (p,q)-Analiz ve bazı temel kavramları tanıtılmıştır. İkinci bölümde Bernstein operatör dizisi ve geçmişten günümüze yapılan bazı genelleştirmeleri verilmiştir. Üçüncü bölümde tezin hazırlanmasında kullanılan materyal ve yöntem ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde modifiye (p,q)-Bernstein tipi $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörü oluşturulmuştur. Bu operatörün düzgün yakınsaklığı, süreklilik modülü ile yaklaşım hızı, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı incelenmiştir. Modifiye (p,q)-Bernstein tipi operatörün merkezi momentleri tanımlanarak Voronoskaja tip teoremi ispatlanmıştır. Ayrıca $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün seçilen bir fonksiyona yaklaşımın bazı n ve x değerleri için nümerik değerler çizelgesi hazırlanmıştır. Beşinci bölümde tezimizde elde edilen sonuçlar ve öneriler vurgulanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Korovkin teoremi, lineer pozitif operatörler, (p,q)-analiz, süreklilik modülü, Bernstein polinomları

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF MODIFIED (p,q)-BERNSTEIN TYPE OPERATORS

Engin ÇEVİK

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year:2019, Page: 43

This thesis consists of five sections. In the first section, linear positive operator sequence and basic properties are mentioned. Moreover, (p, q) - Analysis and some of its basic concepts are introduced. In the second section, Bernstein operator sequences and some generalizations from past to present are mentioned. In the third section, the material and method used in the preparation of the thesis are stated. In the fourth section modified (p, q)-Bernstein type $E_{n,p,q}(f;x)$ operator was created. The uniform convergence of this operator has been examined; the rate of convergence using modulus of continuity and rate of convergence with the Lipschitz class functions have been calculated. By defining the moments of the modified (p,q)-Bernstein type operator, Voronoskaja type theorem has been proven. Besides, a numerical values table was prepared for some n and x values of the $E_{n,p,q}(f;x)$ operator's approach to a selected function. In the fifth section, the results and suggestions obtained in our thesis are emphasized.

KEY WORDS: Korovkin theorem, linear positive operators, (p,q)-analysis, modulus of continuity, Bernstein polynomials

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde ve çalışmalarımın her aşamasında büyük bir sabırla beni destekleyen, fikir ve yönlendirmeleriyle yardımlarını esirgemeyen değerli danışmanım, Sayın Doç. Dr. Aydın İZGİ' ye; her zaman yanımda olan başta eşim Gülsüm ÇEVİK olmak üzere, değerli aileme en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel fonksiyonların uzayı
$f_n(x)$	$n \in N$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$L_n(f;x)$	$n \in N$ olmak üzere bir operatör dizisi
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$	$\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyonlar
$[n]=[n]_{p,q}$	$\dfrac{p^n-q^n}{p-q}, n=0,1,2,\ldots,\ 0<q<p\le 1$
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}$	$\dfrac{[n]!}{[k]![n-k]!}$
$D_{p,q}f(x)$	(p,q) hesabında $f(x)$ fonksiyonunun türevi
$B_{n,p,q}(f;x)$	(p,q) Bernstein polinomları

1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi matematiğin birçok dalıyla yakın ilişkilidir. Yaklaşım teorisi bir fonksiyonun, daha kullanışlı ve basit olan bir polinom fonksiyon cinsinden gösterimini elde etmeyi amaçlar.

Fonksiyon uzaylarında sürekli fonksiyonlara yaklaşım problemini ilk kez Alman matematikçi Weierstrass ele almıştır. Sonlu ve sınırlı aralıkta sürekli olan her fonksiyona, bu aralıkta yakınsayan bir polinomun varlığı Weierstrass (1885) tarafından ispatlanmıştır. Rus matematikçi Bernstein (1912), Weierstrass teoremini $[0,1]$ aralığında ispatlayarak Bernstein polinomlarının gösterimini vermiştir.

Popoviciu (1951), Bohman (1952), ve Korovkin (1953) birbirlerinden bağımsız olarak lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsak olması için gerekli şartları ortaya koymuşlardır. Bunun yanında "lineer pozitif operatörler" kavramını ilk kullanan Korovkin (1953) olmuştur.

Korovkin (1953), lineer pozitif operatörleri tanımlayıp, bu operatörlerin yaklaşım özelliğini veren meşhur teoremini ispatladıktan sonra, aynı zamanda bir lineer pozitif operatör olan Bernstein polinomları daha ilgi çekici olmuş ve bunlarla ilgili çalışmalar hız kazanmıştır. Örneğin Meyer-König ve Zeller operatörleri, Szasz operatörleri, Bleimann, Butzer ve Hahn operatörleri tanımlanmış ayrıca bu operatörlerin King, Kantorovich, Schurer ve Stancu gibi genelleşmeleri de çalışılmıştır.

Bu tezde (p,q)-Bernstein tipi bir operatör oluşturarak, bu operatörün düzgün yakınsaklığı, süreklilik modülü ile yaklaşım hızı, Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı incelenmiştir. (p,q)-Bernstein tipi operatörün merkezi momentleri tanımlanarak Voronoskaja tip teoremi ispatlanmıştır. Son olarak da seçilen bir fonksiyona yaklaşımın bazı n ve x değerleri için nümerik değerler çizelgesi hazırlanmıştır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız bazı kavramlar hatırlatılacak, temel teoremler ve tanımlar verilecektir. Burada verilecek olan tanım ve teoremler genel olduğu için bazılarında kaynak belirtilmemiştir.

Tanım 1.1.1.

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$T : X \to Y$$

şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir.

Tanım 1.1.2.

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayları olmak üzere, $T : X \to Y$ şeklindeki T operatörü $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in R$ için;

$$T\left(\alpha f + \beta g\right) = \alpha T\left(f\right) + \beta T\left(g\right) \tag{1.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa T operatörüne lineer operatör denir (Korovkin, 1960).

Tanım 1.1.3.

g bir fonksiyon ve T bir operatör olmak üzere

$g \geq 0$ iken $T\left(g\right) \geq 0$

sağlanıyor ise T operatörüne pozitif operatör denir (Korovkin, 1960). Lineerlik ve pozitiflik özelliklerini aynı anda sağlayan operatöre lineer pozitif operatör denir.

Tanım 1.1.4.

Bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm, $f \in C[a,b]$ olmak üzere,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \le x \le b} |f(x)| \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.5.

$\forall x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n \to \infty} \|g_n - g\|_{C[a,b]} = \lim_{n \to \infty} \max_{x \in [a,b]} |g_n(x) - g(x)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (g_n) fonksiyonlar dizisi g fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve

$$g_n(x) \rightrightarrows g(x) \tag{1.3}$$

notasyonu ile gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.1.

$f \in C[a,b]$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $p_n(x)$ polinomu vardır (Weierstrass, 1885).

Weierstrass'ın ortaya koyduğu bu temel teoremin en önemli ispatı Bernstein tarafından verilmiştir.

Teorem 1.1.2.

$f:[0,1]\to R$ olmak üzere, f fonksiyonunun Bernstein polinomu

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.x^k.(1-x)^{n-k}.f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{1.4}$$

ile tanımlanır ve $f\in C[0,1]$ olmak üzere, $\forall\varepsilon>0$ için

$$\left|f(x)-B_n(f;x)\right|<\varepsilon$$

dir (Bernstein,1912). Bernstein bu teoremiyle Weierstrass'ın yaklaşım teoremini gerçekleyen polinomun varlığının yanında bu polinomu da açık bir şekilde ifade etmiştir.

Teorem 1.1.3. (Bohman-Korovkin Teoremi)

$f\in C[a,b]$ ve tüm reel eksende

$$\left|f(x)\right|\le M_f \tag{1.5}$$

olsun. Eğer (L_n) lineer pozitif operatör dizisi, $\forall x\in[a,b]$ için

i. $L_n(1,x)\rightrightarrows 1$

ii. $L_n(t,x)\rightrightarrows x$

iii. $L_n(t^2,x)\rightrightarrows x^2$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $\forall f \in C[a,b]$ için $[a,b]$ de $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ dir (Bohman,1952; Korovkin,1953).

İspat

Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki $|t-x| \leq \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

sağlanır. Eş. (1.5) ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \tag{1.6}$$

yazabiliriz. Eğer, $|t-x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{1.7}$$

olur. Eş. (1.6) ve Eş. (1.7) den

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. O halde

$|t-x| \leq \delta$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

$|t-x| > \delta$ için $\quad |f(t) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$

olur. Dolayısıyla $\forall x,t\in[a,b]$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{1.8}$$

gerçeklenir. (i.), (ii.), (iii.) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f)-f\right\|_{C[a,b]}=0$$

eşitliğini sağladığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned}\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|&=\left|L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)\right|\\&=\left|L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)\right|\\&=\left|L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)\left(L_n(1;x)-1\right)\right|\end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|\le\left|L_n(f(t)-f(x);x)\right|+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|\le L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right|$$

olup Eş. (1.5) ten

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|\le L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)+M_f\left|L_n(1;x)-1\right|$$

yazabiliriz. (L_n) monoton artan olduğundan Eş. (1.8) den

$$\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right|\le L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}\left(t-x\right)^2;x\right)+M_f\left|L_n\left(1;x\right)-1\right| \qquad (1.9)$$

yazılabilir. $\left(L_n\right)$ lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}\left(t-x\right)^2;x\right) &= L_n\left(\varepsilon;x\right)+L_n\left(2\frac{M_f}{\delta^2}\left(t-x\right)^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n\left(t^2;x\right)-x^2-x^2+2x^2\right.\\
&\quad\left.-2xL_n\left(t;x\right)+x^2L_n\left(1;x\right)\right\}\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n\left(t^2;x\right)-x^2+2x^2\right.\\
&\quad\left.-2xL_n\left(t;x\right)+x^2L_n\left(1;x\right)-x^2\right\}\\
&=\varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\right.\\
&\quad+2x\left(x-L_n\left(t;x\right)\right)+x^2\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Elde ettiğimiz son ifadeyi Eş. (1.9) da kullanarak,

$$\begin{aligned}
\left|L_n\left(f\left(t\right);x\right)-f\left(x\right)\right| &\le \varepsilon L_n\left(1;x\right)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\right.\\
&\quad\left.+2x\left(x-L_n\left(t;x\right)\right)+x^2\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right\} \qquad (1.10)\\
&\quad+M_f\left|\left(L_n\left(1;x\right)-1\right)\right|
\end{aligned}$$

bulunur. (i.), (ii.), (iii.) koşullarını Eş. (1.10) da kullanarak

$$\left\|L_n\left(f\right)-f\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{a\le x\le b}\left|L_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\right\}=0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır (Korovkin, 1953; Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.6.

$g \in C[a,b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(g;\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[a,b] \\ |t-x|\le\delta}} |g(t) - g(x)| \tag{1.11}$$

ile tanımlanan $\omega(g;\delta)$ ifadesine g fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Altomare ve Campiti, 1994).

Tanım 1.1.7.

$0 < \alpha \le 1,\ M > 0$ ve $t, x \in [0,1]$ olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| \le M|t-x|^{\alpha} \tag{1.12}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, M ye de Lipschitz sabiti denir. Bu koşulun sağlanması halinde $g \in Lip_M(\alpha)$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.8.

$T : X \to Y$ lineer pozitif operatör olsun. $1 < \alpha, \beta < \infty$ ve $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$ olmak üzere her $f, g \in X$ için

$$T(|fg|) \le \left(T(|f|^{\alpha})\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(T(|g|^{\beta})\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{1.13}$$

dir. Hölder eşitsizliğinde $\alpha = \beta = 2$ alınırsa

$$\left|T\left(fg;x\right)\right| \leq \sqrt{T\left(f^{2};x\right)}\sqrt{T\left(g^{2};x\right)} \tag{1.14}$$

eşitsizliğine "Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Eşitsizliği" denir.

1.2. (p,q)-Analiz Hakkında Temel Bilgiler

Bu bölümde tezimizde (p,q) tipli Bernstein operatöründen yararlanacağımız için (p,q) hesaplamaları ve gösterimleri ile ilgili gerekli hatırlatmalar yapılacaktır.

q tamsayıları;

$[n]_q = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $n = 0,1,2,\ldots,$ $0 < q < 1$ ile verilmişti.

Bu çalışma boyunca (p,q) tamsayıları ve binom katsayıları sırasıyla aşağıda tanımlanmıştır;

$$[n] = [n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p-q} \ , \ n = 0,1,2,\ldots, \ 0 < q < p \leq 1,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

Mursaleen ve ark. (2015), Bernstein-Stancu operatörleri, Bernstein-Shurer operatörleri, Bleimann Butzer ve Hahn operatörleri, Bivariate Bleimann Butzer ve Hahn operatörleri gibi (p,q) tamsayılarına bağlı yaklaşım özelliklerini incelemiş ve çalışmalar sunmuştur. Biz de bu çalışmalardaki gibi (p,q) hesaplamalarında bazı belli gösterimleri kullanacağız.

Bazı basit hesaplama ve n üzerinde tümevarımla (p,q)-binom açılımını elde edebiliriz.

$$\left(ax+by\right)_{p,q}^{n} := \sum_{k=0}^{n} p^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} a^{n-k} b^{k} x^{n-k} y^{k} \ ,$$

$$\left(x+y\right)_{p,q}^{n} = \left(x+y\right)\left(px+qy\right)\left(p^{2}x+q^{2}y\right)...\left(p^{n-1}x+q^{n-1}y\right),$$

$$\left(1-x\right)_{p,q}^{n} = \left(1-x\right)\left(p-qx\right)\left(p^{2}-q^{2}x\right)...\left(p^{n-1}-q^{n-1}x\right).$$

Ayrıca aşağıdaki ilişkiyi de elde ederiz.

$$q^{k}\left[n-k+1\right] = \left[n+1\right] - p^{n-k+1}\left[k\right].$$

q ve (p,q) hesaplamalarında birçok detaylı çalışmalar mevcuttur (Lupaş, 1987; Sahai ve Yadav, 2007; Sadjang, 2013; Aral ve ark., 2013; Hounkonnou ve ark., 2013).

(p,q) hesabında bir $f\left(x\right)$ fonksiyonunun türevi $D_{p,q}f$ ile gösterilmiş ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Hounkonnou ve ark., 2013).

$$D_{p,q}f\left(x\right) = \frac{f\left(px\right)-f\left(qx\right)}{\left(p-q\right)x} \ , \ x \neq 0 \qquad (1.2.1)$$

İki fonksiyonun çarpımının türev formülü;

$$D_{p,q}\left(f.g\right)\left(x\right) = f\left(px\right).D_{p,q}g\left(x\right) + \left\{D_{p,q}f\left(x\right)\right\}.g\left(qx\right), \qquad (1.2.2)$$

ayrıca

$$D_{p,q}\left(f.g\right)\left(x\right)=f\left(qx\right).D_{p,q}g\left(x\right)+\left\{D_{p,q}f\left(x\right)\right\}.g\left(px\right). \qquad (1.2.3)$$

ile verilmiştir.

$p=1$ için tüm (p,q) analiz hesaplamaları q-analiz hesaplamalarına indirgenir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1912 yılında S. Bernstein B_n operatör dizilerini aşağıdaki şekilde tanımlamış ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir (Bernstein, 1912).

$B_n : C[0,1] \to C[0,1]$, $n \in N$ ve $f \in C[0,1]$ için,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Bernstein operatörlerinden faydalanarak bu operatörlerin farklı modifikasyonları ve genellemeleri üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazılarına aşağıda yer verilmiştir.

1930 yılında Kantorovich, integrallenebilen fonksiyonlar için aşağıda verilen lineer pozitif operatörü tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Kantorovich, 1930).

$K_n : L_1[0,1] \to C[0,1]$, $\forall f \in L_1[0,1]$ ve $n \in N$ için,

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt \tag{2.2}$$

1932 yılında Cholodowsky, Bernstein operatörlerinin bir diğer genelleşmesini verdi (Cholodowsky,1932). Bu sayede Bernstein operatörlerinin $[0,\infty)$ aralığında da çalışılmasını sağladı.

$[0,b_n]$ aralığında,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{kb_n}{n}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \tag{2.3}$$

$0 \le x \le b_n$ ve b_n pozitif sayı dizisi öyle ki;

$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ dır.

Teorem 1.1.3' te verdiğimiz Bohman-Korovkin teoremi (Bohman, 1952; Korovkin, 1953) yardımıyla Bernstein operatörleri üzerine yapılan çalışmalar daha da hız kazanmıştır.

Bernstein operatörlerinin bir diğer genelleşmesi Durmayer (1967) tarafından ortaya konmuştur.

$n \ge 1$, $f \in L_1[0,1]$ ve $0 \le x \le 1$ için,

$$D_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} (n+1) \left(\int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t)\,dt \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad (2.4)$$

şeklindeki operatör Bernstein-Durmayer operatörü olarak bilinir (Durmayer,1967).

Yaklaşım teorisinde Bernstein polinomlarının q-tip genelleştirmesi ilk olarak Lupaş (1987) tarafından sunulmuştur. $q > 0$ için

$$L_n(f,q;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q} \right) b_{n,k}(x;q), \qquad (2.5)$$

$$b_{n,k}(x;q) = \frac{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^k (1-x)^{n-k}}{\prod_{j=0}^{n-1} \left\{ (1-x) + q^j x \right\}}$$

Phillips (1996) ise Bernstein polinomlarının başka bir modifikasyonunu ortaya koydu. Ayrıca bu polinomlar için Voronovskaja'nın asimptotik yaklaşımını ve yakınsaklık hızını elde etti.

$f \in C[0,1]$ için, q tamsayılarına dayalı Bernstein polinomlarının genellemesi

$$B_{n,q}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(1-q^s x\right) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \ x\in[0,1] \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Phillips, 1996).

q-Bernstein operatörleri yaklaşım teorisinde birçok araştırmaya konu olmuştur. Ayrıca merkezi momentler ve hesaplamaları lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özelliklerini çalışmada çok önemli bir yer tutmaktadır.

Son zamanlarda, Mursaleen ve ark. (2015) yaklaşım teorisinde (p,q) hesaplamaları üzerinde çalışıp, Bernstein operatörlerinin (p,q)-analizini ilk kez aşağıdaki şekilde tanımladı.

$$B_{n,p,q}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right)P_{n,k}(p,q;x), \ 0<q<p\le 1, \ x\in[0,1] \tag{2.7}$$

$$P_{n,k}(p,q;x)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^s-q^s x\right).$$

İzgi aşağıda verilen yeni tip Bernstein polinomlarını tanıttı ve yaklaşım özelliklerini inceledi (İzgi,2012).

$$F_{n,a,b}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k(n+a)}{n(n+b)}\right)q_{n,k,a,b}(x), \ 0\le x\le \frac{n+a}{n+b}, \tag{2.8}$$

$a,b\in\mathbb{N}$, $0\le a\le b$ olmak üzere,

$$q_{n,k,a,b}(x)=\left(\frac{n+b}{n+a}\right)^{n}\binom{n}{k}x^{k}\left(\frac{n+a}{n+b}-x\right)^{n-k} .$$

Karahan ve İzgi (2018), (2.8) ‘ de verilen operatörün q-analizini oluşturarak

$f\in C\left[0,\frac{[n+a]}{[n+b]}\right]$, $a,b\in N$ ve $0\le a\le b$ için,

$$F_{n,a,b}(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k][n+a]}{[n][n+b]}\right)q_{n,k,a,b}(x)\ ,\ 0\le x\le\frac{[n+a]}{[n+b]} \qquad (2.9)$$

$$q_{n,k,a,b}(x)=\left(\frac{[n+b]}{[n+a]}\right)^{n}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(\frac{[n+a]}{[n+b]}-q^{s}x\right)$$

şeklinde tanımlanan operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

Bu çalışmamızın amacı (2.8)‘ de verilen yeni tip Bernstein operatörünün $0\le x\le\frac{n+2}{n+3}$ için (p,q) analizini yaparak, giriş bölümünde bahsettiğimiz yaklaşım özelliklerini incelemektir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmamız oluşturulurken gerek kütüphane gerekse internetten araştırdığımız konu ile ilgili kitap, makale ve dergilerden yararlanılmıştır. Ayrıca benzer konularda çalışılmış yüksek lisans ve doktora tezleri incelenmiştir. Bazı grafik ve hesaplamalarda materyal olarak Mapple programı kullanılmıştır.

3.2. Yöntem

Tezimizde tanımlayacağımız $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörüne benzer operatörler ve bunların üzerinde yapılmış çalışmalar incelenmiştir. $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün seçilen bir fonksiyona yaklaşımın bazı n ve x değerleri için nümerik değerler çizelgesi verilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörü tanımlanacaktır. Önce $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün lineer pozitif olduğu gösterilecektir. Korovkin teoremi yardımıyla bu operatörün düzgün yakınsaklığı ve süreklilik modülü ile yaklaşım hızının yanında Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ile yaklaşım hızı incelenecektir. $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün merkezi momentleri tanımlanarak Voronoskaja tip teoremi ispatlanacaktır. Son olarak da $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün seçilen f fonksiyonuna yaklaşımının bazı n ve x değerleri için nümerik değerler çizelgesi hazırlanacaktır.

Tanım 4.1.

$f\in C\left[0,\dfrac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$ ve $0\le x\le \dfrac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}$ olmak üzere,

$$E_{n,p,q}\left(f;x\right)=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[n+2]_{p,q}.[k]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}.[n]_{p,q}.p^{k-n}}\right)q_{n,k,p,q}\left(x\right)\ , \tag{4.1}$$

$$q_{n,k,p,q}\left(x\right)=\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^{s}\frac{[n+2]}{[n+3]}-q^{s}x\right)$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörü denir.

$E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

Lineerlik:

$\forall a,b\in\mathbb{R}$ ve $f,g\in C\left[0,\dfrac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$ için,

$$E_{n,p,q}\left(af\left(t\right)+bg\left(t\right);x\right)=$$

$$\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\sum_{k=0}^{n}\left(af\left(\frac{\left[n+2\right]_{p,q}.\left[k\right]_{p,q}}{\left[n+3\right]_{p,q}.\left[n\right]_{p,q}.p^{k-n}}\right)+bg\left(\frac{\left[n+2\right]_{p,q}.\left[k\right]_{p,q}}{\left[n+3\right]_{p,q}.\left[n\right]_{p,q}.p^{k-n}}\right)\right)q_{n,k,p,q}\left(x\right)$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\sum_{k=0}^{n}\left(af\right)\left(\frac{\left[n+2\right]_{p,q}.\left[k\right]_{p,q}}{\left[n+3\right]_{p,q}.\left[n\right]_{p,q}.p^{k-n}}\right)q_{n,k,p,q}\left(x\right)$$

$$+\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\sum_{k=0}^{n}\left(bg\right)\left(\frac{\left[n+2\right]_{p,q}.\left[k\right]_{p,q}}{\left[n+3\right]_{p,q}.\left[n\right]_{p,q}.p^{k-n}}\right)q_{n,k,p,q}\left(x\right)$$

$$=a\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{\left[n+2\right]_{p,q}.\left[k\right]_{p,q}}{\left[n+3\right]_{p,q}.\left[n\right]_{p,q}.p^{k-n}}\right)q_{n,k,p,q}\left(x\right)$$

$$+b\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{\left[n+2\right]_{p,q}.\left[k\right]_{p,q}}{\left[n+3\right]_{p,q}.\left[n\right]_{p,q}.p^{k-n}}\right)q_{n,k,p,q}\left(x\right)$$

$$=aE_{n,p,q}\left(f\left(t\right);x\right)+bE_{n,p,q}\left(g\left(t\right);x\right)$$

olduğundan $\left(E_{n,p,q}\right)$ lineer bir operatördür.

Pozitiflik:

$k=0,1,...,n\in N$ ve $0\leq x\leq\frac{\left[n+2\right]_{p,q}}{\left[n+3\right]_{p,q}}$ için

$$\left(\frac{\left[n+3\right]_{p,q}}{\left[n+2\right]_{p,q}}\right)^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^{s}\frac{\left[n+2\right]}{\left[n+3\right]}-q^{s}x\right)\geq 0$$

olduğundan $f\geq 0$ ise

$$E_{n,p,q}\left(f;x\right)\geq 0$$

olur. Buna göre $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ lineer pozitif operatördür.

Lemma 4.1.

(4.1)' de tanımlamış olduğumuz operatör; $0 \le x \le \dfrac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

a) $E_{n,p,q}(1;x)=1$

b) $E_{n,p,q}(t;x)=x$

c) $E_{n,p,q}(t^2;x)=\dfrac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\dfrac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}}x+\dfrac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}}x^2$

d) $$E_{n,p,q}(t^3;x)=\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-2}}{[n]_{p,q}^2}x+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\frac{(2p+q)q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}p^{n-2}x^2$$
$$+\frac{q^3[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}x^3$$

e) $E_{n,p,q}(t^4;x)$

$$=\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^3\frac{p^{3n-3}}{[n]_{p,q}^3}x+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-4}[n-1]_{p,q}\,q\left(3p^2+3qp+q^3\right)}{[n]_{p,q}^3}x^2$$
$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\frac{p^{n-3}[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}\,q^3\left(3p^2+2pq+q^2\right)}{[n]_{p,q}^3}x^3$$
$$+\frac{q^6[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}[n-3]_{p,q}}{[n]_{p,q}^3}x^4\ .$$

İspat

a) $$E_{n,p,q}(1;x)=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^s x\right)$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n} p^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n}=1\,.$$

b) $E_{n,p,q}(t;x)$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)\frac{[n+2]_{p,q}[k]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}[n]_{p,q}\,p^{k-n}}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_{p,q}}{[n]_{p,q}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)\frac{1}{p^{k-n}}$$

$$=\frac{p^{n}}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}}.p^{-k}.x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-3)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}} x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$p^{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}=p^{\frac{k(k-1)}{2}}.\frac{1}{p}$ ve $\frac{1}{p^{\frac{n(n-3)}{2}}}.\frac{1}{p}=\frac{1}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}$ eşitliklerini kullanarak,

$$=\frac{x}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$$=\frac{x}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-1} p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-1}$$

$=x$.

c) $E_{n,p,q}(t^{2};x)$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$$\times\frac{[n+2]_{p,q}^2[k]_{p,q}^2}{[n+3]_{p,q}^2[n]_{p,q}^2\,p^{2k-2n}}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]_{p,q}}{[n]_{p,q}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-5)}{2}}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)\frac{[k]_{p,q}}{[n]_{p,q}}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}}.[n]_{p,q}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-5)}{2}}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)[k]_{p,q}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}}.[n]_{p,q}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{(k+1)(k-4)}{2}}x^{k+1}$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)[k+1]_{p,q}$$

$[k]_{p,q}=p^{k-1}+q[k-1]_{p,q}\Rightarrow[k+1]_{p,q}=p^k+q[k]_{p,q}$ eşitliğini kullanarak,

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}}.[n]_{p,q}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k^2-3k-4}{2}}x^{k+1}$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)\left(p^k+q[k]_{p,q}\right)$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-5)}{2}}.[n]_{p,q}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k^2-k-4}{2}}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)$$

$$+\frac{q[n-1]_{p,q}}{p^{\frac{n(n-5)}{2}}.[n]_{p,q}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\begin{bmatrix}n-2\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k^2-k-6}{2}}x^{k+2}\prod_{s=0}^{n-k-3}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)$$

$$=\frac{p^{n-1}x}{[n]_{p,q}}\frac{1}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)$$

$$+\frac{q[n-1]_{p,q}\,x^2}{[n]_{p,q}}\frac{1}{p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\begin{bmatrix}n-2\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-k-3}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^s x\right)$$

$$=\frac{p^{n-1}x}{[n]_{p,q}}\frac{1}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-1}$$

$$+\frac{q[n-1]_{p,q}\,x^2}{[n]_{p,q}}\frac{1}{p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-2}p^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-2}$$

$$=\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}.\frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}}.x+\frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}}.x^2\ .$$

d) $E_{n,p,q}\left(t^3;x\right)$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^s x\right)$$

$$\times\frac{[n+2]_{p,q}^3[k]_{p,q}^3}{[n+3]_{p,q}^3[n]_{p,q}^3\,p^{3k-3n}}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-7)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-7)}{2}}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^s x\right)\frac{[n+2]_{p,q}^3[k]_{p,q}^3}{[n+3]_{p,q}^3[n]_{p,q}^3}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-7)}{2}}[n]_{p,q}^2}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-3}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{(k+1)(k-6)}{2}}[k+1]_{p,q}^2\,x^{k+1}$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^s x\right)$$

$[k+1]_{p,q}^2=p^{2k}+2qp^k[k]_{p,q}+q^2[k]_{p,q}^2$ eşitliğini kullanarak,

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-7)}{2}}[n]_{p,q}^2}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-3}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k^2-k-6}{2}}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)$$

$$+2q\frac{1}{p^{\frac{n(n-7)}{2}}[n]_{p,q}^2}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-3}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}[k]_{p,q}p^{\frac{k^2-3k-6}{2}}x^{k+1}$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)$$

$$+q^2\frac{1}{p^{\frac{n(n-7)}{2}}[n]_{p,q}^2}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n-3}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}[k]_{p,q}^2p^{\frac{(k+1)(k-6)}{2}}x^{k+1}$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)$$

$$=\frac{p^{2n-2}x}{[n]_{p,q}^2}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2+\frac{2q[n-1]_{p,q}\,p^{n-1}x^2}{[n]_{p,q}^2}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)$$

$$+\frac{q^2[n-1]_{p,q}\,p^{n-2}x^2}{[n]_{p,q}^2}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)+\frac{q^3[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}x^3$$

$$=\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-2}}{[n]_{p,q}^2}x+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\frac{(2p+q)q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}p^{n-2}x^2$$

$$+\frac{q^3[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}x^3$$

e) $E_{n,p,q}\left(t^4;x\right)$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^s\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^sx\right)$$

$$\times\frac{[n+2]_{p,q}^4[k]_{p,q}^4}{[n+3]_{p,q}^4[n]_{p,q}^4\,p^{4k-4n}}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-9)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p,q}}{[n+2]_{p,q}}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}p^{-4k}x^{k}\prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)\frac{[n+2]_{p,q}^{4}[k]_{p,q}^{4}}{[n+3]_{p,q}^{4}[n]_{p,q}^{4}}$$

$$=\frac{1}{p^{\frac{n(n-9)}{2}}[n]_{p,q}^{3}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-4}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{(k+1)(k-8)}{2}}[k+1]_{p,q}^{3}x^{k+1}$$

$$\times\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$[k+1]_{p,q}^{3}=p^{3k}+3p^{2k}q[k]_{p,q}+3p^{k}q^{2}[k]_{p,q}^{2}+q^{3}[k]_{p,q}^{3}$ eşitliğini kullanarak,

$$=\frac{p^{3n-3}}{p^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}[n]_{p,q}^{3}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-4}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}p^{\frac{k(k-1)}{2}}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$$+\frac{3q}{p^{\frac{n(n-9)}{2}}[n]_{p,q}^{3}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-4}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}[k]_{p,q}p^{\frac{k^{2}-3k-8}{2}}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$$+\frac{3q^{2}}{p^{\frac{n(n-9)}{2}}[n]_{p,q}^{3}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-4}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}[k]_{p,q}^{2}p^{\frac{k^{2}-5k-8}{2}}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$$+\frac{q^{3}}{p^{\frac{n(n-9)}{2}}[n]_{p,q}^{3}}\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{n-4}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}[k]_{p,q}^{3}p^{\frac{(k+1)(k-8)}{2}}x^{k+1}\prod_{s=0}^{n-k-2}\left(p^{s}\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}-q^{s}x\right)$$

$$=\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{3}\frac{p^{3n-3}}{[n]_{p,q}^{3}}x+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{2}\frac{p^{2n-4}[n-1]_{p,q}q\left(3p^{2}+3qp+q^{2}\right)}{[n]_{p,q}^{3}}x^{2}$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\frac{p^{n-3}[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}q^{3}\left(3p^{2}+2pq+q^{2}\right)}{[n]_{p,q}^{3}}x^{3}$$

$$+\frac{q^{6}[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}[n-3]_{p,q}}{[n]_{p,q}^{3}}x^{4}$$

Teorem 4.1.

$0 < q_n < p_n \leq 1$ ve

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$

olmak üzere, $f \in C\left[0, \dfrac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$ ise $E_{n,p_n,q_n}\left(f;x\right)$ operatörü f fonksiyonuna $\left[0, \dfrac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$ aralığında düzgün yakınsar.

İspat

Teoremin ispatı için Korovkin teoremine dayanarak, aşağıdaki koşulların sağlandığını göstermek yeterlidir.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|E_{n,p_n,q_n}\left(t^m;x\right)-x^m\right\|_{C\left[0,\frac{[n+2]}{[n+3]}\right]} = 0 \ , \ m = 0,1,2 \ .$$

Lemma 4.1. den

$$\lim_{n\to\infty}\left\|E_{n,p_n,q_n}\left(1;x\right)-1\right\| = 0 \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|E_{n,p_n,q_n}\left(t;x\right)-x\right\| = 0$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty}\left\|E_{n,p_n,q_n}\left(t^2;x\right)-x^2\right\| = 0$$

olduğunu gösterelim. Lemma 4.1. den,

$$\max_{x\in\left(0,\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}\right)}\left|E_{n,p_n,q_n}\left(t^2;x\right)-x^2\right|$$

$$= \max_{x\in\left(0,\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}\right)} \left| \frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}} \cdot \frac{p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}} .x + \frac{q_n[n-1]_{p_n,q_n}}{[n]_{p_n,q_n}} x^2 - x^2 \right|$$

$$\leq \left| \left(\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}} \right)^2 \cdot \frac{p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}} \right| + \left| \left(\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}} \right)^2 \cdot \left(\frac{q_n[n-1]_{p_n,q_n}}{[n]_{p_n,q_n}} - 1 \right) \right|$$

$q_n[n-1]_{p_n,q_n} = [n]_{p_n,q_n} - p_n^{n-1}$ eşitliğini kullanarak,

$$= \left(\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}} \right)^2 \frac{2p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}} .$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left\| E_{n,p_n,q_n}\left(t^2;x\right) - x^2 \right\| \leq 2.\left(\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}} \right)^2 . \frac{p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}} .$$

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\left[0,\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}\right]} \left\| E_{n,p_n,q_n}\left(t^m;x\right) - x^m \right\| = 0, \quad m = 0,1,2.$$

Korovkin teoremi uyarınca istenen sonucu elde ettik.

Lemma 4.2.

$E_{n,p,q}(f;x)$ operatörü için merkezi momentlerin bazıları şöyledir;

a) $E_{n,p,q}\left((t-x)^0;x\right) = 1$

b) $E_{n,p,q}\left((t-x)^1;x\right) = 0$

c) $E_{n,p,q}\left((t-x)^2;x\right)=\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}}x+\left(\frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}}-1\right)x^2$

d) $E_{n,p,q}\left((t-x)^4;x\right)$

$$=\left\{\frac{p^{n-3}[n]_{p,q}^2\left(-p^2+2pq-q^2\right)+p^{n-5}[n]_{p,q}\left(-p^3+3pq^2+q^3\right)}{[n]_{p,q}^3}\right.$$

$$\left.-\frac{p^{3n-6}\left(p^2+p^3+2pq^2+q^3\right)}{[n]_{p,q}^3}\right\}x^4$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\left\{\frac{p^{n-3}[n]_{p,q}^2\left(p^2-2pq+q^2\right)+p^{2n-5}[n]_{p,q}\left(-q^3-4pq^2-3p^2q+2p^3\right)}{[n]_{p,q}^3}\right.$$

$$\left.-\frac{p^{3n-6}\left(3p^3+3pq^2+5p^2q+q^3\right)}{[n]_{p,q}^3}\right\}x^3$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-4}[n]_{p,q}\left(-p^2+3pq+q^2\right)-p^{3n-5}\left(3p^2+q^2+3pq\right)}{[n]_{p,q}^3}x^2$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{3n-3}}{[n]_{p,q}^3}x\ .$$

İspat

a) $E_{n,p,q}\left((t-x)^0;x\right)=E_{n,p,q}(1;x)=1$

b) $E_{n,p,q}\left((t-x)^1;x\right)=E_{n,p,q}(t;x)-xE_{n,p,q}(1;x)=x-x=0$

c) $E_{n,p,q}\left((t-x)^2;x\right)=E_{n,p,q}\left(t^2;x\right)-2xx+x^2E_{n,p,q}(1;x)$

$$=\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}}x+\frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}}x^2-2x^2+x^2$$

$$=\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}}x+\left(\frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}}-1\right)x^2\ .$$

d) $E_{n,p,q}\left((t-x)^4;x\right)$

$$=E_{n,p,q}\left(t^4;x\right)-4xE_{n,p,q}\left(t^3;x\right)+6x^2E_{n,p,q}\left(t^2;x\right)-4x^3E_{n,p,q}\left(t;x\right)+x^4E_{n,p,q}\left(1;x\right)$$

$$=\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{3n-3}}{[n]_{p,q}^3}x+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-4}[n-1]_{p,q}q\left(3p^2+3pq+q^2\right)}{[n]_{p,q}^3}x^2$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\frac{p^{n-3}[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}q^3\left(3p^2+2pq+q^2\right)}{[n]_{p,q}^3}x^3$$

$$+\frac{q^6[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}[n-3]_{p,q}}{[n]_{p,q}^3}x^4$$

$$-4x\left[\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-2}}{[n]_{p,q}^2}x+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\frac{(2p+q)q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}p^{n-2}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{q^3[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}x^3\right]$$

$$+6x^2\left[\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}}x+\frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}}x^2\right]-4x^3x+x^4$$

$$=\left(\frac{q^6[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}[n-3]_{p,q}}{[n]_{p,q}^3}-4\frac{q^3[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}+6\frac{q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}}-3\right)x^4$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\frac{p^{n-3}[n-1]_{p,q}[n-2]_{p,q}q^3\left(3p^2+2pq+q^2\right)}{[n]_{p,q}^3}\right.$$

$$\left.-4\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\frac{(2p+q)q[n-1]_{p,q}}{[n]_{p,q}^2}p^{n-2}+6\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\frac{p^{n-1}}{[n]_{p,q}}\right)x^3$$

$$+\left(\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-4}[n-1]_{p,q}q\left(3p^2+3qp+q^2\right)}{[n]_{p,q}^3}-4\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{2n-2}}{[n]_{p,q}^2}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^2\frac{p^{3n-3}}{[n]_{p,q}^3}x$$

$$=\left\{\frac{p^{n-3}[n]_{p,q}^{2}\left(-p^{2}+2pq-q^{2}\right)+p^{n-5}[n]_{p,q}\left(-p^{3}+3pq^{2}+q^{3}\right)}{[n]_{p,q}^{3}}\right.$$

$$\left.-\frac{p^{3n-6}\left(p^{2}+p^{3}+2pq^{2}+q^{3}\right)}{[n]_{p,q}^{3}}\right\}x^{4}$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)\left\{\frac{p^{n-3}[n]_{p,q}^{2}\left(p^{2}-2pq+q^{2}\right)+p^{2n-5}[n]_{p,q}\left(-q^{3}-4pq^{2}-3p^{2}q+2p^{3}\right)}{[n]_{p,q}^{3}}\right.$$

$$\left.-\frac{p^{3n-6}\left(3p^{3}+3pq^{2}+5p^{2}q+q^{3}\right)}{[n]_{p,q}^{3}}\right\}x^{3}$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{2}\frac{p^{2n-4}[n]_{p,q}\left(-p^{2}+3pq+q^{2}\right)-p^{3n-5}\left(3p^{2}+q^{2}+3pq\right)}{[n]_{p,q}^{3}}x^{2}$$

$$+\left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right)^{2}\frac{p^{3n-3}}{[n]_{p,q}^{3}}x\ .$$

Teorem 4.2. (Süreklilik Modülü)

$E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım hızı $f\in C\left[0,\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$ için aşağıda verilen eşitsizlik geçerlidir.

$$\left|E_{n,p,q}(f;x)-f(x)\right|\leq\left(1+\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right).\omega\left(f;\sqrt{\frac{2p^{n-1}}{[n]_{p,q}}}\right)$$

İspat

Süreklilik modülü özelliklerini kullanarak;

$$\left| f(t) - f(x) \right| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_n} \right) \omega\left(f : \delta_n \right).$$

Her iki tarafa operatörümüzü uyguladığımızda ve lineerlik özelliğini de kullanarak,

$$\left| E_{n,p,q}(f;x) - f(x) \right| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n} E_{n,p,q}\left(|t-x|;x \right) \right) \omega\left(f;\delta_n \right)$$

yazılabilir. Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği kullanılarak,

$$\left| E_{n,p,q}(f;x) - f(x) \right| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{E_{n,p,q}\left((t-x)^2;x \right)} \right) \omega\left(f;\delta_n \right)$$

Lemma 4.2.c. den $E_{n,p,q}\left((t-x)^2;x \right)$ yerine yazılırsa,

$$= \left(1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{\frac{2}{[n]_{p,q}} \left(\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}} \right)^2 .p^{n-1}} \right) \omega\left(f;\delta_n \right)$$

olur.

$\delta_n = \sqrt{\dfrac{2p^{n-1}}{[n]_{p,q}}}$ seçilip yerine yazıldığında,

$$\left| E_{n,p,q}(f;x) - f(x) \right| \leq \left(1 + \frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}} \right) .\omega\left(f;\sqrt{\frac{2p^{n-1}}{[n]_{p,q}}} \right)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. (Voronovskaya Tip Teoremi)

$f \in C^2\left[0, \frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$, p_n, q_n dizileri için $0 < q_n < p_n \leq 1$, $n \to \infty$ için $p_n \to 1,\ q_n \to 1$ ve $p_n^n \to \alpha,\ q_n^n \to \beta,\quad 0 \leq \alpha, \beta < 1$ ve $0 < \lambda \leq 1$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\left(E_{n,p_n,q_n}(f;x) - f(x)\right) = \frac{x(\lambda - \alpha x)}{2} f^{//}(x) \ .$$

İspat

Taylor formülünü kullanarak,

$$f(t) = f(x) + f^{/}(x)(t-x) + \frac{1}{2} f^{//}(x)(t-x)^2 + \mu(t;x)(t-x)^2$$

$$f(t) - f(x) = f^{/}(x)(t-x) + \frac{1}{2} f^{//}(x)(t-x)^2 + \mu(t;x)(t-x)^2$$

Burada $\lim_{t\to x}\mu(t;x) = 0$ dır. Her iki tarafa operatörü uygulayalım.

$$[n]_{p_n,q_n}\left(E_{n,p_n,q_n}(f;x) - f(x)\right)$$

$$= [n]_{p_n,q_n}\left(f^{/}(x)E_{n,p_n,q_n}(t-x);x\right) + \frac{1}{2} f^{//}(x)E_{n,p_n,q_n}\left((t-x)^2;x\right)$$

$$+ E_{n,p_n,q_n}\left(\mu(t;x)(t-x)^2;x\right)$$

Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanarak,

$$E_{n,p_n,q_n}\left(\mu(t;x)(t-x)^2;x\right) \leq \sqrt{E_{n,p_n,q_n}\left(\left(\mu^2(t;x);x\right)\right)}\sqrt{E_{n,p_n,q_n}\left((t-x)^4;x\right)}$$

$E_{n,p_n,q_n}\left(\mu^2(t;x);x\right) = \mu^2(x;x) = 0$. Buradan da,

$$E_{n,p_n,q_n}\left(\mu(t;x)(t-x)^2;x\right)=0 \quad \text{olur.}$$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\left(E_{n,p_n,q_n}(e_1-x);x\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\left(E_{n,p_n,q_n}(e_1-x)^2;x\right) = x\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}\frac{p_n^{n-1}}{[n]_{p_n,q_n}}$$

$$+x^2\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\frac{1}{[n]_{p_n,q_n}}\left(q_n[n-1]_{p_n,q_n}-[n]_{p_n,q_n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\left(E_{n,p_n,q_n}\left((e_1-x)^2;x\right)\right)=\lambda x-\alpha x^2=x(\lambda-\alpha x)$$

$\lambda\in(0,1]$ ve $\{p_n\}$ dizisine bağlıdır.

Böylece;

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\left(E_{n,p_n,q_n}(f;x)-f(x)\right)=\frac{x(\lambda-\alpha x)}{2}f^{//}(x)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.

(p_n) ve (q_n) reel sayı dizisi olmak üzere, $0<q_n<p_n\le 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=1$ dir.

Eğer $f\in Lip_M\left[0,\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$ ve $x\in[0,A]$ için

$$\left\|E_{n,p_n,q_n}(f;x)-f(x)\right\|_{C\left[0,\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]}\le M\left\{\frac{p_n^{n-1}A\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}}{[n]_{p_n,q_n}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

İspat

$$\left|E_{n,p_n,q_n}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{p_n^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p_n,q_n}}{[n+2]_{p_n,q_n}}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p_n,q_n} p_n^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p_n^s \frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}-q_n^s x\right)$$

$$\times\left|f\left(\frac{[n+2]_{p_n,q_n}[k]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}[n]_{p_n,q_n}\,p_n^{k-n}}\right)-f(x)\right|$$

$$\leq \frac{M}{p_n^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p_n,q_n}}{[n+2]_{p_n,q_n}}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p_n,q_n} p_n^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p_n^s \frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}-q_n^s x\right)$$

$$\times\left|\frac{[n+2]_{p_n,q_n}[k]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}[n]_{p_n,q_n}\,p_n^{k-n}}-x\right|^{\alpha}$$

Hölder eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|E_{n,p_n,q_n}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq \frac{M}{p_n^{\frac{n(n-1)}{2}}}\left(\frac{[n+3]_{p_n,q_n}}{[n+2]_{p_n,q_n}}\right)^n \sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p_n,q_n} p_n^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p_n^s \frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}-q_n^s x\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{[n+2]_{p_n,q_n}[k]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}[n]_{p_n,q_n}\,p_n^{k-n}}-x\right)^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\times\left\{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p_n,q_n} p_n^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}\left(p_n^s \frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}-q_n^s x\right)\right\}^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

Lemma 4.2.c. den

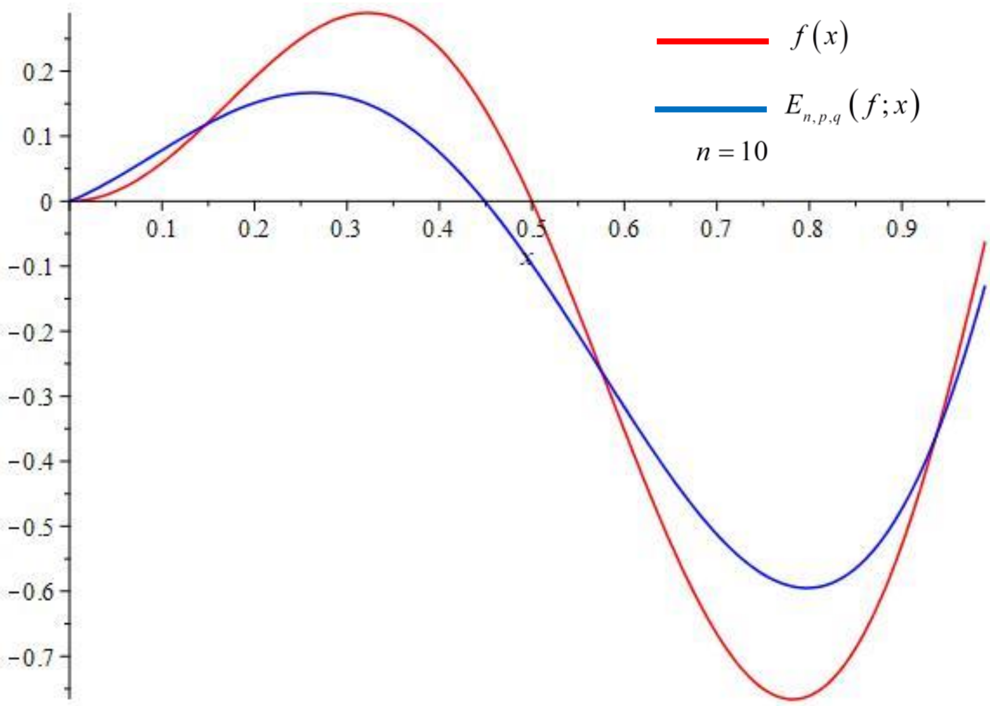
$$\left|E_{n,p_n,q_n}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left\{\frac{p_n^{n-1}x\left(\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}-x\right)}{[n]_{p_n,q_n}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

Elde edilen ifadede $x\in[0,A]$ için,

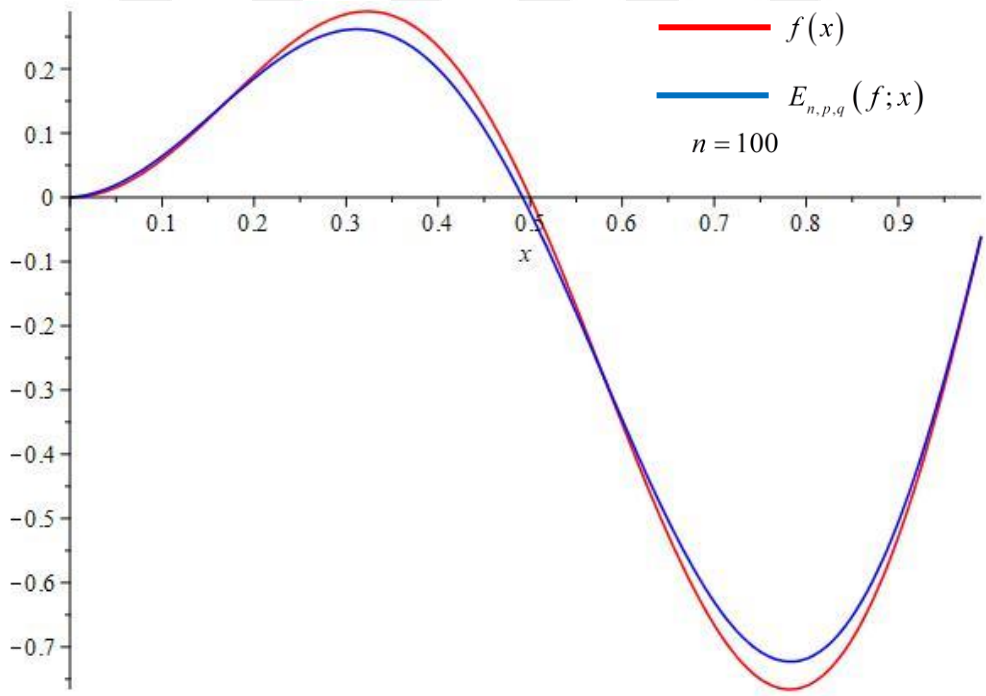
$$\left\|E_{n,p_n,q_n}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_{C\left[0,\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]}\leq M\left\{\frac{p_n^{n-1}A\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}}{[n]_{p_n,q_n}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

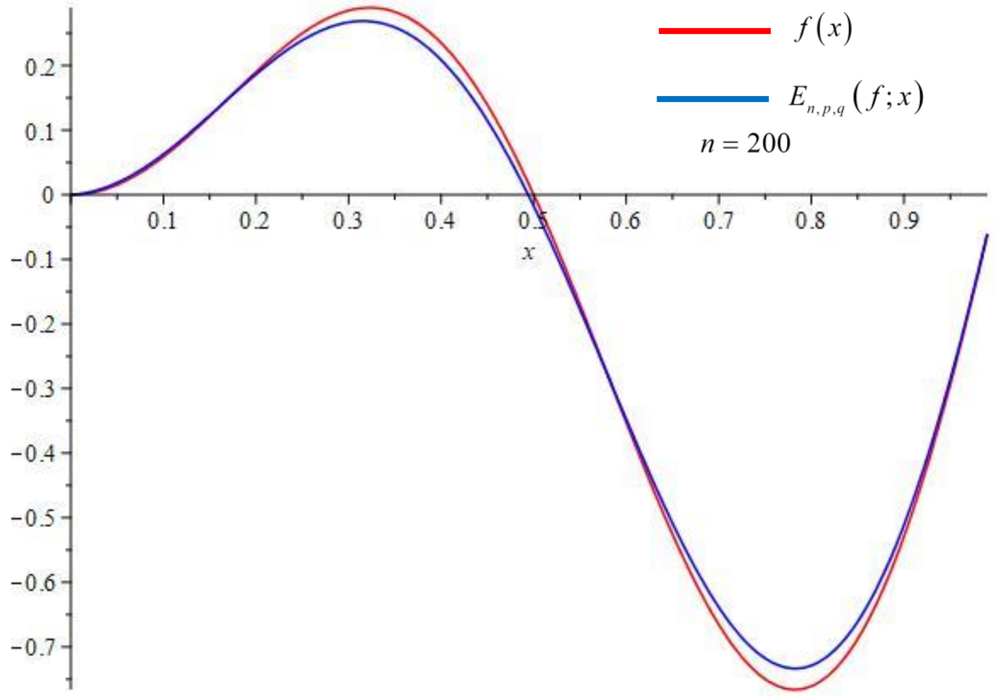
Bu aşamada üzerinde çalıştığımız $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün $p=0.99$ ve $q=0.98$ seçerek farklı n değerleri için $f\left(x\right)=x.\sin\left(2x\pi\right)$ fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafikleri ve yaklaşımın nümerik değerlerini Mapple yazılımı yardımıyla tablo halinde verelim. Ayrıca (2.8) de verilen $F_{n,a,b}\left(f;x\right)$ operatörü ile $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün $f\left(x\right)=x.\sin\left(2x\pi\right)$ fonksiyonuna yaklaşımını kıyaslayarak nümerik değerler tablosunu oluşturacağız.



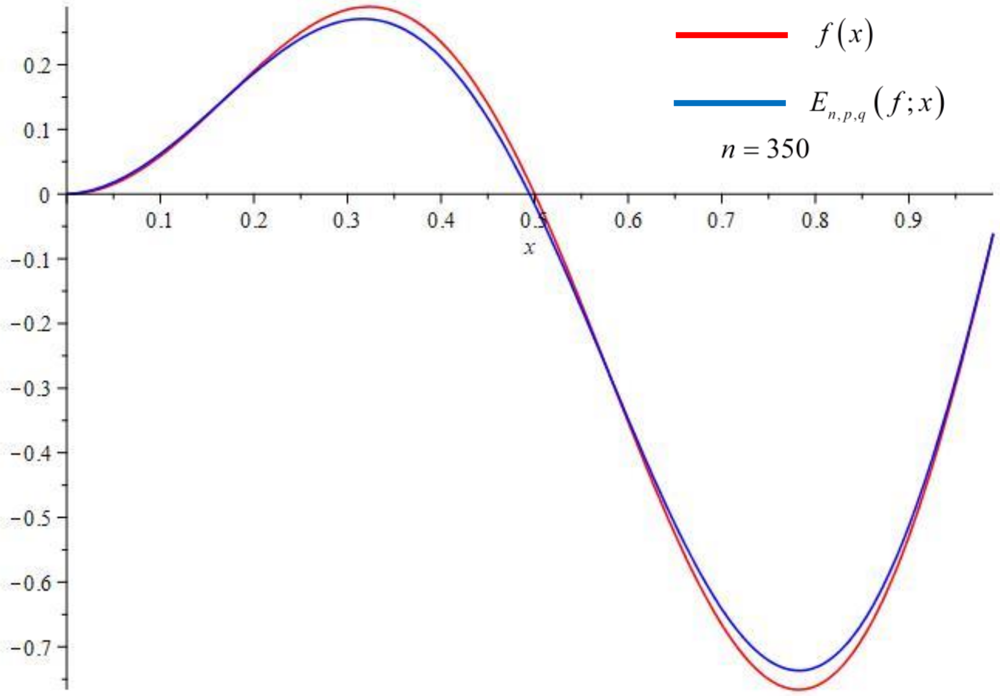
Şekil 4.1. $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün $n=10$ için $f(x)=x.\sin(2x\pi)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.2. $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün $n=100$ için $f(x)=x.\sin(2x\pi)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.3. $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün $n=200$ için $f(x)=x.\sin(2x\pi)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.4. $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün $n=350$ için $f(x)=x.\sin(2x\pi)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği

Şekil 4.1. , Şekil 4.2. , Şekil 4.3 ve Şekil 4.4.'te elde ettiğimiz grafiklere baktığımızda yaklaşık olarak $x = 0.35$ ve $x = 0.75$ değerlerinde diğer x değerlerine nazaran aradaki farkın daha fazla olduğunu görüyoruz. Bu nedenle $p = 0.99$ ve $q = 0.98$ seçerek f fonksiyonu ile $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörü arasındaki farkın mutlak değerinin nümerik değerler tablosunu oluşturalım.

Çizelge 4.1. $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün bazı x değerleri için $f\left(x\right) = x.\sin\left(2x\pi\right)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik değerler tablosu

n \ x	0.35	0.75
10	0.1533305254	0.1761914947
50	0.0494244588	0.0644545467
100	0.0321035635	0.0425978551
150	0.0265098916	0.0353685770
200	0.0239933025	0.0320893237
300	0.0219811124	0.0294553490
350	0.0215719857	0.0289185971
400	0.0213329260	0.0286046790
500	0.0211073542	0.0283083050
1000	0.0209820313	0.0281435108

Çizelge 4.1. incelendiğinde "$n \to \infty$" için aradaki farkın "0" a yaklaştığı görülmektedir.

Şimdi $F_{n,a,b}\left(f;x\right)$ operatörü ile $E_{n,p,q}\left(f;x\right)$ operatörünün "$a = 2,\ b = 3$" ve bazı "n" değerleri için $f\left(x\right) = x.\sin\left(2x\pi\right)$ fonksiyonuna yaklaşımını kıyaslayalım.

"$p = 0.999$ ve $q = 0.99$" değerleri seçilerek;

$\dfrac{\left|E_{n,p,q}\left(f;x\right) - f\left(x\right)\right|}{\left|F_{n,a,b}\left(f;x\right) - f\left(x\right)\right|}$ oranının nümerik değerlerini oluşturalım.

Çizelge 4.2. $F_{n,a,b}(f;x)$ operatörü ile $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün $f(x)=x.\sin(2x\pi)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik değerler tablosu

n \ x	0.35	0.75
10	1.038447133	1.051518579
50	1.228780261	1.239104984
100	1.499044133	1.510034345
150	1.799886357	1.811671108
200	2.128083702	2.140561347
250	2.480045413	2.493065455

Çizelge 4.2. incelendiğinde; $0<M<\infty$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|E_{n,p,q}(f;x)-f(x)\right|}{\left|F_{n,a,b}(f;x)-f(x)\right|}=M$$

olduğu görülmektedir. Buna göre $F_{n,a,b}(f;x)$ operatörü ile $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızlarının denk olduğunu söyleyebiliriz.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

(4.1)' de tanımlamış olduğumuz $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün lineer pozitif olduğu gösterilmiştir. Ardından Korovkin teoremi yardımıyla $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı görülmüştür.

$E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün bazı merkezi momentleri hesaplanarak süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı için

$$\left|E_{n,p,q}(f;x)-f(x)\right| \leq \left(1+\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right).\omega\left(f;\sqrt{\frac{2p^{n-1}}{[n]_{p,q}}}\right)$$

eşitsizliği elde edilmiştir.

Voronovskaya tip teoremi ispatlanarak aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir.

$$\lim_{n\to\infty}[n]_{p_n,q_n}\left(E_{n,p_n,q_n}(f;x)-f(x)\right)=\frac{x(\lambda-\alpha x)}{2}f^{//}(x) \ .$$

Eğer f fonksiyonu $f \in Lip_M\left[0,\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]$ koşulunu sağlıyorsa,

$$\left\|E_{n,p_n,q_n}(f;x)-f(x)\right\|_{C\left[0,\frac{[n+2]_{p,q}}{[n+3]_{p,q}}\right]} \leq M\left\{\frac{p_n^{n-1}A\frac{[n+2]_{p_n,q_n}}{[n+3]_{p_n,q_n}}}{[n]_{p_n,q_n}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliğinin varlığı ispatlanmıştır.

$E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün $f(x)=x.\sin(2x\pi)$ fonksiyonuna yaklaşımı Mapple programı yardımıyla bazı "n" değerleri için grafik ile gösterilmiştir. Ayrıca $x=0.35$ ve $x=0.75$ değerleri, $p=0.99$ ve $q=0.98$ seçerek f fonksiyonu ile $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörü arasındaki farkın mutlak değerinin nümerik değerler tablosu oluşturulmuştur. $F_{n,a,b}(f;x)$ operatörü ile $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün $f(x)=x.\sin(2x\pi)$ fonksiyonuna yaklaşımını kıyaslayarak nümerik değerler tablosu verilmiştir.

5.2. Öneriler

(2.8) de verilen $F_{n,a,b}(f;x)$ operatörü ile çalışmamıza konu olan $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörünün yaklaşım hızlarının denk olduğunu gördük. Bu nedenle $F_{n,a,b}(f;x)$ operatörü yerine $E_{n,p,q}(f;x)$ operatörü kullanılabilir.

Ayrıca (p,q)-Analiz başka operatörlere de uygulanarak daha farklı yaklaşımlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin- Type Approximation Theory And Its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics,Vol. 17,Walter De Gruyter Berlin-New York, 627s.

BERNSTEIN, S. N., 1912. Dmostration du thoreme de Weierstrass fonde sur le calcul deprobabilits. Comm. Soc. Math. Kharkow, 13:1-2.

BOHMAN, H., 1952. On Approximation of Continuous and Analytic Functions. Ark. Mat., 2:43-56.

DURRMEYER, J. L., 1967. Une Formule D'inversion De La Transformee De Laplace Aplication A La Theorie Des Moments. These De Cyele. Faculte Des Sciences de I'Universite de Paris, 149-150.

HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

HOUNKONNOU, M. N., DESIRE, J. and KYEMBA, B., 2013. R(p,q)-calculus: differentiation and integration. SUT Jour. Math., 49:145-167.

İZGİ, A., 2012. Approximation by a Class of New Type Bernstein Polynomials of one two Variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 8(5):55-71.

İZGİ, A., and KARAHAN, D., 2018. On approximation properties of generalised (p; q)-Bernstein operators. Eur. J. Pure Appl. Math, 11(2):457-467.

KANTOROVICH, L., V., 1930. Sur Certain Developpements Suivant Les Polynomes De La Forme De S. Bernstein. C. R. Acad. URSS, 2(1): 563- 568, 595- 600.

KARAİSA, A., and ANSARİ, K. J., 2017. On the approximation by Chlodowsky type generalization of (p,q)-Bernstein operators. The International of Nonlinear Analysis and Applications, 2:181-200.

KOROVKİN, P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions(Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 90:961-964.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto, 8:15-217.

LUPAŞ, A., 1987. A q-analogue of the Bernstein operatör. Seminar on Numerical and Statistical Calculus, University of Cluj-Napoca, 9:85-92.

MAHMUDOV, N. I.,2009. Korovkin-type theorems and applications. Cent. Eur. J. Math., 7:348-356.

MURSALEEN, M., ANSARI, K. J. and KHAN, A., 2015. On (p,q)-analogue of Bernstein operators. Appl. Math. Comput., 266:874-882.

MURSALEEN, M., ANSARİ, K. J. and KHAN, A., 2015. Some approximation results by (p,q)- analogue of Bernstein-Stancu operators. Appl. Math. Comput., 264:392-402.

MURSALEEN, M., NASIRUZZAMAN M. and ASHIRBAYEV N., 2015. Some approximation results on Bernstein-Schurer operators defined by (p,q)-integers. Journal of Inequalities and Applications, 2015:249.

MURSALEEN, M., NASİRUZZAMAN, M., KHAN A. and ANSARI, K. J., 2015. Some approximation results on Bleimann-Butzer-Hahn operators defined by (p,q)- integers. arXiv:1505.00392v1 [math.CA].

MURSALEEN, M. and NASİRUZZAMAN, M., 2015. Some approximation properties of bivariate Bleimann-Butzer and Hahn operators based on (p,q)-integers. arXiv:1506.02487v1 [math.CA].

PHILLIPS, G. M., 1997. Bernstein Polynomials Based on the q-integers. Ann. Numer. Math., 4, 511-518.

PHILLIPS, G. M., 2000. A Generalization of the Bernstein Polynomials Based on the q- integers. Anziam J., 42, 79-86.

STANCU, D. D., 1968. Approximation of Function by a New Class of Polynomial Operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl, 13(8): 1173-1194.

VORONOWSKJA, E., 1932. Determination De La Forme Asymplotique D’Approximation Des Fonctions Par Les Polynomes De M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 4: 79-85

WEIERSTRASS, K., 1885. Über Die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willküricher 55 Funktionen Einer Reellen Veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1): 633-639.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Engin ÇEVİK
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Adıyaman – 24/08/1984
Telefon	**:** 0505 213 19 29
e-mail	**:** enginmatematik@yandex.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: Adıyaman Anadolu Öğretmen Lisesi, Merkez, Adıyaman	2002
Üniversite	: Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği, Buca, İzmir	2007
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı, Haliliye, ŞANLIURFA	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2007-2009	İzmir Özel Türk Koleji	Matematik Öğretmeni
2009-…	MEB	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER: İngilizce