T.C.
HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

YÖNETİM BİLİŞİM SİSTEMLERİ PROGRAMI

STOKASTİK SÜREÇ OLARAK KUYRUK SİSTEMLERİ TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

Yasin AYDIN

Tez Danışmanı

Prof.Dr.Sami ERCAN

İSTANBUL - 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ

Bu çalışmada , günlük hayatımızın hemen her anında karşılaştığımız kuyruk sistemleri matematiksel olarak incelenmiştir. Kuyruk sistemleri genelde rastsal olarak işlediği için öncelikle Stokastik Süreçler ve Markov Zincirleri incelenmiş daha sonra kuyruk sistemlerinden sekiz tane modelin performans ölçütleri Olasılık Teorisi metotları ile bulunmuştur. Ayrıca bulunan bu performans ölçütleri için Java programlama dili ile bir uygulama geliştirilmiştir.

Çalışmamın başından itibaren yardım ve desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof.Dr. Sami ERCAN'a, kurul üyelerinden Prof.Dr. Ali OKATAN'a ve bu çalışmanın bilgisayar uygulamasında desteğini esirgemeyen kuzenim Hüseyin ADALAR'a şükranlarımı sunarım.

2009 Yasin AYDIN

SİMGELER LİSTESİ

λ : Geliş Oranı

λ_e : Etkin geliş oranı

μ : Servis Oranı

ρ : Trafik Yoğunluğu

c : Hizmet veren kanal sayısı

L : Sistem de bulunan ortalama birim sayısı

L_q : Kuyrukta bekleyen ortalama birim sayısı

W : Sistem de ortalama bekleme süresi

W_q : Kuyrukta ortalama bekleme süresi

a_{ij} : i durumundan j durumuna geçiş oranı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa No

T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÖNETİM BİLİŞİM SİSTEMLERİ PROĞRAMI

STOKASTİK SÜREÇ OLARAK KUYRUK SİSTEMLERİ TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Yasin AYDIN

Danışman
Prof.Dr. Sami ERCAN

ÖZET

Günlük yaşamımızda, kuyrukta bekleyen insanlar ve araçlar ile her zaman karşılaşırız. Bunlar arasında maça gitmek için gişeden bilet almak isteyen sporseverlerin oluşturduğu bilet kuyruğunu, hastanelerdeki hasta kuyruğunu, bankalarda paralarını almak için sıraya girip bekleyen emekli memurların ve büyük mağazalarda kasiyere ödemede bulunmak için sıra bekleyen müşteriler kuyruğunu sayabiliriz. Sözü edilen bu kuyrukların oluşumundaki tek neden hizmet için gelen müşteri istemlerinin anında karşılanamamasıdır. Böylece kuyruk, sınırlı bir hizmet nedeniyle geciken bir bekleme dizisi (hattı) durumudur.

Bu çalışmada, karşılaştığımız bu tür kuyrukların matematiksel olarak modellenmesi ve performans ölçütlerinin bulunması amaçlanmıştır. Öncelilikle Kuyruk Teorisi'nin temelini oluşturan Stokastik Süreçler ve bu konunun özel bir hali olan Markov Süreçleri, Poisson Süreçleri ve Doğum-Ölüm Süreçleri incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda elde ettiğimiz sonuçlarla Kuyruk Teorisi'ne ait yedi tane model incelenerek model performans ölçütleri bulunmuştur. Elbette bu modellerden elde ettiğimiz sonuçlar yüzde yüz bir gerçekliği ortaya koymaz. Çünkü kuyruk teorisi temelde Olasılık Teorisine dayandığı için sadece tahminsel azı sonuçlar elde edebiliriz. Ancak uygulamada uzun bir süre sistemimizi analiz edersek teori ile pratikte elde ettiğimiz sonuçların birbirleri ile çok uyum içinde olduğunu görebiliriz.

T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÖNETİM BİLİŞİM SİSTEMLERİ PROGRAMI

QUEUEING THEORY SYSTEM AS STOCHASTIC PROCESS

M. S. THESIS

Presented
Yasin AYDIN

Co-Supervisor
Prof. Dr. Sami ERCAN

ABSTRACT

In daily life we always encounter with people and vehicles that waiting in queue. As an example of this situation we can see ticket queue formed by football fans, the line formed by retired civil servants in a bank, customer waiting in line in a supermarket for making payment, passenger queue for a minibus, the long vehicle queue in rush hours and lunch queues formed by university students in a dining hall. The only reason for the mentioned queues is the inability of meeting customer`s demand instantaneously. Thus, the queue stemmed from the insufficient and limited services is a waiting sequence situation.

In the present study, the aim is to model the mentioned queues mathematically and to determine the performance criterion of these models. An application is developed with Java program language in order to measure the performance criterions. With this aim firstly Stochastic Processes and its special kind Markov Chains, Poisson Process and Birth-Dead processes are analyzed. With the results obtained from the analysis, eight models that belonged to the Queue Theory are examined. It is evident that the results we obtained from these models do not exactly fit with the facts. Since the Queue Theory basically depends on Probability Theory, we can obtain only some predictive results. However, if the system analyzed for a long time period we can see that our results fit with the facts.

GİRİŞ

Bekleme hattı veya kuyruk, bir hizmet birimine gelen müşterilerin birimin başka bir müşteriye hizmet vermesi nedeniyle oluşturdukları birikimdir. Bu açıklamadan anlaşılacağı üzere hizmet veren birçok kuruluşun, bu hizmet sırasında kuyruk durumlarıyla karşılaşması olasıdır. Örneğin hastahanede bekleyen hastalar, bankada hizmet almak için sırada bekleyen insanlar veya bir alışveriş merkezinde ücret ödemek için kasada bekleyen insanlar. İşte bu kuyrukların oluşum nedeni hizmet almak için gelen müşterilerin isteklerinin anında karşılanmamasıdır.

Günümüzde işletmelerin en önemli sorunlarından biri de müşterilerine etkin bir servis sistemi oluşturamamalarıdır. Etkin bir servis sistemi oluşturmada işletme için önemli olan iki nokta vardır. Bunlardan birincisi gelen müşteriye en az sürede hizmet vermek, ikincisi ise bu hizmet için optimum sayıda personel istihdam edebilmek. Çünkü müşteri gereğinden fazla bekletilirse, müşteriyi kaybetme riski oluşur. Öte yandan müşteriye kısa sürede hizmet vermek amacı ile fazla miktarda personel istihdam edilirse bu da işletmeye ek maliyet getirecektir. Yani yönetici hem servis maliyetini en düşük seviyede tutmak ve servis niteliğini yükseltmeyi ve de müşterilerine en kısa sürede hizmet vermeyi amaçlamalıdır. İşte bu amaçların gerçekleştirilmesi bekleme hattı modellerinin kullanılması ile mümkündür.

1. STOKASTİK SÜREÇLER

1.1 Tanım ve Temel Kavramlar

Bir stokastik süreç ($X_t(w)$; $w \in \Omega$, $t \in T$), (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlanmış ve bir reel parametre ile indislenmiş rastsal değişkenler ailesi olarak tanımlanabilir. Burada *T* parametre uzayını göstermektedir. Genel olarak *t* parametresi zaman, *T* olayların zaman aralığı ve X_t sürecin *t* anındaki durumunu tanımlar. Örneğin bir kuyruk sisteminde *t* anındaki müşteri sayısı veya *t* anında gaz moleküllerinin durumu. $X_t(w)$ stokastik sürecinin alabileceği değerlerin kümesi D durum uzayını gösterir ve bir stokastik süreç

$$X_t(w) : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{D}$$

şeklinde bir fonksiyon olarak düşünülebilir.

$X_t(w)$ Stokastik Sürecinde *t* parametresini sabit olarak kabul ettiğimizde $X_t(w)$ bir rastsal değişken w'yı sabit tuttuğumuzda ise reel değişkenli bir fonksiyon olacaktır.

Durum uzayı D sürekli veya kesikli değerlerden oluşabilir. Bu değerlere göre $X_t(w)$ süreci sürekli-durumlu stokastik süreç veya kesikli-durumlu stokastik süreç olarak adlandırılır. Aynı şekilde zaman kümesi *T'* de sürekli veya kesikli olabilir. *T* sürekli değerler alabiliyorsa, $X_t(w)$ süreci sürekli-zamanlı stokastik süreç olarak ve eğer *T* kesikli değerlerle sınırlanmış ise, $X_t(w)$ süreci kesikli-zamanlı stokastik süreç olarak adlandırılır.

1.2 Bağımsız Artımlı Süreçler

$\{X_t(w): t \in \mathrm{T}\}$ bir stokastik süreç ve $t_0 < t_1 <$ ...... olmak üzere $\{X_{ti} - X_{tj} : \; i \neq j\}$ kümesinin elemanları birbirlerinden bağımsız ise $\{X_t : t \in \mathrm{T}\}$ stokastik sürecine bağımsız artımlı süreç denir. Bu süreçte $X_{t+k} - X_t$ artımı *t*'den bağımsız ise bu sürece Durağan Bağımsız Artımlı Süreç denir. (İnal, 1988, 2)

2. MARKOV ZİNCİRLERİ

Markov Zincirleri, birbirleri ile bağımlı bulunan bir dizi rastsal değişkenin durumlarını açıklama ve gelecek durumlarına yönelik öngörülerde bulunmak için kullanılan yöntemlerden biridir. Buradaki rastsal değişkenler bağımlı oldukları için analizleri zordur. Ancak Andrey Markov kısmi de olsa bir bağımsızlık öne sürmüştür. Bunu da şu şekilde açıklayabiliriz:

Sistemin t_n anında, belirlenen bir durumda olma olasılığı geçmişten tamamen bağımsız olup yalnızca t_{n-1} anındaki durumuna bağlıdır. Yani,

t=0,1,2,…….n ve $i_0, i_1, ..., i_n$ değerleri için

$$P(X_t = i_n / X_0 = i_0, ..., X_{t-1} = i_{n-1}) = P(X_t = i_n / X_{t-1} = i_{n-1}) \tag{2.1}$$

eşitliğini sağlayan X_t Stokastik Sürecine Markov Zinciri denir.

Şimdi konuyu bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Örnek :

Bir öğrenci her sabah okuluna otobüs ya da trenle gitmektedir. Herhangi bir sabah trenle giderse, sonraki sabah otobüsle gidiyor. Herhangi bir sabah otobüsle giderse sonraki sabah 0,30 olasılıkla otobüsü ya da 0,70 olasılıkla treni seçiyor. Eğer trenle giderse, sonraki sabah otobüsle gidiyor. Bu olayın Markov Zinciri olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm:

Bir olayın Markov Zincir olması için olayın sadece kendinden bir önceki olaya bağımlı olması gerekir. Örneğimize baktığımızda herhangi bir sabah tren ya da otobüsü seçme bir önceki sabah tren ya da otobüsle gitmiş olmasına bağlı, daha önceki günlerden bağımsızdır. Bu durum da otobüs ya da treni seçme olayı bir Markov Zinciridir.

2.1 Kesikli Parametreli Markov Zincirleri

{ $X_t(w)$: $t\in$ T } stokastik süreci (2.1) eşitliğini sağlayan bir Markov Süreci olsun. Bu sürecin durum uzayı kesikli değerlerden oluşuyor ise $X_t(w)$ sürecine Kesikli Parametreli Markov Süreci denir. (Inria, 2004, 5)

2.2 Geçiş Olasılıkları Matrisi

{ X_t : t=0,1……} Markov Zinciri t anında i durumunda iken sonraki adımda j durumunda bulunma olasılığı bir adım geçiş olasılığı olarak tanımlanır. Bu durumu matematiksel olarak aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$P(i,j)=P(X_{t+1}=j/X_t=i) \qquad (2.2.1)$$

Burada geçiş olasılıklarının geçiş zamanına bağlı olduğu açıkça görülmektedir. Geçiş olasılıkları geçiş zamanına bağlı değilse Markov Zinciri durağan geçiş olasılıklarına sahiptir ve

$$P(i,j)=P(X_{t+1}=j/X_t=i)=P(X_1=j/X_0=i) \qquad (2.2.2)$$

şeklinde gösterilir. (İnal, 1988, 7)

n adım geçiş olasılıklarını da

$$P^n(i,j)=P(X_{k+n}=j/X_k=i)=P(X_n=j/X_0=i) \qquad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Geçiş olasılıkları durağan , durum uzayı D = (0,1,…..) ve P($X_1=j/X_0=i$) olan bir X_t Markov Zincirinin geçiş olasılıkları matrisi

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2)\ldots \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2)\ldots. \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2)\ldots \\ . & . & . \quad . \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde gösterilir.

Durum uzayı sonlu ise

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & \ldots & n \\ \hline 1 & P(0,0) & P(0,1) & \ldots & P(0,n) \\ 2 & P(1,0) & P(1,1) & \ldots & P(1,n) \\ & & & & \\ m & P(m,0) & P(m,1) & \ldots & P(m,n) \end{array}$$

Bu matrisin her bir P(*i,j*) elemanı için ,

P(i,j) $\geq$ 0 i,j = 0,1,2,………..

$\sum_j P(i,j) = 1$ i=0,1,2,…… (her bir satır toplamı 1'dir)

2.3 Başlangıç Olasılık Vektörü

Stokastik sürecin başlangıç anındaki olasılıkları gösteren vektöre başlangıç olasılık vektörü denir.

$P_0(i) = P(X_0 = i)$ i$\in$ D şeklinde gösterilir.

Bu olasılıklardan oluşan vektörü π_0 ile gösterelim.

$\pi_0 = [P_0, P_1, ...]$ durum uzayı sonsuz

$\pi_0 = [P_0, P_1, ..., P_m]$ durum uzayı sonlu

k adım olasılık vektörünü π_k ile gösterirsek

$\pi_k = [P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, ...]$ durum uzayı sonsuz

$\pi_k = [P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, ..., P_m^{(k)}]$ durum uzayı sonlu

biçiminde gösterebiliriz. (İnal, 1988, 11-12)

Şimdi de π_0 ile P arasındaki ilişkiyi inceleyelim

Kabul edelim ki sürecimiz başlangıç anında i durumunda ve bir adım sonra j durumuna geçer.

$$P(X_1 = j) = \sum_{j \in D} P(X_0 = i) P(X_1 = j / X_0 = i) = \sum_{j \in D} \pi_0(i) P(i, j) \qquad (2.3.1)$$

Matris notasyonu ile

$P = P^{(1)} = \pi_0 P$ şeklinde yazabiliriz. (2.3.2)

n. adımdaki olasılık vektörünü de $P^n = P(X_n = j) : j \in D$ şeklinde yazarsak

$$P_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_i P(X_n = j / X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i)$$

$$\begin{aligned} P^n &= P^{n-1} P \\ &= P^{n-2} P^2 \\ &\;. \\ &\;. \\ &\;. \\ &= \pi_0 P^n \end{aligned} \qquad (2.3.3)$$

şeklinde bulunur.

Bu konu ile ilgili örnek uygulamalar aşağıdadır.

Uygulama 1 :

152 Yıl boyunca yapılan gözlemlerde 30 yıl taşkınlar görülmüştür. Taşkın görülmeyen 122 yıl içinde bir sonraki yıl taşkın görülmeyen yılların sayısı 97; 1 taşkın görülen yılların sayısı 23; 2 taşkın görülen yılların sayısı 2’dir. Taşkın görülen 30 yılın 27’sinde 1 taşkın görülmüş olup 1 taşkın görülen yılları izleyen yılların 22’sinde taşkın görülmemiş, 4’ünde 1 taşkın , 1’inde 2 taşkın görülmüştür. 2 taşkın görülen 3 yılı izleyen yılların 2’sinde taşkın görülmemiş, 1’inde 1 taşkın görülmüştür.

a) Geçiş olasılıklarını hesaplayınız.

b) 3 yıl üst üste taşkın görülüp 4. yılda taşkın görülmemesi olayının olasılığını hesaplayınız.

Çözüm:

a) Ardışık yıllardaki taşkın sayılarının 3 durumlu (0 taşkın, 1 taşkın, 2 taşkın) bir Markov zinciri oluşturduğu kabul edilirse:

$$P_{00} = 97/122 = 0{,}795 \;,\; P_{01} = 23/122 = 0{,}189 \;,\; P_{02} = 2/122 = 0{,}016$$

$$P_{10} = 22/27 = 0{,}815 \;,\; P_{11} = 4/27 = 0{,}148 \;,\; P_{12} = 1/27 = 0{,}037$$

$$P_{20} = 2/3 = 0{,}667 \;,\; P_{21} = 1/3 = 0{,}333 \;,\; P_{22} = 0/3 = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}795 & 0{,}189 & 0{,}016 \\ 0{,}815 & 0{,}148 & 0{,}037 \\ 0{,}667 & 0{,}333 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada 2 durumlu yeni bir Markov Zinciri göz önüne almak gerekir. 0 durumu taşkın görülmemesini, 1 durumu taşkın görülmesini ifade etmektedir.
Buna göre 1 durumu daha önce göz önüne alınan süreçteki 1 ve 2 durumlarını kapsamaktadır.
Geçiş olasılıkları:

$$P_{00} = 97/122 = 0{,}795 \;,\; P_{01} = 23 + 2/122 = 0{,}205$$

$$P_{10} = 22 + 2/27 + 3 = 0{,}800 \;,\; P_{11} = 4 + 1 + 1/27 + 3 = 0{,}200$$

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}795 & 0{,}205) \\ 0{,}800 & 0{,}200 \end{bmatrix}$$

b) $P = P_{11}^{3} * P_{10} = (0{,}2)^3 * 0{,}8 = 0{,}0064$ olur. Burada $P_{11} = 0{,}2$ ardışık iki yıl taşkın görülmesi olasılığı, $P_{10} = 0{,}8$ taşkın görülen bir yılı izleyen yılda taşkın görülmemesi olasılığıdır.

Uygulama 2 :

Verilen durumda A,B ve C şirketleri sırasıyla kozmetik marketlerinin %60,%30 ve %10'una sahiptir. Önceki veriler gösteriyor ki müşteriler şirketlerini aylık periyotlarla değiştirmektedir. P geçiş matrisi bir aydan, gelecek aya geçişteki olasılıkları gösteriyor.

$$
\begin{array}{c}
\text{Gelecek Durum} \\
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\text{Mevcut Durum} \quad \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} .5 & .4 & .1 \\ .3 & .3 & .4 \\ .2 & .5 & .3 \end{pmatrix}
\end{array}
\end{array}
$$

Başlangıç olasılık vektörü ;

$\pi_0 = \quad [.6 \quad .3 \quad .1]$

a) Bir müşterinin A'dan B'ye geçme olasılığı?

b) Birinci ayın sonunda her şirketin market paylaşımını bulun.

c) İkinci ayın sonunda her şirketin Pazar paylaşımını bulun.

a) $P_{12} = .4$

b) $P^{(1)} = \pi_0 P$

c)

$$P^{(1)} = [.6 \quad .3 \quad .1] \begin{pmatrix} .5 & .4 & .1 \\ .3 & .3 & .4. \\ 2 & .5 & .3 \end{pmatrix} = [.41 \quad .38 \quad .21]$$

sonuçta birinci ayın sonunda

A=%41

B=%38

C=%21

c) $P^{(2)}=P^{(1)}P$

$$[.41 \quad .38 \quad .21] \begin{pmatrix} 5 & .4 & .1 \\ .3 & .3 & .4 \\ .2 & .5 & .3 \end{pmatrix} = [.361 \quad .383 \quad .256]$$

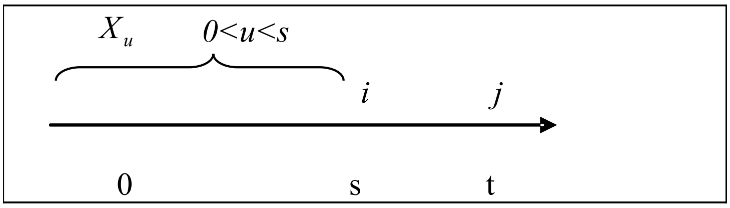
2.4 Sürekli Parametreli Markov Zincirleri

(Ω, F, P) olasılık uzayı , $X_t = X_t(w)$ $(w \in \Omega \quad t \geq 0)$ ve D = (0,1,2,…….,N) olsun.Varsayalım her bir $0 \leq s \leq t$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$P(X_t = j / X_u, 0 \leq u \leq s, X_s = i) = P(X_t = j / X_s = i) \qquad (2.4.1)$$

(2.4.1) eşitliğini sağlayan X_t sürecine Sürekli Parametreli Markov Zinciri denir. (Inria, 2004, 14) Markov Sürecinin durum uzayı sonlu ve sayılabilir ise Markov Zinciri, sonsuz ise Markov Süreci olarak adlandırılır.

$(X_{t1}, X_{t2}, ...)$ arasında tam bir bağımsızlık olmayıp zayıf bir bağımsızlık vardır. Her bir anda sürecin bu durumda olması yalnızca bir önceki duruma bağlıdır.



Şekil 2.1 Sürekli Parametreli Markov Zincirinin Yapısı

Şekil 2.1'e göre $P_{ij}(s,t) = P(X_t = j / X_s = i)$'dir. Bu olasılığın anlamı s anında i durumunda olan zincirin, t anında j durumunda olması olasılığıdır. Yani (t-s) zaman içinde i durumundan j durumuna geçiş olasılığıdır.

$P_{ij}(s,t)$ olasılığı yalnızca (t-s)'e bağlı ise Markov Zincirine Homojen Markov Zinciri denir ve

$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(t-s) \qquad (2.4.2)$$

şeklinde gösterilir.

Genel olarak bu tür Markov Zincirlerini $P_{ij}(t)$ şeklinde yazabiliriz. $P_{ij}(t)$: t zamanı içinde i'den j'ye geçiş olasılığıdır ve

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j / X_0 = i) \tag{2.4.3}$$

şeklinde gösterebiliriz.

2.5 Geçiş Olasılıkları

Sürekli parametreli Markov Sürecinde geçiş olasılıklarının nasıl hesaplanacağı A.N. Kolmogorov tarafından gösterilmiştir. A.N.Kolmogorov bu hesaplama için bir denklem sistemi kullanmıştır.

2.5.1. Kolmogorov'un Birinci ve İkinci Denklem Sistemi

$P_{ij}(t) = P(X_t = j / X_0 = i)$ şeklinde tanımlamıştık. Bu olasılıklar t'nin sıfıra yakın değerleri için belli ise bu olasılıkları tüm t'ler için tanımlamak mümkündür.

Bunun için;

$$a_{ij} = \lim_{t \to 0} \frac{P_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{2.5.1.1}$$

Şeklinde tanımlamaları yapalım. Burada a_{ij} 'ye geçiş oranı denir ve a_{ij} 'ler belli ise her bir $P_{ij}(t)$ tanımlanabilir.

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j / X_0 = i) = P_i(X_t = j) \tag{2.5.1.2}$$

bu eşitlikte i sürecin başlangıç anındaki durumunu göstermektedir.

Şimdi sistemin başlangıçta i durumunda iken (t+s) zaman sonra j durumunda bulunma olasılığını bulalım. Bunun için sistemin başlangıç anında i ($X_0 = i$) , s anında k ($X_s = k$) durumunda ve (t+s) anında j durumunda olsun.($X_{t+s} = j$)

$P_{ij}(t+s) = P_i(X_{t+s} = j)$ bu olasılığı bulmak için Tam Olasılık formülünü kullanalım.

$$P_{ij}(t+s)=\sum_{k=0}^{N} P_i(X_{t+s}=j/X_s=k)P_i(X_s=k)=\sum_{k=0}^{N} P_{ik}(s)P(X_{t+s}=j/X_s=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{N} P_{ik}(s)P_{kj}(t) \qquad (2.5.1.3)$$

(2.5.1.2) denkleminde her iki tarafın s'ye göre türevini alıp s yerine sıfır yazarsak .

$$P'_{ij}(t)=\sum_{k=0}^{N} P'_{ik}(0)P_{kj}(t) \qquad (2.5.1.4)$$

denklemini elde ederiz.

$$P_{ij}(0)=\begin{cases} 0 & ,i\neq j \\ 1 & ,i=j \end{cases}$$ yazabiliriz.

Çünkü $P_{ij}(0)=P(X_0=j/X_0=i)$ yani başlangıç anında i durumunda olan sürecin zaman geçmediği takdirde durumunu değiştirmeyeceği bellidir. Bu durumda $P_{ij}(0)=\delta_{ij}$ dir.

O halde;

$a_{ij}=\lim\limits_{\to 0}\dfrac{P_{ij}(t)-P_{ij}(0)}{t}=P'_{ij}(0)$ şeklinde bulunur.

Bu eşitliği (2.5.1.3) 'de yerine yazarsak;

$$P'_{ij}(t)=\sum_{k=0}^{N} a_{ik}P_{kj}(t) \qquad (2.5.1.5)$$

elde ederiz ve bu denkleme Kolmogorov'un birinci denklem sistemi denir.

(2.5.1.2) denkleminde t'ye göre türev alıp t yerine sıfır yazarsak

$$P'_{ij}(s)=\sum_{k=0}^{N} P_{ik}(s)a_{kj} \qquad (2.5.1.6)$$

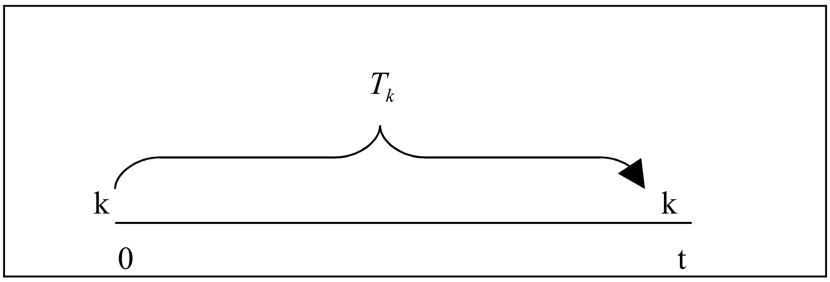
elde edilir ve bu denklem de Kolmogorov'un ikinci denklem sistemidir.

2.5.2 Markov Zincirinin Herhangi Bir durumda Bulunma Süresi

T_k Markov Zincirinin k durumunda bulunma süresi ise T_k'nın dağılım fonksiyonu

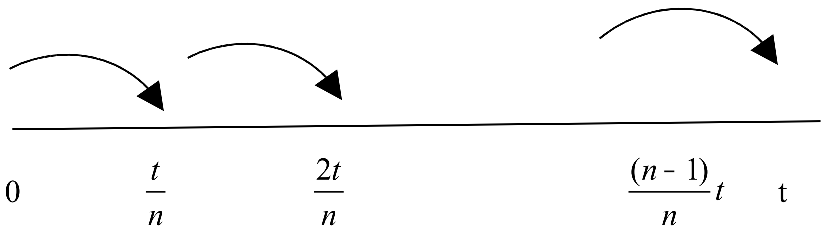
$P(T_k < t) = 1 - e^{a_{kk}t}$ şeklindedir.

Bu teoremi ispatlamak için $P(T_k < t) = 1 - P(T_k \geq t)$ eşitliği gereği $P(T_k \geq t)$'yi bulmamız yeterlidir.



Şekil 2.2 Markov Sürecinin k Durumunda Bulunma Süresi

Kabul edelim ki *(0,t)* aralığın da sürecimiz k durumundadır. Ele aldığımız bu *(0-t)* aralığını küçük aralıklara bölelim.



Sistem *(0-t)* aralığında k durumunda bulunduğu için bu arlıkların [(0-$\frac{t}{n}$) , ($\frac{t}{n}$-$\frac{2t}{n}$) ……] hepsinde k durumundadır. Bu olaya A_n dersek ;

$$P(A_n) = P\{X(t/n) = k, X(2t/n) = k, ..., X(t) = k / X_0 = k\} \quad n=1,2,...... \qquad (2.5.2.1)$$

Şeklinde yazabiliriz. Bu olay *n*'ye bağlı olup *t* sabittir.
(0-t) aralığında k durumunda bulunma süresini

$$P(T_k \geq t) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \qquad (2.5.2.2)$$

biçiminde yazılabilir.

$A_1 < A_2 < .....$ olduğu için A_n dizisi monoton artandır. Olasılık Teorisine göre monoton olaylar dizisinin limiti mevcuttur. O halde

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\lim_{n\leftarrow\infty} A_n)$ şeklinde yazabiliriz. (Shahbazov, 2005, 58)

Ancak burada olaylar ayrık olduğu için ayrı ayrı olasılıkları hesaplamamız gerekecektir. Bunun yerine

$$P(A_n) = P\{X(t/n) = k, X(2t/n - t/n) = k, ..., X(1 - \frac{(n-1)t}{n}) = k\} \qquad (2.5.2.3)$$

şeklinde ifade edersek

$$= P_{kk}(t/n) \,.\, P_{kk}(t/n) \,.\, P_{kk}(t/n) \,\ldots\, P_{kk}(t/n)$$

$$= \left[P_{kk}(t/n)\right]^n \qquad (2.5.2.4)$$

bulunur.

Olasılık teorisinin süreklilik teoremine göre;

$P(\lim A_n) = \lim P(A_n)$ ve

$P(T_k \geq t) = \lim_{n\to\infty}\left[P_{kk}(t/n)\right]^n$ şeklinde bulunur. Şimdi bu limiti hesaplayalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left[P_{kk}(t/n)\right]^n = \left[P_{kk}(0)\right]^{\infty} = 1^{\infty}$$

$n \to \infty$ iken yukarıda görülen belirsizlik ortaya çıkar. Bu belirsizlikten kurtulmak için

$P(T_k \geq t) = \lim_{n\to\infty}\left[P_{kk}(t/n)\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + P_{kk}(t/n) - 1\right]^n$ ve bu eşitlikte ($P_{kk}(t/n) - 1$)$=\alpha_n$ yazalım

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\right]^{n\alpha_n}, \quad \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$$ olduğunu göz önüne alırsak

$$= e^{\lim_{n\to\infty}(n\alpha_n)}$$ bulunur.

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{kk}(t/n) - P_{kk}(0)}{t/n}.t = a_{kk}t$$ şeklinde bulunur. Bu durumda

$P(T_k \geq t) = a_{kk}t$ ve T_k 'nın dağılım fonksiyonu,

$$P(T_k < t) = 1 - e^{a_{kk}t} \qquad (2.5.2.5)$$

şeklinde elde ederiz.

Bu konu ile ilgili bir örnek uygulama aşağıdadır.

Uygulama ;

Bir makine t süresi içinde bozuk veya çalışır durumda bulunabilir. 0 ile çalışır durumu 1 ile de bozuk durumu gösterelim ve T_0 makinenin çalışır durumda , T_1 makinenin bozuk durumda kalma süresi olsun. T_0 λ parametreli , T_1 ise μ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunu kabul edelim ve bir adım geçiş olasılığı matrisini bulalım.

$$P(T_0 < t) = 1 - e^{\lambda t}$$

$$P(T_1 < t) = 1 - e^{-\mu t}$$

$P_{ij}(t) = P(X_t = j / X_0 = i)$ (i,j =0,1) ve matrisimiz

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) \end{bmatrix}$$ şeklindedir.

Geçiş oranları matrisi de

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01}) \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}$$ olacaktır.

(2.5.2.5) ‘da elde ettiğimiz sonuca göre ;

$$a_{00} = -\lambda$$

(2.5.1.6) denklemine göre geçiş matrisimizdeki olasılık değerlerini bulalım.

$$P'_{00}(t) = \sum_{k=0}^{1} P_{0k}(t)a_{k0} = P_{00}(t)a_{00} + P_{01}(t)a_{01}$$

$$= -\lambda P_{00}(t) + (1 - P_{00}(t))\mu$$

$$= -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu$$

$P_{00}^{'}(t) + (\lambda + \mu)P_{00}(t) = \mu$ şimdi eşitliğin her iki tarafını $e^{(\lambda+\mu)t}$ ile çarpalım.

$$e^{(\lambda+\mu)t}P_{00}^{'}(t) + (\lambda + \mu)P_{00}(t)e^{(\lambda+\mu)t} = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

$[P_{00}(t)e^{(\lambda+\mu)t}]^{'} = \mu e^{(\lambda+\mu)t}$ eşitliğin her iki tarafının integralini alalım.

$$P_{00}(t)e^{(\lambda+\mu)t} - 1 = \int_0^t \mu e^{(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{00}(t) = e^{-(\lambda+\mu)t}(1 + \int_0^t \mu e^{(\lambda+\mu)t}dt)$$

$$= \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$ olduğu için

$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Aynı şekilde $P_{11}(t)$ için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$P_{11}^{'}(t) = \sum_{k=0}^{1} P_{1k}(t)a_{k1} = P_{01}(t)a_{10} + P_{11}(t)a_{11}$$

$$= \lambda(1 - P_{11}(t)) - \mu P_{11}(t)$$

Bu diferansiyel denklemi çözersek

$$P_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$P_{10}(t) = 1 - P_{11}(t) = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} - \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$ bulunur.

3. POİSSON SÜRECİ

$X_t(w)$ ($w \in \Omega$, $t \geq 0$) süreci aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $X_t(w)$'ye Poisson Süreci denir. (Taha, 2007, 41)

1. { $X_t(w)$, $w \in \Omega$, $t \geq 0$ } kararlı ve bağımsız aralıklara sahiptir.
2. $X(0) = 0$
3. X_t'nin dağılımı X_t ~ Poisson(λt) , $\lambda > 0$ yani Poisson Sürecinin herhangi bir *t* anında k değerini alma ihtimali:

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \tag{3.1}$$

Not: Kararlı Aralıklar herhangi bir zaman aralığında olan olayların sayısının dağılımının yalnızca aralığın uzunluğuna bağlı olduğu; Bağımsız Aralıklar ise örtüşmeyen zaman aralıklarında meydana gelen olayların sayısının birbirinden bağımsız olduğu anlamına gelir.

Şimdi Poisson Sürecine ait bazı özellikleri inceleyelim.

1. Poisson Sürecinde çok küçük zaman aralıklarında iki ve daha fazla olayın meydana gelmesi olasılığı sıfırdır. Yani;

$$\lim_{t \to 0} \frac{P(X(t \geq 2)}{t} \to 0 \text{ olur.} \tag{3.2}$$

$P(X(t \geq 2) = 1 - P(X_t = 0) + P(X_t = 1)$ yazabiliriz.

$$P(X_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t} \quad \text{ve} \quad P(X_t = 1) = \frac{(\lambda t)^1 e^{-\lambda t}}{1!} = \lambda t e^{-\lambda t} \quad \text{bulunur.}$$

$\lambda t e^{-\lambda t}$ Taylor serisine göre açarsak

$$\lambda t e^{-\lambda t} = \lambda t (1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots\ldots - \frac{(\lambda t)^n}{n!} + R_n)$$

burada R_n kalan terim olup

$$R_n = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{şeklinde bulunur ve } t \to 0 \text{ için } R_n \to 0 \text{ olacaktır.}$$

Not : *A(t) t*'ye bağlı bir fonksiyon olsun. $\lim_{t\to 0}\frac{A(t)}{t}=0$ ise *A(t)*'ye *o(t)* fonksiyonu denir.

Taylor serisinde $\frac{(\lambda t)^2}{2!}$ ve sonrasındaki terimleri $o(t)$ fonksiyonu şeklinde

yazabiliriz. Çünkü $\frac{(\lambda t)^2}{2t}$ ifadesinde $t\to 0$ için $\frac{(\lambda t)^2}{2t}\to 0$ olduğu açıkça görülmektedir. O halde

$\lambda te^{-\lambda t}=\lambda t(1-\lambda t+o(t))=\lambda t-(\lambda t)^2+o(t)=\lambda t+o(t)$ şeklinde bulunur.

($(\lambda t)^2$ terimi $t\to 0$ için sıfıra yaklaştığından $o(t)$ fonksiyonu olarak yazılmıştır.)

Bulmuş olduğumuz bu sonuçları (3.2) de yerine yazarsak

$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\lambda t}+\lambda t+o(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\lambda t}+\lambda t}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{o(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\lambda t}+\lambda t}{t}=\frac{1}{0}$ belirsizliği ortadan kaldırmak için

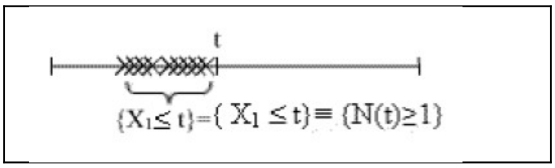
L' Hospital kuralını uygularsak

$\lim_{t\to 0}-\lambda e^{-\lambda t}+\lambda=0$ şeklinde bulunur.

2. Poisson Sürecinde olaylar arasında geçen zamanın dağılım fonksiyonu λt parametreli üstel dağılıma sahiptir.

Varsayalım X_n *n* ile (*n-1*).ci olaylar arasında geçen süre ve X_1 birinci olay gerçekleşinceye kadar geçen süredir.

Önce $P(X_1\le t)$ yani X_1'in dağılım fonksiyonunu bulalım



Şekil 3.1 Poisson Sürecinde İlk Olay Gerçekleşene Kadar Geçen Süre

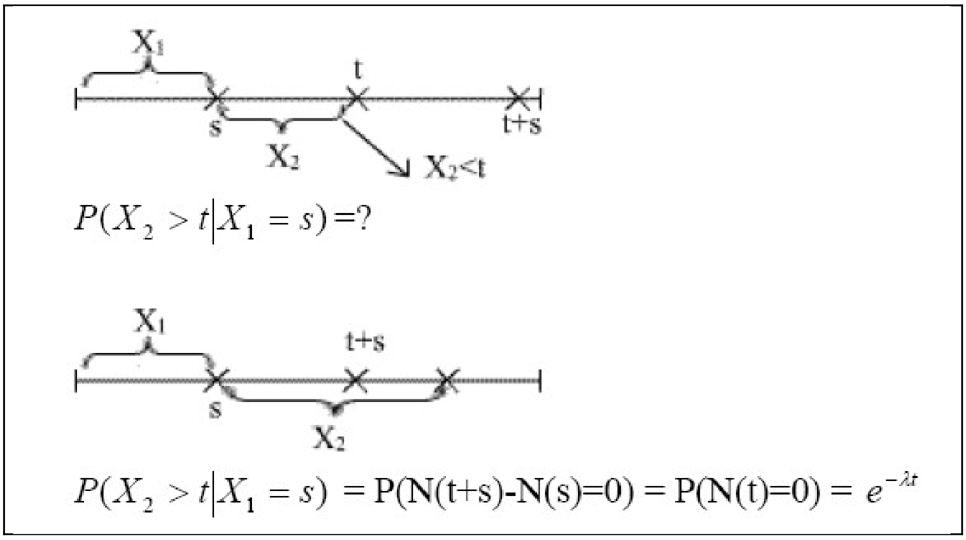
$P(X_1 \leq t) = P(N_t \geq 1) = 1 - P(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$

Dolayısıyla

$$P(X_1 \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (3.3)$$

yani X_1 ortalaması $\frac{1}{\lambda}$ olan üstel dağılıma uyan bir rastsal değişkendir.

X_2 'nin dağılımını bulalım.



Şekil 3.2 Poisson Sürecinde İkinci Olay Gerçekleşene Kadar Geçen Süre

$P(X_2 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ bulunur. Yani X_2 'de $\frac{1}{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılıma sahiptir. Dolayısıyla Poisson Sürecinde olaylar arasında geçen zaman üstel dağılıma sahiptir.

3. Varsayalım ki $X_1, X_2, ..., X_n$ oranları $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ olan bağımsız üssel değişkenler olsun.

Bu rastsal değişkenlerin minimumunun dağılımı $(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)t$ parametreli üstel dağılıma sahiptir.

Yani ;

$$P\{\min(X_1, X_2,....,X_n < t)\} = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t} \quad (3.4)$$

İspat için önce $P\{\min(X_1, X_2,....,X_n > t)\}$ olasılığı bulalım.

$$P\{\min(X_1, X_2,....,X_n > t)\} = P(X_1 > t, X_2 > t,....,X_n > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t).....P(X_n > t)$$

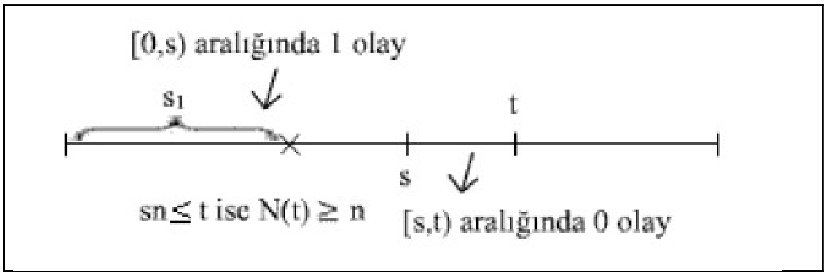
$$= e^{-\lambda_1 t}.e^{-\lambda_2 t}....e^{-\lambda_n t}$$

ve

$$P\{\min(X_1, X_2,....,X_n < t)\} = 1 - e^{-\lambda_1 t}.e^{-\lambda_2 t}....e^{-\lambda_n t} = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)t} \quad (3.5)$$

bulunur.

4. (0,t) Aralığında 1 olay olduğu verildiğinde bu olayın zamanının dağılımı [0,t) aralığındaki düzgün dağılımdır.



Şekil 3.3 Poisson Sürecinde (0-t) Aralığında Gerçekleşen Olay Sayısı

Şekilde de görüldüğü gibi (0-s) aralığında bir olay (s-t) aralığında da hiç olay olmamıştır.

O halde $P\left(\dfrac{S_1 \le s, N_t = 1)}{N_t = 1}\right)$ olasılığını hesaplamamız gerekecektir.

P($S_1 \le s, N_t = 1$) = P([0,s] de 1 olay, [s,t]’ de 0 olay) = P([0,s]’ de 1 olay).P([s,t]’ de 0 olay)

P([0,s]’ de 1 olay)= $P(X(s) = 1) = \dfrac{(\lambda s)^1 e^{-\lambda s}}{1!} = \lambda s e^{-\lambda s}$ (3.6)

P([s,t]’ de 0 olay)= $P(X(t-s)=0)=\dfrac{[\lambda(t-s)]^0 e^{-\lambda(t-s)}}{0!}=e^{-\lambda(t-s)}$

$$P(N_t=1)=\frac{(\lambda t)^1 e^{-\lambda t}}{1!}=\lambda t e^{-\lambda t} \tag{3.7}$$

$$P\left(\frac{S_1\leq s, N_t=1)}{N_t=1}\right)=\frac{\lambda s e^{-\lambda s}.e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}}=\frac{s}{t} \tag{3.8}$$

Dolayısıyla [0,t) aralığında yalnızca 1 olay olduğu verildiğinde bu olayın zamanının dağılımı
[0,t) aralığındaki düzgün dağılımdır.

Çünkü X [0,t) aralığında düzgün dağılmış ise yoğunluk fonksiyonu;

$f_X(x)=\dfrac{1}{t-0}=\dfrac{1}{t}$ ve dağılım fonksiyonu

$$P(X\leq s)=\int_0^s \frac{1}{t}dx=\frac{s}{t} \quad \text{şeklindedir.} \tag{3.9}$$

4. DOĞUM-ÖLÜM SÜREÇLERİ

4.1 Tanım

Durum uzayı D = { 0,1,2,….} olan bir $\{X_t \ \ t \geq 0\}$ Markov Zincirini göz önüne alalım.

$$P_{ij}(t) = P(X_{s+t} = j / X_s = i) \tag{4.1.1}$$

olsun ve $P_{ij}(t)$, aşağıda verilen özellikleri sağlasın.

1. $P(X(t+h) = k / X(t) = k-1) = \lambda_k h + o(h)$
2. $P(X(t+h) = k / X(t) = k+1) = \mu_k h + o(h)$
3. $P(X(t+h) = k / X(t) = k) = 1 - \lambda_k h - \mu_k h + o(h)$
4. $P(X(t+h) = k / X(t) = s) = o(h)$, ($|\, s - k \,| \geq 2$)

Bu durum da X_t sürecine Doğum-Ölüm süreci denir ve λ_k ve μ_k sırasıyla doğum ve ölüm oranları olarak isimlendirilir. (Cooper, 1981, 5) Yukarıda verilen özelliklere göre, büyüklüğü k olan bir sistemin çok küçük bir zaman aralığında (bu zaman aralığı *h* olarak kabul edildi) bir birey artması olasılığı $\lambda_k h + o(h)$, bir birey azalması olasılığı $\mu_k h + o(h)$ ve değişmeme olasılığı $1 - \lambda_k h - \mu_k h + o(h)$ ‘dır.

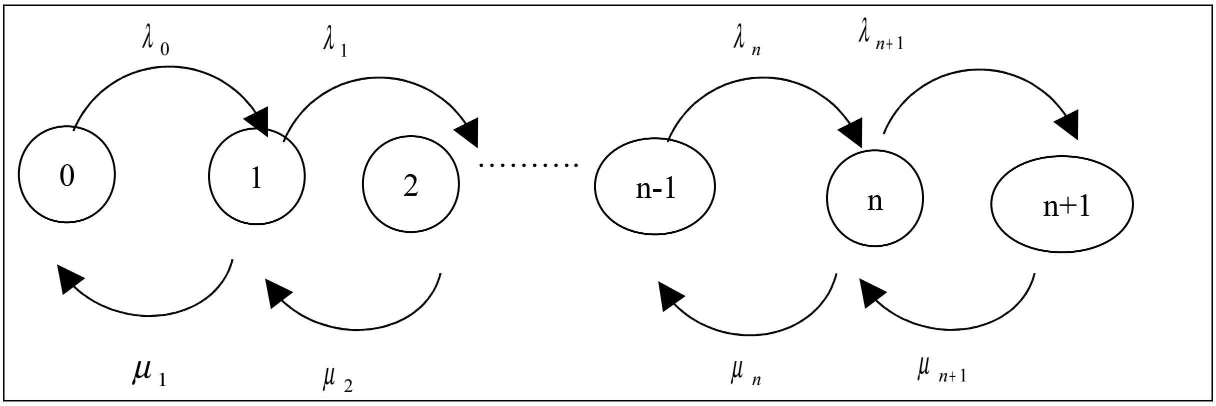
Burada $o(h)$ fonksiyonu $\lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{o(h)}{h} \to 0$ şeklinde tanımlanır.

Bir populasyondaki artış ve azalışların olasılıkları hesaplanabiliyorsa bu populasyonun zaman içindeki büyüklüğü doğum-ölüm süreçlerine göre belirlenebilir. Bu anlamda kuyruk sistemlerinde müşterilerin geliş ve ayrılışları doğum ve ölüm süreçlerine göre olduğu görülür. Çünkü Kuyruk sistemine yeni bir birimin gelmesi doğum ve hizmet alan müşterinin sistemden ayrılışı ölüm olarak ifade edilebilir. Ayrıca

Sisteme geliş oranı λ_n (n=0,1,2,….)

Sistemden ayrılışlar μ_n (n=0,1,2,…)

olarak kabul edilirse doğum- ölüm süreçleri aşağıdaki şekille ifade edilebilir.



Şekil 4.1 Doğum-Ölüm Süreçleri İçin Oran Diyagramı

4.2 Denge denklemleri

Denge denklemleri, sistemin belirlenen bir n durumuna giriş oranının, bu durumdan çıkış oranına eşit olması gerektiğini ifade eder. Yani;

$$\text{Giriş Oranı} = \text{Çıkış Oranı} \tag{4.2.1}$$

Bu denklemleri yazmak için Şekil 4.1 deki n durumunu göz önüne alalım. Sistemin n durumuna girişi için sistem n-1 durumundadır ve bir doğum gerçekleşir veya n+1 durumundadır bir ölüm gerçekleşir. Sistemin n durumundan çıkması için sistem n durumunda iken bir doğum veya ölüm olayının meydana gelmesi gerekir.

O halde denklemleri aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

0 durumu $\quad \lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$

1 durumu $\quad \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$.

.

(4.2.2)

.

k durumu $\quad \lambda_k P_k + \mu_k P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1}$

yukarıdaki denklemleri düzenlersek

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$\lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2$$

$$\lambda_2 P_2 = \mu_3 P_3 \tag{4.2.3}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_k P_k = \mu_{k+1} P_{k+1}$$

genel olarak n durumu için

$$\lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} \quad \text{n=0,1,2,…….} \tag{4.2.4}$$

şeklinde bulunur.

Bu denklemleri çözdüğümüzde ise

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} P_0$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 .....\lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 ....\mu_n} P_0, \quad \text{n=0,1,2,…..} \tag{4.2.5}$$

şeklinde elde edilir.

Bu denklemde $\frac{\lambda_0 \lambda_1 .....\lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 ....\mu_n}$ ifadesine C_n dersek $P_n = C_n P_0$ olur.

Olasılık Teorisine göre $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$ dir ve $P_n = C_n P_0$ yerine yazılırsa

$$P_0(1+C_1+C_2+....)=1 \ , \quad P_0=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}C_n}=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}} \qquad (4.2.6)$$

elde edilir. (Bobbio ve Accademico, 1999, 9)

5. KUYRUK SİSTEMLERİ TEORİSİ

5.1 Tanım ve Tarihçe

Kuyruk, bir hizmet birimine gelen müşterilerin hizmet biriminin meşgul olması nedeni ile oluşturdukları birikimdir. Günümüzde artan nüfusa paralel olarak hizmet birimine gelen kişi sayısı da artmaktadır. Bu durumda, zaman kaybını en aza indirgeyerek isteklere nasıl cevap verileceği sorusu ortaya çıkmaktadır. Böyle bir sorunla ilk defa ilgilenen kişi Danimarkalı elektrik mühendisi A.K. Erlang'dır.

Kuyruk Teorisi, gelişlerin ve hizmet sürelerinin rastsal olduğu bir sistemde sistem davranışını anlayabilmek amacı ile model geliştirme uğraşıları ile başlamıştır. A.K. Erlang 1909 yılında Application of the Theory of Probability to Telephhone Trung Problems isimli kitabını yayımlayarak bu konuda ki ilk çalışmayı yapmıştır. Daha sonra 1927'de Molina, 1928'de Fry, 1930 ve 1934'de Pollaczek, 1931 ve 1932'de Khintchine bu konuda çalışma yapan önemli bilim adamlarıdır. 1950 yılından sonra da yapılan bu kuramsal çalışmaların işletmelerde, hastanelerde, depolama ve benzeri yerlerde oluşan kuyruklarda uygulanmaya başlanmıştır.

Günümüzde bu konu ile ilgili çalışmalar devam etmekte ve Kuyruk Teorisi veya Bekleme Hattı Teorisi isminde pek çok yayın bulunmaktadır.

5.2 Kuyruk Sistemi Parametreleri

Bir kuyruk sistemini tanımlamak için aşağıdaki verilerin bilinmesi gerekir

1. Sisteme gelişler

Müşterilerin sisteme geliş anları rastsal olup dağılım fonksiyonunu $P(\xi<t)=A(t)$ şeklinde gösterebiliriz. $A(t)$ fonksiyonunun uygulamada genel olarak Poisson dağılımına uyduğunu ve bunun sonucu olarak ta gelişler arası sürenin üstel dağılıma uygun olduğunu söyleyebiliriz.

2. Servis süresi

Servis süresi de bir rastsal değişkendir. Bunu η ile gösterirsek dağılım fonksiyonu

$P(\eta<t)=D(t)$ şeklinde yazılabilir.

Hizmet süresinin uygulamada genel olarak üstel dağılıma uyduğu görülmüştür.

3. Servis hizmeti sunan kanal sayısı. (c)
4. Kuyruk uzunluğu

Kuyruk, servis sistemindeki hizmet almayan müşterilerden oluşmaktadır. Sonlu ya da sonsuz büyüklükte olabilmektedir.

5.Geliş Kaynağı

Hizmet almak için sisteme gelen müşteri popülâsyonunun büyüklüğünü ifade etmektedir. Sonlu veya sonsuz olabilir.

6.Servis disiplini

Sistemin işleyiş amacına göre değişiklik göstermektedir.

FCFS (First Come First Served) : İlk gelen ilk hizmeti alır

LCFS (Last Come First Served) :Son gelen ilk hizmeti alır

SIRO (Service In Random Order) :Rasgele servis

GD (General Service Discipline) :Genel servis disiplini

Bu çalışmada incelediğimiz bütün kuyruk sistemlerinde FCFS disiplini geçerlidir.

5.3 Kuyruk Sistemlerinde Notasyon

Kuyruk Sistemlerinin ana karakteristikleri uluslararası kabul edilen ve Kendall-Lee Taha gösterimi olarak isimlendirilen aşağıdaki formatta verilmektedir.

(a / b / c) : (d / e / f)

Bu dizilişteki harflerin ifade ettikleri anlamlar aşağıdaki gibidir.

a : Sisteme gelişlerin dağılımı.

b : Servis zamanlarının dağılışı.

c : Sistemde bulunan paralel servis kanallarının sayısı.

d : Servis disiplini.

e : Kuyruk ve servis dahil olmak üzere sistemde müsaade edilen en çok birey sayısı.

f : Sisteme geliş kaynağının büyüklüğü.

Yukarıda verilen sembollerin yerine kullanılan standart notasyonlar aşağıdaki gibi olup, kuyruk yapıları hakkında önemli bilgiler taşımaktadırlar.

M: Poısson (veya Markovian) geliş ve ayrılış dağılımlarını temsil etmektedir. Bu bilgi aynı zamanda gelişler arası veya servis süresinin üstel alabileceğini gösterir.

D: Bu bilgi bir sabit olabileceği gibi deterministik gelişler arası veya servis süresi olabilir.

$E_{k:\ k}$ parametreli gelişler arası veya servis zamanının dağılışının Erlang veya Gamma dağılışı.

GI: Gelişlerin veya gelişler arası sürenin genel bağımsız dağılımı.

G: Ayrılış veya servis süresinin genel dağılımı.

$N(t)$: t anında kuyruk sistemindeki müşteri sayısı

$N_q(t)$: t anında kuyruktaki müşteri sayısı

W_s : Herhangi bir müşteri için sistemde bekleme zamanı.

W_q : Herhangi bir müşteri için kuyrukta bekleme zamanı.

L_s : Kuyruk sisteminde beklenen müşteri sayısıdır ve $L_s = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$ şeklinde hesaplanır.

L_q : Kuyrukta beklenen müşteri sayısı ve c kanal sayısı olmak üzere $L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)P_n$ şeklinde bulunur.

5.4 Little Formülü

Little Formülü kuyruk uzunluğu ile bekleme süresi arasındaki bağıntıyı ifade eder ve bu bağıntı

$L_s = \lambda W_s$ Little Formülü 1

$L_q = \lambda W_q$ Little Formülü 2 şeklindedir.

$A(t)$: 0 dan t anına dek birikimli gelişler

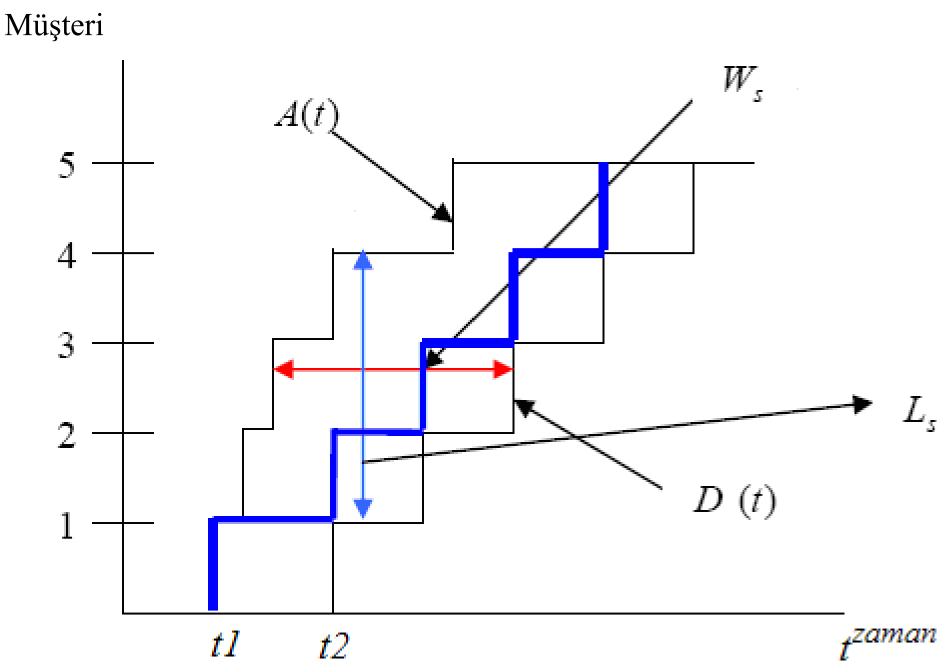
$D_s(t)$: 0 dan t anına dek sistemden birikimli ayrılışlar

$D_q(t)$: 0 dan t anına dek kuyruktan birikimli ayrılışlar

$W_s(n)$: n' ninci müşterinin sistem zamanı

$L(t)\, s$: t anında sistemdeki müşteri sayısı

olmak üzere aşağıdaki grafiği inceleyelim.



Grafik 5.1 Kuyruk Sistemlerinde Birimlerin Sisteme Giriş ve Çıkış Anları

Yukarıdaki birikimli geliş ve ayrılış grafiğinde her bir dikey doğru bir müşteriyi temsil etmektedir. Doğruların yatay eksen üzerindeki yerleri ise bir olayı (geliş, ayrılış) temsil etmektedir. Geliş grafiğindeki dikey doğrular müşteri geliş zamanlarına, ayrılış diyagramındaki dikey doğrular ise müşterilerin sistemden ayrıldıkları sürelere karşılık gelmektedirler. Grafiğin herhangi bir andaki yükseklikleri, sistemde belirli bir noktayı geçmiş olan müşteri sayısını gösterir.

Varsayalım a sürecin başlangıç anı ve b de bitiş anı olsun. Bu durumda sistemde ve kuyruktaki ortalama müşteri sayısı

$$L_q = \frac{\int_a^b L_q(t)dt}{b-a} \quad \text{ve} \quad L_s = \frac{\int_a^b L_s(t)dt}{b-a} \qquad (5.4.1)$$

olacaktır. (Williğ, 1999, 7)

Payda toplam yerine integral olmasının nedeni zamanın sürekli olmasıdır. $L_q(t)$ nin integrali, a ile b aralığında, *A(t)* ile *D(t)* arasında kalan alana eşittir.

Sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme zamanı ise;

$$W_q = \frac{\sum_{n=1}^{N} W_q(n)}{N} \quad \text{ve} \quad W_s = \frac{\sum_{n=1}^{N} W_s(n)}{N} \tag{5.4.2}$$

şeklinde olacaktır. (Williğ, 1999, 7)

(5.4.1) ve (5.4.2) denklemlerine baktığımız da L_q denkleminde pay ile W_q denklemindeki

pay ve L_s denklemindeki pay W_s denklemindeki pay eşittir. $\sum_{n=1}^{N} W_q(n) = \int_a^b L_q(t)dt$

Çünkü (5.4.1) denklemi alanı dikey toplam ile, (5.4.2) ise yatay integral ile hesaplanmaktadır. Her iki yöntemde aynı alanı, farklı yollarla ölçmektedir ve dolayısı ile eşit olmak zorundadır. Bu alanı tüm müşterilerin toplam kuyrukta bekleme zamanı olarak yorumlayabiliriz:

Yani ;

$W_q = \frac{\bar{W}}{N}$, $L_q = \frac{\bar{W}}{b-a}$ yazabiliriz.

Bu iki denklemden

$$NW_q = (b-a)L_q \tag{5.4.3}$$

yazabiliriz.

λ , [a,b] aralığında ortalama geliş oranı, yani birim zamanda gelen ortalama müşteri sayısıdır ve

$\lambda = \frac{N}{b-a}$ ‘dır. λ (3) denkleminde yerine yazılırsa

$$L_q = \lambda W_q \quad \text{Little Formülü 1} \tag{5.4.5}$$

Aynı sonuç sistemde harcanan zaman içinde geçerlidir.

$$L_s = \lambda W_s \quad \text{Little Formülü 2} \tag{5.4.6}$$

5.5 (M\M\ 1) : (GD \ ∞ \ ∞) Kuyruk Modeli

Bu modelde hizmet sistemi bir tane kanaldan oluşur. Hizmet almak için siteme gelen müşteri eğer kanal boş ise hemen hizmeti alır ve sistemi terk eder, dolu ise kuyruğa girerek beklemeye başlar.

Sisteme gelişler λt parametreli Poisson dağılımına, dolayısıyla gelişler arası süre üstel dağılıma sahiptir. Hizmet süreleri ise μt parametreli üstel dağılıma sahiptir .

X_t = t anında sistemde bulunan müşteri sayısı

$\rho = \lambda \frac{1}{\mu}$, ortalama hizmet süresi içinde sisteme gelen ortalama müşteri sayısı

Sistemde herhangi bir anda k tane müşteri bulunması olasılığını hesaplayalım. Bu olasılığıda

$$\lim_{t \to \infty} P(X_t = k) = P_k \qquad (5.5.1)$$

Şeklinde tanımlayalım.

Bu limiti hesaplamak için $\rho < 1$ olmalıdır. Aksi halde sistemde devamlı olarak büyüyen bir kuyruk olur. P_k 'yı hesaplamadan önce sistemin i durumundan j durumuna geçiş oranı olan a_{ij} 'leri bulalım.

Varsayalım sistem herhangi bir anda k durumundadır. k durumunda kalma süresi T_k olsun. T_k 'nın dağılımı;

$$P(T_k < t) = 1 - e^{-a_{kk}t} \qquad (5.5.2)$$

şeklindedir.

Sistem k durumunda iken yeni bir müşterinin gelmesi ile (k+1) durumuna veya bir müşterinin hizmet alarak sistemi terk etmesi ile (k-1) durumuna geçer. Burada sisteme gelişler arası süreleri ξ ile hizmet sürelerini de η ile gösterelim.(ξ ve η rastsal değişkendir.) Sistemin k durumunu değiştirmesi ξ ve η ‘dan hangisinin önce gerçekleştiğine bağlıdır. Bu durumda;

T_k = min (ξ, η) şeklinde olacaktır.

P(T_k < t)=1-P ($T_k \geq$ t) ve P($T_k \geq$ t) =P{min (ξ >t,η>t)} yazabiliriz. Burada ξ ve η birbirinden bağımsız rastsal değişkenler olduğu için

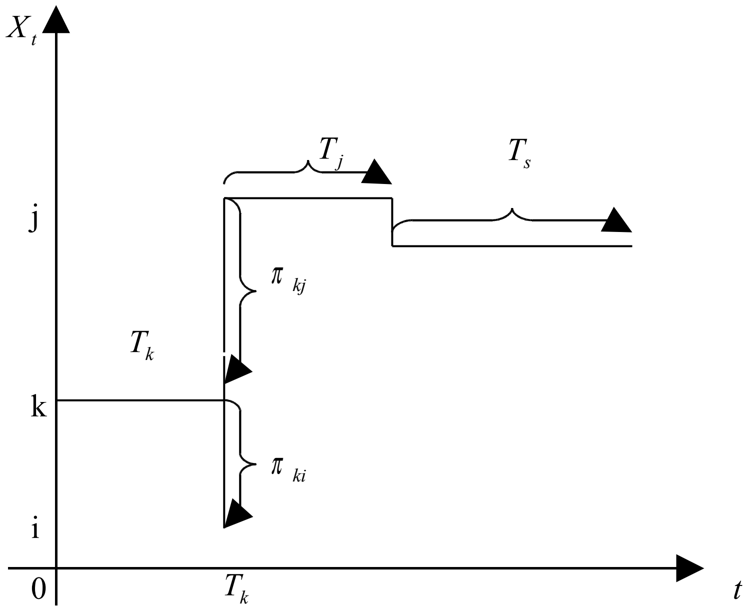
P{min (ξ >t, η > t)}=P(ξ > t)P(η > t)= $e^{-\lambda t} . e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t}$ (5.5.3)

$$P(T_k < t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} \quad (5.5.4)$$

şeklinde bulunur.

Yani sistemin k durumunda kalma süresi (λ+μ) parametreli üstel dağılıma sahiptir.

Şimdi sistemin k durumundan k+1 durumuna geçme olasılığını bulalım.



Grafik 5.2 Markov Zincirinin yörüngesi

Sistem k durumunda iken (k+1) durumuna geçme olasılığı

$$\pi_{K,K+1} = P(\xi < \eta) = \iint_{x \le y} f_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy$$

Şeklinde hesaplanır ve $f_{\xi\eta}(x,y)$ ξ ve η rastsal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

ξ ve η bağımsız olduğu için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları ayrı ayrı olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çarpımı olacaktır.

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \mu e^{-\mu x} \lambda\, e^{-\lambda x} \quad (5.5.5)$$

$$\pi_{K,K+1} = \iint_{x \le y} \mu e^{-\mu x} \lambda\, e^{-\lambda x}\, dxdy = \int_0^\infty \mu e^{-\mu x} \int_0^y \lambda\, e^{-\lambda x}\, dxdy = \int_0^\infty \mu\, e^{-\mu y} (1 - e^{-\lambda y})\, dy$$

$$= \int_0^\infty \mu e^{-\mu y}\, dy - \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)y}\, dy = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \quad (5.5.6)$$

Aynı yöntemle $\pi_{K,K-1}$ de bulabiliriz.

$$\pi_{K,K-1} = P(\eta<\xi) = \iint f_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \tag{5.5.7}$$

şeklinde bulunur

$a_{K,K+1} = \lambda$ (sisteme yeni müşterini gelmesi)

$a_{K,K-1} = \mu$ (sistemden müşterinin çıkışı)

$a_{K,K} = -(\lambda+\mu)$ (sistemin k durumunda kalması)

$|i-k| \geq 2$ ise $a_{ik}=0$ olur.

Çünkü sisteme bir anda sadece tek müşteri gelir veya sistemden bir müşteri hizmet alarak sistemden ayrılır.

$\sum_{i=0}^{\infty} P_i a_{ik} = 0$ denklemi $|i-k| \leq 2$ olduğundan aşağıdaki gibi yazılır.

$$-(\lambda+\mu) P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1} = 0 \tag{5.5.8}$$

Sistem sıfır durumunda ise sistemden çıkış olmaz sadece geliş olur. Denklemde k yerine sıfır yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \tag{5.5.9}$$

(5.5.7) denklemin de her iki tarafı μ'ye bölersek ve $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ olduğunu göz önüne alırsak denklemler şu şekilde olacaktır.

$$P_{k+1} - (1+\rho) P_k + \rho p_{k-1} = 0 \tag{5.5.10}$$

$$-\rho P_0 + P_1 = 0 \tag{5.5.11}$$

(5.5.10) denklemi ikinci dereceden fark denklemi ve (5.5.11) denklemi başlangıç koşuludur. Aranan fonksiyon P_k'dır. $P_k = x$ diyelim. Bu durumda (5.5.10) denklemi şu şekilde olacaktır.

$x^2 - (1+\rho)\,x + \rho = 0$ (5.5.12)

Denklemi çözdüğümüzde;

$$x_{1,2} = \frac{(1+\rho) \pm \sqrt{(1+\rho)(1+\rho) - 4\rho}}{2} = \frac{(1+\rho) \pm (1-\rho)}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \\ x_2 = \rho \end{array}\right\} \text{Kökler reel ve birbirinden farklı}$$

(5.5.10) denklemini bu köklerle ifade edersek

$$P_k = c_1 x_1^k + c_2 c_2^k = c_1 + c_2 \rho^k \tag{5.5.13}$$

Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

$$P_0 = c_1 + c_2$$

$$P_1 = c_1 + c_2 \rho$$

Bulmuş olduğumuz P_0 ve P_1'i (5.5.13) denkleminde yerine yazarsak

$$-\rho\,(c_1 + c_2) + c_1 + c_2\,\rho = 0$$

$$-c_1\,(1-\rho) = 0 \tag{5.5.14}$$

$\rho < 1$ olduğu için $c_1 = 0$ olur. Bu durumda denklemimiz

$$P_K = c_2 \rho^k \tag{5.5.15}$$

olacaktır.

P_k bir olasılık olduğu için, Olasılık Teorisi'ne göre

$\sum_{K=0}^{\infty} P_K = 1$, $\sum_{K=0}^{\infty} c_2 \rho^K = 1$, $c_2 \sum_{K=0}^{\infty} \rho^K = 1$ $c_2 \dfrac{1}{1-\rho} = 1$ ve $c_2 = 1 - \rho$ bulunur.

1. Sistemde k tane müşteri bulunma olasılığı;

$P(X_t = k) = (1-\rho)\rho^k$ (k=0,1,2,……). (5.5.16)

şeklinde bulunur

2. Sistemdeki ortalama müşteri sayısı (L)

$$L = EX_t = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X_t = k) = \sum_{K=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = (1-\rho)\rho \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

$= (1-\rho)\rho \dfrac{1}{(1-\rho)^2} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$, bu eşitlikte $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ yerine yazılırsa:

$$L = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (5.5.17)$$

olur.

3. Müşterinin sistemde kalma süresini hesaplayalım

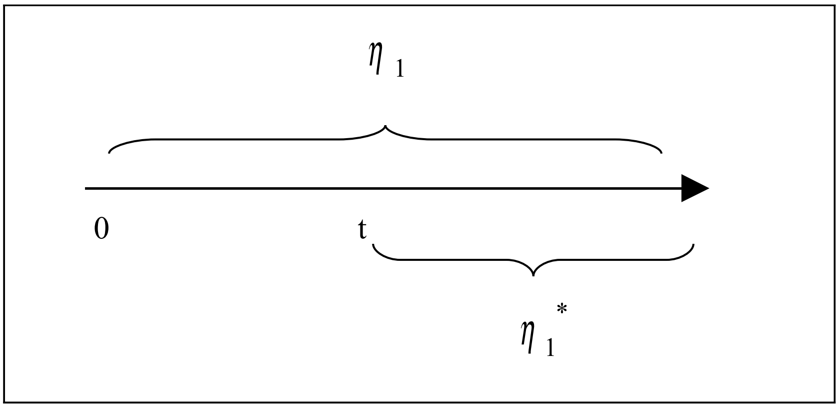
W_s, Müşterinin sisteme girişi ile çıkışı arasındaki süre olsun. Kabul edelim ki müşteri sisteme geldiğinde sistemde n tane müşteri var. Bu durumda;

$W_s = \eta_1 + \eta_2 + \ldots\ldots + \eta_{n+1}$ olacaktır.

$\eta_1, \eta_2 \ldots$ aynı dağılıma sahip rastsal değişkenlerdir.

$\eta_1 < \eta_2$'dir. Çünkü birinci müşteri hizmet almaya başladıktan sonra ikinci müşteri gelmiştir ve birinci müşteri hizmet süresinin bir kısmını harcamıştır.

η_1^* kalan hizmet süresi olsun



Şekil 5.1 Hizmet Almaya Başlayan Müşterinin Kalan Hizmet Süresi

Ancak üstel dağılımın belleksizlik özelliğinden dolayı kalan hizmet süresi de üstel dağılıma sahip olacaktır. yani $\eta_1^* \approx \eta_k$

W_s 'in dağılım fonksiyonunu bulalım.

$$P(W_s < t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T < t / X_t = k) P(X_t = k) \qquad \text{(Tam olasılık formülüne göre)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(\eta_1^* + \eta_2 + \ldots\ldots.. + \eta_{k+1} < t)(1-\rho)\rho^k$$

$$= (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} P(\eta_1 + \eta_2 + \ldots.. + \eta_{k+1} < t)\rho^k \qquad (5.5.18)$$

$X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots.., X_n \approx$ Exp(μ) ve $S_n = X_1 + X_2 + \ldots\ldots. + X_n$ olsun.

S_n 'nin yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{S_n}(t) = \frac{\mu(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t} \qquad (5.5.19)$$

şeklinde bulunur.(Shahbazov, 2005, 154)

Buna göre W_s 'in dağılım fonksiyonu

$$P(W_s < t) = (1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \int_0^t \frac{\mu(\mu u)^k}{k!} e^{-\mu u} du \qquad (5.5.20)$$

$\rho^k = \dfrac{\lambda^k}{\mu^k}$ yazılırsa

$$P(W_s < t) = (1-\rho)\mu \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} e^{-\mu u} du \tag{5.5.21}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \,, \quad x \in \Re$ Formülüne göre

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{\lambda u} \tag{5.5.22}$$

olacaktır.

$$P(W_s < t) = (\mu - \lambda)\int_0^t e^{-\mu u} e^{\lambda u} du$$

$$P(W_s < t) = \int_0^t (\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda)u} du = 1 - e^{-(\mu - \lambda)t}$$

böylece

$$P(W_s < t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\mu - \lambda)t} & t \geq 0 \\ 0 & d.d \end{cases} \tag{5.5.23}$$

şeklinde bulunur.

Yani her bir müşterinin sistemde kalma süresi $(\mu - \lambda)$ parametreli üstel dağılıma sahiptir. Müşterilerin sistemde harcadıkları ortalama süre ise bu dağılımın beklenen değeri olacaktır.

$$\mathrm{E}(W_s) = \int_{x=0}^{\infty} x(\mu - \lambda) e^{-(\mu - \lambda)x} dx = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{5.5.24}$$

4. Kuyrukta bekleme süresi (W_q)

Sistemde bekleme süresi kuyrukta bekleme süresi ile hizmet alma süresinin toplamıdır. Yani;

$$W_s = W_q + \eta \tag{5.5.25}$$

η : bir müşterinin hizmet süresi olup μ parametreli üstel dağılıma sahiptir.

$$P(\eta < t) = 1 - e^{-\mu t} \qquad (5.5.26)$$

Müşterinin kuyrukta bekleme süresini bulmak için rastsal değişkenin Laplace Dönüşümünü kullanacağız. Bu nedenle öncelikle Laplace Dönüşümü açıklayalım.

X rastsal değişkenin dağılım fonksiyonu $F(x)$, yoğunluk fonksiyonu da $f(x)$ olsun. Bu durumda X ‘in Laplace Dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır. (Widder, 1946, 3)

$$\hat{F}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f_X(x)dx \quad s \geq 0 \qquad (5.5.27)$$

s-reel yada complex olabilir.

Aynı zamanda (5.5.27) eşitliği e^{-sx} tesadüfi değişkeninin beklenen değeridir yani

$$Ee^{-sx} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f_X(x)dx \qquad (5.5.28)$$

şeklinde yazılabilir. (Shahbazov, 2005, 245)

Ayrıca X ve Y bağımsız rastsal değişkenler ise bunların toplamının Laplace Dönüşümü

$$\hat{F}(X+Y) = \hat{F}(X)\hat{F}(Y) \qquad (5.5.29)$$

şeklinde olacaktır.(Willig, 1999, 38)

Kuyrukta bekleme süresinin Laplace Dönüşümünü ($W_q(s)$) bulalım.

η bir müşterinin hizmet süresi olmak üzere

$$W_s = W_q + \eta$$

(5.5.29) formülüne göre

$$W_s(s) = W_q(s)\eta(s) \qquad (5.5.30)$$

$$\eta(s) = Ee^{-s\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-sx}\mu e^{-\mu x}dx$$

$$= \mu\int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)x}dx = -\frac{\mu}{s+\mu}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{\mu}{s+\mu}$$

$$W_s(s) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f_T(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}(\mu-\lambda)^{-(\mu-\lambda)t}dt = (\mu-\lambda)\int_0^{\infty} e^{-(\mu-\lambda+s)t}dt$$

$$= -\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+s}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+s} \qquad (5.5.31)$$

$\eta(s)$ ve $W_s(s)$ (5.5.29) eşitliğinde yerine koyalım.

$$\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+s} = W_q(s)\ \frac{\mu}{s+\mu} \quad , \tag{5.5.32}$$

$$W_q(s) = \frac{(\mu-\lambda)(s+\mu)}{\mu(s+\mu-\lambda)} = (1-\rho)\frac{s+\mu-\lambda+\lambda}{s+\mu-\lambda} = (1-\rho)(1+\frac{\lambda}{s+\mu-\lambda})$$

$$= (1\text{-}\rho) + \rho\frac{\mu-\lambda}{s+\mu-\lambda} \tag{5.5.33}$$

(5.5.33) eşitliğinde (1-ρ) sabit ve $\dfrac{\mu-\lambda}{s+\mu-\lambda}$'de $(\mu-\lambda)$ parametreli üstel dağılımın Laplace Dönüşümüdür.

O halde kuyrukta bekleme zamanının dağılım fonksiyonu

$F_{W_q}(t) = (1\text{-}\rho) + \rho\,(1-e^{-(\mu-\lambda)t})$ bulunur.

$$F_{W_q}(t) = \begin{cases} 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)t}, & t \geq 0 \\ 0 \quad , & d.d. \end{cases} \tag{5.5.34}$$

Müşterinin kuyrukta ortalama bekleme zamanını bulmak için bu dağılımın beklenen değerini bulmalıyız.

$$E(W_s) = E(W_q) + E(\eta)$$

$$\frac{1}{\mu-\lambda} = E(W) + \frac{1}{\mu},\ EW = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-\mu+\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} \tag{5.5.35}$$

şeklinde bulunur.

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı (L_s)

$L_s = \lambda W_s$ (Little Formülü)

$$= \lambda \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{5.5.36}$$

Kuyruktaki ortalama müşteri sayısı (Lq)

$Lq = \lambda W_q$ (Little Formülü)

$$= \lambda \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \tag{5.5.37}$$

5.6 (M \ M \ 1) : (GD \ K \ ∞) Kuyruk Modeli

Bu kuyruk modelinde sistem belirli sayıda (K tane) müşteriye hizmet verebilir. Sistem en fazla K tane müşteriye hizmet verebileceği için kuyrukta en fazla K-1 sayıda müşteri bulunur. Sistem dolu iken yeni bir müşteri geldiğinde sistemi terk etmelidir. Trafik yoğunluğunun (ρ) birden küçük olma gibi bir koşulu yoktur. Çünkü kuyruk uzunluğu K-1 daha fazla olamaz.

Sistem parametreleri

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda , & n=0,1,\ldots\ldots, K\text{-}1 \\ 0 , & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu \quad , \ \mathrm{n} = 1,2, \ldots,\mathrm{K}$$

P_k Sistemin dolu olma olasılığı olmak üzere

Etkin geliş oranı;

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_k) \tag{5.6.1}$$

Etkin trafik yoğunluğu ;

$$\rho_e = \frac{\lambda_e}{\mu} \tag{5.6.2}$$

şeklindedir. (Taha ,2007, 62)

Sistemin boş olma olasılığını bulalım (P_0)

$$P_n = P_0 \rho^n \quad \text{n=1,2,........,K} \tag{5.6.3}$$

M\M\1 sistemi ile aynı şekilde bulunur ancak ρ 'nun 1'e eşit olup olmamasına göre farklı değerler alır.

$\rho \neq 1$ durumu için

$$\sum_{n=0}^{K} P_n = 1 \quad , \quad \sum_{n=0}^{K} P_0 \rho^n = P_0 \sum_{n=0}^{K} \rho^n = P_0 \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \tag{5.6.4}$$

bulunur

$\rho = 1$ durumu için

$$\sum_{n=0}^{K} P_0 \rho^n = P_0 \sum_{n=0}^{K} \rho^n = P_0 (\underbrace{1+1+\ldots\ldots+1}_{\text{K+1 tane}}) = P_0 (K+1) = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{K+1} \tag{5.6.5}$$

bulunur.

Sistemde n tane müşteri bulunma olasılığını bulalım (P_n)

P_n M\M\1 modelinde bulmuş olduğumuz formül ile aynıdır. Ancak ρ 'nun almış olduğu değere göre farklılık gösterir.

$\rho \neq 1$ durumu için

$P_n = P_0\rho^n$, $P_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$ denklem de yerine yazılırsa

$$P_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} \tag{5.6.6}$$

şeklinde bulunur

$\rho = 1$ durumu için

$P_n = P_0\rho^n$, $P_0 = \dfrac{1}{K+1}$ denklem de yerine yazılırsa

$$P_n = \frac{1}{K+1} \tag{5.6.7}$$

şeklinde bulunur.

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı (L)

$\rho \neq 1$ durumu

$$L = \sum_{n=0}^{K} nP_n = \sum_{n=0}^{K} n\frac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\sum_{n=0}^{K} n\rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\sum_{n=0}^{K}\frac{d}{d\rho}\rho^n$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{K}\rho^n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right)$$

$$= \rho\frac{-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1} + 1}{(1-\rho^{K+1})(1-\rho)}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{(1-\rho^{K+1})} \tag{5.6.8}$$

bulunur.

$\rho = 1$ durumu için

$$L = \sum_{n=0}^{K} nP_n = \sum_{n=0}^{K} n\frac{1}{K+1} = \frac{1}{K+1}\sum_{n=0}^{K} n = \frac{1}{K+1}\frac{K(K+1)}{2} = \frac{K}{2} \qquad (5.6.9)$$

Kuyruk uzunluğu (L_q)

Kuyruk uzunluğu sistemdeki ortalama müşteri sayısından servis kanalının meşgul olma süre oranını çıkartmakla bulunur.

$\rho \neq 1$ durumu

$L_q = L-(1-P_0)$ bu denklemde, $1-P_0 = \frac{\lambda_e}{\mu} = \frac{\rho(1-\rho^K)}{1-\rho^{K+1}}$ yerine yazılırsa

$$L_q = L - \frac{\rho(1-\rho^K)}{1-\rho^{K+1}} \qquad (5.6.10)$$

şeklinde bulunur.

$\rho = 1$ durumu için

$$L_q = L-(1-P_0) = L - \frac{\lambda_e}{\mu} = L - \frac{K}{K+1} \qquad (5.6.11)$$

Sistemde bekleme süresi (W)

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(1-P_K)} \qquad \text{(Little formülüne göre)} \qquad (5.6.12)$$

Kuyrukta bekleme süresi (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_K)} \qquad \text{(Little formülüne göre)} \qquad (5.6.13)$$

5.7 (M \ M \ 1) : (GD \ ∞ \ N) Kuyruk Modeli

Bu kuyruk modelinde hizmet için sisteme gelecek müşteri sayısı N ile sınırlandırılmıştır. Belirli bir zamanda en fazla N tane müşteri sisteme gelebildiği için kuyruk uzunluğu da N-1 den fazla olamaz. Örneğin bir ustabaşı fabrikada N tane makinenin bakımından sorumlu ise onarım için gelen makinelerin kuyruktaki sayısı en fazla N-1 olur.

Sisteme gelişler Poisson dağılımına uygun, servis süresi üstel dağılımlı ve kuyruk sistemindeki en fazla müşteri sayısı N olmak üzere sistem parametreleri aşağıda verildiği şeklindedir.

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda & , \quad n=0,1,2,\ldots\ldots,N \\ 0 & , \quad n \geq N \end{cases} \qquad (5.7.1)$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & , \quad 1 \leq n \leq N \\ 0 & , d.d \end{cases} \qquad (5.7.2)$$

Etkin geliş oranı

$$\lambda_e = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n = \lambda (N - L) = \mu (1 - P_0) \qquad (5.7.3)$$

Şeklindedir. (Taha, 2007, 69)

Sistemde n tane müşteri bulunma olasılığı (P_n)

P_n M\M\1 sisteminde olduğu gibi $P_n = P_0 \rho^n$ şeklindedir. Ancak bu sistemde N sayıdaki objeden n tanesinin sistemde bulunmasını düşündüğümüz için bu değeri P(N:n) ile çarpmalıyız.

P(N,n): N'nın n-permutasyonudur ve P(N,n) = $\dfrac{N!}{(N-n)!}$ şeklindedir.

Bu durumda sistemde n tane müşteri bulunma olasılığı

$$P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\rho^n P_0 \quad (n=0,1,2,\ldots\ldots,N) \tag{5.7.4}$$

Sistemin boş bulunma olasılığı (P_0)

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = 1 \ , \ \sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\rho^n P_0 = 1 \ , \ P_0\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\rho^n = 1$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\rho^n\right)^{-1} \tag{5.7.5}$$

şeklinde bulunur.

Sistemdeki ortalama kuyruk uzunluğu (L)

$$\lambda_e = \sum_{n=0}^{N}\lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N}\lambda(N-n)P_n = \lambda N\sum_{n=0}^{N}P_n - \lambda\sum_{n=0}^{N}nP_n = \lambda N - \lambda L = \lambda(N-L)$$

$\lambda(N-L) = \mu(1-P_0)$ ve

$$L = N - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) \tag{5.7.6}$$

Şeklinde bulunur.

Kuyrukta bulunan ortalama müşteri sayısı (L_q)

$$L_q = \sum_{n=1}^{N}(n-1)P_n = \sum_{n=1}^{N}nP_n - \sum_{n=1}^{N}P_n = L-(1-P_0) = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0) \tag{5.7.7}$$

Sistemde ortamla bekleme zamanı (W)

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(N-L)} = \frac{N}{\mu(1-P_0)} - \frac{1}{\lambda} \tag{5.7.8}$$

Kuyrukta ortalama bekleme zamanı (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L_q}{\lambda\,(N - L)} \tag{5.7.9}$$

5.8 (M \ M \ c) : (GD \ ∞ \ ∞) Kuyruk Modeli

Bu modelde sisteme gelen müşteriler arasındaki süre ve hizmet süresi üstel dağılıma sahiptir ve sistem c tane kanaldan oluşur.

c paralel haldeki servis kanalları olsun. Kuyruk sistemine gelen müşteri sayısı (k) kanal sayısından az veya eşit olursa müşteri beklemeden hizmet alır. Ancak k$\geq$ m ise c sayıda müşteriye hizmet verileceğinden n-c sayıda müşteri kuyrukta bekleyecektir. Bu sistemde

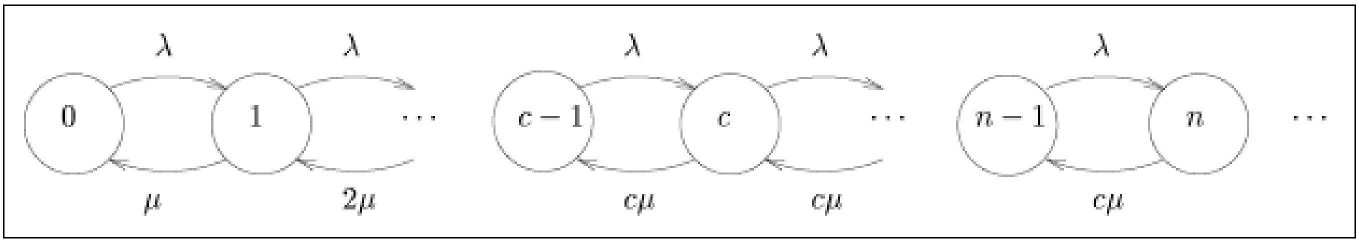
$\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$ olacaktır ve sistemin işleyebilmesi için $\rho < 1$ olmalıdır.

Sistemde kanal sayısından (c) daha az müşteri varsa $\mu = n\mu$, kanal sayısından fazla müşteri varsa $\mu = c\mu$ olacaktır. Yani;

$\lambda_n = \lambda \quad n$=0,1,2,……

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \ 1 \leq n \leq c \\ c\mu & , \ n \geq c \end{cases}$$ olacaktır

.



Şekil 5.2 M \ M \ c Sistemi İçin Oran Diyagramı

Sistem için oran diyagramı yukarıda gösterilmiştir. Buradan şöyle bir sonuç çıkartabiliriz:

Sistemin k durumuna geçmesi, sistem k-1 durumunda iken bir müşteri gelmesi veya k+1 durumunda iken bir müşterinin hizmet alarak sistemi terk etmesi durumlarından herhangi birinin meydana gelmesi ile olur. Ayrıca Doğum-Ölüm süreçlerine göre giriş oranı, çıkış oranına eşit olmalıdır. Durumlara göre giriş ve çıkış oranlarını gösteren tablo aşağıdadır.

Tablo 5.1 M\M\c Sisteminde Giriş ve Çıkış Oranları

Durum	Giriş Oranı	=	Çıkış Oranı
0	μp_1	=	λP_0
1	$\lambda P_0 + 2\mu P_2$	=	$\lambda P_1 + \mu P_1$
2	$\lambda P_1 + 3\mu P_3$	=	$\lambda P_2 + 2\mu P_2$
.			
.			
c -1	$\lambda P_{c-2} + c\mu P_c$	=	$\lambda p_{c-1} + (c-1)\mu p_{c-1}$
c	$\lambda p_{c-1} + c\mu p_{c+1}$	=	$\lambda P_c + c\mu P_c$.
.			
n	$\lambda p_n + c\mu p_{n+1}$	=	$\lambda P_n + c\mu P_n$

Denklemlerin çözümünü $0 \leq n < c$ ve $n \geq c$ durumları için bulalım.

$0 \leq n < c$ durumu için

Bu durumdaki denklemi çözmek için 0 durumunda ki $\lambda P_0 = \mu p_1$ eşitliğini 1 durumundaki denklemde yerine yazdığımızda;

$2\mu P_2 = \lambda P_1 \quad P_2 = \dfrac{\lambda}{2\mu} P_1 = \dfrac{\lambda^2}{2\mu^2}$ elde ederiz.

Bu sonucu da 2 durumunda ki denklemin yerine koyarsak

$3\mu P_3 = \lambda P_2 = \quad P_3 = \dfrac{\lambda}{3\mu} P_2 = \dfrac{\lambda^3}{2.3\mu^3}$ ve genel olarak

$$P_n = a^n \frac{P_0}{n!} \qquad 0 \le n < c \tag{5.8.1 }$$

elde edilir.

$n \ge c$ olduğunda ise ;

$\lambda P_{n-1} = c\mu P_n$ (n durumu için)

$$P_n = \frac{\lambda}{c\mu} P_{n-1} \tag{ 5.8.2}$$

n-1 durumu için ise ;

$$\lambda P_{n-2} = c\mu P_{n-1}$$

$P_{n-1} = \frac{\lambda}{c\mu} P_{n-2}$ bulunur. Şimdi bu denklemi (5.8.2) de yerine yazalım.

$$P_n = \frac{\lambda^2}{c^2\mu^2} P_{n-2} \ .$$

.

$$P_n = \frac{\lambda^{n-c}}{c^{n-c}\mu^{n-c}} P_c \tag{5.8.3}$$

$P_c = a^c \frac{P_0}{c!}$ (5.7.a denklemine göre) (5.8.c) denkleminde yerine yazılırsa

$$P_n = \frac{\lambda^{n-c}}{c^{n-c}\mu^{n-c}} \frac{\lambda^c}{\mu^c c!} P_0 = \frac{a^n}{c!c^{n-c}} P_0 \tag{5.8.4}$$

elde edilir.

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{c!c^{n-c}} P_0 \ , & n \ge c \\ \\ a^n \dfrac{P_0}{n!} \ , & 0 \le n < c \end{cases} \tag{5.8.5}$$

Sistemin boş kalma olasılığı (P_0)

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ bu denklemde P_n yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{c-1} P_n + \sum_{n=c}^{\infty} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} P_0 + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu^n c! c^{n-c}} P_0 = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \sum_{n=c} \frac{a^n}{c! c^{n-c}} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^{n-c} \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!(1-\rho)} \right]^{-1} \qquad (5.8.6)$$

Sistemin meşgul olma olasılığı; sistemde c ve daha fazla müşteri olma olasılığına denktir.

$$P(X(t) \geq c) = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{a^n}{c! c^{n-c}} P_0 = a^c \frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^{n-c}$$

n-c=k değişken değişimini yaparsak

$\frac{\lambda}{c\mu} = \rho$ yerine yazarsak

$$P(X(t) \geq c) = a^c \frac{P_0}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{P_0 a^c}{c!(1-\rho)} \qquad (5.8.7)$$

Ortalama kuyruk uzunluğu (L_q)

$$L_q = \sum_{n=c-1}^{\infty} (n-c)P_n = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\frac{a^n}{c!c^{n-c}} P_0 = a^c \frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\rho^{\,n-c}$$

n-c=k olsun

$$L_q = a^c \frac{P_0}{c!}\rho \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^{\,k-1} = \frac{a^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \qquad (5.8.8)$$

Kuyrukta ortalama bekleme süresini bulalım (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^c \rho}{\mu^c c!(1-\rho)^2 \lambda} = \frac{\lambda^c}{\mu^c (c\mu) c!(1-\rho)^2 \lambda} \qquad (5.8.9)$$

Sistemde ortalama bekleme süresi (W)

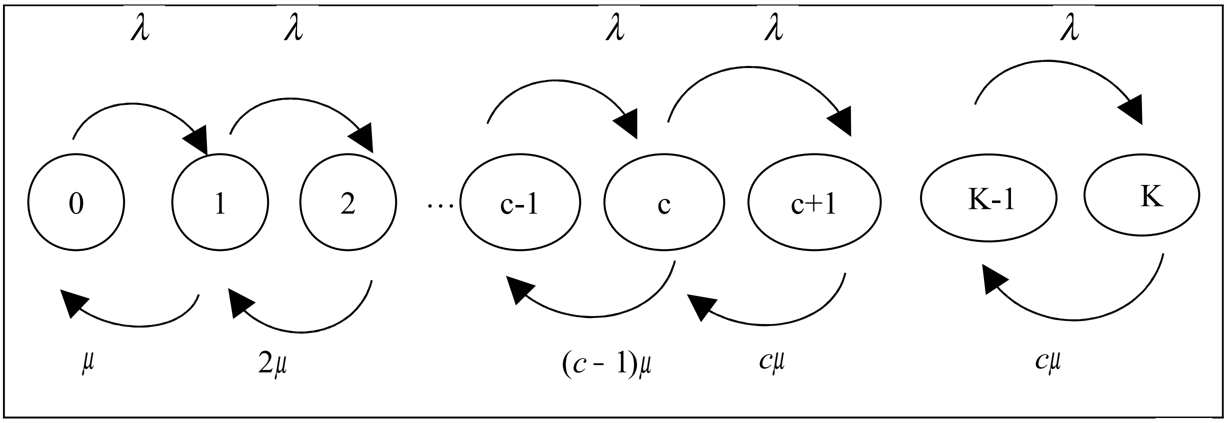
$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda^c}{\mu^c (c\mu) c!(1-\rho)^2 \lambda} + \frac{1}{\mu} \qquad (5.8.10)$$

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı (L)

$$L = \lambda W = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^c}{\mu^c (c\mu) c!(1-\rho)^2 \lambda} + \frac{\lambda}{\mu} \qquad (5.8.11)$$

5.9 (M \ M \ c) : (GD \ K \ ∞) Kuyruk Modeli

Bu modelde paralel halde c tane servis kanalı vardır ve sistemin kapasitesi K ile sınırlandırılmıştır. Sistemde K tane müşteri varken yeni bir müşteri gelirse sistem dolu olduğu için sistemi terk eder. Burada gerçekten sisteme giren müşteriler düşünülür. Kuyruk uzunluğu K-c den fazla olamaz. Kuyruk uzunluğu sınırlandırıldığı için $\rho > 1$ olsa bile sistem durağan duruma ulaşacaktır.



Şekil 5.3 (M \ M \ c) : (GD \ K \ ∞) Modeli İçin Geçiş Oranları Diyagramı

Modelimiz için sistem parametreleri aşağıda gösterilmiştir

$\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$ ve $a = \dfrac{\lambda}{\mu}$ olsun

$\lambda_e : \lambda(1 - P_K)$ Etkin geliş oranı olup (Taha, 2007, 62) sisteme geliş ve çıkış oranları aşağıdadır.

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & , \quad n = 0,1,2,\ldots K\text{-}1 \\ 0 & , \quad n \geq K \end{cases} \tag{5.9.1}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \quad 1 \leq n \leq c \\ c\mu & , \quad n \geq c \end{cases} \tag{5.9.2}$$

Sistemde herhangi bir anda n tane müşteri bulunma olasılığını hesaplayalım. Ancak bu hesaplamayı yaparken sistemdeki müşteri sayısının (n) servis kanalı sayısından (c) az veya fazla olma durumları ayrı ayrı analiz edilmelidir.

$1 \leq n \leq c$ durumu

Bu durumdaki denge denklemleri aşağıdaki gibidir.

$\lambda P_0 = \mu P_1$

$\lambda P_1 = 2\mu P_2$

.

.

.

.

$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$

Denklemlerin çözümünden

$$P_n = \frac{\lambda^n}{\mu^n n!} P_0 = \frac{a^n}{n!} P_0 \qquad (5.9.3)$$

$n \geq c$ durumu

$\lambda P_{n-1} = c\mu P_n$ (n durumu için)

$$P_n = \frac{\lambda}{c\mu} P_{n-1} \qquad (5.9.4)$$

$\lambda P_{n-1} = c\mu P_{n-2}$ (n-1 durumu için)

$$P_{n-1} = \frac{\lambda}{c\mu} P_{n-2}$$

Bu sonucu (5.9.4) de yerine yazarsak

$$P_n = \frac{\lambda^2}{(c\mu)^2} P_{n-2}$$

.

.

$$P_n = \frac{\lambda^{n-c}}{(c\mu)^{n-c}} P_c$$

$$P_n = \frac{\lambda^{n-c}}{(c\mu)^{n-c}} \frac{\lambda^c}{\mu^c c!} P_0 = \frac{\lambda^n}{\mu^n c^{n-c} c} P_0$$

(5.9.5)

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{c^{n-c} c!} P_0 & , \quad n \geq c \\ \\ \dfrac{a^n}{n!} P_0 & , \quad 1 \leq n \leq c \end{cases} \tag{5.9.6}$$

Sistemin boş kalma olasılığı P_0 'ı bulalım

$$\sum_{n=0}^{K} P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} P_0 + \sum_{n=c}^{K} \frac{a^n}{c^{n-c} c!} P_0 = 1 \tag{5.9.7}$$

$$P_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!} \sum_{n=c}^{K} \frac{\lambda^{n-c}}{c^{n-c} \mu^{n-c}} \right) = 1 \tag{5.9.8}$$

$\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu} \neq 1$ (5.9.8) denklemin de yerine yazılırsa

$$P_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!} \sum_{m=0}^{K-c} \rho^m \right) = 1 \tag{5.9.9}$$

n-c = m olsun

$$P_0 \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c (1-\rho^{K-c+1})}{c!(1-\rho)} \right) = 1 \text{ ve}$$

$$P_o = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c (1-\rho^{K-c+1})}{c!(1-\rho)} \right)^{-1} \tag{5.9.10}$$

bulunur.

(5.9.8) denkleminde $\rho = 1$ yazılırsa;

$$P_0\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{a^n}{n!}+\frac{a^c}{c!}\sum_{m=0}^{K}1^m\right)=1 \quad , \quad P_0\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{a^n}{n!}+\frac{a^c(K-c+1)}{c!}\right)=1$$

$$P_0=\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{a^n}{n!}+\frac{a^c(K-c+1)}{c!}\right)^{-1} \tag{5.9.11}$$

şeklinde bulunur.

$$P_0=\begin{cases}\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{a^n}{n!}+\frac{a^c(K-c+1)}{c!}\right)^{-1} & , \quad \rho=1\\[2ex] \left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{a^n}{n!}+\frac{a^c(1-\rho^{K-c+1})}{c!(1-\rho)}\right)^{-1} & , \quad \rho\neq 1\end{cases} \tag{5.9.12}$$

Kuyrukta ortalama bekleme süresi (L_q)

$\rho \neq 1$

$$L_q=\sum_{n=c}^{K}(n-c)P_n = \frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}(n-c)\frac{a^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0a^c}{c!}\sum_{n=c}^{K}(n-c)\left(\frac{a}{c}\right)^{n-c}$$

$$= \frac{P_0a^c\rho}{c!}\sum_{n=c}^{K}(n-c)\rho^{n-c-1} = \frac{P_0a^c\rho}{c!}\sum_{m=0}^{K-c}m\rho^{m-1} = \frac{P_0a^c\rho}{c!}\sum_{m=0}^{K-c}\frac{d}{d\rho}\rho^m$$

$$= \frac{P_0a^c\rho}{c!}\frac{d}{d\rho}\sum_{m=0}^{K-c}\rho^m = \frac{P_0a^c\rho}{c!}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\right)$$

$$L_q = \frac{a^c\rho}{c!(1-\rho)^2}(1-\rho^{K-c+1}-(1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c})P_0 \tag{5.9.13}$$

$\rho = 1$ için

$$L_q=\sum_{n=c}^{K}(n-c)P_n = \frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}(n-c)\frac{a^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0a^c}{c!}\sum_{n=c}^{K}(n-c)\left(\frac{a}{c}\right)^{n-c}$$

$$= \frac{P_0 a^c \rho}{c!} \sum_{n=c}^{K} (n-c)\rho^{n-c-1} = \frac{P_0 a^c \rho}{c!} \sum_{m=0}^{K-c} m\rho^{m-1}$$

$$L_q = \frac{P_0 a^c}{c!}(1+2+....+K-c) = \frac{P_0 a^c}{c!} \frac{(K-c)(K-c+1)}{2} \tag{5.9.14}$$

Kuyrukta ortalama bekleme süresi (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{L_q}{\lambda(1-P_K)} \tag{5.9.15}$$

Sistemde ortalama bekleme süresi (W)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{5.9.16}$$

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı (L)

$$L = \lambda_e W = \lambda(1-P_K) \tag{5.9.17}$$

5.10 (M \ M \ c) : (GD \ ∞ \N)

Bu kuyruk modelinde c tane servis kanalı vardır ve kuyruğu oluşturacak birim sayısı N ile sınırlandırılmıştır Sistem parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda & n=0,1,2,\ldots,N \\ 0 & n \geq N \end{cases} \tag{5.10.1}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \ 1 \leq n \leq c \\ c\mu & , \ n \geq c \end{cases} \tag{5.10.2}$$

Etkin geliş oranı

$$\lambda_e = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n = (N-L)\lambda \quad \text{(Taha, 2007, 71)}$$

$$a = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{ve} \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} \text{ olsun.}$$

Sistemde n tane birim bulunma olasılığı P_n

P_n M \ M \ c modelindeki gibi hesaplanır. Ancak burada kuyruğa girecek olan birim sayısı N ile sınırlandırıldığı için, bu N birimden n tanesinin kuyrukta bulunma olasılığı P(N;n) ile çarpılır.

$$P(N;n) = \frac{N!}{(N-n)!} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!a^n}{(N-n)!n!} P_0 & , 1 \le n \le c \\[2ex] \dfrac{N!a^n}{(N-n)!c!c^{n-c}} P_0 & , n \ge c \end{cases} \tag{5.10.3}$$

Sistemde bulunan birim sayısı (L)

$$L = \sum_{n=0}^{N} nP_n = \sum_{n=0}^{c-1} n \frac{N!a^n}{(N-n)!n!} P_0 + \sum_{n=c}^{N} n \frac{N!a^n}{(N-n)!c!c^{n-c}} P_0 \tag{5.10.4}$$

Kuyrukta bulunan birim sayısı (L_q)

$$L_q = L - \frac{\lambda_e}{\mu} = (a+1)L - aN \tag{5.10.5}$$

Sistem de ortalama bekleme süresi

$$W = \frac{L}{\lambda(N-L)} \tag{5.10.6}$$

Kuyrukta ortalama bekleme süresi (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda (N - L_q)} \qquad (5.10.7)$$

5.11 (M \ G \ 1) : (GD \ ∞ \ ∞) Kuyruk Modeli

Önceki bölümde incelediğimiz kuyruk modelleri doğum-ölüm süreçleri esasına dayanıyordu ve gelişler arası süre ile servis süreleri üstel dağılıma uymaktaydı. Ancak bazı sistemler de servis süreleri üstel dağılıma uymayabilir. Bu modellerden bir tanesi de M \ G \ 1 modelidir. Bu model de gelişler λ parametreli Poisson dağılımlı ve servis zamanı dağılımı ise keyfidir ancak dağılımın varyansını ve ortalamasını bilmemiz gerekir. Bu modelin performans ölçütlerini hesaplamak için Pollaczek-Khintchine formülü kullanılır. Şimdi bu formülü inceleyelim.

X herhangi bir keyfi dağılımı göstermek üzere Pollaczek-Khintchine formülü tek servisli sistemlerde aşağıdaki varsayımlar altında elde edilir.

1) Gelişler λ parametreli Poisson dağılımına uygundur.

2) Servis zamanı , EX ortalaması ve σ^2 varyansı ile geneldir.

3) $\rho = \lambda EX < 1$ olması durumunda sistem durağan hale gelir.

Bu durumda sistemde bulunan birim sayısı

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$ eşitliği ile bulunur.(Willig, 1999, 22) (5.11.1)

Bu formül Pollaczek-Khintchine formülü olarak adlandırılır.

Sistem parametreleri ise;

Geliş oranı λ , ortalama servis süresi $\frac{1}{\mu}$ ve $\lambda < \mu$ olmak üzere

Trafik yoğunluğu $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Sistemde n tane birim bulunma olasılığı (P_n)

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \qquad (5.11.2)$$

Sistemde bulunan birim sayısı (L)

$$L = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \tag{5.11.3}$$

Kuyrukta bulunan birim sayısı (L_q)

$$L_q = L - \rho = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \tag{5.11.4}$$

Kuyrukta bekleme zamanı (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \tag{5.11.5}$$

Sistemde bekleme zamanı (W)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \tag{5.11.6}$$

5.12 (M \ D \ 1) : (GD \ ∞ \ ∞) Kuyruk Modeli

Bazı sistemlerde bütün birimler için servis sistemin de aynı rutin işlemler gerçekleştirilir. Servis süresinin her bir müşteri için aynı olduğu durumlarda, yani servis süresi sabit ise bu model kullanılır.

Bu model $\sigma^2 = 0$ olmak üzere M\G\1 modelinin özel bir halidir. Sistem parametreleri M\G\1 modeli ile aynıdır.

Sistemde n tane birim bulunma olasılığı (P_n)

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \tag{5.12.1}$$

Sistemde bulunan birim sayısı (L)

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \tag{5.12.2}$$

Kuyrukta bulunan birim sayısı (L_q)

$$L_q = L - \rho = \frac{\lambda^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \tag{5.12.3}$$

Kuyrukta bekleme zamanı (W_q)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{5.12.4}$$

Sistemde bekleme zamanı (W)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{5.12.5}$$

6. UYGULAMA

Kuyruk sistemlerinde teorik olarak bulduğumuz performans ölçütlerinin daha anlaşılır olması için İstanbul'da bir eczaneye gelen müşterilerin geliş anları ve hizmet süreleri tespit edilmiş ve
tablo 6.1 ve tablo 6.4'de bu veriler özetlenerek gösterilmiştir.

Tablo 6.1 Müşteri Geliş Anlarının Frekans Tablosu

Müşteri Sayısı	GözlenenFrekanslar (dakika)	Poisson Olasılık Değeri	Beklenen Frekanslar	Ki Kare Değeri
0	5	0,0415	7,80	0,95
1	28	0,1319	25,00	0,49
2	45	0,2100	39,70	1,00
3	33	0,2228	42,10	1,72
4	29	0,1774	33,50	0,49
5	27	0,1129	21,30	1,72
6	9	0,0599	11,30	0,41
7	10	0,0273	5,10	4,71
TOPLAM	186	1,00	186	11,49

Müşteri gelişlerinin Poisson dağılımına uyup uymadığını anlamak için önce hipotezlerimizi kuralım daha sonra da Ki-Kare testi ile analiz edelim. Ki Kare testi gözlenen frekansların, uygun görülüp seçilen teorik bir dağılıma göre hesaplanan beklenen frekanslardan olan farklılığının önemliliğini test eder. (Köseoğlu ve Yamak, 2004, 216)

$\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde ;

H_0 : Dağılım Poissson dağılımına uyar

H_1 : Dağılım Poissson dağılımına uymaz

Dağılımın parametresi $\lambda = \bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{592}{186} = 3{,}18$

Poisson Olasılık değerleri hesaplanırken $\lambda = 3{,}18$ $P(X = n) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ formülünde yerine konularak bulunur. Örneğin müşteri sayısının 3 olma olasılığı $P(X = 3) = \dfrac{(3{,}18)^3 e^{-3}}{3!}$ = 0,2228 olarak bulunur.

Ki-Kare hesap değerimiz:

$$X_h^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(fg_i - fb_i)^2}{fb_i}\right) = \frac{(5 - 7{,}8)^2}{7{,}8} + \ldots + \frac{(10 - 5{,}10)^2}{5{,}10}$$ = 11,49 şeklinde bulunur.

Müşterilerin geliş anlarının dağılımının Poisson dağılımına uygun olup olmadığı SPSS paket programla test edilmiş ve sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 6.2 Müşteri Geliş Anlarının Beklenen ve Gözlenen Frekans Tablosu

	Observed N	Expected N	Residual
,00	5	7,8	-2,8
1,00	28	25,0	3,0
2,00	45	39,7	5,3
3,00	33	42,1	-9,1
4,00	29	33,5	-4,5
5,00	27	21,3	5,7
6,00	9	11,3	-2,3
7,00	10	5,1	4,9
Total	186		

Tablo 6.3 Müşteri Geliş Anları İçin Ki-Kare Uygunluk Testi

	Müşteri Sayısı
Chi-Square(a)	11,257
df	7
Asymp. Sig.	0,128

a 0 cells (,0%) have expected frequencies less than 5.
The minimum expected cell frequency is 5,1.

Sonuçları incelediğimizde Asymp.Sig değerimiz (0,128), anlamlılık düzeyi olan $\alpha = 0{,}05$ ‘den büyük olduğu için H_0 hipotezimiz kabul eldir. Yani müşterilerin sisteme gelişleri $\lambda = 3{,}18$ parametreli Poisson dağılımına uymaktadır.

Şimdi de servis sürelerinin dağılımını inceleyelim.

Tablo 6.4 Hizmet Süresinin Dağılımı Tablosu

Hizmet Süresi (Dakika)	Gözlenen Frekanslar	Üstel Olasılık Değeri	Beklenen Frekanslar	Ki Kare Değeri
$0 \leq x < 4$	112	0,6722	122	0,82
$4 \leq x < 8$	56	0,2633	48	1,33
$8 \leq x < 12$	13	0,0624	11	0,36
TOPLAM	181	1,00	181	2,51

$\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde;

H_0 : Dağılım Üstel dağılıma uyar

H_1 : Dağılım Üstel dağılıma uymaz

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{690}{181} = 3{,}81$$

Hizmet Süresinin dağılımının Üstel dağılıma uygun olup olmadığı SPSS paket programla test edilmiş ve sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 6.5 Sisteme Gelen Müşterilerin Frekans Tablosu

	Observed N	Expected N	Residual
2,00	116	126,4	-10,4
6,00	57	43,9	13,1
10,00	13	15,7	-2,7
Total	186		

Tablo 6.6 Hizmet Süresi İçin Ki-Kare Uygunluk Testi

	Hizmet süresi
Chi-Square(a)	5,236
df	2
Asymp. Sig.	,073

a 0 cells (,0%) have expected frequencies less than 5.
The minimum expected cell frequency is 15,7.

Sonuçları incelediğimizde Asymp.Sig değerimiz (0,073), anlamlılık düzeyi olan $\alpha = 0,05$ ‘den büyük olduğu için H_0 hipotezimiz kabul eldir.

Gelişler Poisson, Servis Süresi Üstel ve $\lambda < \mu$ olduğundan Kuyruk Sistemimiz M\M\1 sistemine uygundur. Bu sistemin performans ölçütlerini bulalım.

Trafik yoğunluğu

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3,18}{3,81} = 0,83$$

Sistemde bulunan müşteri sayısı

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,83}{1-0,83} = 5,04 \text{ kişi}$$

Kuyrukta bulunan müşteri sayısı

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = 4,21 \text{ kişi}$$

Sistemde bekleme zamanı

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = 1{,}58 \text{ dakika}$$

Kuyrukta bekleme zamanı

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 1{,}32 \text{ dakika}$$

şeklinde bulunur.

7. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı günlük hayatta da sıkça karşılaştığımız kuyruk sistemlerinin yapısını matematiksel metotlarla incelemek bu sistemlerin performans ölçütlerinin nasıl hesaplanacağını göstermektir. Müşterilerin sisteme geliş anları ve hizmet süreleri rastsal olduğu için özellikle Olasılık Teorisi'nin metotları kullanılmıştır. Performans ölçütleri ile söylemek istediğimiz şey, sistemde bulunan müşteri sayısı, kuyrukta bulunan müşteri sayısı, sistemde bekleme süresi, kuyrukta bekleme süresi ve trafik yoğunluğudur. Bazı sistemlerde bu performans ölçütlerinin hesaplanması formüllerin uzun olması nedeniyle hayli zor olmaktadır. Bu hesapların kolayca yapılması için Java programlama dili ile bir de yazılım geliştirilmiştir.

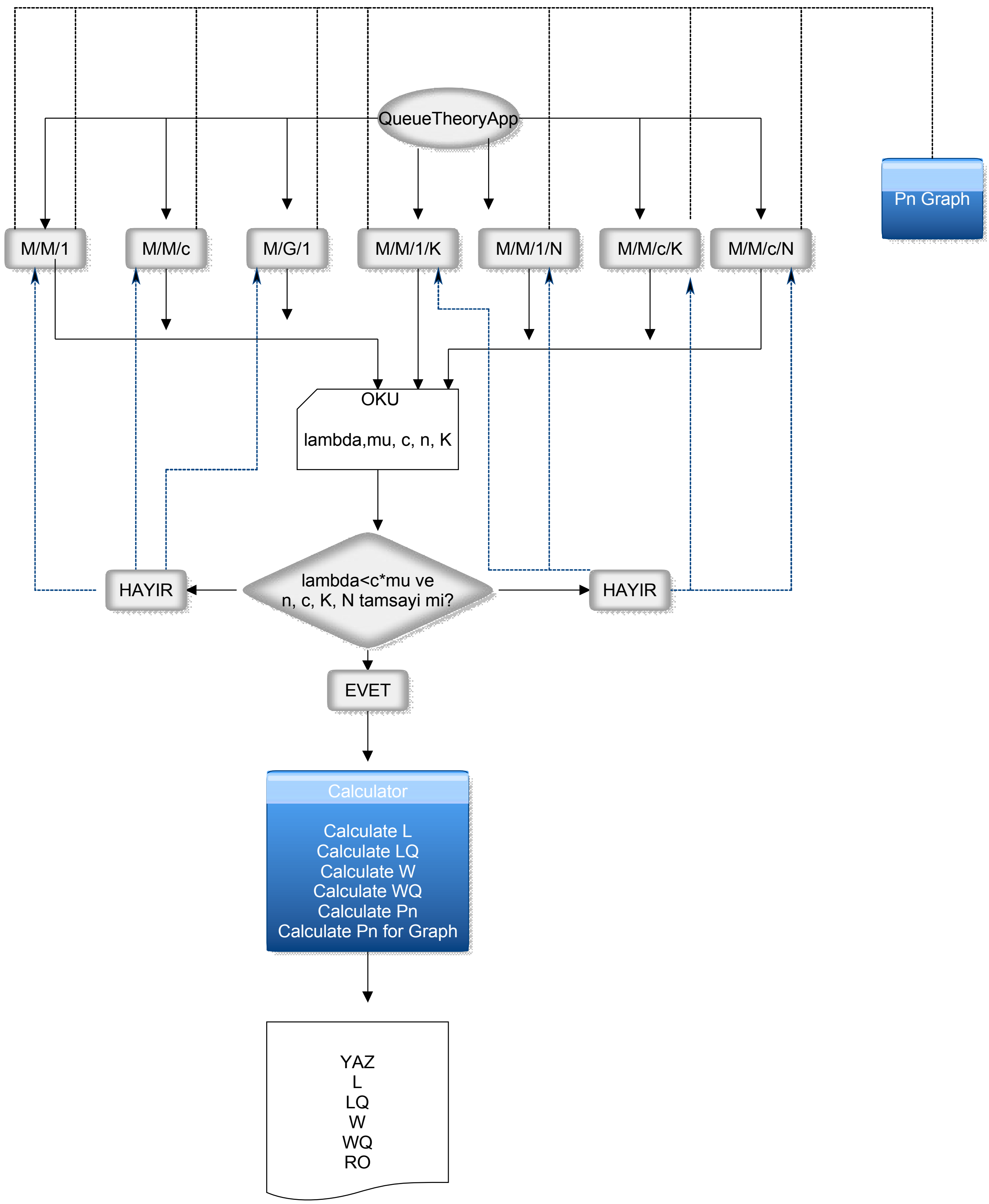
Herhangi bir kuyruk sistemini incelemek için öncelikle yapmamız gereken müşteri geliş anlarının ve hizmet sürelerinin dağılım fonksiyonunu bulmak olmalıdır. Daha sonra sistemde bulunabilecek maksimum müşteri sayısı ve sisteme gelecek olan müşteri popülasyonunun büyüklüğüne göre herhangi kuyruk modeli seçerek performans ölçütlerini hesaplayabiliriz.

Yapmış olduğumuz bu çalışmada kuyruk sistemlerine ait elde ettiğimiz bilgilerin nasıl kullanılacağını göstermek amacıyla İstanbul'da bir eczaneye gelen müşterilerin geliş anları ve hizmet süreleri tespit edilmiş ve SPSS paket programı ile hangi dağılıma uydukları tespit edilmiştir. Daha sonra dağılım parametreleri bulunarak sistemin performans ölçütleri hesaplanmıştır.

Bu çalışmanın bir uygulaması olarak yapmış olduğumuz yazılımda kullanıcı herhangi bir kuyruk modeli seçerek gerekli parametreleri girmek suretiyle sistem performans ölçütlerini hesaplayabilmektedir. Ancak bazı durumlarda sistemleri inceleme şansımız olmamaktadır. Bu durum da simülasyon teknikleri kullanılarak sistem modellemesi yapmamız gerekecektir. Bu çalışmayı geliştirmek amacıyla yapılmış olan yazılıma simülasyon eklemek ve incelenmemiş olan Kuyruk Modellerinin de dahil edilmesi gerektiğini söyleyebiliriz.

EK1

BİLGİSAYAR UYGULAMA YAZILIMININ AKIŞ ŞEMASI



KAYNAKLAR

a) Kitaplar

Tek Yazarlı Kitaplar

ANDREAS WİLLİG , 1999, *A Short Introduction to Queueing Theory*

HARRY van ZANTEN November 8, 2004,
An Introduction toStochastic Processes in Continuous Time

İNAL CEYHAN , 1988, *Olasılıksal Süreçlere Giriş* , Hacettepe Üniversitesi Yayınları

MUHAMMED El-TAHA August 8, 2007 , *Queueing Networks*

ÖZDAMAR KAZIM, 2002, *Paket Programlar ile İstatistiksel Veri Analizi*, Kaan Kitabevi

PHİLİPPE NAIN INRIA ,2004 *, BASIC ELEMENTS OF QUEUEING THEORY Application to the Modelling of Computer Systems*

ROBERT B. COOPER, 1981, *Introduction Queueing Theory*

SHAHBAZOV ALİFETTAH , 2005, *Olasılık Teorisine Giriş*, Birsen Yayınevi

WHİTE J.A. , 1975, *"Analysis of Queueing systems"* Academic Pres

ALEC M. , 1966, " Applied Queueing Theory "

İki Yazarlı Kitaplar

ANDREA BOBBİO and ANNO ACCADEMİCO , 1999 *Birt Death Process Queueing Systems*

IVO ADAN and JACQUES RESİNG , 2001 , *Queueing Theory*

KÖSEOĞLU MUSTAFA ve YAMAK RAHMİ, 2004, *Uygulamalı İstatistik* Derya Kitabevi

SÜMBÜLOĞLU KADİR ve SÜMBÜLOĞLU VİLDAN 2000, *Biyoistatistik,* Hatiboğlu Yayınevi

b) Tezler

ÖNALAN ÖMER, (1992), Stokastik Süreç Olarak Markov Zincirleri ve Kuyruk Teorisinin İncelenmesi, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü (Yüksek Lisans Tezi) İstanbul

d) İnternet

http://web.sakarya.edu.tr/~ukula/ders6_stokastik.pdf

http://web.sakarya.edu.tr/~ukula/ders7_stokastik.pdf

http://web.sakarya.edu.tr/~ukula/ders8_stokastik.pdf

http://web.sakarya.edu.tr/~ukula/ders9_stokastik.pdf

ÖZGEÇMİŞ

KİMLİK BİLGİLERİ

Doğum Tarihi : 08.11.1980

Doğum Yeri : Turhal / TOKAT

Uyruğu : T. C.

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü

Yüksek Lisans : Haliç Üniversitesi Yönetin Bilişim Sistemleri Bölümü

DENEYİM

2005- : İstanbul Büyükşehir Belediyesi Mali Hizmetler Daire Başkanlığı ‘nda Sözleşmeli Personel olarak görev yapmaktadır.