T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONVEKS ANALİZ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

HALİL İBRAHİM UZ

Tez Danışmanı

Prof.Dr. ABBAS Y. AZİMLİ

Ekim 2009
İSTANBUL

T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programı Yüksek Lisans öğrencisi **Halil İbrahim UZ** tarafından hazırlanan **"Konveks Analiz ve Uygulamaları"** adlı bu çalışma jürimizce Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Tarihi : 01.10.2009

(Jüri Üyesinin Ünvanı , Adı , Soyadı ve Kurumu) : İmzası :

Jüri Üyesi: Prof.Dr.Abbas AZİMLİ
Danışman–Yıldız Teknik Üniv. Öğr.Üyesi
....

Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr. Murat BEKEN
HAL.Üni.Uygulamalı Mat.ABD Öğr.Üyesi
....

Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.Ulviye HACIYEVA
HAL.Üni. Bilgisayar Müh. ABD Öğr.Üyesi
....

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında beni yönlendirip, bilgi ve tecrübesiyle destek veren değerli hocam Prof. Dr. Abbas AZİMLİ'ye, tezin hazırlanması aşamasında yardımlarını esirgemeyen Serkan SONEL'e, herzaman desdeklerini yanımda hissettiğim eşim Rabia UZ' a ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisan Tezi

KONVEKS ANALİZ VE UYGULAMALARI

Halil İbrahim UZ

Haliç Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı
Ekim 2009

Bu tez çalışmasında konveks analizin temel kavramlarından olan bazı tanım ve teoremlere yer verilecek, konveks analizin en önemli uygulama alanlarından olan konveks optimizasyon problemlerinde dualite kavramı incelenip, bir işyerinin karar süreci dualite yardımıyla ele alınacaktır. Son olarak Lagrangian fonksiyonu tanımlanarak bu tür fonksiyonlar yardımıyla güçlü dualite sonuçları için konveks olmayan sınırlandırılmış problemler ele alınacaktır.

Anahtar Kelimeler: Konveks küme, Konveks fonksiyon, Dualite, Lagrangian fonksiyonu

CONVEX ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS

Halil Ibrahim UZ

Halic University
INSTITUTE OF NATURAL SCIENCES
APPLIED MATHEMATICS
October 2009

This dissertation is primarily concerned with the study of the most important concepts of convex analysis and applications of convex analysis. Firstly, we give definitions of these concepts and crucial theorems related to these concepts. Secondly, we examine duality concept in convex optimization problems which convex analysis is being recognized basic tool for and apply these theoretical results to factory decision problems in micro-economics theory. Finally, defining “Lagrangian’s function”, we explore non-convex bounded problems for strong duality results via this “Lagrangian’s function”.

Keywords: Convex set, Convex function, Duality, Lagrangian’s function

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{R_+}$	: Kesin pozitif reel sayılar
$\overline{R}$	: Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbf{E_n}$	: n- boyutlu Öklid uzayı
$\|\| x \|\|$	: x vektörünün normu
$\langle x,y \rangle$	: x ile y vektörlerinin iç çarpımı
convC	: C kümesinin konveks örteni
int A	: A kümesinin iç noktaları
∂ **A**	: A kümesinin sınır noktaları
cl A	: A kümesinin kapanış noktaları kümesi
epi f	: f fonksiyonunun epigrafiği
hipof	: f fonksiyonunun hipografiği
∂ **f(u)**	: f fonksiyonun u noktasındaki subdiferansiyeli
Φ	: Perturbasyon fonksiyonu
f*	: f fonksiyonunun konjuget fonksiyonu
f**	: f fonksiyonunun ikincil konjuget fonksiyonu
(P)	: Primal problem
(P*)	: Dual problem

1. GİRİŞ

Fizik, mühendislik ve ekonomi gibi alanlardaki hızlı gelişmeler ve ortaya çıkan yeni problemler, bazı bilinen matematik kavramlarını yetersiz bırakmıştır. Reel hayatta istenen amaç belirli kısıtlara bağlı olarak formülize edilebildiğinden, ortaya çıkan fonksiyonun maksimumunu veya minumumunu bulmak temel amaçtır.

Konveks analizdeki bir çok gelişme optimallik şartlarının ve dualite sonuçlarının daha iyi anlaşılmasında, gerekli koşulların belirlenmesinde ve sonuçların ispatlanmasında ön ayak olmuştur.

Bu tezde, bölüm [2] de konveks analizin temel kavramlarından olan konveks kümenin tanımını ve optimallik koşullarının sağlanmasında önemli bir yere sahip olan konveks kümelerin hiperdüzlem yardımıyla ayrılması incelendi.

Bölüm [3] de konveks fonksiyonların tanım ve özellikleri ile konjuget fonksiyonun konveks olduğu gösterilerek, türev kavramının genişlemesi olarak kabul edebileceğimiz subgradyant ve subdiferansiyel kavramıyla ilişkisi anlatıldı.

[4] ve [5] bölümlerinde ise konveks analizin uygulama alanlarından olan minimizasyon ve duali olan maksimizasyon problemlerinin perturbasyon fonksiyonu yardımıyla birbiri ile ilişkisi ayrıca ekonomik açıklamalarla kuşatılan bir imalathanenin karını maksimize, zararını minimize etmesi ele alındı.

[6] bölümünde ise genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu tanımlanarak, bu tür fonksiyonlar yardımıyla güçlü dualite sonuçları için konveks olmayan problemler incelenmiş ve bölümün sonunda konveks olmayan sınırlandırılmış bir fonksiyon verilerek optimal değerleri bulunmuştur.

2. KONVEKS KÜME

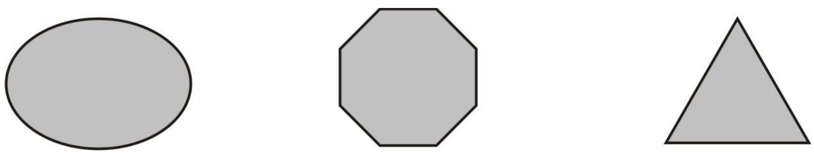
Bu bölümde konveks kümelerin temel tanım ve teoremlerini gösterip, konveks analizde önemli bir yere sahip iki konveks kümenin veya bir nokta ile bir konveks kümenin hiperdüzlem yardımıyla ayrılabilirliğinden bahsedeceğiz.

2.1. Konveks küme tanımı

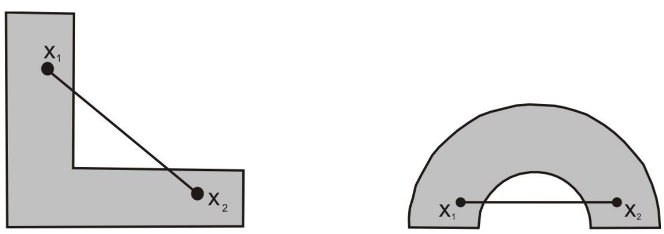
Tanım 2.1
$C \subset R^n$ ve C boştan farklı bir küme olsun. Her x_1, $x_2 \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in C$ ise C kümesine konveks küme denir.

Bir başka şekilde ifade edecek olursak, C kümesinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine C kümesinin elemanı oluyor ise C kümesi konvekstir.



Şekil 2.1 Konveks küme örnekleri



Şekil 2.2 Konveks olmayan küme örnekleri

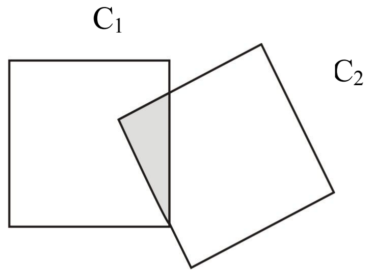
Önerme 2.1

$C_1, C_2 \subset R^n$ iki konveks küme olmak üzere,

i) İki konveks kümenin toplamı konvekstir.

$$C_1 + C_2 = \{x_1+x_2 \mid x_1 \in C_1 \text{ ve } x_2 \in C_2\} \subset R^n \tag{2.1}$$

ii) İki konveks kümenin kesişimi konvekstir.



Şekil 2.3 İki konveks kümenin kesişimleri

iii) $\lambda \in R$ olmak üzere λC_1 konveks kümedir.

$$\lambda C_1 = \{\lambda x_1 \mid \lambda \in R \text{ ve } x_1 \in C_1\} \subset R^n \tag{2.2}$$

Tanım 2.2

$A \subset R^n$ boştan farklı bir küme olsun. $x_1, x_2 \in A$ ve her λ reel sayısı için $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$ oluyor ise A kümesine afin küme denir.

Afin kümeler konveks kümelerin özel halidir diyebiliriz.

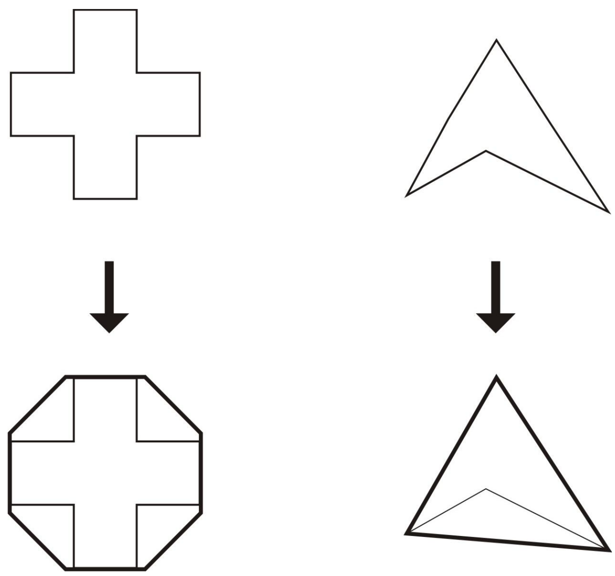
2.2. Konveks Örtü

Tanım 2.3

$C \subset R^n$ kümesinin tüm konveks kombinasyonları topluluğuna C kümesinin konveks örtüsü denir ve convC ile gösterilir.

$$\text{convC} = \{\lambda_1 x_1 + \dots\dots\dots + \lambda_k x_k \mid x_i \in C, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\} \tag{2.3}$$

Diğer bir ifade ile C kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine konveks örtü denir.



Şekil 2.4 Bir kümenin konveks örtüsü.

Teorem 2.1 (Karateodori Teoremi)

$C \subset R^n$ ve $x \in convC$ olmak üzere x noktası C'deki en fazla n + 1 noktanın konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir.

O zaman R^2 de en fazla üç, R^3 de en fazla dört noktanın alınması yeterli olacaktır.

İspat:

Bir $x \in convC$ noktası alalım. (2.3) den dolayı j =1,…….k için $\lambda_j > 0$ ve

$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ olmak üzere, $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ldots\ldots \lambda_k x_k$ şeklinde $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$ vektörlerinin konveks kombinasyonları olarak ifade edilebilir.

$k > n+1$ olsun. $x_2 - x_1, \ldots\ldots, x_k - x_1$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla hepsi birden sıfırdan farklı reel $m_2, m_3, \ldots\ldots, m_k$ için $\sum_{j=2}^{k} m_j (x_j - x_1) = 0$ dır.

$m_1 = -\sum_{j=2}^{k} m_j$ olsun. Dolayısıyla,

$\sum_{j=1}^{k} m_j = 0$ ve $\sum_{j=1}^{k} m_j x_j = 0$ olur.

Herhangi bir α reel sayısı için,

$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + 0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^{k} m_j x_j = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \alpha m_j) x_j$

$\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \{ \lambda_j / m_j : m_j > 0\} = \lambda_i / m_i$ ve $\alpha > 0$ şeklinde tanımlansın.

O zaman, $\lambda_j / m_j \geq \alpha$ ve $\lambda_j - \alpha m_j \geq 0$ olur.

Ayrıca $\lambda_i - \alpha m_i = 0$ olduğundan x, C içinde en fazla k-1 tane noktanın bir konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir. Bu işlem n+1 tane noktanın konveks kombinasyonu olarak gösterilene kadar devam eder.

Teorem 2.2

$C \subset R^n$ ve C boştan farklı konveks küme olmak üzere, $x_1 \in clC$ ve $x_2 \in intC$ ise

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \text{int } C, \qquad 0 < \lambda < 1 \tag{2.4}$$

olur.

Önerme 2.2

C boş kümeden farklı konveks bir küme ise intC ve clC konvekstir.

2.3. Hiperdüzlem ve Koni

Tanım 2.4

$b \in R^n$ sıfırdan farklı bir vektör ve $\beta \in R$ olmak üzere,

$$H = \{x \mid \langle b, x \rangle = \beta\} \tag{2.5}$$

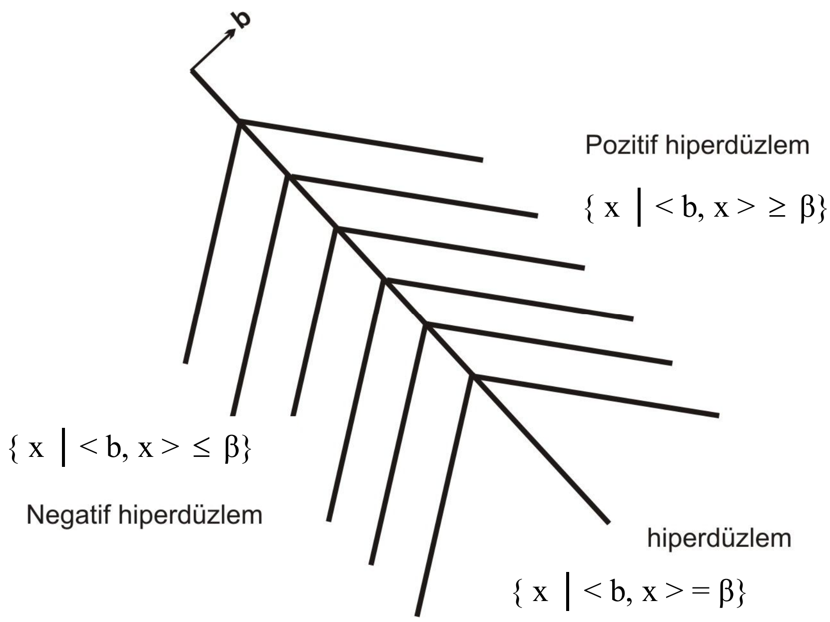
ise H, R^n de bir hiperdüzlemdir.

R^2 de bir hiperdüzlem doğru, R^3 de ise bir düzlem belirtir.

R^n de bir hiperdüzlem uzayı iki kapalı konveks yarı uzaya ayırır. Bunlar,

$$H^+ = \{x \mid \langle b, x \rangle \geq \beta\}$$
$$H^- = \{x \mid \langle b, x \rangle \leq \beta\} \qquad (2.6)$$

şeklindedir.



Şekil 2.5 Hiperdüzlem ve yarı uzaylar

Önerme 2.3

Hiperdüzlem konvekstir.

İspat:

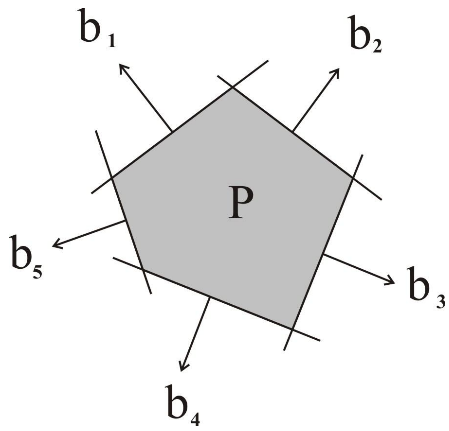
$x_1, x_2 \in H$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in H$ ise önermemiz doğrudur.

$x_1, x_2 \in H$ ise $\langle b, x_1 \rangle = \beta$ ve $\langle b, x_2 \rangle = \beta$ olduğunu hiperdüzlem tanımından biliyoruz. O zaman,

$$\begin{aligned} \langle b, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \rangle &= \lambda \langle b, x_1 \rangle + (1-\lambda) \langle b, x_2 \rangle \\ &= \lambda \beta + (1-\lambda)\beta \\ &= \beta \end{aligned}$$

Tanım 2.5

Sonlu sayıda kapalı konveks yarı uzayların kesişimine polihedral (çok yüzlü) denir.



Şekil 2.6 Kapalı konveks yarı uzayların kesişimi

Önerme 2.4

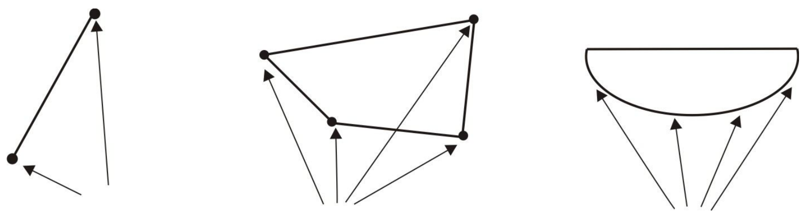
Polihedral konveks bir küme oluşturur.

İspat:

Konveks kümelerin kesişimi konveks olduğundan dolayı polihedral konveks kümedir.

Tanım: 2.6

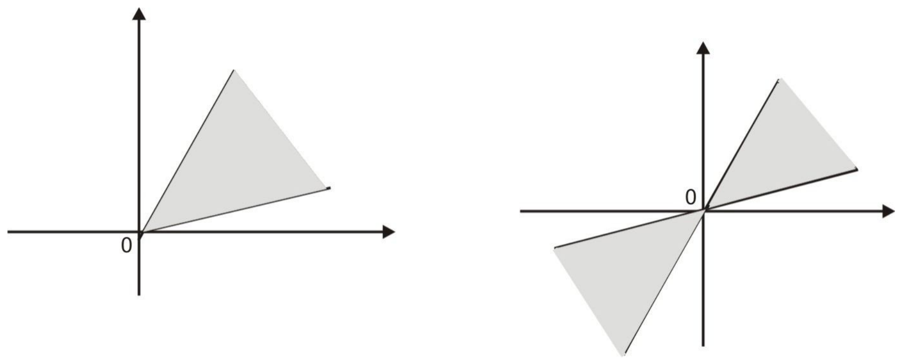
$C \subset R^n$ ve C konveks bir küme olmak üzere, C içinden alınan iki noktanın konveks kombinasyonu olarak yazılamayan noktaya extreme nokta denir.



Şekil 2.7 Ekstreme noktalar.

Tanım 2.7

$K \subset R^n$ boş kümeden farklı ve $x \in K$ olmak üzere, $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$ ise K kümesine koni denir. Koni konveks ise konveks koni olarak adlandırılır.



Konveks koni　　　　Konveks olmayan koni

Şekil 2.8 Konveks ve konveks olmayan koni örnekleri

Tanım 2.8

$K \subset R^n$ olmak üzere,

$$K^* = \{ x \in R^n \mid \langle x,y \rangle \geq 0, \ \forall y \in K \}$$

kümesine, K konisinin dual konisi,

$$K^0 = \{ x \in R^n \mid \langle x,y \rangle \leq 0, \ \forall y \in K \}$$

kümesine ise, K konisinin kutupsal konisi denir.

2. 4. Konveks kümelerde ayırma teoremleri

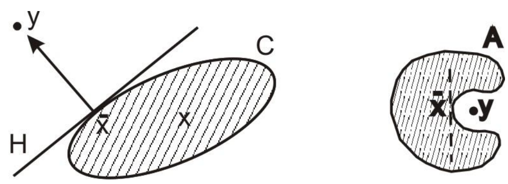
Ayırma teoremleri konveks analizde önemli bir yere sahiptir. Özellikle optimizasyon teorisinde optimallik koşullarının ispat edilmesinde ve dualite teorisinde uygulanmaktadır.

Teorem 2.3

$C \subset E_n$ ve C kapalı konveks küme olsun. C kümesinin dışındaki bir y noktasından, C kümesine en kısa mesafeyi veren nokta vardır ve bu nokta tektir. Bu noktayı $\bar{x}$ ile gösterecek olursak bu noktanın $\bar{x}$ olması için gerekli yeter koşul

$$< x - \bar{x}, y - \bar{x} > \leq 0, \qquad \forall x \in C \tag{2.7}$$

olmasıdır.



Konveks küme Konvek olmayan küme

Şekil 2.9 Kapalı konveks kümeye en yakın uzaklık

Eğer kümemiz kapalı konveks küme değil ise böyle bir nokta tek olmayabilir. Aynı şekilde kümemiz konveks değil ise de böyle bir nokta tek olmayabilir.

Teorem 2.4 (Bir nokta ile konveks kümenin ayrılması)

$C \subset E_n$, C kapalı bir konveks küme ve y, C kümesi dışındaki herhangi bir nokta olsun. $\forall x \in C$ olmak üzere, bir b vektörü ve β skaleri için

$< b,y > > \beta$ ve $< b, x > \leq \beta$ dir.

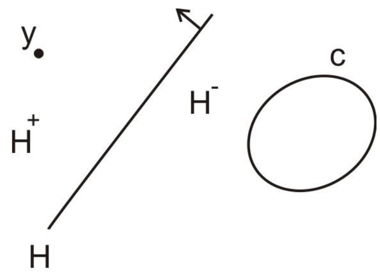
İspat:

Teorem 2.3 den dolayı,

$< x - \bar{x}, y - \bar{x} > \leq 0, \ \forall x \in C$ için olduğunu biliyoruz. Burada,

$b = y - \bar{x}$ ve $\beta = < b, \bar{x} >$ için $< b, x > \leq \beta$ olur.

$$\begin{aligned} < b, y > - \beta &= < b, y > - < b, x > \\ &= < y - \bar{x}, y - \bar{x} > \\ &= \| y - x \|^2 > 0 \text{ ise } < b, y > > \beta \text{ olur.} \end{aligned}$$



Şekil 2.10 Bir nokta ile bir konveks kümenin ayrılması

Tanım 2.9

$A_1, A_2 \subset E_n$, $b \neq 0$ ve $b \in E_n$ de vektör olmak üzere, her $x_1 \in A_1$ ve her $x_2 \in A_2$ için $< x_1,b > \ \leq \ < x_2 ,b >$ oluyor ise A_1 ve A_2 kümelerine ayrılabilir küme denir.

Şimdi göstereceğimiz teorem kesişmeyen iki konveks kümenin ayrılabilir küme olduklarını gösteren klasik teoremdir.

Teorem 2.5

C_1 ve C_2 , E_n de kesişmeyen konveks kümeler olsun. Sıfırdan farklı $b \in E_n$ vektörü için,

$$< x_1, b > \ \leq \ < x_2, b > , \quad \forall x_1 \in C_1 \text{ ve } \quad \forall x_2 \in C_2 \tag{2.8}$$

ise C_1 ve C_2 kümeleri ayrılabilir konveks kümelerdir denir.

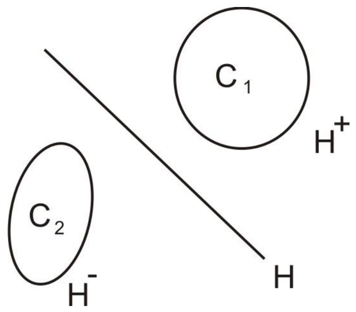
C_1 ve C_2 ayrılabilir kümeler ise uygun bir β sayısı için

$$C_1 \subset H^-$$
$$C_2 \subset H^+$$

olacaktır. Yani,

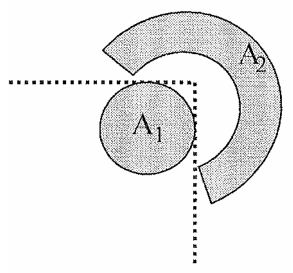
$$H = \{ x \mid < b, x> = \beta \}$$

hiperdüzlemi bu iki kümeyi ayırmaktadır.



Şekil 2.11 İki konveks kümenin hiperdüzlem ile ayrılması

Eğer kümelerimizin ikisi de konveks olmaz ise hiperdüzlem yardımıyla ayırmak mümkün olmayabilir.



Şekil 2.12 Hiperdüzlem ile ayrılamayan kümeler

Teorem 2.6

$C_1, C_2 \subset E_n$ ve C_1, C_2 boş olmayan iki konveks küme olsun. $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ve b sıfırdan farklı E_n'de bir vektör ise C_1 ve C_2'yi ayıran bir hiperdüzlem vardır.

$$\inf \{ < b, x_1 >\} \mid x_1 \in C_1 \} \geq \sup \{ < b, x_2 > \mid x_2 \in C_2 \} \tag{2.9}$$

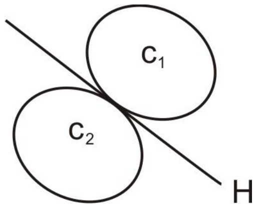
eşitsizliği gerçeklenir.

Önerme 2.5

$C_1, C_2 \subset E_n$ ve C_1, C_2 boş olmayan iki konveks küme olsun.

$C_1 \cap \text{int} C_2 = \emptyset$ ve b sıfırdan farklı E_n de bir vektör ise C_1 ve C_2'yi ayıran bir hiperdüzlem bulunur.

$$\inf \{ < b, x_1 >\} \mid x_1 \in C_1 \} \geq \sup \{ < b, x_2 > \mid x_2 \in C_2 \} \tag{2.10}$$



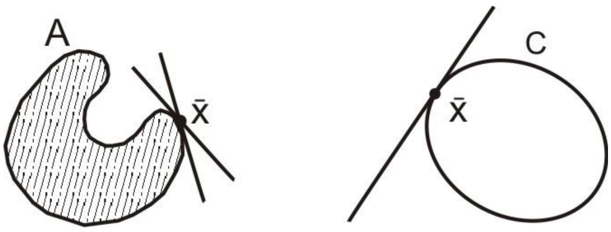
Şekil 2.13 Önerme 1.3 ün geometrik yorumu

Tanım 2.10

$A \subset E_n$, A boş kümeden farklı olsun. $\bar{x} \in \partial A$ ve $x \in A$ olmak üzere Eğer

$$H = \{ x \mid < b, x-\bar{x} > \leq 0 \}$$

şeklinde bir hiperdüzlem var ise buna A kümesinin destek hiperdüzlemi denir.



Konveks olmayan küme Konveks küme

Şekil 2.14 Destek hiperdüzlemi

Teorem 2.7

$A \subset E_n$, A boş kümeden farklı ve $\bar{x} \in \partial A$ olsun. Her $x \in clA$ ve sıfırdan farklı bir b vektörü için $< b, x-\bar{x} > \leq 0$ olacak şekilde $\bar{x}$ noktasında A kümesinin destek hiperdüzlemi bulunur.

Sonuç 2.1

$A \subset E_n$, A boş kümeden farklı ve $\bar{x} \notin intA$ olsun. Sıfırdan farklı bir b vektörü ve $x \in clA$ için $< b, x-\bar{x} > \leq 0$ bulunur.

3. KONVEKS FONKSİYONLAR

Tanım 3.1

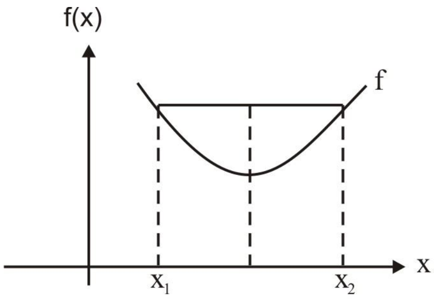
$C \subset E_n$ boş kümeden farklı konveks küme ve $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ olmak üzere, $f: C \rightarrow \overline{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $x_1, x_2 \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad (3.1)$$

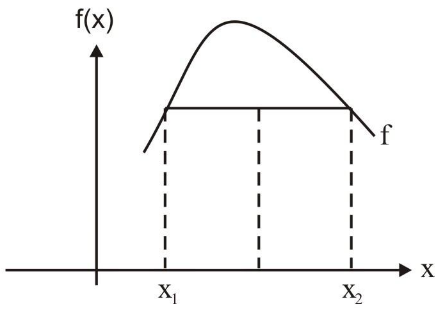
şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna C kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.2.

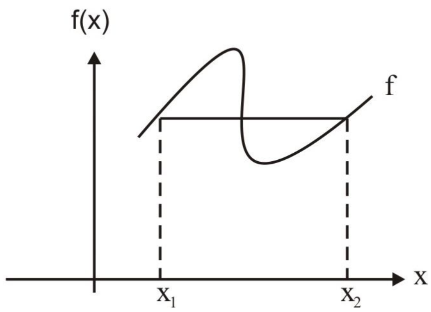
-f fonksiyonu C kümesi üzerinde konveks bir fonksiyon ise f fonksiyonuna C kümesinde konkav fonksiyon denir.



Konveks fonksiyon



Konkav fonksiyon



Ne konveks ne konkav fonksiyon

Şekil 3.1 Konveks ve konkav fonksiyon örnekleri

Teorem 3.1

f konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i)\,, \qquad (\forall\, x_i \in C \text{ ve } \lambda_i \geq 0 \text{ için } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1) \tag{3.2}$$

eşitsizliğini gerçekler.

Önerme 3.1

i) f konveks bir fonksiyon ise $\alpha_i > 0$ için $F(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i . f_i(x)$ konveks fonksiyondur.

ii) f konveks bir fonksiyon ise $F(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ fonksiyonu da konveks bir fonksiyondur.

3.1. Fonksiyonun epigrafiği ve hipografiği

Tanım 3.3

$A \subset E_n$ ve $A \neq \emptyset$ olsun. $f : A \rightarrow \overline{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun epigrafiği

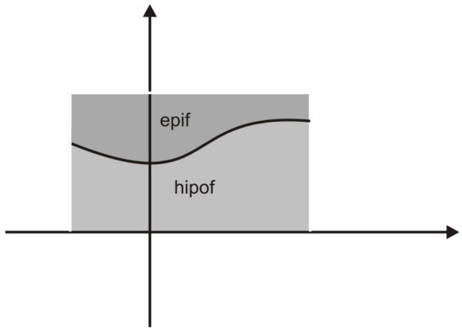
$$\text{epif} = \{(u, a) \in A \times \overline{R} \mid f(u) \leq a\} \tag{3.3}$$

hipografiğide

$$\text{hipof} = \{(u, a) \in A \times \overline{R} \mid f(u) \geq a\} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Yani fonksiyonun grafiğinin üst bölgesine fonksiyonun epigrafiği, alt bölgesine hipografiği denir.



Şekil 3.2 Bir fonksiyonun epigrafiği ve hipografiği

Teorem 3.2

$C \subset E_n$, C boş kümeden farklı bir konveks küme olsun. $f : C \to \overline{R}$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerekli yeter koşul epif in konveks olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$: f konveks ve $(u, a) \in$ epif, $(v, b) \in$ epif olsun.

$f(u) \leq a < +\infty$ ve $f(v) \leq b < +\infty$, $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$f(\lambda u + (1-\lambda) v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$

$\leq \lambda a + (1-\lambda) b$ olduğundan

$\lambda (u, a) + (1-\lambda)(v, b) \in$ epif dir.

$\Leftarrow$: Tersten gerçekleyecek olursak

$(u, a) \in$ epif, $(v, b) \in$ epif olsun. Konveks küme tanımından

$\lambda (u, a) + (1-\lambda)(v, b) \in$ epif ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$f(\lambda u + (1-\lambda) v) \leq \lambda a + (1-\lambda) b$ olur.

$a = f(u)$ ve $b = f(v)$ olduğundan

$f(\lambda u + (1-\lambda) v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$ olur.

Teorem 3.3

Konveks fonksiyonlar tanımlı olduğu bölgede süreklidir.

3.2 Konjuget (Eşlenik) fonksiyonlar

Tanım 3.4

$f : E_n \to \overline{R}$ olsun. f fonksiyonunun konjuget (eşlenik) fonksiyonu, $f^* : E_n \to \overline{R}$ ve her $x^* \in E_n$ olmak üzere,

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E_n} (< x^*, x) - f(x)) \qquad (3.5)$$

şeklin de tanımlanır.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere,

$$<x^*, x> \leq f(x) + f^*(x^*) \qquad (3.6)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe Fenchel'in eşitsizliği denir.

Önerme 3.2

$f : E_n \to \overline{R}$ olsun. f fonksiyonunun eşlenik (konjuget) fonksiyonu $f^* : E_n \to \overline{R}$ konvekstir.

İspat:

$x_1^*, x_2^* \in E_n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun.

$f^*(\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*) \leq \lambda f^*(x_1) + (1-\lambda) f^*(x_2)$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$$f^*(\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*) = \sup_{x \in E_n} \{ <\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*, x> - f(x)\}$$

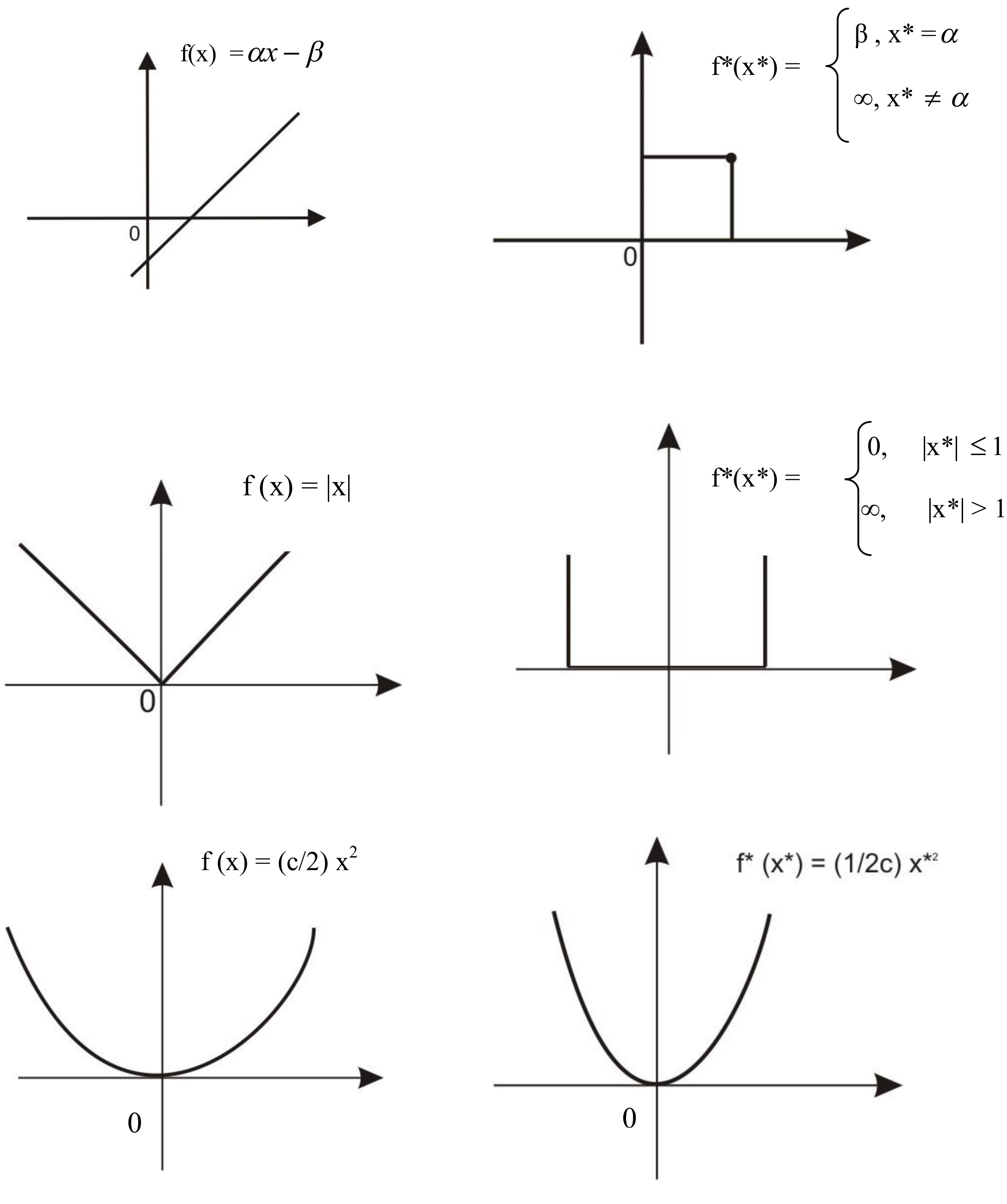
$$= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda < x_1^*, x> + (1-\lambda) < x_2^*, x> - \lambda f(x) + \lambda f(x) - f(x)\}$$

$$= \sup_{x \in E_n} \{ \lambda <x_1^*, x> - \lambda f(x)) + (1-\lambda) < x_2^*, x> - f(x)(1-\lambda)\}$$

$$= \lambda \sup_{x \in E_n} \{ < x_1^*, x> - f(x)\} + (1-\lambda) \sup_{x \in E_n} \{<x_2^*, x> - f(x)\}$$

$$= \lambda f^*(x_1^*) + ((1-\lambda) f^*(x_2^*)$$

olur.



Şekil 3.3 Bazı fonksiyonların konjuget fonksiyonları [6, sy:149]

Tanım 3.5

$f = E_n \rightarrow \overline{R}$ fonksiyonunun konjuget fonksiyonunun konjugeti (ikincil konjugeti), $f^{**} : E_n \rightarrow \overline{R}$ ve her $x \in E_n$ için

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in E_n} (\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)) \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.3

$f = E_n \rightarrow \overline{R}$ ve $f^* : E_n \rightarrow \overline{R}$ f fonksiyonunun konjuget fonksiyonu olmak üzere, her $x \in E_n$ için,

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{ise} \quad f^*(x^*) \geq g^*(x^*) \tag{3.8}$$

olur.

İspat:

Her $x \in E_n$ ve $f(x) \leq g(x)$ ise

$\langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \langle x^*, x \rangle - g(x)$

$\sup_{x \in E_n} (\langle x^*, x \rangle - f(x) \geq \sup_{x \in E_n} \langle x^*, x \rangle - g(x))$ ise

$f^*(x^*) \geq g^*(x^*)$ olur.

Önerme 3.4

f fonksiyonun ikincil konjuget fonksiyonu konvekstir.

Teorem 3.4

$f = E_n \rightarrow \overline{R}$, $f^{**} : E_n \rightarrow \overline{R}$ f in ikincil konjuget fonksiyonu olsun.

$$f^{**}(x) \leq f(x) \quad , \forall x \in E_n \tag{3.9}$$

İspat:

Tanım 3.4'den $\forall x, x^* \in E_n$ için

$f(x) > \langle x^*, x \rangle - f^*(x^*))$

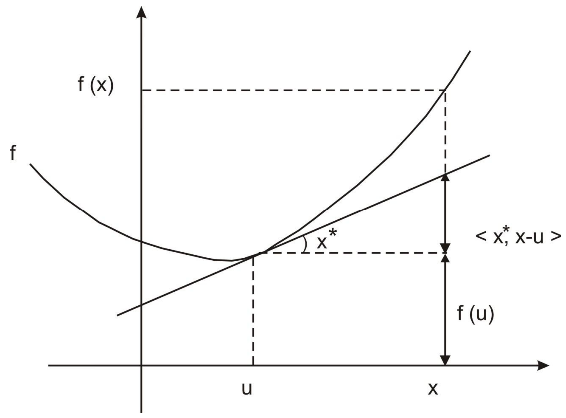
$f(x) \geq \sup_{x^* \in E_n} (x^*, x \rangle - f^*(x^*))$

$f(x) \geq f^{**}(x)$

3.3. Subradyant ve subdiferansiyel

Tanım 3.6

$f : E_n \rightarrow \overline{R}$ ve f fonksiyonu sınırlı olsun. Her $x \in E_n$ için $<x^*, x-u> + f(u) \leq f(x)$ olacak şekilde $x^* \in E_n$ var ise x^*, f in u noktasındakidaki subgradyantıdır denir. f fonksiyonunun u noktasındaki subgradyantların kümesine f in subdiferansiyeli denir ve $\partial f(u)$ şeklinde gösterilir.



Şekil 3.4 Konveks fonksiyon için subgradyantın geometrik yorumu

Teorem 3.5

$f : E_n \rightarrow \overline{R}$ bir fonksiyon $f^{**}: E_n \rightarrow \overline{R}$ fonksiyonu f fonksiyonunun ikincil konjuget fonksiyonu olsun. Her $x \in E_n$ ve $\partial f(u) \neq \emptyset$ ise

$$f(u) = f^{**}(u) \tag{3.10}$$

İspat:

$\partial f(u) \neq \emptyset$ ise en az bir $x^* \in \partial f(u)$ vardır. Dolayısıyla $\forall\ x \in E_n$ için

$f(x) \geq <x^*, x-u> + f(u)$

$f(x) \geq <x^*, x> - <x^*,u> + f(u)$

$<x^*,u> - f(u) \geq <x^*, x> - f(x)$

$<x^*,u> - f(u) \geq f^*(x^*)$

$f(u) \leq <x^*, u> - f^*(x^*) \leq f^{**}(u)$, (3.9) dan

$f(u) \leq f^{**}(u) \leq f(u) \quad \Rightarrow f(u) = f^{**}(u)$ ‘dur.

Teorem 3.6

$f : E_n \to \overline{R}$ bir fonksiyon, $f^*: E_n \to \overline{R}$ fonksiyonu f fonksiyonunun konjuget fonksiyonu olsun. $x^* \in \partial f(u)$ olması için gerekli yeter koşul

$$< x^*, u> = f(u) + f^*(x^*) \tag{3.11}$$

olmasıdır.

3.4 Gateaux diferansiyel

Tanım 3.7

$f = E_n \to \overline{R}$, fonksiyonu tanımlansın. $\lambda \to 0_+$ için

$$\frac{f(u+\lambda v) - f(u)}{\lambda} \tag{3.12}$$

limitine f fonksiyonunun u noktasında v vektörü yönünde yön türevi denir. $f^I(u,v)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.8

$f = E_n \to \overline{R}$ $v, u^* \in E_n$ için,

$$f^I(u,v) = < v, u^*> \tag{3.13}$$

ise f fonksiyonuna u noktasında Gateaux diferansiyellenebilir denir. Buradaki u* da f nin Gateaux diferansiyeli denir ve $f^I(u)$ ile gösterilir.

Önerme 3.5

$f = E_n \to \overline{R}$, f fonksiyonu $u \in E_n$ noktasında Gateaux diferansiyellenebilir ise u noktasında subdiferansiyellenebilirdir.

$$\partial f(u) = f^I(u) \tag{3.14}$$

Aynı şekilde f fonksiyonu $u \in E_n$ noktasında sürekli sınırlı ve sadece bir subgradyanta sahip ise f fonksiyonuna u noktasında Gateaux diferansiyellenebilir denir.

4. KONEKS OPTİMİZASYONDA DUALİTE KAVRAMI

Bu bölümde, dual problem olan minimizasyon problemi ve maksimizasyon probleminin birbiri ile olan ilişkileri perturbasyon fonksiyonu yardımıyla incelenip, özellikle supremum ve infimumlarının karşılaştırılması ve tekil çözümlerin varlığı ele alınacaktır.

4.1. Primal ve dual problem

Tanım 4.1

f: $E_n \rightarrow \overline{R}$ olmak üzere, minimizasyon problemi

$$(P) \quad \inf_{u \in E_n} f(u) \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada problem P, primal problem olarak isimlendirilecek ayrıca,

$$f(u) = \inf P \qquad (4.2)$$

eşitliği sağlayan her $u \in E_n$ problemin çözümleri olacaktır.

Tanım 4.2

$u_o \in E_n$ için $f(u_o) < +\infty$ ise problem P'ye triviyal olmayan denir.

Tanım 4.3

$\Phi : E_n x E_n \rightarrow \overline{R}$ ve $\Phi(u,0) = f(u)$ olsun. Her u, p $\in E_n$ için minimizasyon problemi

$$(P_P) \quad \inf_{u \in E_n} \Phi(u, p) \qquad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada Φ fonksiyonuna perturbasyon fonksiyonu, P_P ye de verilen perturbasyona göre P'nin perturbasyon problemi denir.

$P = 0$ olduğunda P_0 probleminin P problemi ile aynı olduğu görülmektedir.

Verilen problem P ve perturbasyon problemleri P_P olmak üzere, dual problem şöyle tanımlanır.

Tanım 4.4

$\Phi^* : E_n x E_n \to \overline{R}$ fonksiyonu, perturbasyon fonksiyonu Φ nin konjuget fonksiyonu olsun.

$$(P^*) \qquad \sup_{p \in E_n} \{-\Phi^*(0, p^*)\} \tag{4.4}$$

problemine verilen perturbasyona göre P'nin dual problemi denir.

$$-\Phi^*(0, p^*) = \sup P^* \tag{4.5}$$

eşitliğini sağlayan her $p^* \in E_n$, P^* probleminin çözümleridir.

Şimdi P ve P* arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Önerme 4.1

$$-\infty \leq \sup P^* \leq \inf P \leq +\infty \tag{4. 6}$$

İspat:

$p^* \in E_n$ olsun. Tanım 3.4 gereği

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{u,p \in E_n} [< p^*, p > -\Phi(u, p)]$$

$\Phi^*(0, p^*) \geq <p^*, 0> - \Phi(u,0)$, $\forall p^*, u \in E_n$

$-\Phi^*(0,p^*) \leq -<p^*,0> + \Phi(u,0) \leq \Phi(u,0)$ ise

$\sup P^* \leq \inf P$ dir.

Önerme 4.2

i) Problem P triviyal olmayan ise

$$\sup P^* \leq \inf P < +\infty \tag{4. 7}$$

ii) Problem P* triviyal olmayan ise

$$-\infty < \sup P^* \leq \inf P \tag{4.8}$$

iii) Problem P ve P* triviyal olmayan ise

$$-\infty < \sup P^* \leq \inf P < +\infty \tag{4. 9}$$

4.2. Normal ve stabil problemler

Tanım 4.5

$\Phi : E_n \times E_n \to \overline{R}$ ve her $p \in E_n$ için $h : E_n \to \overline{R}$ fonksiyonu

$$h(p) = \inf P_P = \inf_{u \in E_n} \Phi(u,p) \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1

$h : E_n \to \overline{R}$ fonksiyonu konvekstir.

İspat:

$p, q \in E_n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$h(\lambda p + (1-\lambda)q) \leq \lambda h(p) + (1-\lambda)h(q) \tag{4.11}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir.

i) $h(p) = +\infty$ ise ispat aşikardır.

ii) $h(p) < +\infty$ ve $h(q) < +\infty$ için, $\forall a > h(p)$, $\forall b > h(q)$ ve

en az bir $u,v \in E_n$ için

$h(p) \leq \Phi(u, p) \leq a$

$h(q) \leq \Phi(v, q) \leq b$ olur. (4.10) dan

$$h(\lambda p + (1-\lambda)\, q) = \inf_{w \in E_n} \Phi(w,\ \lambda p + (1-\lambda) q)$$

$$\leq \Phi(\lambda u + (1-\lambda)\, v,\ \lambda p + (1-\lambda) q)$$

$$\leq \lambda\ \Phi(u,p) + ((1-\lambda)\,\Phi\ (v,\ q)$$

$$\leq \lambda a + (1-\lambda) b \xrightarrow[\substack{a \to h(p) \\ b \to h(q)}]{} \lambda h(p) + (1-\lambda) h\,(q)$$

Teorem 4.2

h*, h fonksiyonun konjuget fonksiyonu olmak üzere,

$\forall p^* \in E_n$ için

$$h^*(p^*) = \Phi^*(0,p^*) \text{ dır.} \qquad (4.12)$$

İspat:

Konjuget fonksiyonun tanımından,

$$h^*(p^*) = \sup_{P \in E_n} \left[< p^*, p > - h(p) \right]$$

$$= \sup_{P \in E_n} \left[< p^*, p > - \inf_{W \in E_n} \Phi(u, p) \right]$$

$$= \sup_{P \in E_n} \ \sup_{u \in E_n} [<p^*,p> - \Phi(u,p)]$$

$$= \Phi^*(u,\ p^*)$$

Teorem 4.3

$$\sup P^* = \sup_{P^* \in E_n} \left[-h^*(p^*) \right] = h^{**}(0) \qquad (4.13)$$

olur.

sup P* $\leq$ inf P olduğundan bu eşitlik h** (0) $\leq$ h(0) olmasına denktir.

Tanım 4.6

h(0) sınırlı ve h, “0” noktasında alt yarı sürekli ise problem P ye normal denir.

Önerme 4.3

Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) P normaldir.

ii) P* normaldir.

iii) infP = supP* ve bu sayı sınırlıdır.

Tanım 4.7

h(0) sınırlı h "0" noktasında subdiferansiyellenebilir ise problem P ye stabil denir.

Önerme 4.4

Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) P stabildir.

ii) P normaldir ve P* en az bir çözüme sahiptir.

Teorem 4.4

Problem P* nin çözüm kümesi $\partial h^{**}(0)$'a özdeştir.

İspat

Problem P* ın çözümleri $p^* \in E_n$ olsun.

$-\Phi(0,p^*) \geq -\Phi(0,q^*), \quad \forall q^* \in E_n$

$-h^*(p^*) \geq -h^*(q^*)$

$$-h^*(p^*) = \sup_{q^* \in E_n} \left[< 0, q^* > - h^*(q^*) \right]$$

$-h^*(p^*) = h^{**}(0)$ olduğundan buda $p^* \in \partial h^{**}(0)$ olmasına eş değerdir.

Sonuç 4.1.

P stabil olduğunda Teorem 4.4. den P* nin çözümleri (verilen perturbasyona göre) "0" noktasında h'ın subgradyantlarıdır. Belirli durumlarda inf P'nin türevleridir.

Sonuç 4.2

Aşağıda verilen önermeler birbirine denktir.

i) P ve P* normaldir ve bazı çözümlere sahiptir

ii) P ve P* stabilidir.

iii) P stabil ve bazı çözümlere sahiptir.

Önerme 4.5 (Stabil kriteri)

Aşağıdaki şartlar sağlanır ise problem P stabildir.

i) Φ fonksiyonu konvekstir.

ii) $\inf P$ sınırlıdır.

iii) $\exists u \in E_n$ için $p \rightarrow \Phi(u,p)$ sınırlı ve ‘0’ noktasında süreklidir.

Önerme 4.6

P ve P* çözümlere sahip ve $\inf P = \sup P^*$ ise çözümlerin sayısı sınırlıdır.

p problem P nin, p* problem P* ın bütün çözümleri olmak üzere bu çözümler için

$$\Phi(p,0) + \Phi^*(0,p^*) = 0$$

veya

$$(0,p^*) \in \partial\Phi(p,0)$$

olur.

5. İMALATHANE İÇİN BİR UYGULAMA

Bir işyeri sahibi ekonomik anlamda karar verirken firmanın karını, iş gücünü, arz ve talebi, rakip firmanın piyasadaki tutumunu ve daha birçok farklı durumları beraber düşünmek zorundadır. Dolayısıyla çok farklı durumlardan en doğru kararı vermek reel anlamda sanıldığı kadar kolay değildir.
Bu bölümde tamamen ekonomik açıklamalarla kuşatılan maksimizasyon ve minimizasyon ilişkileri ele alacağız.

Tanım 5.1

Her $x \in R^m$ için, x vektörünün elemanları

$$x_i^+ = \max \{x_i , 0\}$$

$$x_i^- = -\min \{x_i , 0\}$$

$$x = x^+ - x^- \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır.

İmalathanenin karakterizasyonu

Üretim kümesi, $Y \subset R^m$
Malların standart (düzgün) üretimi, y^+
Malların standart dışı (defolu) üretimi, y^-
İmalathanenin üretime son vermesi, $0 \in Y$
Herhangi bir malın imha edilmesi, $R_-^m \subset Y$
Malın piyasadaki değeri, n_i*
Malın maksimum miktarı, c_i
Başlangıç kaynakları, $c = (c_1,\ldots..c_m)$
olarak ifade edilecek.

Varsayım

Y, R_{-}^{m} 'yi içeren kapalı konveks küme olarak kabul edilsin.

Kar

$y \in Y$ için maliyeti $\sum_{i=1}^{m} n^* y_i^-$, malın geriye dönüşümü $\sum_{i=1}^{m} n^* y_i^+$ olmak üzere, kar

$$< n^*, y >= \sum_{i=1}^{m} n^* y_i^+ - \sum_{i=1}^{m} n^* y_i^- \qquad (5.2)$$

şeklinde hesaplanır.

Amaç

Şirket ürün $\bar{y}$ nin başlangıç kaynakları aşmadan karını maksimize etmeye çalışır. Optimizasyon problemimiz

$$(P) \quad \sup_{y \in Y} <n^*,y> , \qquad y_i \geq - c_i \quad (i =1,2.....m) \qquad (5.3)$$

şeklindedir. Problemin çözümü her $p = (p_1,........p_m) \in R^m$ için bir pertusbasyon problemiyle ilişkilendirilir ise

$$(P_p) \quad \sup_{y \in Y} < n^*, y > , \qquad y_i \geq - c_i\text{-}p_i \quad (i =1,2,.....m) \qquad (5.4)$$

ve konkav fonksiyon olan

$$h (p) = \sup (P_p) \qquad (5.5)$$

olur.

Yani başlangıç kaynakları “p” ile genişletilirse şirketin yeni kârı h (p) olur.

$c_i > 0$ ve her i için bütün malzeme miktarı başlangıçta harcanabilir ise problem (P) stabildir.

Dual Problem

$$(P^*) \qquad \inf_{p^* \geq 0} \sup_{y \in Y} [< n^* + p, y > + < p^*, c >] \tag{5.6}$$

olarak yazılabilir.

Problem (P) stabildir ve Önerme 4.4 den problem (P*) çözümlere sahiptir. Bu çözümler, Solp* olmak üzere, -h' ın "0" noktasındaki subgradyantlarıdır.

$$\text{Solp}^* \in \partial(-h(0)) \tag{5.7}$$

Problem (P)'nin optimal çözümü, ayrıca h "0" noktasında Gateux diferansiyellenebilir olarak varsayılınca ekonomik yorum daha kolay genişletilebilir.

Eşitlik (5.7),

$$p_i^* = \frac{\partial(-h)}{\partial p_i}(0), \qquad i = 1,2\ldots..n$$

(5.8)

haline gelir.

Bir başka ifadeyle $-p_i^*$, i'ninci sınırlamanın marjinal fiyatı olarak, bu fiyat c_i den c_i+p_i ye değişseydi kâr ilk düzeyde $p_i^*p_i$ ile artabilirdi. Aynı yoldan (i) malzemesinin küçük eklenmiş miktarı p_i, n_i^* fiyatıyla piyasaya sürülürse, kazanç,

$n_i^*\, p_i$ ile artacaktır.

Şirketin üretimi $\bar{y}^+$ ve tüketimi $\bar{y}^-$ iken bu süreç fiyatı n* den sağlanan en iyi avantajlı kaynaklar olan "c" de kullanılır.

Fiyatı $n_i^* + \lambda_i^*$ den (i) ninci ek malzeme teklif edilsin. Bu ek malzemeyi almak ticari anlamda mantıklı mıdır?

Bu durum da şirket ek masraf olan $\lambda_i^* p_i$ yi düşünmek zorundadır. Maksimum kazanç $h(p_i)$ - $\lambda_i^* p_i$ olacak ve bunu da h(0) ile karşılaştırmak durumundadır.

Sonuç

(5.7) ve h'ın konkav olması nedeniyle

$$\exists\, p_i > 0 : h(p_i) - \lambda_i^* p_i > h(0) \Leftrightarrow \lambda_i^* < p_i^* \tag{5.9}$$

Şirket,

$\lambda_i^* < p_i^*$ durumunda ek malzemeyi satın alacaktır. Bu yüzden şirketin (i)'ninci malzemeyi satın almaya devam etmesi için gerekli eşik değer altı, $n_i^* + p_i^*$ olarak temsil edilir.

Buradan şu sonuçları çıkarabiliriz.

$\bar{y}_i > c_i$ ise fiyatı n* olan kullanılmış miktarda (i) malzemesi vardır demektir. Bu yüzden n* aracı fiyattan ($n_i^* + p_i^*$) den büyük veya eşit olmak zorundadır. Sonuç olarak $p_i^* = 0$ dır.

$p_i^* > 0$ ise, market fiyatı aracı fiyattan ($n_i^* + p_i^*$) düşük olacaktır. Şirkette fiyatı n_i^* olan (i) ninci malzemeden ek miktar almak isteyecektir. Eğer bunu yapmıyorsa bu demektir ki, y_i optimal yani cari fiyattan arzın talebe cevap vermemesi durumu vardır ki ozaman $y_i = c_i$ dir. [7, sy: 223-226]

6. KONVEKS OLMAYAN PROBLEMLERİN DUALİTESİ

Bu bölümde genişletilmiş Lagrangian fonksiyonunu tanımlayarak bu tür fonksiyonlar yardımıyla güçlü dualite sonuçları için konveks olmayan sınırlandırılmış problemleri ele alacağız.

6.1. Temel Kavramlar

Tanım 6.1

$S \subset X$, S boş kümeden farklı ve Y reel normlu uzay olsun. f_o, S üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon ve f: $S \rightarrow Y$ şeklinde tanımlı olmak üzere, primal matematiksel programlama problemimiz,

$$(P) \quad \inf_{x \in S} P = \inf_{x \in S} f_o(x), \quad f(x) \leq 0 \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlansın. P nin olanaklı kümesi,

$$D = \{x \mid x \in S, \ f(x) \leq 0\} \tag{6.2}$$

olmak üzere, f(x) = inf P eşitliğini sağlayan $x \in D$, P de çözüm olarak adlandırılır.

Tanım 6.2

K kapalı konveks koni olmak üzere, K'nın dual konisi

$$K^* = \left\{ y^* \in Y \;\middle|\; < y, y^* > \geq 0, \ \forall y \in K \right\} \tag{6,3}$$

şeklindedir.

Tanım 6.3

Y reel normlu uzayın duali Y* olmak üzere, B* birim yuvarı

$$B^* = \left\{ e^* \in Y^* \;\middle|\; \| e^* \|_* \leq 1 \right\} \tag{6.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 6.4

$\tau : Y \times Y^* \times R_+ \rightarrow R$, τ reel değerli fonksiyonu

$$\tau\,(y, y^*, c) = \sup \left\{ <y, ce^*> \;\middle|\; e^* \in B^* \quad \text{ve } ce^* - y^* \in K^* \right\} \qquad (6.5)$$

şeklinde tanımlanır.

6.2. Genişletilmiş Lagrangian Fonksiyonu

Tanım 6.5

$V \subset Y^* \times R_+$ olmak üzere, V kümesi

$$V = \left\{ (y^*, c) \in Y^* \times R_+ \;\middle|\; \exists\, e^* \in B^* \quad \text{için} \quad ce^* - y^* \in K^* \right\} \qquad (6.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 6.6

$x \in S$ ve $(y^*,c) \in V$ olmak üzere, problem P ile ilişkili genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu,

$$L\,(x, y^*, c) = f_o\,(x) - < f\,(x), y^* > + \tau\,(f(x), y^*, c) \qquad (6.7)$$

şeklindedir.

Tanım 6.7

$H = Y^* \times R_+ \rightarrow R$ dual fonksiyonu,

$$H(y^*, c) = \inf_{x \in S} L(x, y^*, c) \qquad (6.8)$$

olarak tanımlanır. O zaman, P nin dual problemi olan matematiksel programlama problemi

$$(P^*) \quad \sup P^* = \sup_{(y^*,c) \in V} H\,(y^*, c) \qquad (6.9)$$

haline dönüşür. Buna göre,

$$H\,(y^*, c) = \sup P^*$$

eşitliğini sağlayan $(y^*, c) \in V$ ye P^* de bir çözüm denir.

6.3. Zayıf Subdiferansiyel

Tanım 6.8

$h: Y \rightarrow (\infty, +\infty]$, $y_o \in Y$ ve $h(y_o)$ sınırlı olsun. Her $y \in Y$ için

$$-c\| y-y_o \| + < y-y_o, y^* > \leq h(y) - h(y_o) \qquad (6,10)$$

eşitsizliği sağlanır ise $(y^*, c) \in Y^* \times R_+$ çiftine h ın zayıf subgradyantı denir.

y_o noktasındaki h'ın bütün zayıf subradyantlarının kümesine h'ın y_o noktasındaki zayıf subdiferansiyeli denir.

$$\partial^w h(y_o) = \left\{ (y^*, c) \in Y^* \times R_+ \,\middle|\, -c\| y-y_o \| + < y-y_o, y^* > \leq h(y) - h(y_o), \forall y \in Y \right\} \qquad (6.11)$$

Tanım 6.9

$\partial^w h(y_o)$ boş kümeden farklı ise h, y_o noktasında zayıf diferansiyellenebilir denir.

6.4. Dualite Teoremleri ve Stabilite

Tanım 6.10

Primal matematiksel programlama problemimiz $f(x) \leq 0$ sınırlamasına göre

$\inf P = \inf\limits_{x \in S} f_o(x)$ olarak tanımlanmıştı.

(6.2) ile tanımlanan olanaklı küme boş ($\inf P = \infty$), $\exists x \in X$ ve $\exists y \in Y$ için

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} f_o(x) & , x \in S \text{ ve } f(x) \leq y \\ +\infty & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (6.12)$$

olmak üzere, P ile bağdaşık perturbasyon fonksiyonu

$$h(y) = \inf_{x \in S} \Phi(x,y) \qquad (6.13)$$

olarak tanımlanır.

Böylelikle,

$$\inf\left\{ \Phi(x,y) - \langle y,y^*\rangle + c\,\|y\| \;\middle|\; y\in Y \right\} =$$

$$= \begin{cases} L(x, y^*, c) & ,x\in S \quad \text{ve} \quad (y^*,c) \in V \\ -\infty & ,x\in S \quad \text{ve} \quad (y^*,c) \notin V \\ +\infty & ,x\notin S \end{cases} \tag{6.14}$$

şeklinde hesaplanır.

Bu tanımdan faydalanarak, P'nin dual problemi

$$(P^*) \qquad \sup P^* = \sup_{(y^*,c)\in V} \; \inf_{x\in S} L(x, y^*, c) \tag{6.15}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 6.1

(6.7) de tanımlanan τ fonksiyonu için

$$\sup\{\tau(y,y^*,c)-\langle y,y^*\rangle\}= \begin{cases} 0, & y\in -K \\ +\infty, & y\notin -K \end{cases} \tag{6.16}$$

olur.

Teorem 6.2

(6.7) de tanımlanan genişetilmiş Lagrangian fonksiyonu için

$$\sup L(x, y^*, c) = \begin{cases} f_o, & f(x)\leq 0 \\ +\infty, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{6.17}$$

olur.

Sonuç 6.1

$$(P) \qquad \inf P = \inf_{x \in S} f_o(x) = \inf_{x \in S} \sup_{(y^*,c) \in V} L(x,y^*,c) \qquad (6.18)$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem 6.3 (Zayıf Dualite Teoremi)

$$\sup P^* \leq \inf P \qquad (6.19)$$

İspat:

Herhangi bir $L(x,y^*,c)$ fonksiyonu için

$$\inf_{x \in S} \sup_{(y^*,c) \in V} L(x,y^*,c) \geq \sup_{(y^*,c) \in V} \inf_{x \in S} L(x,y^*,c)$$

Bu da (6.15) ve (6.18) de tanımlarından $\inf P \geq \sup P^*$ dır.

Tanım 6.11

P ve P* optimal değerlerin $\inf P \geq \sup P^*$ eşitsizliğini sağladığını bir önceki teoremde gösterdik. Bu eşitsizlikteki farklılığa dualite aralığı denir.

Teorem 6.4

$h : Y \to (-\infty, +\infty]$ ve h (6.13) de tanımlanan perturbasyon fonksiyonu olsun. Eğer h(0) sonlu ve $\partial^w h(0) \neq \emptyset$ ise $\inf P = \sup P^*$ olur. Buda sonlu bir sayıdır. $0 \in Y$ noktasında h'ın herhangi bir zayıf subgradyantı (P*) in çözümüdür.

Aynı şekilde tersten, $\inf P = \sup P^*$ ise h (0) sonludur ve (P*) nin herhangi bir çözümü $0 \in Y$ noktasında h'ın zayıf subgradyantıdır.

İspat:

h (0) sınırlı ve h'ın tanımından,

$$h(0) = \inf_{X \in S} \Phi(x,0) = \inf_{X \in S} f_o(x) = \inf P$$

olduğundan inf P'de sınırlıdır. $(u^*, d) \in \partial^w h(0)$ olduğunu varsayarsak

$$h(0) \leq h(y) + d \, \| y \| - \langle y, u^* \rangle , \ \forall y \in Y$$

olur. Buradan,

$$\inf P \le \inf_{x \in S} \Phi(x,y) + d \| y \| - < y, u^*>, \ \forall y \in Y$$

olur. Buradan,

$$\inf P \le \inf_{y \in S} \left(\inf_{x \in S} \Phi(x,y) + d\|y\| - <y,u^*> \right) =$$

$$= \inf_{y \in Y} \inf_{x \in S} (\Phi(x,y) + d\|y\| - <y,u^*>)$$

$$= \inf_{x \in S} \inf_{y \in Y} (\Phi(x,y) + d\|y\| - <y,u^*>)$$

$x \in S$, $\inf P$'nin sınırlılığı ve (6.14) den (u^*, d) çifti V nin elemanıdır. Bu yüzden

$$= \inf P \le \inf_{x \in S} L(x,u^*,d) = H(u^*,d)$$

olarak yazılır. Sonuç olarak,

$$\inf P \le H(u^*,d) \le \sup_{(y^*,c) \in V} H(y^*, c) = \sup P^*$$

eşitsizliği, zayıf dualite teoreminden $\inf P \ge \sup P^*$ olduğundan sadece eşitlik olduğunda doğrudur. Yani,

$$\inf P = H(u^*,d) = \sup P^*$$

bu eşitlik (u^*,d) nin (P^*) nin çözümü olduğunu gösterir.

Bu durumda,

$$h(0) = \inf P = \sup P^* = \inf_{x \in S} L(x,u^*,d) =$$

$$= \inf_{x \in S} \inf_{y \in Y} (\Phi(x, y) + d\|y\| - <y,u^*>)$$

$$= \inf_{y \in Y} (h(y) + d\|y\| - <y,u^*>)$$

oduğundan dolayı,

$$h(0) \le h(y) + d\|y\| - <y,u^*>), \ \forall y \in Y$$

zayıf subgradyant tanımından $(u^*, d) \in \partial^w h(0)$ elde ederiz.

Sonuç 6.2

Perturbasyon fonksiyonu h $0 \in Y$ noktasında subdiferansiyellenebilir ve en az bir $y^* \in Y^*$ için $h(y) - h(0) \geq \langle y,y^* \rangle$ eşitsizliğini sağlıyor ise (y^*, c) çifti $\forall c \geq 0$ için $0 \in Y$ noktasında h'ın subdiferansiyeline ait olduğunu gösterir.

Bu durumda, zayıf subdiferansiyel içindeki bütün çiftler göz ardı edilerek sadece $(y^*, 0) \in \partial^w h(0)$ çiftleriyle uğraşılması mümkün kılınmış olur. Bu çiftler için, $\tau(x,y^*,c)=0$ dır. Böylelikle Genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu, sıradan Lagrangian fonksiyonu haline gelir.

$$L_o(x,y^*) = f_o(x) - \langle f(x), y^* \rangle \tag{6.20}$$

6.5. Sınırlandırılmış bir problem örneği [2]

$$f(x,u) = x+u-3 \leq 0, \quad (x,u) \in S$$
$$S = \{(0,0), (0,4), (4,4), (4,0), (1,2), (2,1)\}$$

sınırlamasına göre,

$$(P_1) \qquad f_o(x,u) = -2x+u$$

minimize edilmesi problemini inceleyelim.

Objektif değeri -3 olan, primal problemde optimal çözümün $(\bar{x}, \bar{u}) = (2,1)$ olduğunu gerçeklemek kolaydır.

P_1 ile alakalı sıradan Lagrangian fonksiyonu,

$L_0((x,u), v) = -2x+u - v(x+u-3), \quad v \leq 0$ ve $(x,u) \in S$ olur.

Bu durumda dual objektif fonksiyon $H_0(v) = \min\limits_{(x,u) \in S} L_0((x,u), v) \in S$

$$H_0(v) = \begin{cases} 3v, & v \leq -2 \\ -8-v, & -2 \leq v \leq 1 \\ -4-5v, & v \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu tarafından belirlenir.

$$(P_1^*) \qquad \max_{v \leq 0} H_0(v)$$

olmak üzere dual problem (P_1^*) 'de optimal çözümün $\bar{v} = -2$ ve objektif değerinin -6 ya eşit olduğu kolayca hesaplanır.

Şimdi genişletilmiş Lagrangian fonksiyonu kullanarak dual problemi formülize edelim.

$(x,c) \in S$ ve $(v,c) \in V$ için,

$L((x,u), v,c) = -2x+u - v(x+u-3) + \tau(f(x,u), v,c)$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$\tau : RxRxR_+ \to R$ fonksiyonu

$$\tau(y, v, c) = \sup \{ <y, ce> \mid -1 \leq e \leq 1,\ ce-v \geq 0 \}$$

şelinde ayrıca $V \subset RxR_+$ olmak üzere,

$$V = \{(v,c) \in RxR_+ \mid v \leq c\} \text{ olarak tanımlanır.}$$

$\tau(f(x,u), v,c) = \sup \{ce(x+u-3) \mid -1 \leq e \leq 1 \text{ ve } ce-v \geq 0\} =$

$$= \begin{cases} c(x+u-3) & , \quad x+u \geq 3 \\ -c(x+u-3) & , \quad x+u \leq 3 \text{ ve } v+c \leq 0 \\ v(x+u-3) & , \quad x+u \leq 3 \text{ ve } v+c > 0 \end{cases}$$

Her $(v,c) \in V$ için olarak hesaplanır. Sonuç olarak

$$L(x,u), v,c) = \begin{cases} -2x+u+(c-v)(x+u-3) & , \quad x+u \geq 3 \\ -2x+u-(c-v)(x+u-3), & , \quad x+u \leq 3 \text{ ve } v+c \leq 0 \\ -2x+u & , \quad x+u \leq 3 \text{ ve } v+c > 0 \end{cases}$$

tanım gereği, $H(v,c) = \min\limits_{(x,u) \in S} L((x,u), v,c)$ dir.

S sonlu nokta içerdiğinden, $H(v,c) = \min_{1 \le i \le 6} L_i(v,c)$ olarak hesaplayabiliriz.

$$L_1(v,c)=L((0,0),v,c) = \begin{cases} 3(v+c) & , \quad v+c \le 0 \\ 0 & , \quad v+c>0 \end{cases}$$

$L_2\,(v,c) = L\,((1,2), v,c) = 0$

$L_3\,(v,c) = L\,((2,1), v,c) = -3$

$L_4\,(v,c) = L\,((0,4), v,c) = c - v -4$

$L_5\,(v,c) = L\,((4,0), v,c) = c - v -8$

$L_6\,(v,c) = L\,((4,4), v,c) = 5\,(c-v) -4$

Buradan,

$$H(v,c)= \begin{cases} -3 & , c+v \ge -1 \quad \text{ve} \quad c-v \ge 5 \\ 3(c+v) & , c+2v<-4 \quad \text{ve} \quad c-v< 5 \\ c-v-8 & , c+2v \ge -4 \quad \text{ve} \quad c+v<-1 \end{cases}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak dual problem

(P_1^*) $\quad \sup P_1^* = \sup_{(v,c) \in V} H(v,c)$

için, $\sup P_1^* = -3 = \inf P_1$ olur.

(P_1^*) de çözüm kümesini Sol P_1^* olarak tanımlarsak

$$\text{Sol } P_1^* = \{(v,c) \in R\text{x}R_+ \mid v+c \ge -1 \ \text{ ve } c-v \ge 5\} \text{ dir.}$$

Bu problem için h_1 perturbasyon fonksiyonunu hesap edelim.

$$h_1(y) = \inf \{-2x+u \mid (x,u) \in S,\ x+u \le 3+y\} = \begin{cases} \infty & , \quad y < 3 \\ 0 & , \quad -3 \le y<0 \\ -3 & , \quad 0 \le y<1 \\ -8 & , \quad y \ge 1 \end{cases}$$

Açık olarak $h_ı$ in $y = 0$ da subdiferansiyellebilir olmadığı görülür. Fakat $\partial^{w}h_ı(0) \neq Ø$ dir. Şimdi bunu gösterelim.

$$\partial^{w}h_ı(0) = \{(v,c) \in RxR_{+} \mid h(y) - h(0) \geq -c|y| + yv, \quad \forall y \in R\}$$

$Y_1 = (-\infty, -3)$

$Y_2 = [-3, 0)$

$Y_3 = [0,1)$

$Y_4 = [1, +\infty)$

$$V_i = \{(v,c) \in Rx\, R_{+} \mid h(y) - h(0) \geq -c|y| + yv, \ \forall y \in Y_i \ \text{ ve } i = 1,2,3,4\}$$

olur. Burada $y<-3$ ve $h(y)= +\infty$ ise

$V_ı = Rx\, R_{+},$

$V_2 = \{(v,c) \in RxR_{+} \mid c+v \geq 0\},$

$V_3 = \{(v,c) \in RxR_{+} | -c+v \leq 0\}$

$V_4 = \{(v,c) \in RxR_{+} | -c+v \leq -5$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak,

$$\partial^{w}h_ı(0) = \bigcap_{1 \leq i \leq 4} v_i = \{(v,c) \in RxR_{+} | \ c+v \geq -1 \ \text{ ve } -c+v \leq 5\}$$

elde edilir. Teorem 6.4 ün sonucu olarak,

$$\partial^{w}h_ı(0) = SolP_1^{*} \text{ dir.}$$

KAYNAKLAR

[1] Azimov Y. A., Refail N. Kasımov, On Weak Conjugacy- Weak subdifferentials and Duality With Zero Gap in Nonconvex Optimization, International Journal of Applied Mathematics, Volume 1, No. 2, 171-192 , 1999

[2] Azimov Y. A., Refail N. Kasımov, Stability and Duality of Nonconvex Problems Via Augmented Lagrangian, Kluwer Acedemic Publishers, Volume 38, No. 3, 120-130, Hingham, Ma, Usa, 2002

[3] Borwein J.M – Adrian S. Lewis, Simon Fraser University, Canada, 1999

[4] Clarke, F .H., Optimization and nonsmooth analysis, Wiley Inter –science, New York, 1988

[5] Chiang M., Lecture Notes: Convex Optimization and Lagrange Duality, Princeton University, 2005

[6] Dimitri P. Berksekas, Convex Analysis and Optimization, Massachusetts Insttute of Technology, Cambridge, 2007

[7] Ekeland I, Temam R, Convex Analysis and Varitional Problems ,Elsevier Nort-Holland, Amsterdam, 1976

[8] I. Singer, Abstract Convex Analsis, Wiley, New York, 1997

[9] Jose de Dona , Convex Analysis , Universty of Newcastle, Australia, 2004

[10] Rockafeller R.T., Convex Analysis, Princeton University Pres, New Jersey, 1972

[11] Rubinow A.M., Abstract Convexity And Global Optimization, Kluwer, 2000

[12] Schirotzek W., Nonsmooth Analsis, Springer Berlin Heidelberg, New York,2007