T.C
HALİÇ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK BÖLÜMÜ

KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA REZİDÜ TEOREMİ VE BAZI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
HASAN HALİT TALİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. MEHMET SAİT EROĞLU

OCAK 2010
İstanbul

T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programı Yüksek Lisans öğrencisi **Hasan Halit TALİ** tarafından hazırlanan **"Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarda Rezidü Teoremi ve Bazı Uygulamaları"** adlı bu çalışma jürimizce Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Tarihi : 08.02.2010

(Jüri Üyesinin Ünvanı , Adı , Soyadı ve Kurumu) : İmzası :

Jüri Üyesi: Prof.Dr.Mehmet Sait EROĞLU
Danışman–Emekli Öğr.Üyesi
....

Jüri Üyesi: Prof.Dr.Abbas AZİMLİ
Yıldız Teknik Üniv. Öğr.Üyesi
....

Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr. Murat BEKEN
HAL.Üni.Uygulamalı Mat.ABD Öğr.Üyesi
....

İçindekiler

T.C
HALİÇ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezin Adı: Kompleks Değişkenli Fonksiyonlarda Rezidü Teoremi ve Bazı Uygulamaları
Hazırlayan: Hasan Halit Tali
Tez Danışmanı: Prof.Dr.Mehmet Sait Eroğlu
Ocak, 2010

ÖZET

Bu tez üç temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Kompleks Sayılar Cismi ve Özellikleri, $\mathbb{C}$' nin Topolojisi, $\mathbb{C}$ - Değerli Fonksiyonlar ve Özellikleri, Eğriler, Eğrisel İntegraller, Dönme Sayıları, Kapalı Zincirler, Cauchy İntegral Teoremi, Homologluk ve Homotopi Kavramları, Laurent Serileri ve Tekil Noktalar incelenmiştir. İkinci bölümde önce Rezidü (Kalıntı) Teoremi ardından Argüman İlkesi, Cebirin Anateoremi ve Rouche Teoremi gibi, Rezidü Teoreminin bazı teorik sonuçları kanıtlanmıştır. Son bölümde ise Rezidü Teoremi yardımıyla $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}dx$, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha} f(x)dx$ tipindeki integrallerin nasıl hesaplanacağı gösterilmiş ve bunlarla ilgili uygulamalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Holomorf Fonksiyonlar, Ayrık Tekil Noktalar, Rezidü Teoremi, Has Olmayan İntegraller

ABSTRACT

The Residue Theorem and Some Applications

Tali , Hasan Halit
M.S.,Department of Applied Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Sait Eroğlu
January, 2010

This thesis is composed of three chapters. In the first chapter, Complex-Numbers Field and its properties, topology of $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-valued functions and their properties, curves, line integrals, winding number, closed chains, Cauchy's Integral Theorem, homology and homotopy concepts, Laurent Series and singular points are studied. In the second chapter, primarily The Residue Theorem, after that The Argument Principle, main theorem of algebra and the Rouche Theorem, which are the some of the theorical results of residue theorem, are proved. In the last chapter, it is demonstrated how the integrals with the type of

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}dx \quad ,$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha} f(x)dx$ are calculated with the

assistance of the residue theorem and the related applications are represented.

Key words: Holomorphic Functions, Isolated Singularities, The Residue Theorem, Improper Integrals

GİRİŞ :

Bu tezde Rezidü Teoremi yardımıyla, gerçel analize ait bazı integralleri, gerçel analizin integral alma yöntemlerine başvurmadan sadece türevler veya seri açılımları yardımıyla hesaplamayı öğreneceğiz. Bu amaç doğrultusunda birinci bölümde bilinmesi gereken ön bilgileri, Cauchy İntegral Teoremini, Laurent serilerini ve tekil noktaları ele aldık. İkinci bölümümüzde ise birinci bölümdeki bilgilerimizden yararlanarak bir fonksiyonun bir ayrık tekil noktasındaki rezidüsünün (kalıntısının) tanımını hemen ardından da Rezidü Teoremini ispatıyla beraber verdik.Son bölümümüzde ise Rezidü Teoremi yardımıyla beş farklı tip integralin nasıl hesaplanacağını gösterdik ve uygulamalar yaptık.

1. Ön Bilgiler

Bu çalışmada matematikte yaygın olan $\forall x$(her x), $\exists x$(en az bir x), $\Rightarrow$ (ise), $\Leftrightarrow$ (ancak ve ancak) mantık imleri dışında aşağıdaki gösterimleri de kullanacağız:

$a := b$,"a tanım gereği b'dir" ve

$p :\Leftrightarrow q$,"p tanım gereği q' ya denktir".

Bunlardan ilkinde a, tanımlanan bir nesnedir, ikincisinde p tanımlanan bir kavram içeren bir önerme veya bağıntıdır.

1.1 Kompleks Sayılar Cismi

$\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ ile sırasıyla doğal sayılar ve tam sayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ ile sırasıyla rasyonel ve reel sayılar cismi gösterilsin.$\mathbb{R}$ deki işlemler $+$ ve . ile gösterilmek üzere,bu cisim üzerinde açıklanmış doğal sıralamayla bir sıralanmış cisimdir.Titiz olmak gerekirse ($\mathbb{R}$,+,.) cisminden ve ($\mathbb{R}$,+,.,<) sıralanmış cisminden söz edilir.

Şimdi $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesini üzerinde açıklayacağımız iki işlemle bir cisim yapacağız.Ancak sıralı ikililerin temel özelliğini belirtmekte yarar var:

1. $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \; ve \; y = y'$.

   $\mathbb{R}^2$ de yine **toplama** ve **çarpma** olarak adlandırılan ve karışıklığa yol açmayacağı varsayılarak yine $+$ ve . ile gösterilen iki işlem aşağıdaki gibi açıklanır: $\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ için :

2. $(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$

3. $(x, y).(u, v) := (xu - yv, xv + yu)$,

$(\mathbb{R}^2, +, .)$ bir cisimdir.Bu cisim genel olarak $\mathbb{C}$, onun öğeleri ise z,w,... ile gösterilir. $\mathbb{C}$ cismine kompleks sayılar cismi, onun öğelerine ise kompleks sayılar denir. Bu tanımlarla her $z = (x, y)$ kompleks sayısı tek biçimde

4. $z = (x, y) + (0, 1)(y, 0)$ olarak yazılabilir.

$\tilde{\mathbb{R}} := \{(x, 0)|x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{C}$ deki işlemlerle $\mathbb{C}$ nin bir alt cismidir ve $\varphi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$,$(x \rightsquigarrow (x, 0))$ dönüşümü bir doğal eşyapı dönüşümüdür. Bu nedenle x reel sayısı ile $(x, 0)$ kompleks sayısı özdeş kılınır: $x \equiv (x, 0)$. Böylece 4. eşitliği $i := (0, 1)$ olmak üzere

5. $z = x + iy$

şeklini alır. Kompleks sayıların bu gösterimi tek türlüdür. Ayrıca

6. $i \neq 0,$ ancak $i^2 = -1$

Bu nedenle kompleks sayılar cismi sıralanmış cisim yapılamaz, çünkü $\mathbb{K}$ sıralanmış bir cisim ve $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ ise $\alpha^2 > 0$ olmak zorundadır.
Diğer yandan $1 = 1^2 > 0$ ve $-1 < 0$

z kompleks sayısının sayı karakteri bizi ilgilendirdiğinde onu $x + iy$ tipiyle, $\mathbb{R}^2$ deki nokta karakteri bizi ilgilendirdiğinde ise (x, y) ile göstereceğiz. $z, w \in \mathbb{C}$ için $z.w$ yerine kısaca zw yazacağız.

$x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy$ olmak üzere

$$Rez := x,\ Imz := y \text{ ve } \bar{z} := x - iy$$

olarak tanımlanır.

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sayısına z kompleks sayısının **mutlak değeri** denir. $|z|$ sayısı (x, y) noktasının $(0, 0)$ noktasına olan Öklid uzaklığından başka bir şey değildir.

Açıkça her $z, w \in \mathbb{C}$ için;

$$|z| = 0,\ \Leftrightarrow z = 0,\ |zw| = |z||w|\ ve\ |z + w| \leq |z| + |w|$$

1.2 ℂ'nin Topolojisi

$\mathbb{C}$ yi $\mathbb{R}^2$ nin doğal topolojisi ile alacağız; bu $\mathbb{R}^2$'deki Öklid metriğinin ürettiği topolojidir. $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, ...$ olmak üzere:

$$d(z_1, z_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|$$

$\mathbb{R}^2$ deki Öklid metriğidir. $a \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde

$$D_r(a) \equiv D(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\},$$

$$\overline{D_r}(a) \equiv \overline{D}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\} \text{ ve}$$

$$\overline{C_r}(a) \equiv \overline{C}(a, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

kümelerinden sırasıyla **a-merkezli, r-yarıçaplı açık daire, kapalı daire ve çember** diye söz edeceğiz.

$\{D_r(a) |\ a \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R},\ r > 0\}$ ailesi $\mathbb{C}$ 'nin topolojisinin bir bazını oluşturur. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bir tam metrik uzaydır. Tam metrik uzaylarda dizilere ilişkin kavram ve teoremleri biliniyor varsayacağız. Burada kompleks analizde önemli olan bazı kavramları vermekle yetineceğiz.

$\mathbb{C}$'nin alt kümelerini göreli topolojiyle ele alacağız. $A \subseteq X \subseteq \mathbb{C}$ olduğunda A kümesinin X ' **de açık** olması tam da $\mathbb{C}$ 'de açık bir U kümesiyle $A = X \cap U$ olması demektir. $\mathbb{C}$ nin bir X alt kümesine, boştan farklı, ayrık ve X ' de açık A, B kümeleri $X = A \cup B$ olacak biçimde bulunamıyorsa, **bağlantılıdır** denir. $\mathbb{C}$'nin aynı anda açık ve bağlantılı alt kümelerine kısaca **bölge** denir. Bunlar kompleks analizde önemli olan kümelerdir. Özellikle her $D_r(a)$ açık dairesi bağlantılıdır.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b$ olmak üzere bir sürekli $\gamma : [a, b] \to X \subseteq \mathbb{C}$ dönüşümüne X **de bir sürekli yol** denir. Her $x,\ y \in X$ noktasına karşılık, X' de bir γ yolu $\gamma(a) = z$ ve $\gamma(b) = w$ olacak biçimde bulunabiliyorsa, X kümesi **yol bağlantılıdır** denir. $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{C}$ bir açık alt küme olsun.U'nun bağlantılı olması , U'nun yol bağlantılı olmasına denktir.
D_r^* ile $D_r(a) \backslash \{a\}$ kümesini göstereceğiz, bu $D_r(a)$ dairesinden a merkezini çıkardığımız zaman kalan kümedir.

(1.2.1) Önerme : $X \subseteq \mathbb{C}$ bağlantılı alt kümeyse her sürekli $f : X \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu sabittir.

Bu topolojinin basit bir önermesidir ve $\mathbb{Z}$ yerine herhangi bir diskret uzay alındığında da doğrudur.

$a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$[a, b] := \{a + t(b - a) | 0 \leq t \leq 1\}$ kümesine, tıpkı $\mathbb{R}$' de olduğu gibi, $[a, b]$ **kapalı aralığı** diyelim.Bu,geometrik olarak,düzlemde a noktasını b noktasına birleştiren doğru parçasının noktalarının oluşturduğu kümedir. $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ kompleks sayılar olmak üzere

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} [a_{k-1}, a_k] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup ... \cup [a_{n-1}, a_n]$$

tipinde bir kümeye a_0 noktasını a_n noktasına bağlayan bir **poligon** denir.Aşağıdaki teorem herhangi bir topoloji kitabında bulunabilir.

(1.2.2) Teorem . $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesi için aşağıdaki önermeler denktir:

1. U bağlantılıdır.
2. U yol bağlantılıdır.
3. U **poligon bağlantılıdır**, yani U 'nun herhangi iki noktası U daki bir poligonla bağlanabilir.

$\mathbb{C}$'de bir X alt kümesi verilsin. Her $a, b \in X$ için $[a, b] \subset X$ ise X kümesi **dışbükeydir** denir. $X \subset \mathbb{C}$ ve $a \in X$ olsun. Her $x \in X$ için $[a, x] \subset X$ ise X kümesi a **noktasına göre yıldız biçimli** bir kümedir denir.

Dışbükey kümeler her noktasına göre yıldız biçimli kümelerdir. Bunun tersi doğru değildir; örneğin $+$ (artı işareti) dış bükey değil , ancak doğru parçalarının kesişme noktasına göre yıldız biçimlidir.

Son olarak $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ de **Heine-Borel teoremi** geçerlidir: $K \subset \mathbb{C}$'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır.

1.3 $\mathbb{C}$ - değerli fonksiyonlar

T herhangi bir topolojik uzay ve

$$f : T \to \mathbb{C}$$

olsun. $u := Ref$ ve $v := Imf$ olmak üzere her $t \in T$ için

$$f(t) = u(t) + iv(t) \equiv (u(t), v(t))$$

$\mathbb{C}$' nin topolojisi $\mathbb{R}^2$' nin topolojisi olduğundan f fonksiyonunu bir $t_0 \in T$ noktasında sürekli olması $u : T \to \mathbb{R}$ ve $v : T \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının t_0 noktasında sürekli olmasına denktir. İki özel durumu ayrıca belirtelim.

1. $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, f nin t_0 noktasında sürekli olması u ve v fonksiyonlarının t_0 noktasında sürekli olması demektir.
2. $T \subset \mathbb{C}$, f fonksiyonunun bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında sürekli olması $u(x, y), v(x, y)$ fonksiyonlarının (x_0, y_0) noktasında sürekli olmalarına denktir.

Şimdi $U \subset \mathbb{C}$ boştan farklı bir açık küme, $f : U \to \mathbb{C}$ ve $a \in U$ olsun.
$u := Ref$ ve $v := Imf$ olmak üzere her $z \in U$ için $f(z) = u(z) + iv(z)$ dir.
$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ olarak düşünülürse $z = (x, y)$ yazarak

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

elde edilir. f nin $a \in U$ noktasında reel türevlenebilir olması
$u := U \to \mathbb{R}$ ve $v := U \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının a noktasında reel türevlenebilir olmalarına denktir. Aşağıda vereceğimiz, "f fonksiyonunun a noktasında kompleks türevlenebilir" olma kavramı reel türevlenebilmeden çok güçlü bir kavramdır.

(1.3.1) Tanım : $U \subset \mathbb{C}$ açık, $a \in U$ ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun.

a noktasında sürekli bir $\varphi : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu her $z \in U$ için

$$f(z) = f(a) + (z - a)\varphi(z)$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa f fonksiyonuna a **noktasında kompleks türevlenebilir** denir ve

$$f'(a) := \varphi(a)$$

sayısına ise f'nin a noktasındaki **türevi** denir. $f'(a)$ yerine $\frac{df}{dz}(a)$ da yazılabilir.

1. Kolayca görüleceği gibi f fonksiyonunun a noktasında kompleks türevlenebilir ve türevinin $f'(a)$ olması tam da

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \ , (z \in U)$$

demektir. Bu ise tek reel değişkenli ve $\mathbb{R}$-değerli fonksiyoların türev tanımı gibidir. Bu nedenle limit kurallarından kaynaklanan türev kuralları burada da geçerlidir.f ve g fonksiyonları U açık kümesinde tanımlı ve $a \in U$ noktasında kompleks türevlenebilirlerse

$f \pm g$ ve fg a noktasında kompleks türevlenebilir ve

2. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ve

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Eğer ayrıca $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ de a noktasında kompleks türevlenebilir ve

3. $$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

dir. $U, V \subset \mathbb{C}$ açık kümeler ve $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$ olmak üzere f fonksiyonu $a \in U$ noktasında ve g fonksiyonu ise $b = f(a)$ noktasında kompleks türevlenebilirse $h := gof$ de a noktasında kompleks türevlenebilir ve

4. $h'(a) = (gof)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$ (Zincir Kuralı).

Not 1: Tek reel değişkenli,ancak $\mathbb{C}$-değerli bir

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

fonksiyonunun bir $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ noktasındaki türevinden, $u = Re\gamma$ ve $v = Im\gamma$ olmak üzere,eğer varsa

5. $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$

anlaşılır. Şimdi $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ve $U \subset \mathbb{C}$ açık kümeler olmak üzere

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

fonksiyonları verilsin.γ fonksiyonu t noktsaında reel türevlenebilir ve f fonksiyonu $\gamma(t)$ noktasında kompleks türevlenebilirse $f \circ \gamma$ fonksiyonu t noktasında reel türevlenebilir ve

6.
$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)).\gamma'(t) = \frac{df}{dz}(\gamma(t)).\frac{d\gamma}{dt}(t)$$

dir.

Not 2: $n \in \mathbb{Z}$ bir tamsayı ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) := (z-a)^n$ fonksiyonuna bakalım. $n \geq 0$ için bu fonksiyon $\mathbb{C}$'de , $n < 0$ içinse $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ da tanımlıdır. Bu fonksiyon tanımlı olduğu her noktada kompleks türevlenebilir ve $f'(z) = n(z-a)^{(n-1)}$ dir. Bunu kabaca

7.
$$\frac{d}{dz}\ (z-a)^n = n(z-a)^{n-1}$$

ile göstereceğiz.

Not 3: $U \subset \mathbb{C}$ açık ; $f : U \to \mathbb{C},\ a \in U,\ u = Ref$ ve $v = Imf$ olsun. f fonksiyonunun a noktasında kompleks türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul u ve v fonksiyonlarının a noktasında reel türevlenebilir olması ve orada

8.
$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamasıdır.

(1.3.2) Tanım : $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ açık ve $f : U \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonu her $a \in U$ noktasında kompleks türevlenebilirse f fonksiyonu U kümesinde **holomorftur** veya **analitiktir** denir. U daki holomorf fonksiyonların kümesini $\mathcal{H}(U)$ ile göstereceğiz.

$\mathbb{C}$ deki bölgeler bir anlamda $\mathbb{R}$ deki aralıkların rolünü üstlenirler.Örneğin $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $f' = 0$ ise f fonksiyonu sabittir.Benzer biçimde aşağıdaki önerme geçerlidir.

(1.3.3) Önerme : U bir bölge, $f \in \mathcal{H}(U)$ ve her $z \in U$ için $f'(z) = 0$ ise f fonksiyonu U da sabittir.

1.4 Eğriler ve Eğrisel İntegraller

Not: Bu paragraftaki tanım ve teoremler için [Conway] veya [Saks-Zygmund]'a bakılabilir.

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{C}$ açık olmak üzere bir $\gamma : [a, b] \to U$ fonksiyonuna (izi) U'da bir **eğri** denir. $\gamma(a)$ noktasına γ eğrisinin **başlangıç noktası**, $\gamma(b)$ noktasına ise γ eğrisinin **son** veya **bitiş noktası** denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ ye ise γ eğrisinin **uç noktaları** denir. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya bir **kapalı** eğri denir.

$$\underline{\gamma} := \gamma([a, b])$$

kümesine γ eğrisinin **izi** denir. γ' nın özelliklerine göre eğri adlandırılır.
γ sürekli (**türevlenebilir** veya **parçalı türevlenebilir**) ise γ bir sürekli (**türevlenebilir** veya **parçalı türevlenebilir**) eğridir.γ sürekli türevlenebilirse γ' ya bir **pürüzsüz eğri**, γ parçalı sürekli türevlenebilirse γ' ya bir **parçalı pürüzsüz eğri** denir.

$\gamma : [a, b] \to U$ eğrisi verilsin. $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ koşulunu sağlayan $P = \{t_0, ..., t_n\}$ kümesine [a,b] aralığının bir **parçalanışı** ve $\|P\| := \max\limits_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$ sayısına ise bu parçalanışın **normu** diyelim.

$z_k = \gamma(t_k)$ olmak üzere

$$L(\gamma, P) := \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

sayısı kenarları $[z_{k-1}, z_k]$, $1 \leq k \leq n$, olan poligonun uzunluğudur.
$\mathcal{P}$ ile $[a,b]$ aralığının parçalanışlarını gösterirsek

1. $L(\gamma) := \sup_{P \in \mathcal{P}} L(\gamma, P)$ ye γ **eğrisinin uzunluğu** veya γ' nın **temel değişimi** denir.Elbette $0 \leq L(\gamma) \leq +\infty$ dur. Bizi $L(\gamma) < +\infty$ durumu ilgilendirecektir. $L(\gamma) < +\infty$ ise γ' ya **sınırlı değişimli** bir fonksiyon veya bir **integral eğrisi** veya bir **uzunluk** denir.Analiz derslerinde aşağıdaki önerme kanıtlanır.

(1.4.1) Önerme : Her $\gamma : [a,b] \to U$ parçalı pürüzsüz eğri bir integral eğrisidir ve

2. $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$ dir. ([Con], IV, Prop.1.3)

(1.4.2) Teorem . $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sınırlı değişimli ve $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli ise bir $I \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı aşağıdaki koşulu sağlayacak biçimde vardır: Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki $[a,b]$ nin $\|P\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $P = \{t_0, ..., t_n\}$ parçalanışı için $t_{k-1} \leq T_k \leq t_k$ koşulunu sağlayan her T_k için

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(T_k)(\gamma(t_k)) - (\gamma(t_{k-1}))| < \epsilon. \quad ([Con.IV, Teorem 1.4)$$

Tek olarak belirli olan bu I sayısına f nin γ ya göre **Riemann-Stieltjes** integrali denir ve

$$I =: \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t)d\gamma(t)$$

olarak gösterilir.

Riemann-Stieltjes integrali de, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında bir doğrusal dönüşüm tanımlar, ([Con], IV, Prop.1.7)

$f : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli ve $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ ise $\gamma_k := \gamma|[t_{k-1}, t_k]$ olmak üzere

3. $\int_a^b f d\gamma = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f \, d\gamma_k$, ([Con], IV, Prop.1.8)

γ nın parçalı pürüzsüz olması durumunda ise

4. $\displaystyle\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt$

olur. ([Con], IV, Prop.1.9). Burada sağ tarafta Riemann integrali vardır.

Eğrisel İntegral: Şimdi $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ bir integral eğrisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli olsun.

5. $\displaystyle\int_\gamma f := \int_a^b (f \circ \gamma) d\gamma$

ya f nin γ **boyunca eğrisel integrali** denir. $\displaystyle\int_\gamma f$ yerine çoğu zaman $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ de yazılır.Özel olarak γ parçalı pürüzsüz ise

6. $\displaystyle\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

geçerlidir.Çoğu kompleks analiz kitabı yalnızca parçalı pürüzsüz γ eğrileriyle çalışır ve 6. ifadesini eğrisel integralin tanımı olarak seçer.

Parametre Değişimi: $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ dönüşümüne sürekli,kesin artan ve üzerine ise bir parametre dönüşümü denir.Bu durumda $\varphi(\alpha) = a$ ve $\varphi(\beta) = b$ ve $\varphi^{-1} : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ de bir parametre dönüşümüdür. $\alpha < \beta$ ve $a < b$ olmak üzere herhangi iki $[\alpha, \beta], [a, b]$ kapalı aralığı verildiğinde daima bir $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ parametre dönüşümü bulunabilir,örneğin

7. $\displaystyle\varphi(u) = \frac{b-a}{\beta-\alpha}(u-\alpha) + a$ böyle bir dönüşümdür.

(1.4.3) Önerme: $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ bir parametre dönüşümü, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ bir integral eğrisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ise

a. $\gamma' = \gamma \circ \varphi$ de bir integral eğrisidir

b. $\displaystyle\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\varphi} f$ ([Con], IV. Prop. 1.13)

İntegral açısından γ ve $\gamma \circ \varphi$ aynı davranışı sergilediklerinden bunlara aynı gözüyle bakabiliriz. γ ve γ' integral eğrilerine bir φ parametre dönüşümüyle $\gamma' = \gamma \circ \varphi$ ise **denktir** der ve bunu $\gamma' \sim \gamma$ ile gösterirsek,bu integral eğrilerinin kümesinde bir denklik bağıntısı açıklar, başka sözlerle
$\gamma, \gamma', \gamma''$ integral eğrileri ise

1. $\gamma \sim \gamma$
2. $\gamma' \sim \gamma$ ise $\gamma \sim \gamma'$
3. $\gamma \sim \gamma'$,$\gamma' \sim \gamma''$ ise $\gamma \sim \gamma''$ dir.

Bundan sonra denk eğrilere aynı gözüyle bakacağız.Bundan yararlanarak aşağıdaki tanımı vereceğiz.

$\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$, k=1,2,...,n

eğrileri verilmiş olsun öyle ki γ_k eğrisinin bitiş noktası daima γ_{k+1} eğrisinin başlangıç noktası olsun.Herhangi bir $[a, b]$ aralığı alıp $(a < b)$, bunu
$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ noktalarıyla n parçaya bölelim.Sonra 7. de verilen tipten parametre dönüşümleri yardımıyla γ_k ya denk $\gamma_k' : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$ eğrilerine geçelim

$\gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}$ eğrisi $\gamma'|[t_{k-1}, t_k] := \gamma_k'$

olarak tanımlanırsa bir γ' eğrisi elde edilir.

8. $\gamma_1 + ... + \gamma_n := \gamma'$

olarak açıklanır.γ_k ' lar sürekli ise γ' ' de süreklidir; γ_k ' lar parçalı pürüzsüzse γ ' de parçalı pürüzsüzdür.γ' eğrisi denklik dışında tek olarak belirlidir.Ayrıca her sürekli $f : \underline{\gamma'} \to \mathbb{C}$ için

9. $$\int\limits_{\gamma_1+...+\gamma_n} f = \int_{\gamma_1} f + ... + \int_{\gamma_n} f$$

Ters Eğri: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t)$$

ile tanımlanan eğriye γ nın **tersi** denir.

Not: $[a, b]$ ye bir zaman aralığı olarak bakalım ve $\gamma(t)$ ise hareket eden bir parçacığın t anındaki konumunu göstersin.Bu parçacığın hareketini filme çeker ve bu filmi geriye sararak oynatırsak γ^- ye göre hareket eden bir parçacığın filmini izlemiş oluruz.

$f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ için

$$\|f\|_\gamma := \sup_{z \in \underline{\gamma}} |f(z)|$$

olarak açıklanırsa aşağıdaki önerme $([Con], IV, Prop.1.17)$ geçerlidir.

(1.4.4.) Önerme : γ bir integral eğrisi ve $f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ise

a. $\displaystyle\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$

b. $\displaystyle|\int_\gamma f| \leq L(\gamma).\|f\|_\gamma$

Aşağıdaki teorem integral hesabın ana teoreminin bir genellemesidir.

(1.4.5.) Teorem. $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme ve $f : U \to \mathbb{C}$ sürekli olsun. f ' nin U da bir ilkeli varsa, yani $F' = f$ olan bir $F : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonu varsa izi U da olup, başlangıç noktası α ve bitiş noktası β olan her γ integral eğrisi için

$$\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha) \quad \text{dir.}$$

Ayrıca γ kapalı ise $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ olur. ([Con] , IV , Teorem 1.18)

Bir Özel Eğri: $a \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olsun.

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) := a + re^{it}$

ile tanımlanan eğri,başlangıç ve bitiş noktası $a+r$ olan basit kapalı bir pürüzsüz eğridir.$\underline{\gamma}$ izi tam da a merkezli r yarıçaplı $C_r(a)$ çemberidir.Bu eğriyi de $C_r(a)$ ile göstereceğiz.

(1.4.6) Önerme: Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\int_{C_r(a)} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Kanıt. $U := \mathbb{C}\backslash\{a\}$ olsun.$n \neq -1$ için $F_n(z) := \dfrac{1}{n+1}(z-a)^{n+1}$ fonksiyonu U da $f_n(z) := (z-a)^n$ fonksiyonunun bir ilkeli olduğundan (1.4.5) ile $\displaystyle\int_{C_r(a)} f_n(z)dz = 0$ olur.$n = -1$ içinse , $C_r(a)$ pürüzsüz eğri olduğundan 6. ile

$$\int_{C_r(a)} \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

elde edilir.Bu paragrafı iki teoremle tamamlayacağız.

(1.4.7) Teorem. γ bir integral eğrisi olsun.f ve her $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları $\underline{\gamma}$ da sürekli olsunlar.

a. (f_n) dizisi $\underline{\gamma}$ da f ye düzgün yakınsaksa

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (\lim f_n) = \lim \int_\gamma f_n$$

b. $f = \sum_0^\infty f_n$ serisi $\underline{\gamma}$ da düzgün yakınsaksa

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (\sum_0^\infty f_n) = \sum_0^\infty \int_\gamma f_n$$

elbette b. , a. ' dan çıkar. a. için bkz. ([Con] ,IV ,Lemmma 2.7)

(1.4.8) Teorem. γ , $\mathbb{C}$ ' de bir integral eğrisi verilsin. $U := \mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ ve $\varphi : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ise $z \in U$ için

$$f(z) := \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu U ' da her mertebeden türevlenebilir ve

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}} \quad dir.$$

([Con], IV . 2. Prob. 3) veya ([S-Z] ;II ,Teorem 3.3)'e bkz.

1.5 Dönme Sayıları

Dönme sayılarına ilişkin ayrıntılı bilgiler çoğu kompleks analiz kitabında bulunabilir, örneğin [Lang] veya [Cartan] kaynaklarında vereceğimiz tüm bilgiler vardır.Bir γ kapalı eğrisinin izi üzerinde olmayan a noktası etrafında dönme sayısının tanımını analitik olarak vereceğiz.Bunun geometrik yorumu şudur: γ eğrisinin başlangıç noktası α ise a noktasından α ' ya bir ışın çizelim. t parametresi arttıkça a ' dan $\gamma(t)$ ye giden ışını izleyelim.Bu ışın düzlemde a etrafında bir açı süpürür.Saatin ters yönündeki süpürmeler pozitif, saat yönündekiler negatif ölçülür.Nihayetinde $\beta = \alpha$ bitiş noktasıyla turumuzu tamamladığımızda aşikar ki $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2\pi n$ kadar açı süpürülür.Bu n tamsayısı söz konusu dönme sayısıdır.

(1.5.1) Tanım : γ , $\mathbb{C}$ de bir kapalı integral eğrisi ve $a \in \mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ ise

$$D(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

sayısına γ 'nın a etrafında dönme sayısı denir.

(1.5.2) Teorem. $D(\gamma, a)$ daima bir tamsayıdır ve $\mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ nın bağlantılı bileşenlerinde sabittir.

Kanıt. $D(\gamma,a) \in \mathbb{Z}$ önermesinin kanıtı için ([Lang] , IV , Lemma 1) e bakınız. Teorem (1.4.8) de $\varphi(w) = \dfrac{1}{2\pi i}$ sabit fonksiyonunu alırsak $D(\gamma,a)$ nın $\mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ da sürekli olduğunu görürüz. Bu sürekli fonksiyon $\mathbb{Z}$-değerli olduğundan (1.2.1)'e göre $\mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ nin bağlantılı bileşenlerinde sabittir.

γ kapalı sürekli ise $\underline{\gamma}$ kompakttır. Heine-Borel teoreminden dolayı $\underline{\gamma}$ sınırlıdır. $\underline{\gamma}$ ' yı içeren bir D açık kümesi alalım. $\mathbb{C}\backslash D$ bağlantılıdır ve $\mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ 'nın bağlantılı bileşenlerinden birinin içine düşer. $\mathbb{C}\backslash D$ ' de de$D(\gamma,a)$ sabittir.

$$|D(\gamma,a)| = |\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi}.\|\frac{1}{z-a}\|_\gamma$$

$|a| \to +\infty$ için $\|\dfrac{1}{z-a}\|_\gamma \to 0$ olduğundan , yeterince büyük $|a|$ için $0 \leq |D(\gamma,a)| < 1$ olur. $D(\gamma,a) \in \mathbb{Z}$ olduğunda $D(\gamma,a) = 0$ olmak zorundadır.Böylece $\mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ ' nın sınırsız bileşeninde $D(\gamma,a) \equiv 0$ olur.

(1.5.3) Tanım: $\mathbb{C}$ de γ bir kapalı integral eğrisi olsun.

$$I(\gamma) := \{a \in \mathbb{C} \setminus \underline{\gamma} \mid D(\gamma,a) \neq 0\}$$

kümesine γ eğrisinin **içi** denir.

$\mathbb{C} \setminus \underline{\gamma}$ nın sınırsız bileşeninde $D(\gamma,a) \equiv 0$ olduğundan $I(\gamma)$ bu sınırsız bileşeni içeremez ve yukarıdaki irdelemeden de görüleceği gibi $\underline{\gamma} \subset D$ ve D bir daireyse $I(\gamma) \subset D$ dir ve dolayısıyla $I(\gamma)$ sınırlıdır.

1.6 Kapalı Zincirler ve Cauchy İntegral Teoremi

"$\mathcal{E}$ ile $\mathbb{C}$ deki kapalı integral eğrilerinin kümesini gösterelim.
$\gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathcal{E}$ ve $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
1. $\gamma = m_1\gamma_1 + ... + m_n\gamma_n$
gibi bir biçimsel ifadeye bir **kapalı zincir** diyeceğiz 1. ifadesinde katsayısı sıfır olan γ_k ları attığımızda , veya bu toplama sıfır katsayı ile sonlu sayıda başka kapalı integral eğrileri eklediğimizde elde edeceğimiz tüm ifadelere aynı gözü ile bakacağız.Aşırı titiz davranmak istenirse , cebircilerin yaptığı gibi , γ ' ya sonlu nokta dışında 0 değerini alan bir $\gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu olarak da bakabiliriz. γ ve γ' iki kapalı zincirse, gerekirse sıfır katsayılı terimler ekleyerek her ikisi de aynı $\gamma_1, ..., \gamma_n$ kapalı integral eğrileriyle

$\gamma = \sum_{k=1}^{n} m_k \gamma_k$ ve $\gamma' = \sum_{k=1}^{n} m'_k \gamma_k$ olarak yazılabilir.Bu durumda

$$\gamma \pm \gamma' := \sum_{k=1}^{n} (m_k \pm m'_k)\gamma_k \quad \text{olarak açıklanır.}$$

γ zinciri 1. ile verilmişse

$$\underline{\gamma} := \bigcup_{k=1, m_k \neq 0}^{n} \underline{\gamma_k}$$

kümesine γ zincirinin izi denir.

$f : \underline{\gamma} \to \mathbb{C}$ sürekli ise

$$\int_{\gamma} f := \sum_{k=1}^{n} m_k . \int_{\gamma_k} f \quad \text{ve bir } a \in \mathbb{C} \setminus \underline{\gamma} \quad \text{için}$$

$$D(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz$$

olarak tanımlanır.$D(\gamma, a)$ ya γ zincirinin a etrafında dönme sayısı denir. Kapalı eğrilerde olduğu gibi

$$I(\gamma) := \{a \in \mathbb{C} \setminus \underline{\gamma} \mid D(\gamma, a) \neq 0\}$$

kümesine γ zincirinin içi denir.

γ ve γ' iki kapalı zincir olmak üzere

$f : \underline{\gamma} \cup \underline{\gamma'} \to \mathbb{R}$ sürekli ise aşikar olarak

$$\int_{\gamma \pm \gamma'} f = \int_{\gamma} f \pm \int_{\gamma'} f \quad \text{dir.}$$

(1.6.1) Tanım: γ ve η izleri $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde olan iki kapalı zincir olsun. $I(\gamma) \subset U$ ise γ zinciri U da **sıfıra homologtur** denir ve bunu $\gamma \overset{U}{\approx} 0$ ile göstereğiz. $I(\gamma - \eta) \subset U$ ise γ ve η zincirleri U da **homologturlar** diyeceğiz ve bunu $\gamma \overset{U}{\approx} \eta$ ile göstereceğiz.

Tanımlarda kolayca görüleceği gibi

1. $\gamma \overset{U}{\approx} 0 \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{C} \backslash U$ için $D(\gamma, a) = 0$

2. $\gamma \overset{U}{\approx} \eta \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{C} \backslash U$ için $D(\gamma, a) = D(\eta, a)$

Kompleks analizin en önemli teoreminin en genel şekli aşağıdaki gibidir.

(1.6.2) Cauchy Teoremi : İzi U açık kümesinde olan bir γ kapalı zinciri verilsin. γ zinciri U da sıfıra homologsa, U daki her holomorf f fonksiyonu için

$\int_\gamma f = 0$ dir. ([Lang], IV , Teorem 2.2)

Ek: γ ve η izleri U da olan ve U da homolog olan iki kapalı zincirseler her holomorf $f \in \mathcal{H}(U)$ için

$\int_\gamma f = \int_\eta f$ dir. ([Lang], IV , Corollary 2.3)

Bunun bir sonucu aşağıdaki Cauchy İntegral Formülü'dür.

(1.6.3) Cauchy İntegral Formülü : γ kapalı zinciri U açık kümesinde sıfıra homologsa her $a \in U \setminus \underline{\gamma}$ için

3. $D(\gamma, a) f(a) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$ dir.

Özel Durum : γ basit kapalı bir integral eğrisi ve pozitif yönlenmişse , $\underline{\gamma}$ da gezinirken saatin ters yönünde hareket ediyorsak her $a \in I(\gamma)$ için $D(\gamma, a) = 1$ olduğunda bu formül

4. $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$ biçimine dönüşür.

Homotopi Kavramı : Düzlemde iki parçalı pürüzsüz kapalı eğri verilsin. Gerekirse parametre dönüşümü yaparak her ikisininde parametre aralığını $[0, 1]$ alabiliriz. η ve γ nın izleri U açık kümesinde olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında γ yolu U da η ya **homotoptur** denir:

$\exists\ \varphi : [0,1] \times [0,1] \to U$ sürekli, öyle ki her $s \in [0,1]$ için $\varphi_s(t) := \varphi(t,s)$ olarak açıklanırsa $\varphi_0 = \gamma$, $\varphi_1 = \eta$ ve her $s \in [0,1]$ için φ_s kapalıdır. Bu durumu $\gamma \overset{U}{\sim} \eta$ ile göstereceğiz. η bir sabit eğri ise , yani izi bir noktadan oluşuyorsa o zaman γ kapalı eğrisi U da **sıfıra homotoptur** denir ve bunu $\gamma \overset{U}{\sim} 0$ ile göstereceğiz.

η bir sabit eğri ise her $f : \underline{\eta} \to \mathbb{C}$ için aşikar olarak

$$\int_\eta f = 0 \ \text{ dır.}$$

(1.6.4) Homotopi Teoremi: γ ve η kapalı parçalı pürüzsüz eğrileri U açık kümesinde homotopsalar U da holomorf her f için

$$\int_\gamma f = \int_\eta f \ \text{ dir.}$$

Özel olarak $\gamma \overset{U}{\sim} 0$ ise $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ ([Lang] , III, Teorem 5.2)

Bu teorem bize belli tipten bölgelerin önemini belirtir.Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesine, izi B' de olan her kapalı parçalı pürüzsüz eğri, B' de sıfıra homotopsa, **basit bağlantılıdır** denir.Dışbükey bölgeler basit bağlantılıdır.Böylece B basit bağlantılı bir bölgeyse izi B de olan her γ kapalı zinciri ve B de holomorf her f için daima $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ olur.

(1.6.5) Teorem. $\gamma \overset{U}{\sim} \eta$ ise $\gamma \overset{U}{\approx} \eta$ dır. ([Lang] , IV , Teorem 2.1)

Buna karşın $\gamma \overset{U}{\approx} \eta$ ise $\gamma \overset{U}{\sim} \eta$ olması gerekmez.Bir karşı örnek ([Lang] ,IV, Şekil 5) de verilmiştir.

1.7 Laurent Serileri

Her $n \in \mathbb{Z}$ için $a_n \in \mathbb{C}$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

tipindeki ifadelere **açılım noktası** z_0 olan bir **Laurent** serisi denir. Eğer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \ \text{ ve } \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{1.1}$$

serileri ayrı ayrı yakınsak iseler ve ancak bu durumda $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ **Laurent serisi yakınsaktır** denir ve bu durumda

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

olarak açıklanır. (1.1)'deki her iki seri mutlak yakınsaksa ve ancak bu durumda Laurent serimize **mutlak yakınsaktır** diyeceğiz. Benzer biçimde her iki seri bir $M \subset \mathbb{C}$ alt kümesinde düzgün yakınsaksalar Laurent serisi M **kümesinde düzgün yakınsaktır** denir. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. Bu kuvvet serisi bilindiği gibi her $z \in D_R(z_0)$ noktasında mutlak yakınsaktır ve her kompakt $M \subset D_R(z_0)$ alt kümesinde ise düzgün yakınsaktır. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ serisini incelemek $b_n = a_{-n}$ ve $w = \frac{1}{z-z_0}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^n \tag{1.2}$$

kuvvet serisini incelemeye denktir. (1.2) kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $\sigma > 0$ olsun. Bu durumda $r := 1/\sigma$ olmak üzere

$$|w| < \sigma \Longleftrightarrow |z-z_0| > r$$

olacağından

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

serisi $\overline{D_r(z_0)}$ kapalı dairesinin dışındaki her z noktasında mutlak yakınsak, yine aynı dairenin dışındaki her kompakt M alt kümesinde düzgün yakınsaktır. Eğer $r > R$ ise Laurent serimiz hiç bir yerde yakınsak değildir. $r = R$ ise Laurent serisi ancak $C_r(z_0)$ çemberinin noktalarında yakınsak olabilir. İlginç olan durum $r < R$ olmasıdır. Bu durmda Laurent serisi $\mathbf{z_0}-$**merkezli** $(r, R)-$**yarıçaplı**

$$H(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\}$$

açık halkasının her bir noktasında mutlak yakınsaktır ve bu halkanın her kompakt altkümesinde ise düzgün yakınsaktır. Bu halkanın sınır noktalarında Laurent serisi yakınsak da olabilir ıraksak da, ancak dış noktalarda seri kesinlikle ıraksaktır.

Her $z \in H(z_0, r, R)$ için

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{1.3}$$

ile tanımlanan f fonksiyonu $H(z_0, r, R)$ halkasında holomorftur ve $r < \rho < R$ olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \tag{1.4}$$

Özellikle

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(z_0)} f(z) dz. \tag{1.5}$$

Bu formül bizim için çok önemli olacaktır. Tersine olarak bize $H(z_0, r, R)$ halkası ve orada holomorf bir f fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyon halkamızda *tek* olarak belirli bir Laurent serisine açılabilir ve bu serinin katsayıları (1.4) formülü ile belirlenmiştir.

Bizi ilgilendiren $r = 0$ olan özel halkalar olacaktır; bu durumda ise halkamız

$$H(z_0, 0, R) = D_R^*(z_0) = \{z \,|0 < |z - z_0| < R\}$$

delinmiş dairesidir.

1.8 Ayrık Tekil Noktalar

Bir $D_r^*(a)$ dairesinde holomorf olan bir f fonksiyonu verilsin. a noktasında bu f fonksiyonunun tanımlı olması gerekmez. Eğer f fonksiyonu a noktasında tanımlı ise, a noktasında analitik olmasın. Böyle bir a noktasına f fonksiyonun bir **ayrık tekil noktası** diyeceğiz. Bu durumda f fonksiyonunun $D_r^*(a)$ halkasındaki Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{1.6}$$

olsun. Bu Laurent serilerini üç gruba ayıracağız ve buna koşut olarakta ayrık tekil noktalarımız üçe ayrılacaktır:

1. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $a_{-n} = 0$. Bu durumda (1.6) Laurent serimiz

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

   şeklini alır. Ancak bilindiği gibi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisi $D_r(a)$ dairesinde bir analitik fonksiyon tanımlar. Eğer f fonksiyonun a noktasında değeri

$f(a) := a_0$ olarak açıklanırsa fonksiyonumuz tüm $D_r(a)$ dairesinde holomorf olur. Bu nedenle bu durumda tekil noktamıza bir **kaldırılabilir tekil nokta** diyeceğiz. a noktasının kaldırılabilir tekil noktası olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun bir $D^*_\rho(\rho)$'de sınırlı olmasıdır. Bilindiği gibi kaldırılabilir ayrık tekil noktalar şöyle de karakterize edilirler: a noktasının kaldırılabilir tekil nokta olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{z\to a} f(z)$ limitinin var olmasıdır.

2. Bir $k \geq 1$ doğal sayısı

$$a_{-k} \neq 0 \text{ ve her } n > k \text{ için } a_{-n} = 0$$

olacak biçimde vardır. Bu durumda (1.6) Laurent serimiz

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_{-k} \neq 0 \tag{1.7}$$

şeklini alır. Bu durumda f fonksiyonunun a noktasında k. **dereceden** bir **kutup noktası** vardır denir. bu denklemin iki yanını $(z-a)^k$ ile çarparak

$$(z-a)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n+k} \tag{1.8}$$

elde edilir. (1.8) denkleminin sağındaki kuvvet serisi elbette $D_r(a)$ dairesinde yakınsaktır ve orada bir analitik g fonksiyonu tanımlar ve $g(a) = a_{-k} \neq 0$. Böylece $D^*_r(a)$'de holomorf olan f fonksiyonunun a noktasında k. dereceden bir kutup yeri varsa $D_r(a)$'de analitik olan ve $g(a) \neq 0$ koşulunu sağlayan bir g fonksiyonu ile her $z \in D^*_r(a)$ için

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k} \tag{1.9}$$

olacak biçimde vardır. Bunun tersi de doğrudur. Dolayısıyla f fonksiyonunun a noktasında k. dereceden bir kutup noktası olduğunu kanıtlamak için mutlaka Laurent açılımını bilmemize gerek yoktur. a noktasında analitik ve $g(a) \neq 0$ olan bir g fonksiyonu ile f fonksiyonunun (9)'daki gibi bir ifadesi varsa a noktası f fonksiyonu için bir kutup noktasıdır. Kutup noktalarını karakterize eden bir diğer ölçüt şudur: a noktasının bir kutup noktası olması içine gerek ve yeter koşul

$$\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$$

olmasıdır.

3. Sonsuz çoklukta k doğalsayısı için $a_{-k} \neq 0$ olsun. Bu durumda a noktasına f fonksiyonunun bir **özde tekil noktasıdır** denir. Özde tekil noktaları karakterize eden bir ölçüt şudur: a noktasının f fonksiyonun bir özde tekil noktası olması için gerek ve yeter koşul bu fonsiyonunun $0 < \rho < r$ olmak üzere $D^*_\rho(a)$'de aldığı değerlerin $\mathbb{C}$' deki herdeğere istenildiği kadar yaklaşmasıdır, başka sözlerle $\overline{f(D^*_\rho(a))} = \mathbb{C}$ olmasıdır.

Örnek 1 $\mathbb{C}^*$'da tanımlı $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ fonksiyonunu inceleyelim. 0 noktası bu fonksiyonun tek ayrık tekil noktasıdır.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots$$

olduğundan, f fonksiyonunun herhangi bir $D^*_r(0)$'daki Laurent açılımı

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - + \cdots$$

olur. Dolayısıyla 0 noktası bir kaldırılabilir tekil noktasıdır. Laurent serisi kullanmadan da

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

olduğu için de aynı sonuca ulaşabiliriz. Eğer $f(0) := 1$ olarak açıklarsak böylece tüm $\mathbb{C}$'de analitik bir fonksiyon elde ederiz. Bu fonksiyonu az ilerde kullanacağız.

Örnek 2 $\mathbb{C}\backslash\{1, -2\}$'de tanımlı

$$f(z) = \frac{z+3}{(z-1)(z+2)^4}$$

fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun tekil noktaları $a = 1$ ve $b = -2$ noktalarıdır.

$$g_1(z) := \frac{z+3}{(z+2)^4} \text{ ve } g_2(z) := \frac{z+3}{z-1}$$

olsunlar. $r_1 > 0$ sayısı yeterince küçük seçilirse g_1 fonksiyonu $D_{r_1}(1)$ dairesinde holomorftur ve $g_1(1) \neq 0$ sağlanır. Buradan, $D^*_{r_1}(1)$'da $f(z) = \dfrac{g_1(z)}{z-1}$ olduğunu da göz önünde tutarsak, f fonksiyonunun $a = 1$ noktasında birinci dereceden bir kutup noktası olduğunu elde ederiz. $r_2 > 0$ sayısı yeterince küçük seçilirse g_2 fonksiyonu $D_{r_2}(-2)$ dairesinde holomorftur ve $g_2(-2) \neq 0$ sağlanır. Buradan, $D^*_{r_2}(-2)$'da $f(z) = \dfrac{g_2(z)}{(z+2)^4}$ olduğunu da göz önünde tutarsak, f fonksiyonunun

$b = -2$ noktasında 4. dereceden bir kutup noktası olduğunu elde ederiz.

Örnek 3 Şimdi
$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^5 (z-1)^4}$$
fonksiyonun tekil noktalarını ve karakterlerini belirleyelim. f fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ kümesinde tanımlı ve holomorftur. Tekil noktalarımız 0 ve 1 noktalarıdır. İlk örneğimizden
$$h(z) := \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$
ile tanımlanan h fonksiyonunun tüm düzlemde holomorf olduğunu biliyoruz.
$$g_1(z) = \frac{h^2(z)}{(z-1)^4} \text{ ve } g_2(z) = \frac{\sin^2 z}{z^5}$$
olmak üzere
$$f(z) = \frac{g_1(z)}{z^3} \text{ ve } f(z) = \frac{g_2(z)}{(z-1)^4}$$
elde ederiz. g_1 fonksiyonu 0 noktasında analitik ve $g_1(0) \neq 0$ olduğundan f fonksiyonunun 0 noktasında 3. dereceden bir kutup yerivardır. Diğer yandan g_2 fonksiyonu 1 noktasında analitik ve $g_2(1) \neq 0$ olduğundan ise f fonksiyonunun 1 noktasında 4. dereceden bir kutup yerivardır.

2. Rezidü Teoremi ve Bazı Sonuçları

2.1 Kalıntı Teoremi

(2.1.1) Tanım : a noktası f fonksiyonunun bir ayrık tekil noktası ve bir $D_r^*(a)$ dairesinde f fonksiyonunun Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(z-a\right)^n \tag{2.1}$$

ise c_{-1} katsayısına f fonksiyonunun a noktasındaki **kalıntısı** veya **rezidüsü** denir ve bu

$$\mathbf{res}(\mathbf{f}, \mathbf{a}) = c_{-1}$$

olarak gösterilir.

Laurent açılımının tekliğinden dolayı c_{-1} katsayısı, dolayısıyla $res(f, a)$ tanımı tek olarak belirlidir. Tekil noktanın karakteri için bir kısıtlama yoktur: a noktası bir kaldırılabilir tekil nokta, bir kutup noktası veya bir öz tekil nokta olabilir. (2.1)'deki seri, izi $D_r^*(a)$ dairesinde olan her kapalı parçalı pürüzsüz γ eğrisinin izi üzerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma c_n \left(z-a\right)^n dz = c_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \\ &= c_{-1} 2\pi i D(\gamma, a) = 2\pi i res(f, a) D(\gamma, a)\end{aligned} \tag{2.2}$$

elde edilir ve bu eşitlik kalıntının $\int_\gamma f(z)dz$ integralinin hesaplamalarındaki önemini belirtir. Özel olararak $D(\gamma, a) = 1$ ise, örneğin $\rho \in (0, r)$ olmak üzere $\gamma = C_\rho(a)$ ise

$$\int_{C_\rho(a)} f = 2\pi i res(f, a) \tag{2.3}$$

elde edilir. $D(\gamma, a)$ dönme sayısını biliyor ve $res(f, a)$ sayısını integral almadan bulabiliyorsak (2.2) ve (2.3) eşitlikleri bize integral almadan $\int_\gamma f$ integralini bulmayı öğretir.

(2.2) formülü Cauchy integral formülünü özel hal olarak içerir. Gerçekten de $f \in \mathcal{H}(U)$ ve $a \in U$ olsun. $U \backslash \{a\}$'da $g(z) := \dfrac{f(z)}{z-a}$ fonksiyonunu tanımlayalım. g fonksiyonu tanım kümesinde holomorftur. f fonksiyonunun bir $D_r(a)$ dairesindeki kuvvet seri açılımı

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

ise $g(z)$ fonksiyonunun $D_r^*(a)$'daki Laurent açılımı

$$g(z) = \frac{f(a)}{z-a} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \, (z-a)^{n-1}$$

olacağından $res\,(g,a) = f(a)$ olur. Dolayısıyla izi $U \backslash \{a\}$ kümesinde olan her kapalı γ parçalı pürüzsüz eğrisi için

$$f(a)D(\gamma,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \tag{2.4}$$

elde edilir ve bu Cauchy formülünden başka bir şey değildir.

(2.1.2) Rezidü Teoremi . $U \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, A ise U kümesinin ayrık bir alt kümesi olsun. γ izi $U \backslash A$'da olan bir zincir ve A kümesinin bu zincirin içinde kalan noktaları $a_1, \ldots, a_n$ olsun(Bunlar daima sonlu sayıdadır). Bu durumda $U \backslash A$'da holomorf olan her f fonksiyonu için

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in A} D(\gamma,a) res(f,a) = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} D(\gamma,a_i) res(f,a_i).$$

Kanıt . $\overline{I(\gamma)}$ bir kompakt küme ve A kümesi ayrık olduğundan $I(\gamma)$'da A kümesinin sonlu sayıda noktası bulunur. Bu nedenle teoremdeki toplam aslında sonlu bir toplamdır ve bir yakınsaklık tartışması gereksizdir. A kümesinin $I(\gamma)$'daki noktaları $a_1, \ldots, a_n$ olsunlar. r_i pozitif sayılarını yeterince küçük seçersek, $C_{r_i}(a_i)$ çemberleri birbirlerini kesmeyecek ve $j \neq i$ için $a_j \notin \overline{D_{r_i}(a_i)}$ olacak biçimde seçelim. Bu durumda

$$\eta := \gamma - \sum_{i01}^{n} D(\gamma,a_i) C_{r_i}(a_i)$$

zinciri $U \backslash A$ kümesinde sıfıra homolog olduğundan $\int_\eta f = 0$ olur. Bu ise

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{i=1}^{n} D(\gamma,a_i)\int_{C_{r_i}(a_i)} f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} D(\gamma,a_i)\,\mathrm{res}(f,a_i)\end{aligned}$$

elde ederiz ve kanıt biter.

Eğer a noktası f fonksiyonunun bir kaldırılabilir noktası ise tanım gereği $res(f,a) = 0$ olur. Eğer a noktası k. dereceden bir kutup nokta ise bir $D_r(a)$ dairesinde holomorf ve $g(a) \neq 0$ olan bir g fonksiyonuyla $D_r^*(a)$'da

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$$

yazabileceğimizi biliyoruz. g fonksiyonunun $D_r(a)$ dairesindeki kuvvet serisi

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)$$

ise f fonksiyonunun $D_r^*(a)$ halkasındaki Laurent serisi

$$f(z) = \frac{c_0}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z-a} + \sum_{n=k}^{+\infty} c_n (z-a)^{n-k}$$

olacağından

$$res(f,a) = c_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(a) \tag{2.5}$$

elde edilir. Eğer $k = 1$ ise, yani önümüzde bir basit kutup noktası varsa

$$res(f,a) = c_0 = g(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \tag{2.6}$$

elde edilir.

Bir özel durumu inceleyelim. $D_r(a)$ dairesinde holomorf olan g ve h fonksiyonları ile $f = g/h$ olsun. $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, ancak $h'(a) \neq 0$ olsun. Bu durumda a noktası f fonksiyonunun birinci dereceden bir kutup noktasıdır. Dolayısıyla (2.6) ile

$$res(f,a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

elde edilir. Toparlayalım: g ve h fonksiyonları $D_r(a)$ dairesinde holomorf olmak üzere, $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ *ve* $D_r^* a)$'da $f(z) = g(z)/h(z)$ ise

$$res(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{2.7}$$

Şimdi bir kaç örnek verelim.

Örnek 1 $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ olsun. Ayrık tekil noktalarımız -1 ve 1 noktalarıdır. Bu noktalarda pay sıfır değerini almadığından -1 bir basit kutup noktası, 1 ise 2. dereceden bir kutup noktasıdır. Dolayısıyla

$$res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}$$

elde edilir. $g(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)}$ olmak üzere

$$g(1) \neq 0 \text{ ve } f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2}$$

olduğundan (2.5) ile, $g'(z) = \dfrac{2z(z+1) - z^2}{(z+1)^2}$ olduğunu da gözetirsek,

$$res(f,1) = g'(1) = \frac{3}{4}$$

elde edilir. Dolayısıyla γ izi $\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$'de olan herhangi bir zincir olmak üzere

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{3}{4}D(\gamma,1) + \frac{1}{4}D(\gamma,-1)\right).$$

Özel olarak γ olarak sırasıyla $C_1(-1)$ ve $C_1(1)$ bassit kapalı eğrilerini alırsak

$$\int_{C_1(-1)} \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz = \frac{\pi i}{2} \text{ ve } \int_{C_1(1)} \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz = \frac{3\pi i}{2}$$

elde ederiz.

Örnek 2 $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ olsun. $g(z) = \cos z$ ve $h(z) = \sin z$ fonksiyonları her yerde holomorftur. h fonksiyonun sıfır yerleri $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ noktalarıdır.
$h'(z) = \cos z$ ve $h'(n\pi) \neq 0$ olduğundan fonksiyonmuzun $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ noktalarında birnci dereceden kutup noktalrı vardır. (2.7) uygulanarak her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$res(f,n\pi) = \frac{g(n\pi)}{h'(n\pi)} = \frac{\cos(n\pi)}{\cos(n\pi)} = 1$$

elde ederiz. $\pi\mathbb{Z} = \{\pi n \,|n \in \mathbb{Z}\}$ olmak üzere γ izi $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$'de olan bir zincir ve f ise $\mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$'de holomorf olan herhangi bir fonksiyon olsun. $\pi\mathbb{Z}$' kümesinin γ zincirinin içine düşen öğeleri $a_1,\ldots,a_n$ ise

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\sin z}dz = \sum_{i=1}^{n} D(\gamma,a_i)$$

ve özellikle γ ayrıca pozitif yönlenmiş basit kapalı bir eğri ise

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{\sin z}dz = n$$

elde edilir.

Örnek 3 $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^3\,(z-1)}$ fonksiyonunun tekil noktaları 0 ve 1 noktalarıdır. $\sin 1 \neq 0$ olduğundan 1 noktasının birinci dereceden bir kutup yeri olduğu açıktır. 0 noktasında dikkatli olmak zorundayız, çünkü $\sin 0 = 0$. Ancak biz $h(0) = 1$ ve $z \neq 0$ için $h(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ ile açıklanan h fonksiyonun $\mathbb{C}$'de holomorf olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3\,(z-1)} = \frac{h(z)}{z\,(z-1)},\ h(0) \neq 0,\ h(1) \neq 0$$

olduğundan f fonksiyonu 0 noktasında da birinci dereceden bir kutup noktasına sahiptir. Böylece (2.6) ile

$$\begin{aligned} res(f,0) &= \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{h(z)}{z-1} = \frac{1}{-1} = -1 \\ res(f,1) &= \lim_{z\to 1} (z-1)\, f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{h(z)}{z} = \frac{\sin^2 1}{1} = \sin^2 1 \end{aligned}$$

elde edilir. γ izi $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$'de olan bir zincir ise

$$\int_\gamma \frac{\sin^2 z}{z^3\,(z-1)} dz = 2\pi i\left((-D(\gamma,0) + D(\gamma,1)\sin^2 1\right)$$

elde edilir.

Örnek 4 $\mathbb{C}^*$'da tanımlı $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonumuzun bir tek 0 tekil noktası vardır. $\mathbb{C}^*$'da

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}\right) = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \cdots\right) \\ &= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{z 4!} + \frac{1}{z^2 5!} + \cdots \end{aligned}$$

olduğundan 0 noktası bir özde tekil noktasıdır ve $res(f,0) = \dfrac{1}{4!}$. γ izi $\mathbb{C}^*$'da olan bir zincir olmak üzere

$$\int_\gamma z^3 e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{\pi i}{12} D(\gamma, 0).$$

Örnek 5 $\mathbb{C}\backslash\{0, \pm i\}$ kümesinde tanımlı

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^4}}}{z^2+1}$$

fonksiyonu verilsin. $\pm i$ noktaları birinci dereceden kutup noktalrı, 0 ise bir özde tekil noktadır. f fonksiyonu bir çift fonksiyon olduğundan herhengi bir $D_r^*(0)$'daki Laurent açılımında her tek $n \in \mathbb{Z}$ için a_n katsayısı sıfır olur; dolayısıyla $res(f, 0) = 0$. $\pm i$ noktalarında rezidüleri (2.7) ile hesaplarsak

$$res(f, i) = \frac{1}{e2i} \text{ ve } res(f, -i) = -\frac{1}{e2i}$$

elde ederiz. γ izi $\mathbb{C}\backslash\{\pm i, 0\}$'da olan herhangi bir zincir ise

$$\int_\gamma \frac{e^{-\frac{1}{z^4}}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e} \left(D(\gamma, i) - D(\gamma, -i) \right)$$

elde edilir. Dolyısıyla ayrıca $\pm i$ noktaları γ'nın içinde değil veya her ikisi de içinde ancak $D(\gamma, i) = D(\gamma, -i)$ ise

$$\int_\gamma \frac{e^{-\frac{1}{z^4}}}{z^2+1} dz = 0$$

elde edilir.

Örnek 6 Şimdi $f(z) = \dfrac{1}{1-z} e^{\frac{1}{z}}$ fonksiyonunun tekil noktalarını ve oradaki rezidülerini araştıralım. Fonksiyonumuzun tekil noktaları 0 ve 1 noktalarıdır. 1 birinci dereceden bir kutup noktasıdır ve örneğin (2.7) ile kolayca $res(f, 1) = -e$ bulunur. $0 < r \leq 1$ olmak üzere $D_r^*(0)$'da

$$f(z) = \left(1 + z + z^2 + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right)$$

elde edilir. Her iki seri de mutlak yakınsak olduğundan çarpım serisi de mutlak yakınsaktır ve bize f fonksiyonunun $D_r^*(0)$'da Laurent açılımını verir. Bu serimiz de mutlak yakınsak oladuğundan terimlerini istediğimiz gibi gruplayabiliriz. Bu çarpımda $\dfrac{1}{z}$'li terimler 1 ile $\dfrac{1}{z}$, z ile $\dfrac{1}{2!z^2}$, z^2 ile $\dfrac{1}{3!z^3}, \ldots$ çarpılarak elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonunun Laurent açılımda $\dfrac{1}{z}$'nin katsayısı a_{-1} için

$$res(f, 0) = a_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 1 - e$$

elde edilir. Dolayısıyla izi $\mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$'de olan bir γ zinciri için

$$\int_\gamma \frac{1}{1-z} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \left(-eD(\gamma, 1) + (1-e) D(\gamma, 0) \right).$$

(2.1.3) Tanım: f fonksiyonu $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde meromorf fonksiyonsa f'/f meromorf fonksiyonuna f fonksiyonunun **logaritmik türevi** denir.

f fonksiyonu a noktasında holomorf ve $f(a) \neq 0$ ise f'/f de a noktasında holomorftur. Tersine a noktası f fonksiyonunun bir sıfır yeri veya bir kutup noktası olsun. Bu durumda bir $D_r(a)$ dairesinde holomorf ve sıfır yeri olmayan bir h fonksiyonu, tek olarak belirli bir $m \in \mathbb{Z}$ tam sayısı

$$f(z) = (z-a)^m \, h(z), \;\; z \in D_r^*(a)$$

olacak biçimde bulunabilir. Dolayısıyla $D_r(a)$'de

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \tag{2.8}$$

elde edilir. Buradan f fonksiyonunun sıfır yerleri veya kutup yerlerinin tamı tamına logaritmik türevin kutup yerlerini oluşturduğunu, tüm bu kutup yerlerinin basit kutup yerleri ve

$$res(\frac{f'}{f}, a) = m \tag{2.9}$$

olduğunu elde ederiz. Eğer a bir sıfır yeri ise $m > 0$ sayısı a sıfır yerinin katlılığını verir; bu durumda m yerine $\mathbf{s(a)}$ yazalım. Eğer a bir kutup yeri ise $m < 0$ ve $-m$ sayısı a kutup yerinin katlılığını verir; bu durumda m yerine $-\mathbf{k(a)}$ yazalım. Böylece

$$res(\frac{f'}{f}, a) = \begin{cases} s(a) & , \; a \text{ bir sıfır yeri} \\ -k(a) & , \; a \text{ bir kutup yeri} \end{cases} \tag{2.10}$$

(2.1.4) Teorem . G bölgesinde, özdeş olarak sıfır olmayan bir $w = f(z)$ meromorf fonksiyonu verilsin. İzi G'de olan γ zinciri f fonksiyonunun K kutup noktaları ve S sıfır yerleri kümelerinden geçmiyorsa ve $\gamma \overset{G}{\approx} 0$ ise

$$D(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in S \cap I(\gamma)} D(\gamma, a) s(a) - \sum_{a \in K \cap I(\gamma)} D(\gamma, a) k(a) \tag{2.11}$$

Kanıt . Dönme sayısının tanımı, Rezidü Teoremi ve (2.10) ile

$$\begin{aligned} D(f \circ \gamma, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= \sum_{a \in I(\gamma)} D(\gamma, a) res(\frac{f'}{f}, a) \\ &= \sum_{a \in S \cap I(\gamma)} D(\gamma, a) s(a) - \sum_{a \in K \cap I(\gamma)} D(\gamma, a) k(a). \end{aligned}$$

Bu teoremin özel bir durumu da oldukça önemlidir. Önce bir kavram vereceğiz.

(2.1.5) Tanım : $B \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve γ bir zincir olsun. Her $z \notin B$ için $D(\gamma, z) = 0$ ve her $z \in B$ için $D(\gamma, z) = 1$ ise γ **zinciri** B **bölgesini çevreler** denir.

γ zincirinin B bölgesini çevrelemesi bir yandan $I(\gamma) = B$, diğer yandan ise γ zincirinin her $z \in B$ noktası etrafında pozitif yönde tam bir kez dönmesi demektir.

(2.1.6) Teorem . (Argüman İlkesi): U açık kümesinde γ zinciri verilsin ve bu zincir $B \subset U$ bölgesini çevrelesin. $f \in \mathcal{M}(U)$ meromorf fonksiyonunun $\underline{\gamma}$ izi üzerinde sıfır yeri ve kutup noktası olmasın. Katlılıklarıyla sayılmak üzere $\mathbf{S}_f(B)$ ve $\mathbf{K}_f(B)$ sırasıyla f fonksiyonunun B bölgesindeki sıfır ve kutup noktalarının toplam sayısını göstermek üzere

$$D(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = S_f(B) - K_f(B). \tag{2.12}$$

(2.1.7) Sonuç : Aynı koşullarda ayrıca f fonksiyonunun B bölgesinde kutup yeri yoksa

$$D(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=S_f(B) \tag{2.13}$$

olur.

Kanıt . $B\cup\underline{\gamma}$ kompakt ve $\underline{\gamma}$ izinde f fonksiyonunun sıfır ve kutup yerleri olmadığından B bölgesinde f fonksiyonunun sonlu sayıda sıfır yerleri ve sonlu sayıda kutup noktaları vardır. f fonksiyonunun, B bölgesindeki sıfır yerleri $a_1,\ldots,a_r$ ve bunların katlılıkları $n_1,\ldots,n_p$, kutup yerleri $b_1,\ldots,b_q$ ve bunların dereceleri $m_1,\ldots,m_q$ ise (2.1.4)'ten

$$\begin{aligned}D(f\circ\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz&=\sum_{i=1}^{p}s(a_i)-\sum_{j=1}^{q}k(b_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}n_i-\sum_{j=1}^{q}m_j=S_f(B)-K_f(B)\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.1.8) Not : Eğer γ eğrisi B bölgesini çevreliyorsa bu durumda genellikle γ yerine ∂B yazılır. Bu durumda (2.9) formülü

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=S_f(B)-K_f(B)$$

olarak ifade edilir.

Her rasyonel f fonksiyonu, kutup noktalardaki değeri ∞ ve ∞ noktasındaki değeri ise $\lim_{z\to\infty} f(z)$ olarak açıklanırsa sürekli bir $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ dönüşümü olarak düşünülebilir ve biz böyle yapacağız.

(2.1.9) Teorem . Bir rasyonel $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ fonksiyonu her $a\in\overline{\mathbb{C}}$ değerini, katlılıklarıyla sayılmak üzere, aynı çoklukta alır.

Kanıt . f fonksiyonunun a değerini aldığı yerlerde $g-a$ fonksiyonu 0 değerini alacağından, f fonksiyonunun 0 ve ∞ değerlerini aynı çoklukta aldıklarını göstermek yeterlidir. Bu ise $S_f(\overline{\mathbb{C}})-K_f(\overline{\mathbb{C}})=0$ olması demektir. Diğer yandan ∞ noktasının f rasyonel fonksiyonunun kutup noktası da sıfır yeri de olmadığını varsayabiliriz. $z_0\in\mathbb{C}$ noktası f fonksiyonunun ne bir sıfır yeri ne de bir kutup noktası olsun. Bu durumda ∞ noktası $g(z):=f(z_0+\frac{1}{z})$ fonksiyonunun ne bir sıfır yeri ne de bir kutup noktasıdır. Diğer yandan önermemiz f ve g fonksiyonları için birbirine denktirler. Bu nedenle daha baştan f fonksiyonumuzun ∞ noktasında ne bir sıfır yeri, ne de bir kutup noktası bulunmadığını varsayıyoruz.

$b := f(\infty) \neq 0, \infty$ ve $0 < \rho < |b|$ olsun. $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ sürekli olduğundan bir $r_0 > 0$ sayısı $f\left(\mathbb{C}\backslash D_{r_0}\right) \subset D_\rho(b)$ olacak biçimde bulunabilir. Dolayısıyla her $r > r_0$ için $f \circ C_r$ eğrisi $D_\rho(b)$ dairesinde olacağından $D(f \circ C_r, 0) = 0$ olur. Diğer yandan f fonksiyonunun sıfır yerleri ve kutup noktaları sonlu sayıda olduğundan r yeterince büyük seçilirse tüm sıfır ve kutup yerleri D_r dairesine düşer. $r > r_0$ sayısı böyle seçilirse (2.1.6) ile

$$S_f(\overline{\mathbb{C}}) - K_f(\overline{\mathbb{C}}) = S_f(D_r) - K_f(D_r) = D(f \circ C_r, 0) = 0$$

elde edilir ve işimiz biter.

(2.1.10) Sonuç (Cebirin Anateoremi): $n \in \mathbb{N}^*$ olmak ve sıfır yerleri katlılıklarıyla sayılmak üzere n. dereceden her $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomunun n sıfır yeri vardır.

Kanıt. n. dereceden bir polinom, yalnızca ∞ noktasında n. dereceden bir kutup noktasına sahip olduğundan her $a \in \overline{\mathbb{C}}$ değerini, özellikle 0 değerini n kez alır.

(2.1.11) Teorem (Rouche Teoremi) . G bölgesindeki γ zinciri bir A bölgesini çevrelesin. $f, g : G \to \mathbb{C}$ iki holomorf fonksiyon ve her $z \in \underline{\gamma}$ için
$|g(z)| < |f(z)|$ ise f ve $f + g$ fonksiyonlarının A bölgesindeki sıfır yerlerinin sayıları aynıdır.

Kanıt . Her şeyden önce $z \in \underline{\gamma}$ ise $f(z) \neq 0$. Bu nedenle f fonksiyonunun A kümesindeki sıfır yerleri ayrık, dolayısıyla sonludur. φ ve ψ fonksiyonları G kümesinde holomorf ve $f = \varphi\psi$ ise

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi'}{\psi}$$

olacağından (2.1) ile f, φ ve ψ fonksiyonlarının A kümesindeki S_f, S_φ ve S_ψ sıfır yerleri arasında

$$S_f = \int_\gamma \frac{f'}{f} = \int_\gamma \frac{\varphi'}{\varphi} + \int_\gamma \frac{\psi'}{\psi} = S_\varphi + S_\psi$$

bağıntısı vardır.Bu bağıntı ve $f + g = f(1 + g/f)$'den

$$S_{f+g} = S_f + S_{1+g/f}$$

elde edilir. $\underline{\gamma}$ üzerinde g/f sürekli ve $|g/f| < 1$ olduğundan $\|g/f\|_{\underline{\gamma}} =: r < 1$. Bu nedenle $h := 1 + g/f$ ve $0 < r < R < 1$ olmak üzere $h \circ \gamma$ eğrisinin izi $D_R(1)$ dairesinin içine düşer. Dolayısıyla $h \circ \gamma$ eğrisinin 0 etrafındaki dönme sayısı sıfırdır. Buradan

$$S_{f+g} = S_f + S_h = S_f + D(h \circ \gamma, 0) = S_f$$

ve işimiz biter.

Bu teorem bazen aşağıdaki gibi verilir.

(2.1.12) Teorem (Rouche Teoremi) . G bölgesindeki γ zinciri bir A bölgesini çevrelesin. $f, h : G \to \mathbb{C}$ iki holomorf fonksiyon ve her $z \in \underline{\gamma}$ için $|h(z) - f(z)| < |h(z)|$ ise f ve h fonksiyonlarının A bölgesindeki sıfır yerlerinin sayıları aynıdır.

Kanıt . (2.1.11)'de $h := f + g$ almak yeterlidir.
Cebirin Anateoremi Rouché Teoremi'nden de kolayca elde edilir. n. dereceden p polinomu verilsin. Genellikten bir şey kaybetmeden başat katsayıyı 1 seçebiliriz, dd.

$$\begin{aligned} p(z) &= z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= z^n + g(z) \end{aligned}$$

olsun. Rouché Teoreminde $G = \mathbb{C}$ ve $f(z) = z^n$ alalım. $g(z)$ derecesi $\leq n-1$ olan bir polinomdur. $\lim\limits_{|z|\to\infty} |g(z)/f(z)| = 0$ olduğundan $r > 0$ sayısı yeterince büyük seçilirse her $|z| = r$ için $|g(z)| < |f(z)|$ sağlanır. $\lim\limits_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty$ olduğundan r yeterince büyük seçilirse p polinomunun tüm sıfır yerleri D_r dairesinin içine düşer. $r > 0$ sayısını bu iki koşulu sağlayacak biçimde seçelim. Dolayısıyla $p = f + g$ polinomunun sıfır yerlerininin tümü D_r dairesine düşer ve Rouché Teoreminden dolayı bunlar f fonksiyonunun D_r dairesindeki sıfır yerleri kadar, yani n tanedirler.

Not: Cauchy integral formülü en genel biçimiyle Rezüdi Teoremi'nden de kazanılır. $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde f bir holomorf fonksiyon ve γ ise U kümesinde sıfıra homlog bir zincir olsun. $a \in U \backslash \underline{\gamma}$ olmak üzere f fonksiyonunun bir $D_r(a)$ dairesindeki açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = f(a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + \cdots$$

ise

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = \frac{f(a)}{(z-a)^{k+1}} + \cdots + \frac{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}{z-a} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} + \cdots$$

olur.

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}, \; z \in U \backslash \{a\}$$

ile tanımlanan fonksiyon holomoftur ve yalnızca a noktasında bir tekil noktası vardır. Rezidü Teoremi'nden

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz = \int_\gamma g = 2\pi i D(\gamma, a) res(g, a) = 2\pi i D(\gamma, a) \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$f^{(k)}(a) D(\gamma, a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz$$

elde edilir ki bu Cauchy formülünden başka bir şey değildir.

3. Uygulamalar

Bu bölümde bazı reel integralleri rezidü teoremi yardımıyla hesaplamayı öğreneceğiz. Önce reel analizden bazı bilgileri anımsatacağız.

1. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.
   Her $a < b < +\infty$ için $\int_a^b f(x)dx$ var ve ayrıca $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ mevcutsa **has olmayan** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **integrali yakınsaktır** denir ve

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

   olarak açıklanır.

2. **Cauchy Ölçütü:** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $b_\varepsilon > a$ sayısının her $b_\varepsilon < x < x'$ için $\left| \int_x^{x'} f(x)dx \right| < \varepsilon$
   olabilecek biçimde bulunabilmesidir. Bunu kısaca

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ yakınsak} \iff \lim_{\substack{x' \to +\infty \\ x \to -\infty}} \int_x^{x'} f(x)dx = 0, \quad a < x < x'$$

   olarak ifade edebiliriz.

3. $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ yakınsaksa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **mutlak yakınsaktır** denir. Cauchy ölçütünün doğrudan sonucu olarak $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ mutlak yakınsaksa yakınsaktır.

4. Bir $\alpha > 1$, bir $K > 0$ ve bir $b > a$ sayıları her $b \leq x$ için $|f(x)|\, x^\alpha \leq K$ olacak biçimde bulunabiliyorsa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integrai mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır.

5. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ ise $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ benzer biçimde tanımlanır. Şimdi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ keyfi verilsin. Eğer $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ve

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integralleri ayrı ayrı yakınsak iseler ve ancak bu durumda **has olmayan** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **integrali yakınsaktır** denir ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

olarak açıklanır. Bu tanım a noktasının seçiminden bağımsızdır. Bu tanımı

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

olarak da dile getirebiliriz. Eğer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ yakınsaksa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx$$

olduğu açıktır; ancak bunun tersi doğru değildir. $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx$ limiti varasa bu

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ile gösterilir ve buna **Cauchy esas değeri** denir. Cauchy esas değeri varken $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ıraksak olabilir. Örneğin $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ ıraksaktır, ancak $PV \int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$.

6. $-\infty < a < c < b < +\infty$ olmak üzere $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonun verilsin. Her $a < \beta < c$ için f fonksiyonu $[a,\beta]$ aralığında integrallenebilir ve $\displaystyle\lim_{\beta\nearrow c} \int_a^{\beta} f(x)dx$ limiti varsa

$$\int_a^c f(x)dx := \lim_{\beta\nearrow c} \int_a^{\beta} f(x)dx$$

limiti yine **has olmayan integral** olarak adlandırılır ve $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ integrali **yakınsaktır** denir. $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$ benzer biçimde tanımlanır. Eğer ayrı ayrı $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ ve $\displaystyle\int_a^c f(x)dx$ varsa

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ integrali **yakınsaktır** denir. Dolayısıyla

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right).$$

Bu kavramdan farklı olarak, eğer varsa

$$PV \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

limitine **Cauchy esas değeri** denir. Yine Cauchy esas değeri varken integral ıraksak olabilir. Örneğin $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty$$

olduğundan $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ integrali ıraksaktır, dolayısıyla $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{dx}{x}$ integrali de ıraksaktır. Ancak

$$\begin{aligned} PV \int_{-2}^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left([\ln |x|]_{-2}^{-\varepsilon} + [\ln x]_\varepsilon^1 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln \varepsilon - \ln 2 + \ln 1 - \ln \varepsilon) = -\ln 2. \end{aligned}$$

7. Şimdi $-\infty < a_1 < \cdots < a_n < +\infty$ olmak üzere f fonksiyonu $\mathbb{R} \backslash \{a_1, \cdots, a_n\}$ de tanımlı olsun. $-r < a_1$ ve $a_n < r$ koşulunu sağlayan her pozitif R için, aşağıdaki ifadedeki tüm integraller anlamlı ve

$$\lim_{\substack{r \to +\infty \\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \to 0}} \left(\int_{-r}^{a_1 - \varepsilon_1} f(x)dx + \int_{a_1+\varepsilon_1}^{a_2-\varepsilon_2} f(x)dx + \cdots + \int_{a_n+\varepsilon_n}^{r} f(x)dx \right)$$

limiti varsa, bu limite yine **Cauchy esas değeri** denir ve bu limit

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ile gösterilir. Az yer kaplaması için yukarıdaki limiti kısaca

$$\lim_{\substack{r \to +\infty \\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \to 0}} \left(\int_{-r}^{a_1 - \varepsilon_1} + \int_{a_1+\varepsilon_1}^{a_2-\varepsilon_2} + \cdots + \int_{a_n+\varepsilon_n}^{r} \right) f(x)dx$$

ile gösterelim.

Şimdi bazı reel integralleri tiplere ayırıp, rezüdi teoremi yardımıyla nasıl hesaplanacaklarını öğreneceğiz.

3.1 $\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$ tipinde integraller

Burada $R(x, y)$, C_1 birim çemberi üzerinde kutup noktaları olmayan bir rasyonel fonksiyondur. C_1 birimçemberini pozitif yönlenmiş olarak alacağız ve birim daireyi kısaca D_1 ile göstereceğiz. Birim çember üzerindeki bir $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$ için $\overline{z} = \dfrac{z\overline{z}}{z} = \dfrac{1}{z}$ olduğundan

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ ve}$$
$$\sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

olur.

$$f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

ile C_1 eğrisi üzerinde kutup noktaları olmayan bir rasyonel fonksiyon tanımlanır. $dz = ie^{it}dt = izdt$ olduğunu da gözetirsek

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt &= \int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in D_1} \operatorname{res}(f, a) \\ &= 2\pi \sum_{a \in D_1} \operatorname{res}(if, a)\end{aligned}$$

Bir örnek verelim.

Örnek 1 c reel ve $c > 1$ olmak üzere

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{c + \sin t}$$

integralini hesaplayalım. Yukarıdaki gösterimlere sadık kalacak olursak burada $R(x, y) = \dfrac{1}{c + y}$ rasyonel fonksiyonu söz konusudur ve bunun elbette C_1 üzerinde bir kutup noktası yoktur. Bu durumda

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{1}{c + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2ciz - 1}$$

olur. f fonksiyonun $p(z) := z^2 + 2ciz - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan

$$-ci \pm i\sqrt{c^2 - 1} = i\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 1}\right)$$

köklerinde birinci dereceden kutup yerleri vardır. Bu kutup yerlerinden sadece $a := i\left(-c + \sqrt{c^2 - 1}\right)$ noktası D_1 dairesindedir. f fonksiyonunun a noktasındaki rezidüsü ise ikinci bölümdeki (7) formülü ile

$$\operatorname{res}(f, a) = \frac{2}{p'(a)} = \frac{2}{2a + 2ic} = \frac{1}{i\sqrt{c^2 - 1}}$$

olduğundan

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{c+\sin t} = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{c^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}$$

elde edilir.

Örnek 2 $n \geq 1$ bir doğal sayı olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \varphi d\varphi$$

integralini hesaplayalım. Bu durumda

$$f(z) := \frac{1}{iz}\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^{2n} = \frac{1}{i2^{2n}z}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} z^{2n-k}\frac{1}{z^k}$$

olur ki f fonksiyonunun birim dairede sadece $z=0$ noktasında bir kutup noktası vardır. Üstelik bu ifade aynı zamanda $f(z)$ fonksiyonunun D_1^*'da Laurent açılımı olduğu için, bu ifadedeki $\frac{1}{z}$'nin katsayısı bize

$$\operatorname{res}(f,0) = \frac{1}{i2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{i}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!} = \frac{1}{i}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

rezidüsünü verir. Böylece

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\varphi d\varphi = 2\pi i \frac{1}{i}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = 2\pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

elde edilir.

3.2 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ tipinde integraller

Önce $f(x)$ fonksiyonunun bir $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyon olması durumunu ele alacağız. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ kutup noktaları olmayan reel değişkenli bir rasyonel fonksiyon ve Q polinomunun derecesi P polinomunun derecesinden en az 2 büyük olsun, diğer deyişle $\operatorname{der} Q \geq \operatorname{der} P + 2$ olsun. Analiz derslerinden bildiğimiz, veya analizden yaptığımız 4 nolu hatırlatmadan da kolayca görüleceği, gibi bu koşulda $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ yakınsaktır, dolayısıyla

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} R(x)dx. \tag{3.1}$$

Şimdi

$$H^u := \{z \in \mathbb{C}\,|\mathrm{Im}\, z > 0\} \ ve\ H^a := \{z \in \mathbb{C}\,|\mathrm{Im}\, z < 0\}$$

üst ve alt yarı düzlemler olmak üzere $\mathbb{C}$'de tanımlı $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ kompleks polinomunu inceleyelim. Her ne kadar $R(z)$ fonksiyonunun reel doğru üzerinde kutup noktaları yoksada alt ve üst yarı düzlemlerde kutup noktaları olabilir. γ düzlemde bir integral eğrisi ve f fonksiyonun γ'nın izi üzerinde tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $L(\gamma)$, eğrinin uzunluğunu göstermek ve $\|f\|_\gamma := \sup\limits_{z\in\gamma} |f(z)|$ olmak üzere

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq L(\gamma)\,\|f\|_\gamma \tag{3.2}$$

eşitsizliğine bir kaç kez gereksinim duyacağız.

(3.2.1) Teorem . $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonunun reel doğru üzerinde kutup noktası yoksa ve $\mathrm{der}\, Q \geq \mathrm{der}\, P + 2$ ise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{a\in H^u} \mathrm{res}(R,a) = -2\pi i \sum_{a\in H^a} \mathrm{res}(R,a). \tag{3.3}$$

Kanıt . Her şeyden önce $R(z)$ rasyonel fonksiyonunun sonlu sayıda kutup noktası olacağından (3.3) formülündeki toplamlar aslında sonlu toplamlardır; dolayısıyla yakınsaklık araştırma sorunu yoktur. $z \neq 0$ için $Q_1(z) := Q(z)/z^2$ olmak üzere $\mathrm{der}\, Q \geq \mathrm{der}\, P + 2$ olduğundan $\lim\limits_{z\to+\infty} \left|\dfrac{P(z)}{Q_1(z)}\right|$ vardır. Bu nedenle bir $M > 0$ sayısı ve bir $r_1 > 0$ sayısı her

$$|z| \geq r_1 \ \text{ için } \left|\frac{P(z)}{Q_1(z)}\right| \leq M \tag{3.4}$$

olacak biçimde bulunabilir.

$R(z)$ rasyonel fonksiyonunun kutup noktaları sonlu sayıda olduğundan $r_2 > 0$ sayısı yeterince büyük seçilirse her $r \geq r_2$ için bu fonksiyonun tüm kutup noktaları D_r dairesinin içine düşer. $r_0 := \max\{r_1, r_2\}$ olsun. $r \geq r_0$ olmak üzere C_r^u ile C_r pozitif yönlenmiş basit kapalı eğrisinin $\overline{H^u}$ kapalı üst yarı düzlemde kalan kısmı olsun. $d_r(x) := x$, $-r \leq x \leq r$ ise reel eksen üzerinde $-r$ noktasından r noktasına giden basit eğri olmak üzere $\eta_r := d_r + C_r^u$ pozitif yönlenmiş basit kapalı bir eğridir. Üst yarıdüzlemdeki tüm kutup noktaları η_r kapalı eğrisinin içine düşer. Rezidü teoreminden her $r \geq r_0$ için

$$2\pi i \sum_{a\in H^u} \mathrm{res}(R,a) = \int_{\eta_r} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{C_r^u} R(z)dz.$$

Bu eşitliklerin en solundaki terim r sayısından bağımsızdır. $r \to +\infty$ için limite geçersek (3.1)'den dolayı $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} R(x)dx$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r^u} R(z)dz = 0$ olduğunu gösterirsek işimiz biter. $r \geq r_0$ için (3.3) ile

$$\left|\int_{C_r^u} R(z)dz\right| \leq L(C_r^u)\left\|\frac{1}{z^2}\frac{P(z)}{Q_1(z)}\right\|_{C_r^u} \leq \pi r\frac{M}{r^2}$$

olduğundan $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r^u} R(z)dz = 0$ olur ve işimiz biter.

Önermenin diğer yarısı benzer biçimde kanıtlanır. Bu kez C_r^a ile pozitif birim çemberin $\overline{H^a}$ kapalı altyarıdüzlemde kalan kısmı olmak üzere $\eta_r := d_r - C_r^a$ basit kapalı eğrisi ile çalışacağız. η_r eğrisinin altyarıdüzlemdeki her kutup noktası etrafındaki dönme sayısı -1 olduğundan bu kez

$$-2\pi i\sum_{a\in H^a}\operatorname{res}(R,a) = \int_{\eta_r} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx - \int_{C_r^a} R(z)dz.$$

olur ve $r \to +\infty$ için aynı irdelemelerle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = -2\pi i\sum_{a\in H^a}\operatorname{res}(R,a)$$

olur.

Bu teoremin uygulamasında mantıklı olan elbette hangi altdüzlemde daha az kutup noktası varsa o düzlemde çalışmaktır.

Örnek 3 Şimdi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}$$

olduğunu göstereceğiz. $R(x) = \dfrac{1}{x^6+1}$ rasyonel fonksiyonu teoremin koşullarını sağlar. $R(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$ rasyonel fonksiyonunun kutup noktaları $Q(z) = z^6+1 = 0$ denkleminin kökleridir. Bu denklemin hepsi birim çember üzerinde bulunan ve biribirinden farklı altı kökü vardır. Bu köklerden üçü üstyarıdüzlemde, diğer üçü altyarıdüzlemde bulunur. Üstyarıdüzlemdeki kökler

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}k\right)}, k = 0, 1, 2$$

sayılarıdır.

$$\operatorname{res}(R, z_k) = \frac{1}{Q'(z_k)} = \frac{1}{6z_k^5} = \frac{z_k}{6z_k^6} = -\frac{z_k}{6}$$

olduğundan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = -\frac{2\pi i}{6}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$
$$= -i\frac{\pi}{3}\left(2i\sin\frac{\pi}{6} + i\right) = \frac{2\pi}{3}$$

elde ederiz. $R(x)$ bir çift fonksiyon olduğundan, buradan

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$$

elde ederiz.

Örnek 4 $n, p \in \mathbb{N}$ ve $n > p$ olmak üzere

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{x^{2n}+1}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi(2p+1)}{2n}}$$

olduğunu göstereceğiz. Teoremin koşulları sağlanır. Şimdi

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^{2p}}{z^{2n}+1}$$

rasyonel fonksiyonunun kutup noktalarını bulalım.

$$Q(z_k) = 0 \Longleftrightarrow z_k^{2n} = -1 \Longleftrightarrow z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi k}{2n}\right)},\ k = 0, \ldots, 2n-1.$$

Bu köklerden üstyarıdüzlemde olanlar $z_0, \ldots, z_{n-1}$ kökleridir. Bunların her biri R'nin birinci dereceden kutup noktalarıdır. R fonksiyonunun bu noktalardaki rezidüleri

$$\operatorname{res}(R, z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = \frac{z_k^{2p}}{2nz_k^{2n-1}} = -\frac{z_k^{2p+1}}{2n}$$

olur. Böylece

$$I = -\frac{i\pi}{n}\left(z_0^{2p+1} + z_1^{2p+1} + \cdots + z_{n-1}^{2p+1}\right)$$

olur. $\varphi_k := \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{2\pi k}{2n}$ olmak üzere $z_k = e^{i\varphi_k}$ olduğundan basit bir hesapla $z_k = z_0 z_0^{2k}$ olduğu kolayca görülür. Bu nedenle $\xi := z_0^{2p+1}$ olmak üzere $z_k^{2p+1} = \xi(\xi^2)^k$ olduğundan

$$I = -\frac{i\pi}{n}\xi\left(1 + \xi^2 + (\xi)^2 + \cdots + (\xi^2)^{n-1}\right)$$
$$= -\frac{i\pi}{n}\xi\frac{(\xi^2)^n - 1}{\xi^2 - 1} = -\frac{i\pi}{n}\xi\frac{-1-1}{\xi^2-1} = \frac{2\pi i}{n}\frac{\xi}{\xi^2-1}$$

olur. ξ birim çember üzerinde olduğundan $\xi^{-1} = \overline{\xi}$, bundan dolayı

$$I = \frac{2\pi i}{n}\frac{1}{\xi - \overline{\xi}} = \frac{2\pi i}{n}\frac{1}{2i\operatorname{Im}\xi} = \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\frac{\pi(2p+1)}{2n}}$$

elde edilir. Bu sonuçta özel olarak $p = 0$ ve $n = 3$ alırsak, bir önceki örnekte olduğu gibi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{3} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3}$$

elde ederiz.

Teoremimizin kanıtına baktığımızda bunu iki yönde genelleştirebiliriz.

(3.2.2) Teorem . f fonksiyonu $\overline{H^u}$ kapalı üstyarıdüzleminde meromorf olsun. f'nin sonlu sayıda tekil noktası bulunsun ve bunların tümü H^u üstyarıdüzleminde olsun. M, r_0 ve ρ pozitif sayıları

$$\text{her } |z| \geq r_0 \text{ için } |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\rho}}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a \in H^u} \text{res}(f, a)$$

else edilir. Eğer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olduğunu biliyorsak bu durumda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{a \in H^u} \text{res}(f, a)$$

olur.

Kanıt . $r_1 > 0$ yeterice büyük seçilirse tüm tekil noktalarımız D_{r_1} dairesinin içine düşer. $r^* : \max\{r_0, r_1\}$ olmak üzere her $r \geq r^*$ için, $\eta_r = d_r + C_r^u$ eğrisi (3.3)'nin kanıtındaki eğri olmak üzere

$$\left| \int_{C_r^u} f(z)dz \right| \leq \pi r \frac{M}{r^{1+\rho}} = \frac{\pi M}{r^\rho} \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

olduğundan savımız

$$2\pi i \sum_{a \in H^u} \text{res}(f, a) = \int_{\eta_r} f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{C_r}$$

eşitliğinde $r \to +\infty$ için limite geçerek elde edilir.

Bu teroremin ikilisi diyeceğimiz aşağıdaki teorem benzer biçimde kanıtlanır.

(3.2.3) Teorem . f fonksiyonu $\overline{H^a}$ kapalı üstyarıdüzleminde meromorf olsun. f'nin sonlu sayıda tekil noktası bulunsun ve bunların tümü H^a üstyarıdüzleminde olsun. M, r_0 ve ρ pozitif sayıları

$$\text{her } |z| \geq r_0 \text{ için } |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+\rho}}$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{a \in H^u} \operatorname{res}(f, a)$$

else edilir. Eğer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olduğunu biliyorsak bu durumda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{a \in H^u} \operatorname{res}(f, a)$$

olur.

(3.2.4) Not: (3.3) ve (3.6) teoremlerinde eğer ayrıca f bir çift fonksiyonsa

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

olduğundan $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ yakınsaktır.

Şimdi ikinci bir genelleme vereceğiz. Bu kez $\overline{H^u}$ kümesinde meromorf f fonksiyonunun sayılabilir çoklukta tekil noktaları olsun. Ancak bu tekil noktalar reel eksen üzerinde olmadıkları gibi herhangi bir $a \in H^u$ noktasına yığılmasınlar. Bu durumda f fonksiyonunun $a_0, a_1, a_2 \ldots$ tekil noktalarını $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ olacak biçimde sıralayabiliriz. Bu koşullarda, artık kanıtı aşikar olan, aşağıdaki teorem geçerlidir.

(3.2.5) Teorem . Pozitif M ve ρ sayıları, $\lim r_n = +\infty$ koşulunu sağlayan bir pozitif kesin artan dizi , C_{r_n} çemberleri üzerinde tekil noktalar olmayacak ve

$$\text{her } z \in C_{r_n} \text{ için } |f(z)| \leq \frac{M}{|r_n|^{1+\rho}}$$

olacak biçimde bulunabilsin. Bu koşullarda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{res}(f, a_n) \text{ yakınsaksa } PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{res}(f, a_n).$$

3.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}dx$ Fourier İntegralleri

Bu alt bölümde f fonksiyonunun reel eksen üzerinde tekil noktaları olmayacaktır.

Burada s bir reel parametredir. Eğer $f(x)$ reel değerli bir fonksiyonsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos sxdx \text{ ve } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin sxdx$$

integralleri $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}dx$ integralinin reel ve sanal kısımları olduğundan, bu integraller de bu tipin içersindedir. s parametresi o kadar önemli olmadığından biz $s=1$ durumunu tartışacağız. Dolayısıyla $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ integrallerini tartışacağız. x değişkeninden $z=x+iy$ değişkenine geçtiğimizde $f(z)e^{iz}$ fonksiyonunu inceleyeceğiz.

$$\left|f(z)e^{i(x+iy)}\right| = |f(z)|\, e^{-y}$$

eşitsizliği hangi yarıdüzlemde çalışacağımızı belirler: $y \geq 0$ için $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y}=0$ olduğundan üstyarıdüzlemde çalışırız. Eğer $s=-1$ alsaydık $|e^{-iz}| = e^{y}$ ve $\lim\limits_{y\to-\infty} e^{y}=0$ olacağından bu kez alt yarıdüzlemde çalışmamız gerekir.

Önce üç yardımcı önerme kanıtlayacağız. İki tanım verelim:

$$A(\theta_1,\theta_2) := \{re^{i\varphi}\,|0 \leq r,\ \theta_1 \leq \varphi \leq \theta_2\}$$
$$\gamma_r(t) := re^{it},\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $L(\gamma_r) = r\,(\theta_2-\theta_1)$ olur.

(3.3.1) Önerme: $f : A(\theta_1,\theta_2) \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=0$ ise

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

Kanıt . Her şeyden önce hipotezden dolayı

$$\lim_{z\to\infty}|z|\,|f(z)| = 0. \tag{3.5}$$

$|f|$ fonksiyonun her $r>0$ için $\underline{\gamma_r}$ kompkakt kümesinde sürekli olduğu için bir $a_r \in\underline{\gamma_r}$ noktasında maksimumunu alır, yani $|f(a_r)| = \|f\|_{\gamma_r}$ olur. besbelli ki $r\to+\infty$ için $a_r\to\infty$. Böylece (3.5) ile

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\int_{\gamma_r} f(z)dz\right| \leq L(\gamma_r)\,\|f\|_{\gamma_r} = (\theta_2-\theta_1)\,r\,|f(a_r)| \\ &\leq (\theta_2-\theta_1)\,|a_r|\,|f(a_r)| \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.3.2) Önerme : $f : A(\theta_1, \theta_2) \to \mathbb{C}$ sürekli ve $\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$ ise

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Kanıt . Tıpkı (3.10) gibi kanıtlanır.

(3.3.3) Önerme : $0 \leq \theta_1 < \varphi < \theta_2 \leq \pi$ olmak üzere $A(\theta_1, \theta_2)$'de bölgesindeki her sürekli f fonksiyonu için $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$ ise

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz = 0.$$

Kanıt . $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ için $|e^{iz}| = e^{-r \sin\varphi}$ olacağından

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz \right| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(re^{i\varphi}) e^{ire^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| f(re^{i\varphi}) e^{ire^{i\varphi}} ire^{i\varphi} \right| d\varphi$$
$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz \right| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| f(re^{i\varphi}) \right| \left| e^{ire^{i\varphi}} \right| \left| ire^{i\varphi} \right| d\varphi \leq \|f\|_{\gamma_r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r \sin\varphi} r d\varphi$$

eşitsizliğini elde ederiz. $|f|$ sürekli olduğundan γ_r eğrisinin izi üzerinde bir a_r noktasında maksimumunu alır, dolayısıyla $\|f\|_{\gamma_r} = |f(a_r)|$ olacağından hipotezimizden dolayı $\lim_{r \to +\infty} \|f\|_{\gamma_r} = 0$ olur. Dolayısıyla bir $p > 0$ sayısıyla her $r > 0$ için

$$I_r := \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r \sin\varphi} r d\varphi \leq p$$

olduğunu gösterebilirsek bu eşitsizlikten $\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} dz$ elde ederiz ve işimiz biter.

$[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında tanımlı $g(\varphi) := \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ fonksiyonu süreklidir. g fonksiyonu $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında türevlenebilir ve orada $g'(\varphi) < 0$ olduğundan g fonksiyonu $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında kesin azalandır. Böylece

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\varphi}{\varphi} \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{2}{\pi} r\varphi \geq -r \sin\varphi \geq -r\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \tag{3.6}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. (3.6) eşitsizliğini kullanarak, daima $e^x \geq 0$ olduğunu da gözetirsek

$$\begin{aligned}I_r &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r\sin\varphi} r d\varphi \le \int_0^{\pi} e^{-r\sin\varphi} r d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\varphi} r d\varphi \\ &\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} r\varphi} r d\varphi \le 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi} r\varphi} r d\varphi = 2\frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

elde ederiz ve işimiz biter.

(3.3.4) Teorem . $\overline{H^u}$'de meromorf f fonksiyonunun sonlu sayıda tekil noktası olsun ve reel doğru üzerinde tekil noktaları olmasın. $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ ve $g(z) := f(z)e^{iz}$ ise

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{a\in H^u} \text{res}(g, a). \tag{3.7}$$

Eğer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx$ yakınsaksa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{a\in H^u} \text{res}(g, a).$$

, ayrıca f reel değerliyse

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x dx = \text{Rea}\left(2\pi i \sum_{a\in H^u} \text{res}(g, a)\right) \text{ ve}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x dx = \text{Im}\left(2\pi i \sum_{a\in H^u} \text{res}(g, a)\right).$$

Kanıt . $r_0 > 0$ yeterince büyük seçilirse her $r \ge r_0$ için $f(z)$ fonksiyonunun, dolayısıyla $f(z)e^{iz}$ fonksiyonunun tüm tekil noktaları $\eta_r = d_r + C_r^u$ kapalı eğrisi içine düşer. Dolayısıyla her $r \ge r_0$ için

$$\begin{aligned}2\pi i \sum_{a\in H^u} \text{res}(g, a) &= \int_{\eta_r} g(z)dz = \int_{-r}^{r} g(x)dx + \int_{C_r^u} g(z)dz \\ &= \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx + \int_{C_r^u} f(z)e^{iz}dz\end{aligned}$$

Bu eşitlikte sol taraf r'den bağımsızdır. $r \to +\infty$ için limite geçersek (3.3.3) ile sav elde edilir.

Bu teoremin ikilisi diyeceğimiz aşağıdaki teorem benzer biçimde kanıtlanır.

(3.3.5) Teorem . $\overline{H^a}$'da meromorf f fonksiyonunun sonlu sayıda tekil noktası olsun ve reel doğru üzerinde tekil noktaları olmasın. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ ve $g(z) := f(z)e^{-iz}$ ise

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix}dx = -2\pi i \sum_{a\in H^a} \operatorname{res}(g,a).$$

(3.3.4) ün tüm ekleri aynen geçerlidir.

(3.3.6) Not: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ mutlak yakınsaksa $|f(x)e^{ix}| = |f(x)|$ olduğundan $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır. Çoğu durumda olduğu gibi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ bir rasyonel fonksiyon ve $\operatorname{der} Q \geq \operatorname{der} P$ ise $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ yakınsaktır. $s \neq 0$ herhangi bir reeel sayı ise elbette $g(z) = f(z)e^{isz}$ olmak üzere teoremlerimizin koşulları altında

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{a\in H^u} \operatorname{res}(g,a)\ , \quad s > 0$$
$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}dx = -2\pi i \sum_{a\in H^a} \operatorname{res}(g,a)\ , \quad s < 0$$

Örnek 5 $a > 0$ ve $m > 0$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}\cos mx dx \text{ ve } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}\sin mx dx$$

integrallerini hesaplayalım. Analiz derslerinden bu integrallerin yakınsak olduğunu biliyoruz(Örneğin, Buck: Advanced analysis, s.219). $f(z) := \dfrac{z}{z^2+a^2}$ fonksiyonun $\mathbb{C}\setminus\{\pm ia\}$'da holomorftur ve $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ olduğundan teoremin koşullarını sağlar. $m > 0$ olduğundan üstyarıdüzlemde çalışırız, dolayısıyla (3.3.4) teoremini uygulayacağız. Üstyarıdüzlemde $g(z) := f(z)e^{imz} = \dfrac{ze^{imz}}{z^2+a^2}$ fonksiyonunun bir tek tekil noktası vardır, o da ia'dır.Dolayısıyla

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2}e^{imx}dx = 2\pi i \operatorname{res}(g, ia).$$

ia noktası birinci dereceden bir kutup noktası olduğu için

$$\operatorname{res}(g,ia) = \lim_{z\to ia} (z-ia)\, g(z) = \lim_{z\to ia} \frac{ze^{imz}}{z+ia} = \frac{iae^{imia}}{2ia} = \frac{e^{-ma}}{2}$$

olur. Buradan sırasıyla

$$I := PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2} e^{imx} dx = \pi i e^{-ma}$$
$$I_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \cos mx dx = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \cos mx dx = \mathrm{Rea}\, I = 0$$
$$I_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \sin mx dx = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \sin mx dx = \mathrm{Im}\, I = \pi e^{-ma}$$

elde ederiz. Burada $I_1 = 0$ olduğu herhangi bir işlem yapmadan da görülebilir; nedeni $\dfrac{x \cos mx}{x^2+1}$ fonksiyonunun bir tek fonksiyon olmasıdır.

Örnek 6 Şimdi $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ integralini hesaplayalım. $f(x) := \dfrac{1}{x^2+1}$ olmak üzere $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ yakınsak olduğundan $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix} dx$ integrali de yakınsaktır. Burada $s = 1$ olduğundan üstyarıdüzlemde çalışırız. $g(z) := \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ fonksiyonu $\mathbb{C} \backslash \{\pm i\}$'de holomorftur. Üsyyarıdüzlemde sadece i noktasında birinci dereceden bir kutup noktası vardır. $\mathrm{res}(g, i) = \dfrac{e^{-1}}{2i} = \dfrac{1}{2ie}$ olduğu kolayca görülür. Böylece

$$J := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \mathrm{Rea} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{ix} dx = \mathrm{Rea}\, \frac{\pi}{e} = \frac{\pi}{e}$$

elde edilir. Ancak $h(x) := \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ bir çift fonksiyon olduğundan $I = \dfrac{1}{2} J = \dfrac{\pi}{2e}$ elde edilir.

3.4 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx$ Fourier İntegralleri

Bu alt bölümde $f(x)$ fonksiyonunun reel eksen üzerinde basit kutup noktaları olmasına izin verilecektir. Önce iki yardımcı önerme kanıtlayacağız. Bu iki önermede de

$$\gamma_\rho(t) := a + \rho e^{it}, 0 \leq \varphi_1 \leq t \leq \varphi_2 \leq 2\pi$$

olacaktır. Ayrıca $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\overrightarrow{a, b}$ ile

$$\gamma(t) = a + (b-a)\, t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

ile parametrelenmiş a noktasından b noktasına bir doğru boyunca giden basit eğri gösterilsin.

(3.4.1) Önerme : f fonksiyonu $D_r(a)$'da holomorfsa

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz = (\varphi_2 - \varphi_1)\, i f(a).$$

Kanıt . f fonksiyonunun $D_r(a)$'daki seri açılımı

$$f(z) = \sum_{0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

ise $z \neq a$ için

$$\frac{f(z)}{z-a} = \frac{a_0}{z-a} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^{n-1} =: \frac{a_0}{z-a} + g(z)$$

olur. Elbette g fonksiyonu $D_r(a)$'da holomorftur. Dolayısıyla $0 < r' < r$ ise g fonksiyonu mutlak değerce $\overline{D_{r'}(a)}$ kompakt kümesinde bir M ile sınırlıdır. Böylece her $0 < \rho < r'$ için

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{a_0}{z-a} dz + \int_{\gamma_\rho} g(z) dz$$

olur. Bir yandan

$$\left| \int_{\gamma_\rho} g(z) dz \right| \leq M (\varphi_2 - \varphi_1)\, \rho \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0$$

, diğer yandan

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{a_0}{z-a} dz = a_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{i\rho e^{it}}{\rho e^{it}} dt = a_0 (\varphi_2 - \varphi_1)\, i = f(a) (\varphi_2 - \varphi_1)\, i$$

olduğundan sav çıkar.

(3.4.2) Önerme : f fonksiyonu $D_r^*(a)$'da holomorf ve a noktasında bir basit kutup noktası olsun. Bu durumda

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = (\varphi_2 - \varphi_1)\, i \operatorname{res}(f, a). \tag{3.8}$$

Kanıt . $g(a) := \operatorname{res}(f, a)$ ve her $z \in D_r^*(a)$ için $g(z) := (z-a) f(z)$ ile tanımlanan fonksiyon $D_r(a)$'da holomorftur. Bir önceki önermeyi bu g fonksiyonuna uygularsak

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{g(z)}{z-a} dz = (\varphi_2 - \varphi_1)\, i g(a)$$
$$= (\varphi_2 - \varphi_1)\, i \operatorname{res}(f, a)$$

elde edilir ve kanıt biter.

(3.4.2) önermesini aşağıdaki teoremin kanıtında $\varphi_1 = 0$ ve $\varphi_2 = \pi$ özel durumunda kullanacağız, bu durumda $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ olur.

(3.4.3) Teorem . $a_1, \ldots, a_n$ reel sayılar ve $a_1 < \cdots < a_n$ olsun. f fonksiyonu $\overline{H^u}$ kapalı üstyarıdüzleminde $a_1, \ldots, a_n$ noktaları ve H^u üstyarıdüzlemindeki sonlu nokta dışında holomorf olsun ve bu noktalarda ise f fonksiyonunun basit kutup noktaları bulunsun. Eğer ayrıca $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$ ve $m > 0$ ise

$$PV\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)e^{imz}dz = 2\pi i\left(\sum_{a\in H^u}\operatorname{res}(f,a) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(f,a_k)\right). \tag{3.9}$$

Kanıt . $r_0 > 0$ sayısı yeterince büyük seçilirse f'nin tüm tekil noktaları D_{r_0} dairesine düşer. Yeterince küçük $\varepsilon_k > 0$ sayıları ile

$$\gamma_k(t) := a_k + \varepsilon_k e^{it}\ , \quad 0 \le t \le \pi,\ k = 1, \ldots n$$

, $g(z) := f(z)e^{imz}$ olmak üzere $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ pozitif sayıları yeterince küçük seçilirlerse f fonksiyonunun H_u üstyarıdüzlemdeki tüm tekil noktalar

$$\eta_{r\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} := C_r^u + \overrightarrow{-r, a_1-\varepsilon_1} - \gamma_1 + \overrightarrow{a_1+\varepsilon_1, a_2-\varepsilon_2} + \cdots + \overrightarrow{a_n+\varepsilon_n, r}$$

kapalı eğrisinin içine düşer.

$$\begin{aligned}
I &:= 2\pi i\sum_{a\in H^u}\operatorname{res}(g,a) = \int_{\eta_{r\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n}} g(z)dz \\
&= \int_{C_r^u} g(z)dz + \int_{-r}^{a_1-\varepsilon_1} g(x)dx + \int_{-\gamma_1} g(z)dz + \cdots + \int_{a_n+\varepsilon_n}^{r} g(x)dx \\
I &= \int_{C_r^u} g(z)dz + \left(\int_{-r}^{a_1-\varepsilon_1} + \cdots + \int_{a_n+\varepsilon_n}^{r}\right) g(x)dx - \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} g(z)dz
\end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.10) eşitliğinin sol yanı sabittir. Önerme (3.3.2) ve Önerme (3.4.2)'den dolayı

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r^u} g(z)dz = 0 \text{ ve } \lim_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\to 0}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} g(z)dz = \pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(g,a_k)$$

olduğundan (10)'da $r \to +\infty$ ve $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \to 0$ için limite geçersek

$$I := 2\pi i\sum_{a\in H^u}\operatorname{res}(g,a) = PV\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx - \pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}(g,a_k)$$

olur bu da kanıtı tamamlar. Bu teoremin ikilisi diyebileceğimiz, f fonksiyonunun $a_1, \ldots, a_n$ noktaları ve H^a altyarıdüzlemindeki sonlu nokta dışında $\overline{H^a}$ altyarıdüzleminde holomorf olması durumunda teoremin ifadesini vermeye gerek duymuyoruz.

Örnek 7

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(\pi^2 - x^2\right)} dx$$

integralini hesaplayalım. Paydanın sıfır yerleri olan 0 ve $\pm\pi$ noktaları aynı zamanda $\sin x$ fonksiyonun da sıfır yerleri olduğundan $f(x) := \dfrac{\sin x}{x\left(\pi^2 - x^2\right)}$ fonksiyonu aslında bu noktalarda sürekli genişletilebilir. Bu nedenle I integrali aslında yakınsaktır. Şimdi

$$g(z) := \frac{e^{iz}\sin z}{z\left(\pi^2 - z^2\right)}$$

fonksiyonunu $\mathbb{C}\backslash\{0, \pm\pi\}$ kümesinde holomorftur ve $0,\ \pm\pi$ noktalarında ise birinci dereceden kutup noktalarına sahiptir. Buradaki rezidüleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(g, 0) &= \lim_{z \to 0} \frac{e^{iz}}{(\pi + z)(\pi - z)} = \frac{1}{\pi^2} \\
\operatorname{res}(g, \pi) &= \lim_{z \to \pi} \frac{e^{iz}}{z(\pi + z)} = \frac{-1}{2\pi^2} \\
\operatorname{res}(g, -\pi) &= \lim_{z \to -\pi} \frac{e^{iz}}{z(\pi - z)} = \frac{1}{2\pi^2}
\end{aligned}$$

Böylece (3.9) ile

$$\begin{aligned}
PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}\sin z}{z\left(\pi^2 - z^2\right)} dz &= 2\pi i \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2}\right) = \frac{i}{\pi} \\
PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(\pi^2 - x^2\right)} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\left(\pi^2 - x^2\right)} dx = \operatorname{Im} \frac{i}{\pi} = \frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 8

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x+1)(x^2+1)} dx \text{ ve } J := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

integrallerini hesaplayalım. Bu integralin yakınsak olduğunu biliyoruz.

$$g(z) := \frac{e^{i2z}}{(z+1)(z^2+1)}$$

fonksiyonu $\mathbb{C}\backslash\{-1, \pm i\}$ kümesinde holomorftur. 0 ve $\pm i$ noktaları g fonksiyonunun birinci dereceden kutup noktalarıdır. Bunlardan sadece i üstyarıdüzlemdedir. -1 ise reel doğru üzerindedir. $2 > 0$ olduğundan üstyarıdüzlemde çalışacağız. Rezidüleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(g, -1) &= \lim_{z \to -1} \frac{e^{i2z}}{z^2 + 1} = \frac{e^{-2i}}{2} \\
\operatorname{res}(g, i) &= \lim_{z \to i} \frac{e^{i2z}}{(z+1)(z+i)} = \frac{e^{-2}}{2i\,(i+1)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
PV\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)dz &= 2\pi i\frac{e^{-2}}{2i\,(i+1)}+\pi i\frac{e^{-2i}}{2}\\
&= \frac{\pi e^{-2}}{1+i}+i\frac{\pi}{2}\left(\cos\left(-2\right)+i\sin\left(-2\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{2e^{2}}\left(1-i\right)+i\frac{\pi}{2}\cos 2+\frac{\pi}{2}\sin 2 =: A
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{(x+1)(x^2+1)}dx &= \mathrm{Re}\,A = \frac{\pi}{2e^2}+\frac{\pi}{2}\sin 2\\
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{(x+1)(x^2+1)}dx &= \mathrm{Im}\,A = -\frac{\pi}{2e^2}+\frac{\pi}{2}\cos 2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.5 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ tipinde integraller

$0<\alpha<1$, $0\le\theta<2\pi$ ve $d_\theta := \{re^{i\theta}\ \ |0\le r<+\infty\}$ olmak üzere $\mathbb{C}_\theta := \mathbb{C}\backslash d_\theta$ olsun. $\mathbb{C}_\theta$ basit bağlantılı olduğundan orada logaritmanın, dolayısıyla z^α'nın holomorf dalları vardır. Logaritmanın $\mathbb{C}_\theta$'da seçtiğimiz holomorf dalı

$$l_\theta(z) := \ln|z| + i\varphi \quad , \quad \varphi\in\arg z$$

ise $\mathbb{C}_\theta$'da z^α'nın holomorf dalı olarak

$$g_\theta(z) := e^{\alpha l_\theta(z)} = e^{\alpha(\ln|z|+i\varphi)} = |z|^\alpha\, e^{i\alpha\varphi}$$

fonksiyonunu seçeceğiz. $\theta=0$ için yalınlık açısından $g_\theta(z)$ yerine z^α yazacağız, dd ile $g_0(z)=z^\alpha$. olur.Böylece daima

$$\left|z^\alpha\right| = e^{\alpha\ln|z|} = |z|^\alpha = \left|g_\theta(z)\right|. \tag{3.11}$$

Şimdi $0<\theta_2<\theta<\theta_1<2\pi$ olmak üzere aşağıdaki seçimleri ve gösterimleri bir sonraki tipte de kullanacağız.

$$
\begin{aligned}
l_0(z) &:= \ln|z| + i\varphi,\ 0<\varphi<2\pi,\ \varphi\in\arg z\\
l_{\theta_1}(z) &:= \ln|z| + i\varphi,\ -2\pi+\theta_1<\varphi<\theta_1,\ \varphi\in\arg z\\
l_{\theta_2}(z) &:= \ln|z| + i\varphi,\ \theta_2<\varphi<2\pi+\theta_2,\ \varphi\in\arg z.
\end{aligned}
$$

Bu seçimlerle her pozitif $x > 0$ reel sayısı için

$$l_{\theta_1}(x) = \ln x,\ g_{\theta_1}(x) = x^\alpha,\ l_{\theta_2}(x) = \ln x + i2\pi,\ g_{\theta_2}(x) = x^\alpha e^{i2\pi\alpha} \tag{3.12}$$

olur. Ayrıca her $z = |z|\, e^{i\varphi}$ için

$$0 < \varphi < \theta \ \text{ ise } l_{\theta_1}(x) = l_0(x) \text{ ve } g_{\theta_1}(z) = g_0(z) = z^\alpha \tag{3.13}$$

$$\theta < \varphi < 2\pi \ \text{ ise } l_{\theta_2}(x) = l_0(x) \text{ ve } g_{\theta_2}(z) = g_0(z) = z^\alpha \tag{3.14}$$

eşitlikleri bizim için önemli olacaktır.

$0 < \varepsilon < r$ olmak üzere pozitif yönlenmiş C_ε ve C_r çemberlerini aşağıdaki gibi iki parçaya ayıralım:

$$C'_\sigma(t) := \sigma e^{it} \ (0 \le t \le \theta)\,, \quad C''_\sigma(t) := \sigma e^{it} \ (\theta \le t \le 2\pi)\,, \ \sigma = \varepsilon, r.$$

$\gamma_{\varepsilon r} := \overrightarrow{\varepsilon e^{i\theta}, re^{i\theta}}$ ve $d_{\varepsilon r} := \overrightarrow{\varepsilon, r}$ ise doğrusal yollarımız olsunlar.

$$\eta'_{\varepsilon r} := d_{\varepsilon r} + C'_r - \gamma_{\varepsilon r} - C'_\varepsilon \text{ ve } \eta''_{\varepsilon r} := -d_{\varepsilon r} - C''_\varepsilon + \gamma_{\varepsilon r} + C'_r$$

iki basit kapalı eğridir. (3.13) ve (3.14)'ten dolayı

$$\forall z \in I(\eta'_{\varepsilon r}) : g_{\theta_1}(z) = z^\alpha,\ ve\ \forall z \in I(\eta''_{\varepsilon r}) : g_{\theta_2}(z) = z^\alpha. \tag{3.15}$$

Bu gösterimlerden sonra integrallerimizi nasıl hesaplayacağımızı görelim. Eğer f bir *çift fonksiyonsa,*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

olacağından, integrali daha önce öğrendiğimiz yöntemlerle hesaplarız. $l_0(z)$ yerine $\log z$ yazacağız.

(3.5.1) Teorem . f fonksiyonu, $[0, +\infty)$ pozitif eksen üzerinde olmayan sonlu nokta dışında $\mathbb{C}$'de holomorf olsun. $\alpha \ge 0$, $r_0 > 0$ ve $M > 0$ pozitif sayıları

$$\text{her } |z| \ge r_0 \text{ için } |f(z)| \le \frac{M}{|z|^{2+\alpha}}$$

olacak biçimde bulunabilirse

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}(fl_0, a) = -\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}(f\log, a).$$

Kanıt . f fonksiyonunun tekil noktaları sonlu sayıda olduğu için $0 < \theta_2 < \theta < \theta_1 < 2\pi$ sayılarını, f fonksiyonunun d_θ, d_{θ_1} ve d_{θ_2} yarıdoğruları üzerinde tekil noktaları olmayacak biçimde seçebiliriz. $f_1(z) := f(z)l_{\theta_1}(z)$ ve $f_2(z) := f(z)l_{\theta_2}(z)$ fonksiyonlarının tekil noktaları f fonksiyonun tekil noktalarının aynısıdır. Şimdi $\varepsilon_0 > 0$ ve $r_0 > 0$ pozitif sayılarını $f(z)$ fonksiyonlarının tüm tekil noktaları her $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ve her $0 < r < r_0$ için

$$H_{\varepsilon,r} := \{\rho e^{it} \,|\varepsilon \le \rho \le r\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

halkasının içine düşecek biçimde seçebiliriz. Böylece her $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ve her $r \ge r_0$ için (3.13) ve (3.14)'ten dolayı

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}(f\log, a) &= 2\pi i \sum_{a\in I(\eta'_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(f\log, a) + 2\pi i \sum_{a\in I(\eta''_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(f\log, a) \\ &= 2\pi i \sum_{a\in I(\eta'_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(fl_{\theta_1}, a) + 2\pi i \sum_{a\in I(\eta''_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(fl_{\theta_2}, a) \end{aligned} \tag{3.16}$$

olur. $\gamma_{\varepsilon r}$ üzerinde $fl_{\theta_1} = fl_{\theta_2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma_{\varepsilon r}} f(z)l_{\theta_1}(z)dz + \int_{\gamma_{\varepsilon r}} f(z)l_{\theta_2}(z)dz &= 0, \\ \int_{d_{\varepsilon r}} f(z)l_{\theta_1}(z)dz &= \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\ln x dx, \text{ ve} \\ \int_{-d_{\varepsilon r}} f(z)l_{\theta_2}(z)dz &= -\int_{\varepsilon}^{r} f(x)\left(\ln x + 2\pi i\right)dx \end{aligned}$$

ayrıca

$$\int_{d_{\varepsilon r}} f(z)l_{\theta_1}(z)dz + \int_{-d_{\varepsilon r}} f(z)l_{\theta_2}(z)dz = -2\pi i \int_{\varepsilon}^{r} f(x)dx$$

olduğundan (3.16) eşitliği

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}(f\log, a) = -2\pi i \int_{\varepsilon}^{r} f(x)dx &+ \left(\int_{C'_r} - \int_{C'_\varepsilon}\right) f(z)l_{\theta_1}(z)dz \\ &+ \left(\int_{C''_r} - \int_{C''_\varepsilon}\right) f(z)l_{\theta_2}(z)dz \end{aligned}$$

şeklini alır. Burada sol yan sabittir. Sağ yandaki ilk integral dışındaki tüm integrallerin $\varepsilon, r \to +\infty$ için limitlerinin 0 olduğunu gösterirsek işimiz biter. $|l_{\theta_k}(z)| < \ln|z| + 2\pi$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ olduğu için

$$\left|\int_{C'_r} f(z)l_{\theta_1}(z)dz\right| \le L(C'_r)\,\|fl_{\theta_1}\|_{C'_r} \le \theta r \frac{M(\ln r + 2\pi)}{r^{2+\alpha}} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

elde edeiriz. Benzer biçimde $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r''} f(z)l_{\theta_2}(z)dz = 0$ görülür. Diğer yandan f fonksiyonu 0 noktasında holomorf olduuğundan f fonksiyonu bu noktanın bir komşuluğunda sınırlıdır. ε_0 pozitif sayısın daha baştan bir $m > 0$ sayısı ile her $|z| \leq \varepsilon_0$ için $|f(z)| \leq m$ olacak biçimde seçilebilir. Diğer yandan $\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon\ln\varepsilon = 0$ olduğundan

$$\left|\int_{C_\varepsilon'} f(z)l_{\theta_1}(z)dz\right| \leq L(C_\varepsilon')\,\|fl_{\theta_1}\|_{C_\varepsilon'} \leq \theta\varepsilon m(\ln\varepsilon + 2\pi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

elde edilir. Benzer biçimde $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon''} f(z)l_{\theta_2}(z)dz = 0$ görülür ve işimiz biter.
Bir örnek olarak

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

olduğunu göstereceğiz. $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1} =: \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ bir rasyonel fonksiyon ve $\operatorname{der} Q > \operatorname{der} P + 2$ olduğundan teoremin koşulları sağlanır. $f\log$ fonksiyonunun üç tane basit kutup noktası vardır; bunlar $z^3 = -1$ denkleminin kökleri olan $z_k = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$ noktalarıdır. Açık olarak $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$, $z_1 = -1$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$. Bu durumda

$$\operatorname{res}(f\log, z_k) = \frac{\log z_k}{3z_k^2} = \frac{z_k\log z_k}{3z_k^3} = -\frac{z_k\log z_k}{3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(f\log, z_0) &= -\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)i\frac{\pi}{3} = -i\frac{\pi}{18}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\\
\operatorname{res}(f\log, z_1) &= -\frac{1}{3}(-1)i\pi = \frac{1}{3}i\pi\\
\operatorname{res}(f\log, z_2) &= -\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)i\frac{5\pi}{3} = -i\frac{5\pi}{18}\left(1 - i\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Böylece

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3} = -\sum_{a\in\mathbb{C}}\operatorname{res}(f\log, a) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{18} + \frac{\pi 5\sqrt{3}}{18} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Teorem (3.5.1)'deki yöntemle $\int_0^{+\infty} f(x)\ln x dx$ tipinde integralleri de hesaplayabiliriz. Aynı yöntemi kullanırsak bu kez $(f(z)\log z)\log z = f(z)(\log z)^2$ fonksiyonun rezidülerini hesaplamakl işe başlayacağız. $x \in (0, \infty)$ için $l_{\theta_2}(x) = l_{\theta_1}(x) + 2\pi i$ olduğundan her $x > 0$ için

$$l_{\theta_2}^2(x) - l_{\theta_1}^2(x) = 4\pi i l_{\theta_1}(x) - 4\pi^2$$

olduğundan

$$\int_{d_{\varepsilon r}} f(z)l^2_{\theta_1}(z)dz + \int_{-d_{\varepsilon r}} f(z)l^2_{\theta_2}(z)dz = -4\pi i \int_{\varepsilon}^{r} f(x)l_{\theta_1}(x)dx + 4\pi^2 \int_{\varepsilon}^{r} f(x)dx \tag{3.17}$$

elde ederiz. Bu bize aşağıdaki teoremi verir:

(3.5.2) Teorem . $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ rasyonel fonksiyonunun $[0, +\infty)$ aralığında kutup yeri yoksa ve $\operatorname{der} Q \geq \operatorname{der} P + 2$ ise

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}(R\log^2, a) + i\int_0^{+\infty} R(x)dx.$$

Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için $R(x)$ reel değerler alıyorsa buradan

$$\int_0^{+\infty} R(x)\ln x dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Rea}\left(\sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}(R\log^2, a)\right)$$
$$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\left(\sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}(R\log^2, a)\right).$$

Kanıt . $\varepsilon, r, \ldots$ gibi tüm gösterimler biriönceki teoremde olduğu gibi seçilirse (3.17) ile

$$2\pi i\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}(R\log^2, a) = -4\pi i\int_\varepsilon^r f(x)l_{\theta_1}(x)dx + 4\pi^2\int_\varepsilon^r f(x)dx + A_{\varepsilon r}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}(R\log^2, a) = \int_\varepsilon^r f(x)l_{\theta_1}(x)dx + i\pi\int_\varepsilon^r f(x)dx + A_{\varepsilon r}$$

olur. $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to+\infty}} A_{\varepsilon r} = 0$ olduğundan buradan

$$-\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{res}(R\log^2, a) = \int_0^{+\infty} f(x)l_{\theta_1}(x)dx + i\pi\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

elde edilir ve sav çıkar.

Örnek 9 Örnek olarak

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi\ln a}{2a} \text{ ve } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0)$$

olduğunu gösterelim. $R(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ rasyonel fonksiyonu teoremin koşullarını sağlar. $\pm ia$ noktalarında bu fonksiyonunu birinci dereceden kutup noktaları vardır. Dolayısıyla

$$\operatorname{res}(R\log^2, ia) = \frac{(\log ia)^2}{2ia} = \frac{\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right)^2}{2ia} = \frac{\ln^2 a + i\pi\ln a - \frac{\pi^2}{4}}{2ia}$$
$$\operatorname{res}(R\log^2, -ia) = \frac{(\log(-ia))^2}{-2ia} = \frac{\left(\ln a + i\frac{3\pi}{2}\right)^2}{-2ia} = \frac{-\ln^2 a - 3i\pi\ln a + \frac{9\pi^2}{4}}{2ia}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{a\in\mathbb{C}}\operatorname{res}(R\log^2, a) = -\frac{1}{2}\frac{-2\pi i\ln a + 2\pi^2}{2ia} = \frac{\pi\ln a}{2a} + i\frac{\pi^2}{2a} =: S$$

olduğundan

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \operatorname{Re} S = \frac{\pi\ln a}{2a} \text{ ve}$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im} S = \frac{\pi}{2a}$$

elde edilir.

3.6 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha f(x)dx$ tipinde integraller

Burada $0 < \alpha < 1$, f fonksiyonunun ise$(0,+\infty)$'da tekil noktası olmasın, 0 noktasında birinci dereceden bir kutup noktası olabilir. Bunun dışında bir $r_0 > 0$, $p > 0$ ve bir $M > 0$ ile

$$\text{her } |z| \geq r_0 \text{ için } |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{1+p}}$$

olsun. Bu son koşul, örneğin $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ bir rasyonel fonksiyon ve $\operatorname{der} Q \geq \operatorname{der} P + 1$ ise sağlanır. Bu koşullar altında aşağıdaki teorem geçerlidir:

(3.6.1) Teorem .

$$\left(1 - e^{-i2\pi\alpha}\right)\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx = 2\pi i\sum_{\xi\in\mathbb{C}^*}\operatorname{res}(z^\alpha f(z), \xi). \qquad (3.18)$$

Kanıt. f fonksiyonumuzun sonlu sayıda tekil noktaları vardır. Bir $r_0 > 0$ sayısı, f'nin tüm tekil noktaları D_{r_0} dairesine düşecek ve her $|z| \geq r_0$ için $|R(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^{1+p}}$ olacak biçimde bulunabilir. θ, θ_1 ve θ_2 açıları ve g_0, g_{θ_1}, g_{θ_2} fonksiyonları bir önceki örnekteki gibi seçilirsin. $\varepsilon_0 > 0$ sayısı D_{ε_0} dairesinde, belki 0 dışında, f'nin hiç bir tekil noktasını içermeyecek kadar küçük seçilsin. $f_0(z) := g_0(z)R(z) = z^\alpha f(z)$, $f_1(z) := g_{\theta_1}(z)R(z)$ ve $f_2(z) := g_{\theta_2}(z)R(z)$ olmak üzere bu kez, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $r > r_0$, $\eta'_{\varepsilon r}$ ve $\eta''_{\varepsilon r}$ bir önceki teoremdeki gibi olmak üzere

$$\int_{d_{\varepsilon r}} f_1(z)dz = \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} f(x)dx \text{ ve } \int_{-d_{\varepsilon r}} f_1(z)dz = -\int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} e^{i2\pi\alpha} f(x)dx$$

olur. Bir önceki teoremde olduğu gibi

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C'_r} f_1(z)dz = 0 \text{ ve } \lim_{r\to+\infty} \int_{C''_r} f_2(z)dz = 0$$

kolayca görülür. Eğer 0 noktasında R holomorfsa

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C'_\varepsilon} f_1(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C''_\varepsilon} f_2(z)dz = 0$$

olduğu bir önceki teoremin kanıtında olduğu gibi kolayca görülür. Şimdi f'nin 0 noktasında birinci dereceden bir kutup noktası olduğunu varsayalım. Bu durumda $zf(z)$ fonksiyonu 0 noktasına holomorf genişletilebileceğinden bu noktada yerel sınırlıdır. Dolayısıyla ε_0 daha başyan yeterince küçük seçilirse bir $m > 0$ ile her $z \in D_{\varepsilon_0}$ için $|zf(z)| \leq m$ olur. Bu durumda

$$\left| \int_{C'_\varepsilon} f_1(z) \right| \leq \theta\varepsilon\varepsilon^{\alpha} \|f\|_{C'_\varepsilon} \leq \theta\varepsilon^{\alpha} m \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} 0$$

elde edilir. Benzer biçimde $\lim_{\varepsilon\to 0} \int f_2(z)dz = 0$ kanıtlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}(f,a) &= 2\pi i \sum_{a\in I(\eta'_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(f,a) + 2\pi i \sum_{a\in I(\eta''_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(f,a) \\
&= 2\pi i \sum_{a\in I(\eta'_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(f_1,a) + 2\pi i \sum_{a\in I(\eta''_{\varepsilon r})} \operatorname{res}(f_2,a) \\
&= \int_{\eta'_{\varepsilon r}} f_{\varphi_1}(z)dz + \int_{\eta''_{\varepsilon r}} f_{\varphi_2}(z)dz \\
&= \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right) \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} f(x)dx + A_{\varepsilon r}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\lim\limits_{\varepsilon, r\to+\infty} A_{\varepsilon r} = 0$ olduğundan sav elde edilir.

Örnek 10 $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

olduğunu görelim. $p := 1 - \alpha$ olmak üzere

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^p dx}{x(1+x)}.$$

$f(x) := \dfrac{1}{x\,(x+1)}$ rasyonel fonksiyonu teorem (3.6.1) in koşullarını sağlar.
$f(z) = \dfrac{1}{z\,(z+1)}$ fonksiyonunun 0 ve -1 noktalarında birinci dereceden kutup noktaları vardır.

$$\operatorname{res}(z^p f(z), -1) = \frac{(-1)^p}{-1} = -e^{pi\pi} = -\left(\cos p\pi + i \sin p\pi\right)$$

olduğundan

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi p}}\left(-e^{i\pi p}\right) = \frac{2\pi i}{e^{i\pi p} - e^{-i\pi p}} = \frac{i2\pi}{2i \sin \pi p} = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

ve

$$\sin p\pi = \sin\left(\pi - \pi\alpha\right) = \sin \pi\alpha$$

olduğundan sav çıkar.

Benzer biçimde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha} R(x) \ln^n x dx$$

tipinde integraller de hesaplanır. Bir önceki tipte olduğu gibi burada da $n = 1$ için yetineceğiz.

(3.6.2) Teorem . $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ rasyonel fonksiyonunun $(0, +\infty)$ aralığında kutup yerleri yoksa, 0 noktasında en fazla birinci dereceden bir kutup yeri var, $\operatorname{der} Q \geq \operatorname{der} P + 2$ ve $0 < \alpha < 1$ ise

$$\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} R(x) \ln x dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} \sum_{a \in \mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^{\alpha} R \log, a\right) + \frac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi\alpha\right)} \sum_{a \in \mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^{\alpha} R, a\right) \tag{3.19}$$

Kanıt . Uygun seçilmiş $\eta'_{\varepsilon r}$ ve $\eta''_{\varepsilon r}$ kapalı eğrileriyle $g_{\theta_1} R l_{\theta_1}$ ve $g_{\theta_2} R l_{\theta_2}$ fonksiyonlarına rezidü teoremini uygularız. Artık dikkat edilmesi gerekenin (3.12) ile

$$\int_{d_{\varepsilon r}} g_{\theta_1}(x) R(x) l_{\theta_1}(x) dx = \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} R(x) \ln x dx \text{ ve}$$
$$\int_{d_{\varepsilon r}} g_{\theta_2}(x) R(x) l_{\theta_2}(x) dx = \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} e^{i2\pi\alpha} R(x) \left(\ln x + i2\pi\right) dx$$

olduğundan

$$\int_{d_{\varepsilon r}} g_{\theta_1} R l_{\theta_1} - \int_{d_{\varepsilon r}} g_{\theta_2} R l_{\theta_2} = \left(1 - e^{i2\pi\alpha}\right) \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} R \ln - 2\pi i e^{i2\pi\alpha} \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} R$$

eşitliğinde dikkat etmektir. Böylece diğer kanıtlarda olduğu gibi

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^{\alpha} R \log, a\right) = \left(1 - e^{i2gp\alpha}\right) & \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} R(x) \ln x dx \\ & - 2\pi i e^{i2\pi\alpha} \int_{\varepsilon}^{r} x^{\alpha} R(x) dx + A_{\varepsilon r} \end{aligned}$$

elde ederiz. $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r\to+\infty}} A_{\varepsilon r} = 0$ olduğundan bu son eşitlikte $\varepsilon \to 0$ ve $r \to +\infty$ limitine geçersek

$$
\begin{aligned}
2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^\alpha R\log, a\right) = \left(1 - e^{i2gp\alpha}\right) \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\ln x dx \\
- 2\pi i e^{i2\pi\alpha} \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx + A_{\varepsilon r}
\end{aligned}
$$

, dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\ln x dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^\alpha R\log, a\right) \\
&+ \frac{2\pi i e^{i2\pi\alpha}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

(3.18) ile

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^\alpha R, a\right)$$

olduğunu gözetirsek

$$\frac{2\pi i e^{i2\pi\alpha}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \pi^2 \left(\frac{2i}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}}\right) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha}$$

eşitliği kanıtı tamamlar.

Örnek 11 Şimdi

$$I_1 := \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} dx \text{ ve } I_2 := \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} dx$$

integrallerini hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x\,(x^2+1)} dx, \text{ ve} \\
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x\,(x^2+1)} dx
\end{aligned}
$$

olduğundan, $\alpha = 1/2$ ve $R(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ ile çalışacağız. $e^{i2\pi\alpha} = e^{i\pi} = -1$ olduğundan (3.20) denklemi

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\ln x dx = i\pi \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^\alpha R\log, a\right) - i\pi \int_0^{+\infty} x^\alpha R(x) dx. \\
I_1 = i\pi \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}\left(z^\alpha R\log, a\right) - i\pi I_2 =: i\pi S - i\pi I_2 \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

olur. I_1 ve I_2 reel sayılar olduğundan (3.21) denkleminden $I_1 = \operatorname{Re} a\, i\pi S$ ve $I_2 = \operatorname{Im} S$ olur. R rasyonel fonksiyonunun 0 dışında iki tane basit kutup noktası vardır; bunlar $\pm i$.

$$\log i = l_0(i) = i\frac{\pi}{2} \text{ ve } \log(-i) = l_0(-i) = i\frac{3\pi}{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} i^\alpha &= \sqrt{i} = |i|^\alpha e^{i\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \\ (-i)^\alpha &= \sqrt{-i} = |-i|^\alpha e^{i\frac{1}{2}\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} S &= \sum_{a\in\mathbb{C}^*} \operatorname{res}(z^\alpha R\log, a) = \operatorname{res}(z^\alpha R\log, i) + \operatorname{res}(z^\alpha R\log, -i) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{i\pi}{2}\frac{1}{i(i+i)} + \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\frac{i3\pi}{2}\frac{1}{(-i)(-i-i)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + i\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$I_1 = \operatorname{Re} a\, i\pi S = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \text{ ve } I_2 = \operatorname{Im} S = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

olur.

SONUÇ :

Rezidü Teoremi ispatıyla beraber ele alındı. Daha sonra Rezidü Teoremi yardımıyla

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}dx \quad ,$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha} f(x)dx$ bu beş tip reel integralin

nasıl hesaplanması gerektiği gösterildi.

KAYNAKÇA

1. Prof.Dr.M.S.Eroğlu Notları
2. Saks,S. - Zygmund,A :Analytic functions.Elsevier (1971)
3. Lang,S. : Complex analysis. Springer (1985)
4. Conway,J.B :Functions of one complex variable. Springer (1978)
5. Cartan,H :Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veranderlichen.B.I Hochschultaschenbücher (1966)