

**T.C.
HALIÇ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI**

**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hazırlayan
Ali Turay ATABEY**

**Danışman
Prof. Dr. Hamit AVCI**

İstanbul – 2012

T.C.
HALIÇ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programı Tezli Yüksek Lisans öğrencisi **Ali Turay ATABEY** tarafından hazırlanan “**Adi Diferansiyel Denklemlerin Çeşitli Uygulamaları**” adlı bu çalışma jürimizce Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Tarihi : 15.06.2012

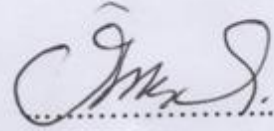
(Jüri Üyesinin Ünvanı , Adı , Soyadı ve Kurumu) :

İmzası :

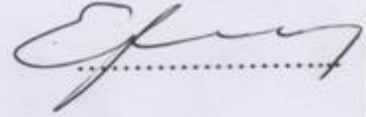
Jüri Üyesi: Prof.Dr.Hamit AVCI
Danışman– HAL.Üniv.Matematik ABD Öğr.Üyesi



Jüri Üyesi: Prof.Dr.Ömer OĞUZ
HAL.Üniv.Matematik ABD Öğr.Üyesi



Jüri Üyesi : Prof.Dr.Erol YARIZ
HAL.Üni.Endüstri Müh.ABD Öğr.Üyesi



Jüri Üyesi : Prof.Dr.Ayşe KARAHANSEN
Yıldız Teknik Üniv. Öğr.Üyesi (Yedek)

.....

Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.Tayfun YEGÜL
HAL.Üniv.Matematik ABD Öğr.Üyesi (Yedek)

.....

ÖNSÖZ

Bu Tez çalışmamda beni yönlendiren, bilgi ve tecrübesinden faydalandığım danışmanım Sayın Prof.Dr. Hamit AVCI'ya, desteğini her zaman hissettiğim hocam Prof.Dr. Ayşe KARA'ya ve Haliç Üniversitesinde kendilerinden istifade ettiğim bütün hocalarıma ayrı ayrı teşekkür ederim.

Tezimin yazım aşamasında bana yardımcı olan ve matematikle ilgilenmekten haz duyan çocuklarım Zeynep ve Fatih'e, en önemlisi hayatımın her aşamasında bana destek olan anneme ve babama da sonsuz şükranlarımı sunuyorum.

İstanbul – 2012

Ali Turay ATABEY

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No.
ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ŞEKİLLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
1. GİRİŞ	1
2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE TEMEL KAVRAMLAR	2
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI	7
3.1. Dik Yörüngeler	7
3.2. Mekanik Problemleri	12
3.3. Hız Problemleri	19
3.4. Elektrik Devre Problemleri	28
3.5. Elektromagnetik-İndüksiyon Problemleri	33
4. SABİT KATSAYILI İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI	39
4.1. Salınım Hareketi	39
4.1.1. Basit Harmonik Hareket	40
4.1.2. Serbest Sönümlü Titreşim Hareketi	42
4.1.3. Zorlanmış Sönümlü Titreşim Hareketi	46
4.2. Elektrik Devre Problemleri	52
4.3. Mekanik-Mukavemet Problemleri	58
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	65

ŞEKİLLER

	Sayfa No.
Şekil 3.1. İki eğri arasındaki açı.....	8
Şekil 3.2. Çember ve doğru ailesi.....	10
Şekil 3.3. Elips ve parabol ailesi.....	11
Şekil 3.4. Serbest düşme.....	13
Şekil 3.5. Dikey atış.....	16
Şekil 3.6. Eğik atış.....	17
Şekil 3.7. Dairesel hareket.....	18
Şekil 3.8. Hidrostatik basınç.....	23
Şekil 3.9. Elektrik akım devresi.....	29
Şekil 3.10. Elektrik akım devresi.....	31
Şekil 3.11. Elektrik akım devresi.....	32
Şekil 3.12. Magnetik alan.....	34
Şekil 3.13. Düzgün Manyetik Alanda Eğik Düzlem Üzerinde Kayan İletken Çubuk.....	36
Şekil 3.14. Mıknatıs dik kesiti.....	37
Şekil 4.1. Sürtünmesiz salınım hareketi.....	40
Şekil 4.2. Salınım hareketinin zamana bağlı yeri.....	41
Şekil 4.3. Sönümlü titreşim hareketi.....	44
Şekil 4.4. Sönümlü titreşim hareketinin durumları.....	46
Şekil 4.5. Zorlanmış sönümlü titreşim hareketi.....	47
Şekil 4.6. Basit sarkaç.....	50
Şekil 4.7. Basit harmonik hareket.....	51
Şekil 4.8. Kapalı elektrik devresi.....	53
Şekil 4.9. Kapalı elektrik devresi.....	56
Şekil 4.10. Kapalı elektrik devresi.....	56
Şekil 4.11. Kapalı elektrik devresi.....	57
Şekil 4.12-a. Negatif eğrilik.....	59
Şekil 4.12-b. Pozitif eğrilik.....	59
Şekil 4.13. Maddesel noktanın yer değiştirmesi.....	59
Şekil 4.14. Ankastra kirişte yer değiştirme.....	61

GENEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı : Ali Turay ATABEY
Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Uygulamalı Matematik
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hamit AVCI
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans – Mayıs 2012

ÖZET

Bu çalışmada diferansiyel denklemlerin temel kavramlarına yer verilerek, birinci ve ikinci mertebeden lineer ve sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin geniş uygulama alanı bulunduğu problemlerin çözümleri ele alınmıştır.

Bu problemler; mekanik problemleri, mukavemet problemleri, hız problemleri, elektrik-devre problemleri, elektromagnetik-indüksiyon problemleri ve titreşim hareketi gibi toplam 32 problemin anılan diferansiyel denklemler yardımıyla çözümlerine ayrıntılı olarak yer verilmiştir.

Bunların fen ve mühendislik dallarında uygulanmasının yanı sıra, günlük yaşamda ve sosyal hayatta karşılaşılan en önemli örneklerinin nüfus artış hızı ve bir bulaşıcı hastalığın yayılma hızı gibi problemler olduğu saptanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer diferansiyel denklemler, uygulamalar, nüfus, hastalık.

GENERAL INFORMATION

Name and Surname : Ali Turay ATABEY
Field : Mathematics
Program : Applied Mathematics
Supervisor : Assist. Prof.Dr. Hamit AVCI
Degree Awarded and Date : Master of Science – May 2012

SUMMARY

In this work, the solutions of problems which have wide application areas of linear differential equations of first order and linear differential equations with constant coefficients of second order have been investigated by giving the fundamental concepts of differential equations.

The solutions of these total 32 problems, such as mechanical problems, resistance problems, velocity problems, circuit problems, electric-magnetic induction problems, vibration motion problems, by mentioned differential equations, have been taken place in details.

In addition to the applications of these in science and in engineering areas, that the most important examples faced in daily life and in social life are the increasement of the population and the spreading speed of contagious disease has been determined.

Key words : Linear differential equations, applications, population, disease.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler, teorik ve pratik bakımdan büyük önem taşımakta, bütün fen ve mühendislik bilim dallarında, bazen sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok geniş bir uygulama alanı bulmaktadır.

Önce problemi matematiksel ifadelerle formüle etmek, daha sonra da problemle ilgili bazı sınır ve başlangıç şartlarını kullanarak problemin çözümünü oluşturan fonksiyonu bulmak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit matematiksel ifadelere diferansiyel denklem denir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde diferansiyel denklemlerle ilgili tanımlara, diferansiyel denklemlerin örnekleriyle sınıflandırılmasına yer verilmiştir. 3. bölümde birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin, 4. bölümde ise ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin bazı uygulama alanlarına genel çözümler elde edilerek örnekler verilmiştir.

2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diferansiyel denklemler ile ilgili bazı temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1

Matematikte birbirine bağlı olarak değişen büyüklüklere değişkenler denir.

Bir değişkenin diğer bir değişkene göre değişme oranına kaba tabirle türev denir. Türevlerini içinde bulunduran denklemlere diferansiyel denklem denir.

Tanım 2.2

Bir diferansiyel denklem eğer bir tek bağımsız değişkenden oluşan türevleri bulunduruyorsa bu tür diferansiyel denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. Genel olarak bağımlı değişkeni y , bağımsız değişkeni x olan bir adi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Örnek 2.1

Aşağıdaki diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere birer örnektirler.

$$\frac{dy}{dx} = x + 5$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Tanım 2.3

Eğer bir diferansiyel denklem bir veya birden fazla bağımsız değişkenin kısmi türevlerini bulunduruyorsa bu tür diferansiyel denklemlere de kısmi türevli diferansiyel denklemler denir. Genel olarak bağımlı değişkeni u , bağımsız değişkenleri x ve y olan bir kısmi diferansiyel denklem,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Örnek 2.2

Aşağıdaki diferansiyel denklemler kısmi türevli diferansiyel denklemlere birer örnektirler.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Tanım 2.4

Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek türev mertebesine o diferansiyel denklemin mertebesi denir.

Tanım 2.5

Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin derecesine o diferansiyel denklemin derecesi denir.

Örnek 2.3

Aşağıdaki örneklerde birkaç diferansiyel denklemin mertebe ve dereceleri gösterilmiştir.

$$\begin{array}{ll}
x^2 y - y'x = 0 & ; \quad 1. \text{ mertebe ve } 1. \text{ dereceden} \\
\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 - 3y = 0 & ; \quad 2. \text{ mertebe ve } 1. \text{ dereceden} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & ; \quad 2. \text{ mertebe ve } 1. \text{ dereceden} \\
(y'')^2 = (1 + y')^3 & ; \quad 2. \text{ mertebe ve } 2. \text{ dereceden} \\
(y'')^3 + (y')^5 - 4y = 4x + 1 & ; \quad 2. \text{ mertebe ve } 3. \text{ dereceden} \\
\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 + 3 \frac{dy}{dx} - 5xy = x + 1 & ; \quad 2. \text{ mertebe ve } 4. \text{ dereceden} \\
y''' - 3(y'')^3 + y' - 4y = \sin x & ; \quad 3. \text{ mertebe ve } 1. \text{ dereceden} \\
(1 + (y'')^2)^{3/2} = ky''' & ; \quad 3. \text{ mertebe ve } 2. \text{ dereceden}
\end{array}$$

Tanım 2.6

Bir diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan her $y=f(x)$ şeklindeki fonksiyona diferansiyel denklemin çözümü yada integrali denir. Bir diferansiyel denklemi çözmek demek, türevleri ile birlikte diferansiyel denklemde yerlerine konulduğunda, denklemi özdeş olarak sağlayan tüm fonksiyonları bulmak demektir. Diferansiyel denklemlerin çözümleri genel, özel ve tekil olmak üzere üç türdedir.

n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümünde n tane keyfi sabit bulunur. Özel çözümler ise, genel çözümlerde adı geçen keyfi sabitlere özel değerler verilerek elde edilir. Ayrıca bazı diferansiyel denklemlerin bu denklemi sağlayan fakat genel çözümlerden elde edilemeyen bir yada birkaç çözümü daha olabilir. Bu çözümlere de tekil yada singüler çözümler denir.

Örneğin $y'^2 + y^2 = 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y=\sin(x+c)$ dir. $c = \pi/2$ için $y=\cos x$ şeklinde bir özel çözüm elde edilir. Öte yandan $y = \pm 1$ de bu denklemi sağlar. Fakat bu çözümler $y=\sin(x+c)$ genel çözümünden elde edilemezler. Bu nedenle $y = \pm 1$ çözümleri tekil çözümlerdir.

$y=\sin(x+c)$ ifadesi bir eğri ailesi gösterir. Bu eğrilere diferansiyel denklemin integral eğrileri denir. Bu eğrilerin tümü aynı geometrik özelliğe sahiptir. Çünkü bu eğriler üzerindeki herhangi bir (x,y) noktasının koordinatları ve bu noktadaki teğetin

y' eğimi $y'^2 + y^2 = 1$ diferansiyel denklemini sağlarlar. Tekil çözüm, çözümü oluşturan eğri ailesinin zarfıdır.

Tanım 2.7

Bir diferansiyel denklemin bağımsız değişkeni ve tüm türevleri birinci dereceden ise, diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir.

Eğer bir denklem, bağımlı değişken y 'nin veya herhangi bir türevinin ikinci veya daha büyük dereceden kuvvetlerini içeriyorsa veya y ve y 'nin türevlerinin çarpımını içeren terimler içeriyorsa bu denkleme lineer olmayan diferansiyel denklem denir.

Daha genel bir ifadeyle bir diferansiyel denklem,

$$y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + f_2(x)y^{(n-2)} + \dots + f_n(x)y = R(x)$$

formunda ifade edilebiliyorsa denkleme lineer diyeceğiz. Aksi halde lineer değildir.

Bu denklemde eğer $R(x)=0$ ise lineer diferansiyel denklem homojendir. $R(x)\neq 0$ ise homojen olmayan diferansiyel denklem adını alır.

Örnek 2.4

Aşağıdaki örneklerde birkaç diferansiyel denklemin lineer olup olmadıkları ve homojen olup olmadıkları gösterilmiştir.

$$y'' + 3y = 0 \quad ; \quad 2. \text{ mertebeden lineer, homojen,}$$

$$y'' + 3y = 2x + \sin x \quad ; \quad 2. \text{ mertebeden lineer, homojen değil,}$$

$$y'' + 3yy' = 0 \quad ; \quad 2. \text{ mertebeden lineer değil,}$$

$$y''' + \sin xy' + \cos y = e^{-2x}; \quad 3. \text{ mertebeden lineer değil, homojen değil}$$

Tanım 2.8

Diferansiyel denklemler bağımlı değişken ve türevlerinin katsayılarının durumuna göre de sınıflandırılmaktadır. Eğer bu katsayılar birer sabit ise sabit katsayılı diferansiyel denklem, eğer bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar ise değişken katsayılı diferansiyel denklemler denir.

Örnek 2.5

Sabit katsayılı diferansiyel denklem ve değişken katsayılı diferansiyel denklemlere örnekler aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \quad ; \text{ Sabit katsayılı diferansiyel denklem,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 4x - 1 \quad ; \text{ Sabit katsayılı diferansiyel denklem,}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3s = \ell nt \quad ; \text{ Sabit katsayılı diferansiyel denklem,}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (3x+1)\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \quad ; \text{ Değişken katsayılı diferansiyel}$$

denklem,

$$7x\frac{d^2y}{dx^2} - 8x\frac{dy}{dx} - 3y = x - 3 \quad ; \text{ Değişken katsayılı diferansiyel denklem.}$$

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

Fiziksel bilimler, biyolojik bilimler, sosyal bilimler ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan pek çok sayıda problemin çözümünde diferansiyel denklemler çok önemli bir yer tutar. Öyle ki, bazı doğa kanunları doğrudan birer diferansiyel denklemle ifade edilir.

Hangi tür problemle karşılaşırsa karşılaşılsın ilk iş problemi matematiksel olarak ortaya koymak, başka bir deyişle probleme uyan diferansiyel denklemi yazmaktır. Sonra, denklemin çözümü problemle birlikte ele alınır ve gerekli yorum yapılır. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin uygulama alanı çok geniştir.

Bu bölümde, her biri birinci mertebeden birer lineer diferansiyel denklemle ifade edilebilen problemlerden bazıları ele alınacaktır.

3.1. Dik Yörüngeler

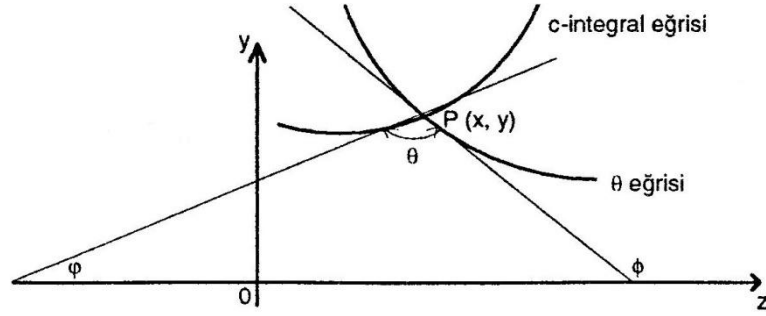
xy- düzleminin bir D bölgesinde tanımlanmış bir eğri ailesi,

$$f(x, y, c) = 0 \quad (3.1)$$

denklemi ile ifade edilir. Burada c bir parametredir ve c nin her değeri yeni bir eğriyi ifade eder. Bu eğriler birlikte bir eğri ailesi oluşturur.

Bir eğri ailesinin eğrilerinin her birini aynı bir θ açısı ile kesen bir eğri düşünülebilir. Bu eğriye, adı geçen eğri ailesinin θ -yörüngesi denir. Verilen eğri ailesine bağlı olmak üzere eğer θ açısı 90° olursa bu yörüngeye dik yörünge denir. Verilen bir eğri ailesinin θ -yörüngesini bulmak için bu ailenin $f(x, y, y') = 0$ diferansiyel denkleminde yararlanılır. Bu diferansiyel denklemin bir c integral eğrisi ile θ -eğrisinin bir P(x,y) noktasında kesiştiğini varsayalım. Şekil 3.1'de

görüldüğü üzere θ -eğrisi öyle bir eğridir ki, $P(x,y)$ noktasında bu eğriye teğet olan doğru, aynı noktada c -integral eğrisine teğet olan doğru ile θ açısı yapmaktadır.



Şekil 3.1. İki eğri arasındaki açı

Açıkça görülmektedir ki (3.1) denkleminde, c 'nin her noktasında ayrı bir y' değerini vermektedir. Böylece her nokta için bir (x,y,y') üçlüsü vardır. Diğer taraftan θ -eğrisi üzerinde, her nokta için $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}')$ üçlüsü tanımlanabilir. Burada \tilde{x} ve \tilde{y} kesişme noktasının koordinatlarını, \tilde{y}' ise θ -eğrisinin teğetinin eğimini göstermektedir. Bu demektir ki, P noktasında,

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}, \quad y' = \tan \phi, \quad \tilde{y}' = \tan \theta$$

dir. Bu durumda \tilde{y} ve \tilde{y}' arasında,

$$y' = \tan \phi = \tan(\phi - \theta)$$

yazılabilir. Buradan,

$$y' = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan \phi - \tan \theta}{1 + \tan \phi \cdot \tan \theta} = \frac{\tilde{y}' - \tan \theta}{1 + \tilde{y}' \cdot \tan \theta}$$

bağıntısı elde edilir.

Bu durumda, bir θ -yörünge eğrisi $P(x,y)$ noktasında,

$$f(x, y, y') = f\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{\tilde{y}' - \tan \theta}{1 + \tilde{y}' \cdot \tan \theta}\right) = 0$$

bağıntısını sağlayacaktır.

Bu demektir ki, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}')$ yerine (x,y,y') yazılırsa θ -yörünge eğrisinin diferansiyel denklemi olan,

$$f\left(x, y, \frac{y' - \tan \theta}{1 + y' \cdot \tan \theta}\right) = 0 \quad (3.2)$$

denklemi elde edilir. Özel olarak, dik yörünge hali için,

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{y' - \tan \theta}{1 + y' \cdot \tan \theta} = -\frac{1}{y'}$$

bulunur.

Öyle ise (3.2) diferansiyel denklemi,

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

şekline dönüşür.

Sonuç olarak, verilen eğrinin diferansiyel denklemi,

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

şeklinde ele alınır, burada,

$$\frac{dy}{dx} \text{ yerine } -\frac{dx}{dy}$$

yazmak suretiyle,

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem ile ifade edilen eğri ailesi de, ilk verilen eğri ailesinin dik yörüngesini teşkil eder.

Fizik ve mühendislik bilimlerinde birbirine dik eğri aileleri ile ilgili problemlere sık sık rastlanır. Aşağıdaki örneklerde bu problemlerden bazıları ele alınacaktır.

Örnek 3.1

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad c > 0 \quad (3.3)$$

eğri ailesi, aynı O merkezli ve c yarıçaplı çemberlerdir. Bu eğrilere dik olan eğri ailesini bulalım.

O noktasına pozitif yüklü bir elektriksel nokta-yük koyduğumuzu düşünelim. xy-düzleminde elektriksel potansiyel şiddeti aynı olan noktaların geometrik yeri c yarıçaplı bir çemberdir. Öyle ise, yukarıda verilen eğri ailesi, adı geçen eş potansiyel eğrilerin matematiksel ifadesinden başka bir şey değildir.

(3.3) denklemi ile verilen fonksiyonun diferansiyeli alınır,

$$2xdx + 2ydy = 0$$

elde edilir. Bu eğri ailesine dik olan eğri ailesinin diferansiyel denklemi ise,

$$ydx - xdy = 0$$

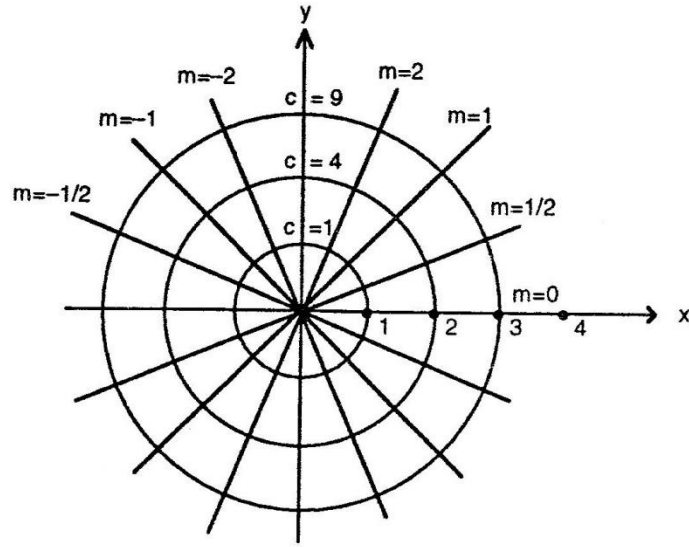
olur. Buradan,

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

$$y = mx$$

(3.4)

elde edilir. (3.4) denklemi, orijinden çıkan ve xy-düzleminde her doğrultuda uzanan doğrular ailesidir. Her iki ailenin birbirine dik olan eğrileri Şekil 3.2'de birlikte gösterilmiştir. Burada $y=mx$ denklemi ile ifade edilen doğrular, elektrik alanının orijinden çıkan ve xy-düzleminde uzanan kuvvet çizgilerini temsil etmektedir.



Şekil 3.2. Çember ve doğru ailesi

Örnek 3.2

Her birinin tepe noktası O noktası olan,

$$y^2 = 4cx$$

(3.5)

parabollerine dik olan eğri ailesini bulalım.

Önce, (3.5) denkleminin her iki tarafının x'e göre türevi alınır ve c yok edilirse,

$$2xdy - ydx = 0$$

(3.6)

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde,

$$\frac{dy}{dx} \text{ yerine } -\frac{dx}{dy}$$

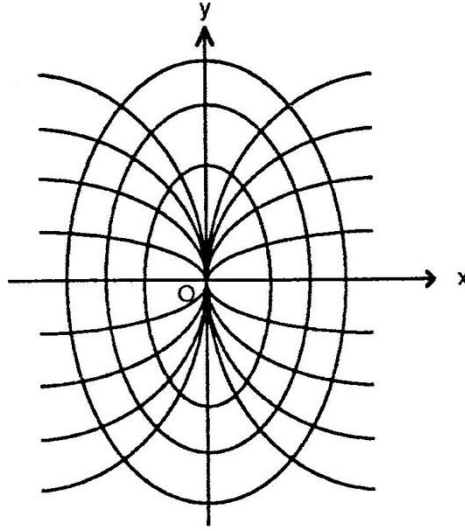
yazılırsa, (3.5) numaralı denklemle verilen eğri ailesine dik olan eğri ailesinin diferansiyel denklemi,

$$2xdx + ydy = 0 \quad (3.7)$$

olarak bulunur. Bu denklemin integrali alınırsa,

$$2x^2 + y^2 = m^2 \quad (3.8)$$

elde edilir. Buradan görülüyor ki, aranan eğri ailesi O merkezli bir elips ailesidir. Her iki eğri ailesi Şekil 3.3'te birlikte gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Elips ve parabol ailesi

Örnek 3.3

$$cx^2 + y^2 = 1 \quad (3.9)$$

denklemini ile verilen eğrilere dik olan eğriyi bulalım.

Bundan önceki örnek problemlerden farklı olarak bu defa (3.9) denkleminin türevi alınırsa,

$$cx + yy' = 0 \quad (3.10)$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) denklemleri arasında c yok edilirse,

$$(1 - y^2) + xyy' = 0$$

elde edilir. Burada, y' yerine

$$-\frac{1}{y'}$$

yazılırsa, dik yörünge eğri ailesinin diferansiyel denklemini,

$$(1 - y^2) - \frac{xy}{y'} = 0$$

veya

$$(1 - y^2)dy = xydx$$

bulunur. Bu denklemin integrali alınır,

$$x^2 + y^2 - \ln y^2 = m \quad (3.11)$$

elde edilir.

3.2. Mekanik Problemleri

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin en önemli uygulama alanı elemanter mekaniktir. Bu kısımda, bir rijid cismin Newton'un ikinci hareket kanununa uyan doğrusal hareketi ile ilgili bazı problemler ele alınacaktır.

Bilindiği gibi Newton'un ikinci hareket kanunu,

$$F = ma = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dp}{dt}$$

şeklinde ifade edilir. Burada m rijid cismin kütlesi, F cisme etki eden sabit kuvvet, a cismin hareketinin ivmesi, v hız ve p cismin momentumudur. Kuvvet sabit olduğu zaman a ivmesi sabittir ve bu durumda cismin hızı zamana bağlı olarak değişir. Gidilen yol x ile ifade edildiği zaman cismin v ani hızı

$$\frac{dx}{dt}$$

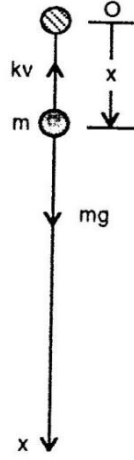
olarak tanımlanır.

Örnek 3.4

Kütlesi m olan bir cisim yerden oldukça yüksekte bulunan bir noktadan ilk hızsız olarak serbest düşmeye bırakılıyor. Cisme etki eden yer çekim kuvveti sabit ve hava direncinin cismin hızı ile orantılı olduğu kabul edildiğine göre, herhangi bir t anında cismin başlangıç noktasından hangi uzaklıkta olduğunu ve o anda hangi hızla hareket ettiğini bulalım.

Şekil 3.4'te görüldüğü gibi, pozitif x eksenini boyunca aşağı doğru düşmekte olan cisim bir t anında O başlangıç noktasından x kadar uzakta ve bir v hızı ile hareket etmekte olsun. k pozitif bir katsayı olmak üzere, cisim v hızı ile aşağı doğru hareket etmekte iken cismin hareketine engel olmaya çalışan hava direnci cismin hızı ile orantılıdır ve $k v$ 'ye eşittir. Cisme etki eden yerçekimi kuvveti de mg olduğuna

göre, t anında cisme etki eden toplam kuvvet $(mg - kv)$ olur. O zaman, Newton'un ikinci hareket kanununa göre,



Şekil 3.4. Serbest düşme

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad (3.12)$$

yazılır. (3.12) denklemi, birinci dereceden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklem kolayca çözülür ve

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-kt/m} \quad (3.13)$$

elde edilir. $t=0$ anında cismin hızı (ilk hız) sıfır olduğundan,

$$0 = \frac{mg}{k} + c_1$$

ve buradan

$$c_1 = -\frac{mg}{k}$$

bulunur. c_1 'in bu değeri denklem (3.13)'de yerine yazılırsa,

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}) \quad (3.14)$$

elde edilir. Burada $t \rightarrow \infty$ için v 'nin alacağı değer v_1 (limit hızı) ile gösterilir ve denklem (3.14)'den

$$v_1 = \frac{mg}{k}$$

bulunur.

Ayrıca ifade edelim ki, hava direnci cismin hızı ile orantılı olduğuna göre cismin hızı arttıkça hava direncide artacak ve bir süre sonra hava direnci cisme etki eden yer çekim kuvvetine eşit olacaktır. Bu duruma ulaşıldığında cisme etki eden toplam kuvvet sıfır olacağından, o andan itibaren cismin hızı değişmeyecek ve sabit kalacaktır. Cismin bu hızı limit hız olarak tanımlanır. Bu durumda,

$$mg - kv_1 = 0$$

olacağından, limit hızın değeri yukarıda olduğu gibi

$$v_1 = \frac{mg}{k}$$

bulunur.

t anında cismin O'dan uzaklığını bulmak için, (3.14) denkleminde

$$v = \frac{dx}{dt}$$

yazılır ve integral alınır. Problemin ifadesinde verilen başlangıç şartlarından biri olan $x(0)=0$ şartı kullanılarak integral sabitinin değeri bulunur ve sonuç olarak,

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}) \quad (3.15)$$

elde edilir.

Örnek 3.5

Kütlesi m olan bir cisim yer küresi üzerinde bir yerden yukarıya doğru bir v_0 ilk hızı ile fırlatılıyor. Hava direncini ihmal ederek, cismin bir daha yer küresine geri dönmemesi için v_0 ilk hızının ne olması gerektiğini bulalım.

Bu defa x-kseninin pozitif yönü yukarı doğru olsun. Hava direnci ihmal edildiğine göre, burada hareketi etkileyen tek kuvvet F yerçekim kuvvetidir. Bu kuvvetin değeri ise, Newton'un Evrensel Çekim Kanununa göre değişmektedir. Bu durumda, yerküresi üzerinde yerçekim ivmesinin değeri g ile, yerküresinin kütlesi M ve yarıçapı R ile gösterilirse, Evrensel Çekim Kanununa göre,

$$mg = G \frac{mM}{R^2}$$

ve buradan,

$$G = \frac{gR^2}{M}$$

bulunur. t anında, cismin yerküresinden olan uzaklığı x ve hızı v olsun. Buna göre hareket denklemi,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -G \frac{mM}{(x+R)^2}$$

veya

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \quad (3.16)$$

olur. Görülüyor ki, (3.16) denklemi v, x ve t gibi üç ayrı değişken içermektedir. v'nin değeri yalnız x cinsinden ifade edilmek istenirse, aşağıdaki şekilde t elimine edilir. Burada,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

olduğundan, bu değer yukarıdaki (3.16) denklemine yerine yazılırsa,

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

bulunur. Bu denklem değişkenlerine ayrılarak integrali alınır,

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{gR^2}{x+R} + c \quad (3.17)$$

elde edilir. t = 0 anında x = 0 ve ilk hız v₀ olduğu göz önüne alınarak bu değerler (3.17) denklemine yerine yazılırsa,

$$c = \frac{1}{2} v_0^2 - gR$$

bulunur. Böylece bulunan c değeri (3.17) denklemine yerine yazılırsa,

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) denklemi, Şekil 3.5'te görüldüğü üzere x'e bağlı olarak cismin yerden uzaklaşma hızını verir.

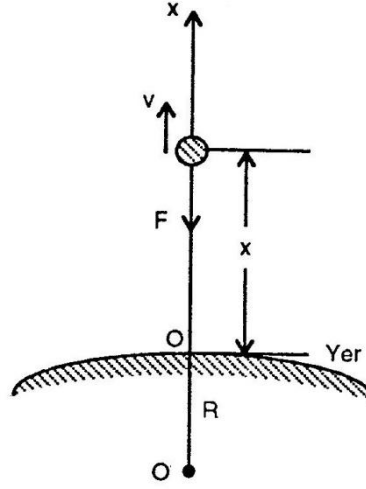
Cismin geri dönmemesi için her yerde v değerinin pozitif olması gerekeceğinden, bu şartı sağlayan ilk hız değeri v_e ile gösterildiğinde,

$$v_e^2 - 2gR \geq 0$$

şartı sağlanmalıdır. Öyle ise, cismin tekrar yerküresine dönmemesi için cismin atış hızının en az,

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

olması gerekir.



Şekil 3.5. Dikey atış

MKS sisteminde (Uluslararası Birim Sistemi), $g=9,8 \text{ m/sn}^2$ ve $R=6,3 \cdot 10^6 \text{ m}$ olduğundan $v_e=11,1 \cdot 10^3 \text{ m/sn}$ bulunur.

Örnek 3.6

Yatayla 37° açı yapan bir eğik düzlem üzerinde bulunan bir cisim, eğik düzlem boyunca ve yukarı doğru $v_0=12 \text{ m/sn}$ 'lik bir ilk hızla fırlatılıyor. Cisim ile eğik düzlem arasında sürtünme katsayısı $\mu=0,25$ olarak biliniyor. Buna göre cismin eğik düzlem boyunca hangi uzaklığa kadar gidebileceğini ve cisim atıldığı noktaya geri döndüğünde hızının ne olacağını bulalım ($g=10 \text{ m/sn}^2$ alalım).

Şekil 3.6'da görüldüğü gibi, cisim fırlatıldıktan t sn sonra eğik düzlem üzerinde O'dan x uzaklığında bir P noktasında v hızı ile hareket halindedir. Cisim ağırlığının eğik düzlem doğrultusunda ve eğik düzleme dik doğrultudaki bileşenleri ve sürtünme kuvveti gözönüne alındığında, cismin hareketinin diferansiyel denklemi,

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha - \mu \cdot mg \cos \alpha \quad (3.19)$$

veya

$$\frac{dv}{dt} = -(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)g$$

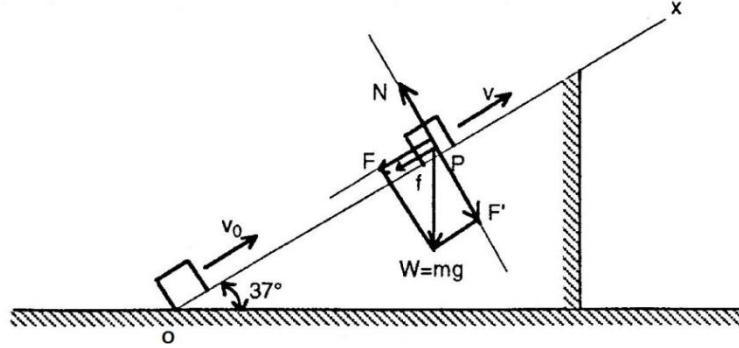
olur. İntegral alınırsa,

$$v = -g(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)t + c_1 \quad (3.20)$$

bulunur. $v(0)=v_0$ başlangıç şartı (3.20) denkleminde uygulanırsa,

$$v = v_0 - g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t \quad (3.21)$$

elde edilir. Bu denklem, herhangi bir t anında cismin hızını veren ifadedir.



Şekil 3.6. Eğik atış

Denklem (3.21)'de $v = dx/dt$ yazılır ve integral alınır,

$$x = v_0t - \frac{1}{2}g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t^2 + c_2$$

bulunur. Bu denkleme $x(0)=0$ başlangıç şartı uygulanırsa $c_2=0$ olur. Buna göre,

$$x = v_0t - \frac{1}{2}g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t^2 \quad (3.22)$$

elde edilir.

Açıktır görülmüştür ki, (3.21) ve (3.22) numaralı denklemler, cismin hareketi ile ilgili tüm bilgiyi içermektedir.

Problemin ifadesinde verilen değerler Denklem (3.21)'de yerine yazılırsa,

$$v = 12 - 10 \cdot (0,6 + 0,25 \cdot 0,8) \cdot t$$

$$v = 12 - 8 \cdot t \quad (3.23)$$

elde edilir. Bu denklem, cismin zamana bağlı olarak hız ifadesini verir. Burada $v=0$ yazılırsa, cismin duruncaya kadar geçen zaman $t=1,5$ sn bulunur. Problemden verilen değerler (3.22) denkleminde yerlerine yazılırsa bu denklem,

$$x = 12 \cdot t - 4 \cdot t^2$$

şeklini alır. Burada $t=1,5$ sn yazılırsa, $x=9$ m bulunur. Böylece cismin hangi uzaklığa kadar gidebileceğini bulmuş oluruz.

Cisim atıldığı noktaya geri döndüğünde hızının ne olacağı ile ilgili hareket denklemini,

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha - \mu \cdot g \cos \alpha = 4$$

şeklinde yazılır. Bunun anlamı, geri dönüşte, cismin eğik düzlem boyunca aşağı doğru hareketinin ivmesi 4 m/sn^2 'dir. Bu denklemde,

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

yazılırsa,

$$v \cdot dv = 4 \cdot dx$$

$$\frac{v^2}{2} = 4 \cdot x + c$$

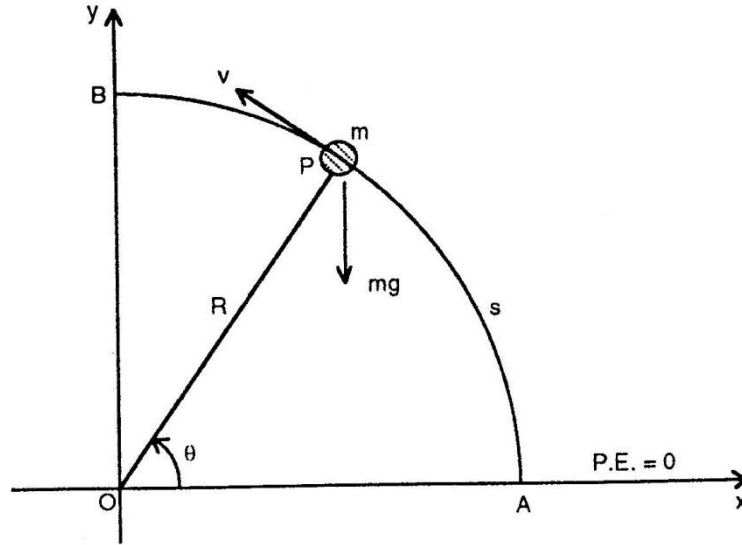
bulunur. $x=0$ için $v=0$ başlangıç şartı bu denkleme uygulanırsa $c=0$ olur. Böylece, geri dönüş hareketinde x 'e bağlı olarak v 'nin değerini veren ifade,

$$v^2 = 8 \cdot x$$

elde edilir. Burada $x=9 \text{ m}$ yazılırsa, cismin O noktasına varış hızı $v=8,48 \text{ m/sn}$ bulunur.

Örnek 3.7

Kütlesi m olan bir cisim Şekil 3.7'de görüldüğü gibi R yarıçaplı çeyrek çember şeklindeki sürtünmesiz bir AB rayı üzerinde hareket etmektedir. Cisim A noktasından yukarı doğru fırlatıldığı anda hızı v_0 ve B'ye ulaştığında 0'dır. O merkezli AB yayı düşey düzlem içinde yer almaktadır. Bu verileri göz önüne alarak cismin bulunduğu yere bağlı olarak hızını bulalım.



Şekil 3.7. Dairesel hareket

A noktasından v_0 başlangıç hızı ile fırlatılan cisim bir t zamanı sonunda P noktasından v hızı ile geçmektedir. OP'nin x-ekseni ile yaptığı açı θ 'dır. Cismin mg ağırlığının teğet doğrultusundaki bileşeni $mg\cos\theta$ olduğundan hareketin denklemi,

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \cos \theta$$

veya

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = -mg \cos \theta \quad (3.24)$$

olur. Burada s , cismin A'dan itibaren uzaklığını, diğer bir ifadeyle AP yayının uzunluğunu ifade etmektedir.

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{ve} \quad \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

olduğundan, (3.24) denklemi,

$$mv \frac{dv}{ds} = -mg \cos \theta \quad (3.25)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan, $ds=Rd\theta$ olduğundan, hareketin diferansiyel denklemi,

$$mvdv = -mgR \cos \theta d\theta \quad (3.26)$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınır,

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgR \sin \theta = E \quad (3.27)$$

olur.

Bu denklemde, θ 'ya bağlı olarak v 'nin değeri elde edilir. E , integrasyon sabitidir. Burada birinci terim, cismin bulunduğu yerdeki kinetik enerjisini ve ikinci terim ise aynı yerdeki cismin potansiyel enerjisini ifade eder. O halde (3.27) denklemi "Enerjinin Korunumu Prensibi" nin ifadesinden başka bir şey değildir.

3.3. Hız Problemleri

Genel olarak hız denildiği zaman birim zamanda gidilen yol akla gelir. Bunun dışında hız, bir fiziksel büyüklükte birim zaman içinde meydana gelen değişme olarak tanımlanır. Örneğin, bir radyoaktif elementin miktarı zamana bağlı olarak azalır ve birim zaman içinde meydana gelen azalma miktarına bu radyoaktif elementin bozunma hızı denir. Herhangi bir cismin büyüme hızı, bir kimyasal

reaksiyonun hızı, difüzyon hızı, bir ortamda ısının yayılma hızı, bir karışımın oluşma hızı, hastalıkların yayılma hızı vs. hep aynı ve benzer şekilde ifade edilir. Öyle ise, zamana bağlı olarak değişik değerler alan bir fiziksel büyüklük $Q(t)$ ile gösterilirse, bir dt zaman aralığında Q 'da meydana gelen değişme dQ olur ve bu durumda Q 'nün değişme hızı, dQ/dt şeklinde tanımlanır. Bu nedenle uygulamada karşılaşılan bazı hız problemlerini, birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemin çözümü olarak kolayca çözümleriz.

Örnek 3.8

Bir radyoaktif element olan toryum-234 (Th^{234}) izotopu β -ışınları yayarak Pa^{234} 'ye dönüşmektedir. Bu izotopun bozunma hızı, elementin mevcut miktarı ile doğru orantılıdır. Ayrıca, 100 miligram Th -234 izotopundan bir hafta içinde geriye 82,04 miligram kaldığı bilindiğine göre, herhangi bir t anında geriye ne kadar Th -234 kaldığını ve mevcut miktarın yarıya inmesi için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini bulalım.

Problemin çözümünü veren diferansiyel denklem, bir başlangıç-değer problemi olarak,

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad , \quad Q(0) = 100 \quad (3.28)$$

$$Q(7) = 82,04$$

şeklinde yazılır. Burada t zamanı gün cinsinden ve herhangi bir anda maddenin mevcut miktarı $Q(t)$ ise miligram cinsinden ifade edilmiştir. k katsayısına gelince bu problemde, zaman geçtikçe madde miktarı azaldığından k katsayısı bir negatif sayıdır.

Diferansiyel denklemin çözümü,

$$Q = ce^{kt} \quad (3.29)$$

dir. Burada başlangıç şartlarından ilki uygulanırsa $c = 100$ bulunur. Bu değer (3.29) denkleminde yerine yazılır ve ikinci başlangıç şartı fonksiyona uygulanırsa

$$82,04 = 100 \cdot e^{7k}$$

ve buradan,

$$k = \frac{\ln 0,8204}{7} = -0,0283^{-1} \text{ (gün)}$$

elde edilir. k 'nin bu değeri (3.29) denkleminde yerine yazılırsa,

$$Q(t) = 100.e^{-0,0283t} \quad (3.30)$$

olur. Herhangi bir t anında geriye kaç miligram Th-234 kaldığı denklem yardımıyla kolayca bulunur.

Bir radyoaktif elementin miktarını yarıya inmesi için geçen zamana o elementin yarı ömrü denir ve T ile gösterilir. Bu durumda Denklem (3.30)'da

$$50 = 100.e^{-0,0283T}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$T = \frac{\ln 2}{0,0283} = 24,5 \text{ gün bulunur.}$$

Örnek 3.9

Newton'un soğuma kanununa göre, soğuyan bir cismin sıcaklığındaki değişme hızı, cismin ve dış ortamın sıcaklıkları arasındaki fark ile orantılıdır. Buna göre, zamana bağlı olarak cismin sıcaklığını veren ifadeyi bulalım.

Herhangi bir anda cismin sıcaklığını T ile ve dış ortamın sabit kabul edilen sıcaklığını da T_d ile gösterelim. O zaman, cismin sıcaklığını zamanın fonksiyonu olarak veren diferansiyel denklem,

$$\frac{dT}{dt} = -k (T - T_d) \quad (3.31)$$

olur. Burada k pozitif bir katsayıdır. Denklem (3.31) yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_d \quad (3.32)$$

yazılır. $T(0)=T_0$ başlangıç koşulu kullanılarak Denklem (3.32) çözümlerse,

$$T = T_d + (T_0 - T_d) e^{-kt}$$

elde edilir.

Örnek 3.10

Bir tank, $t=0$ anında içinde Q_0 kg tuz içeren 100 lt tuz çözeltisi ile doludur. Litresinde 1/3 kg tuz bulunan başka bir tuz çözeltisi 5 lt/dk'lık bir hızla tanka akmaktadır. Karıştırma ile tank içinde sürekli olarak homojen bir su-tuz karışımı elde edilmekte ve karışım aynı hızla tanktan dışarı çıkmaktadır. t anında tankta mevcut tuz miktarını veren $Q(t)$ ifadesini bulalım.

Herhangi bir t anında tanktaki tuz miktarının değişme hızı, birim zamanda tanka giren tuz miktarından yine birim zamanda tanktan çıkan tuz miktarının farkına eşittir. Buna göre,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{5}{3} - \frac{5}{100}Q$$

olur. Burada $\frac{dQ}{dt}$, birim zaman içinde tanktaki tuz miktarında meydana gelen artma veya azalma miktarıdır. Bu denklem yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{5}{100}Q = \frac{5}{3} \quad (3.33)$$

elde edilir.

Denklem (3.33), birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir ve çözümü,

$$Q(t) = \frac{100}{3} + ce^{-0,05t} \quad (3.34)$$

dir. Burada c, keyfi ve sabit bir sayıdır.

t=0 anında tankta mevcut tuz miktarı Q_0 kg olarak verildiğine göre $Q(0)=Q_0$ başlangıç şartı (34) denkleminde uygulandığında,

$$c = Q_0 - \frac{100}{3}$$

bulunur. c'nin bu değeri (3.34) denkleminde yerine yazılırsa,

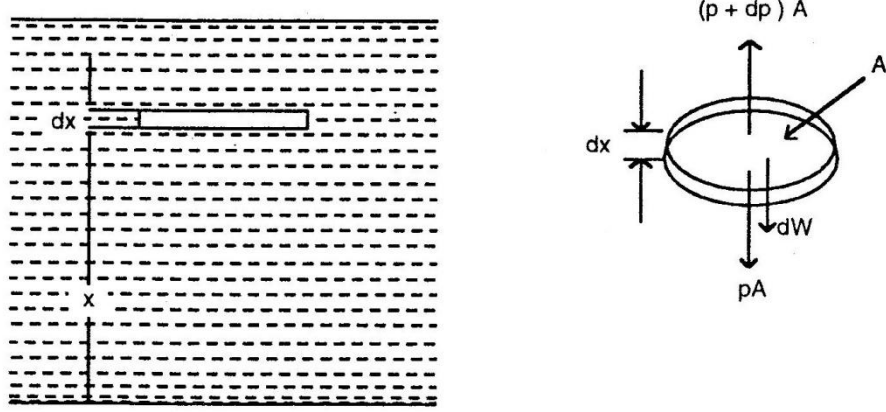
$$Q = \frac{100}{3} (1 - e^{-0,05t}) + Q_0 e^{-0,05t} \quad (3.35)$$

elde edilir. Burada Q'nun birimi kg ve t'nin birimi dk cinsinden ifade edilmiştir.

Örnek 3.11

Şekil 3.8'deki gibi ağzı açık derin bir kap durgun halde bulunan sıvı ile doludur. Sıvı içinde yüksekliğe bağlı olarak hidrostatik basıncı veren ifadeyi bulalım.

Kap içinde bulunan sıvının yoğunluğu ρ ve açık hava basıncı p_0 olsun. Sıvı içinde, kabın tabanından itibaren x yüksekliğinde, taban alanı A ve yüksekliği dx olacak şekilde silindirik bir sıvı kütlesi göz önüne alalım. Sıvı içinde x yüksekliğinde basınç p ve x+dx yüksekliğinde basınç p+dp olsun. Bu durumda, Şekil 3.8'de görüldüğü gibi, silindirik sıvı kütlesine alt yüzden yukarıya doğru etki eden kaldırma kuvveti PA ve üst yüzden aşağı doğru etki eden toplam kuvvet (p+dp)A olur. Bu sıvı



Şekil 3.8. Hidrostatik basınç

kütlesine yan yüzden etki eden toplam kuvvet sıfırdır. Ayrıca sıvı kütlesine etki eden yerçekimi kuvveti $dW = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$ ' dir. Bütün bu kuvvetlerin etkisi altında sıvı kütlesi dengede bulunduğundan,

$$pA = (p + dp)A + \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$$

yazılır. Buradan,

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \cdot g \quad (3.36)$$

bulunur. (3.36) denklemi, sıvı içinde derinliğe bağlı olarak basıncın değişim hızını ifade eder.

Basınç tabandan x_1 yüksekliğinde iken p_1 ve x_2 yüksekliğinde iken p_2 ile gösterilirse, (3.36) denkleminin integralinden,

$$p_2 - p_1 = -\rho \cdot g \cdot (x_2 - x_1) \quad (3.37)$$

elde edilir. Sıvı yüzeyinde basınç açık hava basıncı (p_0) olduğuna göre, (3.37) denkleminin yeniden düzenlenmesi halinde, sıvı yüzeyinden h derinliğinde basınç,

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad (3.38)$$

olur.

Örnek 3.12

n kişiden oluşan bir topluluk içinde, p sayıda insan hastalıklı ve q sayıda insan hastaliksız olarak saptanmış bulunmaktadır. Hastalık bulaşıcı olup bir zaman süreci içinde sağlamlara da bulaşması olasılığı vardır. Hasta insanların toplum içindeki oranı $x = p/n$ ve sağlamların oranı ise $y = q/n$ olur. Eğer, n oldukça büyük bir sayı ise x ve y birer sürekli değişken sayı gibi kabul edilebilir. O zaman, dx/dt

hastalığın yayılma hızını ifade eder. İnsanların topluluk içinde serbest dolaşım içinde oldukları ve hastalığın hızının hastalıklı ve sağlıklı insanların birbiriyle fiziki teması ile orantılı olduğu kabul edilirse, herhangi bir t anında hastalıklı insanların sayısının ne olacağını bulalım.

Hastalığın yayılma hızı hem x ile hem de y ile orantılı olduğundan bunların çarpımıyla da orantılıdır. Orantılık katsayısı k ile gösterilirse,

$$\frac{dx}{dt} = kxy \quad (3.39)$$

olur. $x + y = 1$ olduğundan, y yerine x cinsinden değeri yazıldığında (3.39) denklemi,

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - x)$$

şeklini alır. İntegral alınırsa,

$$\ln x - \ln(1-x) = kt + c$$

veya

$$\frac{x}{1-x} = ce^{kt} \quad (3.40)$$

elde edilir. Başlangıç şartı $x(0)=x_0$ olarak biliniyorsa, $c=x_0(1-x_0)$ olur. Yerine yazılırsa,

$$x = \frac{x_0}{x_0 + (1-x_0)e^{-kt}} \quad (3.41)$$

bulunur.

Örnek 3.13

Bir A maddesi, kimyasal reaksiyon sonucu başka bir maddeye dönüşmektedir. Birim zamanda reaksiyona uğrayan madde miktarı, başka bir deyişle reaksiyonun hızı, o anda mevcut A maddesi miktarıyla orantılıdır. Ayrıca bilinmektedir ki, $t=0$ anında mevcut madde miktarı Q_0 'ın $2/3$ 'ü 30 dakika içinde diğer bir maddeye dönüşmektedir. Herhangi bir t anında A maddesinden geriye ne kadar kaldığını bulalım.

A maddesi zamanla azaldığından ve azalma hızı mevcut madde miktarıyla orantılı olduğundan,

$$\frac{dQ}{dt} = -kQ \quad (3.42)$$

yazılır. Denklem (3.42)'nin integrali alınır,

$$Q = ce^{-kt} \quad (3.43)$$

bulunur. Başlangıç şartları (3.43) denkleminde uygulanırsa,

$$\frac{Q_0}{3} = Q_0 e^{-30k}$$

ve buradan,

$$k = \frac{1}{30} \ln 3$$

elde edilir. Bu değerler (3.43) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{30} \ln 3 t}$$

olur.

Örnek 3.14

$A \xrightarrow{k_1} R \xrightarrow{k_2} S$ seri reaksiyonları için R'nin maksimum derişimini ve bu derişime ne zaman ulaşılacağını bulalım. (k_1 ve k_2 reaksiyon hız sabitleri olup $k_1 = k_2$ 'dir)

A reaktifinin yok olma hızı,

$$\frac{dQ_A}{dt} = -k_1 Q_A \quad (3.44)$$

Burada Q_A , herhangi bir t anında A maddesinin miktarıdır. t=0 anında Q_A 'nın değeri Q_{A_0} olarak kabul edilirse Denklem (3.44)'ün çözümünden,

$$Q_A = Q_{A_0} e^{-k_1 t} \quad (3.45)$$

elde edilir.

R ara maddesi derişiminin değışim hızı ise,

$$\frac{dQ_R}{dt} = k_1 Q_A - k_2 Q_R \quad (3.46)$$

olur. Q_A yerine, (3.45) denkleminde verilen değeri yazılırsa,

$$\frac{dQ_R}{dt} + k_2 Q_R = k_1 Q_{A_0} e^{-k_1 t}$$

olur. $k_1 = k_2$ olduğundan her iki reaksiyon hız sabiti olarak k değeri alınırsa,

$$\frac{dQ_R}{dt} + k Q_R = k Q_{A_0} e^{-kt} \quad (3.47)$$

yazılır. Bu denklem, (3.31) denklemi tipinde homojen olmayan birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemdir ve genel çözümü,

$$Q_R = e^{-kt} \left[\int kQ_{A_0} e^{-kt} \cdot e^{kt} dt + c \right] = e^{-kt} (kQ_{A_0} t + c)$$

dır. Burada c, bir integrasyon sabitidir. t=0 için $Q_R=0$ olduğundan $c=0$ bulunur. Bu durumda;

$$Q_R = kQ_{A_0} t e^{-kt} \quad (3.48)$$

elde edilir.

Q_R 'nin maksimum değere ulaşması için geçen zaman,

$$\frac{dQ_R}{dt} = kQ_{A_0} (e^{-kt} - kte^{-kt}) = 0$$

denklemin çözümünü veren t değeridir. Buna göre,

$$t_{\max} = \frac{1}{k}$$

bulunur.

Örnek 3.15

$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$ seri reaksiyonlarında B ara ürününün verimini bulalım. (Başlangıçta reaktörde sadece A reaktifi vardır.)

Kabul edelim ki, t=0 anında $Q_A=Q_{A_0}$, $Q_B = 0$ ve $Q_C = 0$ 'dır. A maddesinin yok olma hızı,

$$\frac{dQ_A}{dt} = -k_1 Q_A \quad (3.49)$$

ve B'nin üretim hızı,

$$\frac{dQ_B}{dt} = k_1 Q_A - k_2 Q_B \quad (3.50)$$

dır. (3.49) ve (3.50) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$\frac{dQ_B}{dQ_A} = -1 + \frac{k_2 Q_B}{k_1 Q_A}$$

elde edilir. B ara ürününün verimi

$$\frac{Q_B}{Q_{A_0}}$$

olarak tanımlandığından, (3.49) ve (3.50) denklemleri ayrı ayrı çözümlenerek

$$x_B = \frac{Q_B}{Q_{A_0}} = \frac{k_1}{k_1 - k_2} \left[\left(\frac{Q_A}{Q_{A_0}} \right)^{\frac{k_2}{k_1}} - \frac{Q_A}{Q_{A_0}} \right]$$

elde edilir.

Örnek 3.16

A ve B kimyasal maddeleri birbiriyle reaksiyona girerek C kimyasal maddesini oluşturuyor. C maddesinin oluşum hızı, o anda mevcut A ve B madde miktarlarının çarpımına bağlı olarak değişmektedir. C'nin oluşması için her 1 kg B için 2 kg A gerekmektedir. Başlangıçta A'nın miktarı 10 kg ve B'nin miktarı 20 kg ise ve 20 dakika sonra 6 kg C oluşmuşsa, herhangi bir anda C'nin miktarını bulalım.

X miktar C maddesinde ancak $2x/3$ miktar A ve $x/3$ miktar B'den oluşacağından, C'nin oluşma hızı,

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x)$$

olur. Başlangıç şartları,

$$t=0 \text{ için } x=0 \text{ ve } t=\frac{1}{3} \text{ için } x=6 \text{ olduğundan,}$$

$$\int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \int k dt + c_1$$

yazılır. Diğer taraftan,

$$\int \frac{dx}{(15-x)(60-x)} = \int \frac{1}{45} \left(\frac{1}{15-x} - \frac{1}{60-x} \right) dx = \frac{1}{45} \ln \left(\frac{60-x}{15-x} \right)$$

olduğundan, yukarıda yerine yazılırsa,

$$\frac{60-x}{15-x} = ce^{45kt}$$

olur. $t=0$ anında $x=0$ olduğundan, $c=4$ bulunur. Böylece,

$$\frac{60-x}{15-x} = 4e^{45kt}$$

olur. $t=1/3$ için $x=6$ olduğundan,

$$e^{15k} = \frac{3}{2}$$

bulunur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa,

$$\frac{60-x}{15-x} = 4(e^{15t})^{3t} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{3t}$$

ve sonuç olarak

$$x = \frac{15\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{3t}\right]}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3t}}$$

elde edilir.

Görülüyor ki, $t \rightarrow \infty$ için $x=15$ kg olur ki bu da beklenen bir sonuçtur.

Örnek 3.17

Sıcaklığı 100°C olan bir cisim 50°C sıcaklığındaki bir odaya bırakılıyor ve soğumaya terk ediliyor. 10 dk. sonunda cismin sıcaklığının 90°C 'ye düştüğü görülüyor. Başlangıç anından itibaren ne kadar zaman sonra cismin sıcaklığının 60°C 'ye düşeceğini bulalım.

Newton'un soğuma kanunu Örnek 3.9'da verilmişti. Buna göre cismin t anındaki sıcaklığı,

$$T = 50.(1+e^{-kt})$$

yazılır. $t=10$ dk. sonra cismin sıcaklığı $T=90^{\circ}\text{C}$ olacağından,

$$90 = 50.(1+e^{-10k})$$

$$k = 0,014$$

bulunur. Öyle ise herhangi bir t anında cismin sıcaklığı,

$$T = 50.(1+e^{-0,014t})$$

olur. Buradan, $T = 60^{\circ}\text{C}$ için t bulunur.

$$t = -\frac{1}{0,014} \ln\left(\frac{T-50}{50}\right) = -\frac{1}{0,014} \ln\left(\frac{60-50}{50}\right) = 115$$

dakika elde edilir.

3.4. Elektrik Devre Problemleri

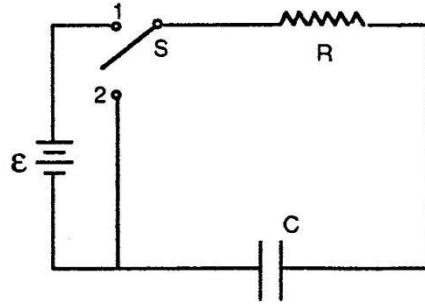
Bir doğru akım elektrik devresinde devre elemanları yalnız düz dirençlerden oluşuyorsa, devrenin herhangi bir kesitinden geçen akım şiddeti zamana bağlı olarak

değişmez ve sabit kalır. Eğer devrede dirençlerle birlikte yada direnç olmadan, herhangi bir kondansatör veya bir bobin veyahut her ikisi birlikte devre elemanları olarak yer alıyorsa durum farklıdır; o zaman, devreden geçen akım şiddeti zamana bağlı olarak değişim gösterir. Bu durumda, Ohm Kanunu ve Kirchoff kanunları kullanılarak birinci mertebeden veya ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemler elde edilir. Başlangıç şartları kullanılarak bu denklemler çözüldüğünde, herhangi bir t anında devreden geçen I akım şiddeti zamanın fonksiyonu olarak elde edilir.

Örnek 3.18

Şekil 3.9'da verilen RC elektrik akım devresinde, (a) önce S anahtarının 1 konumuna getirilmesi durumunda, (b) yeterli süre geçtikten sonra bu defa anahtarın 2 konumuna getirilmesi durumunda devreden geçen akım şiddetinin zamana bağlı olarak nasıl bir değişim gösterdiğini bulalım.

(a) S anahtarı boşa iken sığası C olan düzlem kondansatör tamamen yüksüzdür. Anahtarın 1 ucuna dokunduğu başlangıç anından itibaren C kondansatörü sürekli olarak yüklenmeye devam eder ve kısa bir süre sonra kondansatörün yükü $q_{\max}=C\varepsilon$ maksimum değerine ulaşır. Burada ε , üreticinin elektromotor kuvvetini ifade eder. Bu durumdan sonra devreden geçen akım şiddeti sıfır kabul edilir.



Şekil 3.9. Elektrik akım devresi

Kondansatörün yüklenmesi sırasında, herhangi bir t anında kondansatörün yükü q ve devreden geçen akım şiddeti I olsun. Bu andan itibaren geçen bir dt zamanı içinde devrenin herhangi bir kesitinden dq yükü geçecek ve sonuç olarak dt zamanı sonunda kondansatörün yükü dq kadar artacaktır. Enerjinin korunumu prensibine göre, elektromotor kuvveti ε olan üreticinin dt zamanı içinde dq yükünü

kondansatöre pompalaması için sarf ettiği enerji (εdq), aynı zaman içinde joule enerjisi cinsinden açığa çıkan enerji ($I^2 R dt$) ile kondansatöre depo edilen enerji ($d(q^2/2C)$)'nin toplamına eşittir. Buna göre,

$$\varepsilon dq = I^2 R dt + d(q^2/2C) = I^2 R dt + (q/C) dq$$

yazılır. Bütün terimler ayrı ayrı dt ile bölünürse,

$$\varepsilon \frac{dq}{dt} = I^2 R + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} \quad (3.51)$$

ve buradan,

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CR} q = \frac{\varepsilon}{R} \quad (3.52)$$

elde edilir. Denklem (3.52) çözülürse,

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (3.53)$$

elde edilir. Burada $q(t)$ 'nin zamana göre türevi alınırsa,

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.54)$$

bulunur. Görülüyor ki, $t=0$ için $q=0$ ve $I_{\max}=\varepsilon/R$, $t \rightarrow \infty$ için $q_{\max}=CE$ ve $I=0$ olur.

(b) Kondansatör maksimum yükle yüklü durumda iken S anahtarını aniden 1 konumundan 2 konumuna getirmiş olalım ve bu anı burada zaman başlangıcı olarak kabul edelim. Bu durumda kondansatörün yükü kısa bir zaman içinde R direnci üzerinden boşalacak ve sonunda sıfır olacaktır. Bu defa oluşan kapalı devrede $\varepsilon=0$ 'dır. Kondansatörün boşaldığı sırada herhangi bir t anında kondansatörün uçları arasındaki gerilim q/C ve R direnç telinin uçları arasındaki gerilim ise IR olduğundan Kirchhoff kanununa göre,

$$IR + \frac{q}{C} = 0$$

veya

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0 \quad (3.55)$$

elde edilir. Denklem (3.52)'de olduğu gibi bu denklem de sabit katsayılı birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. (3.55) denkleminin çözümünden,

$$q = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.56)$$

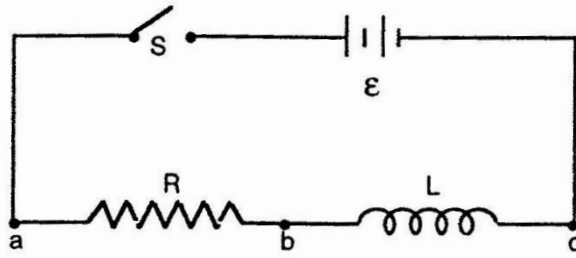
ve buradan da,

$$I = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3.57)$$

bulunur. Burada (-) işareti, bu konumda akımın bir önceki duruma göre ters yönde geçtiğini göstermektedir.

Örnek 3.19

Şekil 3.10'da görülen elektrik devresinde, bir R direnci ile öz-indüksiyon katsayısı L olan bir bobin seri olarak bağlanmıştır. S anahtarı kapatıldığında devreden geçen akımın zamana bağlı olarak nasıl değişim gösterdiğini bulalım.



Şekil 3.10. Elektrik akım devresi

S anahtarının kapatıldığı anı başlangıç anı olarak kabul edelim. Kısa süre sonra herhangi bir t anında devreden geçen akım şiddeti I olsun. Bu anda R direnci üzerindeki potansiyel düşmesi RI ve L bobini üzerindeki potansiyel düşmesi de $L\frac{dI}{dt}$ olduğundan Kirchhoff kanununa göre devre elemanları üzerindeki potansiyel düşmelerinin cebirsel toplamı üreticinin elektromotor kuvvetine eşit olacağından,

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \quad (3.58)$$

yazılır. Bu denklem yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}}{L} \quad (3.59)$$

elde edilir. (3.59) denklemi, denklem (3.31) tipinde sabit katsayılı homojen olmayan birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Başlangıç şartları bilinen böyle bir

denklemin nasıl çözüleceğini biliyoruz. Ayrıca, bu denklem değişkenlerine ayrılabilen bir denklem olduğundan,

$$\frac{dI}{E - RI} = \frac{dt}{L}$$

yazılır. Her iki tarafın integrali alındığında,

$$-\frac{1}{R} \ln(\varepsilon - RI) = \frac{t}{L} + c \quad (3.60)$$

bulunur. Burada c bir integral sabitidir. t=0 için I=0 olduğundan,

$$c = -\frac{1}{R} \ln \varepsilon$$

bulunur. c'nin bu değeri, denklem (3.60)'da yerine yazıldığında,

$$-\ln(\varepsilon - RI) = \frac{R}{L}t - \ln \varepsilon$$

olur ve buradan,

$$\ln \frac{(\varepsilon - RI)}{\varepsilon} = -\frac{R}{L}t$$

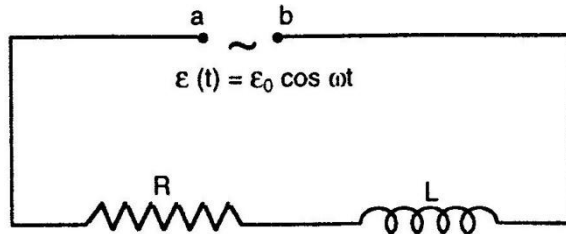
bulunur. Bu denklem I'ya göre çözümlürse,

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) \quad (3.61)$$

elde edilir.

Örnek 3.20

Şekil 3.11'de görüldüğü gibi birbirleriyle seri olarak bağlı bulunan bir R direnci ile L bobininin uçları arasında $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$ alternatif gerilimi tatbik ediliyor. Devreden geçen akım şiddetini zamana bağlı olarak bulalım.



Şekil 3.11. Elektrik akım devresi

Görülüyor ki, burada a ve b noktaları arasındaki $\varepsilon(t)$ gerilimi sinüsoidal olarak değişmektedir. Gerilimin maksimum değeri ε_0 'dır, ω sabittir. Herhangi bir t anında devreden geçen akım şiddeti I'nın diferansiyel denklemi,

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad (3.62)$$

dır. İntegrasyon çarpanı ile çözüm bulunursa,

$$I e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{\varepsilon_0}{L} \int e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t dt + c \quad (3.63)$$

olur. Burada integralin değeri,

$$\int e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t dt = e^{\frac{Rt}{L}} \left(\frac{Rt}{L} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right) \left(\frac{R^2 t^2}{L^2} + \omega^2 \right)$$

dır. İntegralin bu değeri denklem (3.63)'de yerine yazılırsa,

$$I e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{e^{\frac{Rt}{L}} \varepsilon_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) + c \quad (3.64)$$

bulunur. Başlangıç koşulu olarak t=0 için I=0 kabul edilirse, c integrasyon sabitinin değeri,

$$c = -\frac{R \varepsilon_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

bulunur. Bu değer (3.64) denkleminde yerine yazılırsa,

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)}} \left[\cos(\omega t - \alpha) - e^{-\frac{Rt}{L}} \cos \alpha \right]$$

elde edilir. Burada $\tan \alpha = \omega.L/R$ 'dir.

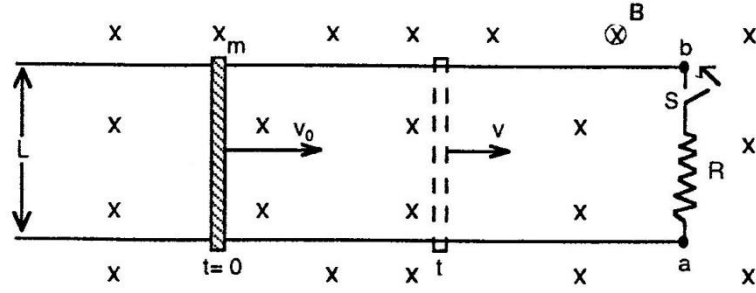
3.5. Elektromagnetik-İndüksiyon Problemleri

Kapalı bir devreden geçmekte olan magnetik kuvvet çizgilerinin sayısında birim zaman içinde aynı miktarda azalma veya aynı miktarda çoğalma olduğu zaman, Faraday Kanunu'na göre, kapalı devre içinde sabit bir indüksiyon elektromotor kuvveti ve buna bağlı olarak sabit bir indüksiyon akımı oluşur. Bazı problemlerde ise, devreden geçen indüksiyon akımının şiddeti zamana bağlı olarak değişim gösterir. Böyle durumlarda, problemin çözümü ile uğraşırken karşımıza birinci mertebeden ve bazen de ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler çıkar.

Başlangıç şartları kullanılarak bu diferansiyel denklemler çözülür ve böylece problem içindeki sorular yanıtlanmış olur.

Örnek 3.21

Şekil 3.12’te görülen, kütlesi m ve boyu L olan düzgün bir bakır çubuk, yatay bir düzlem üzerinde bulunan, birbirine paralel ve oldukça uzun iki iletken çubuk üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Sistem, düşey doğrultuda ve yönü aşağı doğru olan düzgün bir magnetik alan içindedir. Bir R direnç teli S anahtarı yardımı ile paralel iletken çubukların a ve b uçlarına bağlıdır. Anahtar açık iken bakır çubuk, bir dış kuvvet yardımı ile, hızı v_0 oluncaya kadar itilmektedir. Tam bu anda dış kuvvet sıfırlanmakta ve anahtar da aniden kapatılmaktadır. Buna göre, çubuğun bundan sonraki hızını ve devreden geçen akım şiddetini zamana bağlı olarak bulalım.



Şekil 3.12. Magnetik alan

Dış kuvvetin ortadan kaldırıldığı ve anahtarın kapatıldığı an, $t=0$ başlangıç anı olsun. t anında çubuğun hızı v ve devreden geçen indüksiyon akım şiddeti I ise,

$$\varepsilon = LvB \quad \text{ve} \quad I = \frac{LvB}{R}$$

olduğundan, çubuğun hareket yönünün tersine etki eden elektromagnetik kuvvet,

$$F_m = I.L.B = \frac{LvB}{R}.L.B = \frac{L^2B^2}{R}v$$

olur. Bu durumda çubuğun hareket denklemi,

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{L^2B^2}{R}v$$

veya

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{L^2B^2}{R}v = 0$$

olur. Yukarıdaki denklem, birinci mertebeden sabit katsayılı bir adi diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{L^2 B^2}{mR} dt$$

$$\ln v = -\frac{L^2 B^2}{mR} t + c$$

t=0 anında çubuğun hızı v_0 olduğundan c integrasyon sabiti için,

$$c = \ln v_0$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde yerine konulduğunda

$$v = v_0 e^{-\frac{L^2 B^2}{mR} t}$$

elde edilir. Bu anda devreden geçen akım şiddeti

$$I = \frac{LB}{R} v = \frac{LBv_0}{R} e^{-\frac{L^2 B^2}{mR} t}$$

olur.

Örnek 3.22

Kütlesi m ve boyu L olan bir iletken çubuk, yatayla θ açısı yapan bir eğik düzlem üzerinde bulunan iki uzun, paralel iletken çubuk üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. Çubukların uçları aşağıda bir R direnç teli ile birleştirilmiştir. Sistem, Şekil 3.13'de görüldüğü gibi düşey doğrultuda aşağı doğru yönelmiş düzgün bir B magnetik alanı içindedir. (a) çubuğun limit hıza ulaşmadan önceki hızını zamana bağlı olarak, (b) limit hızın değerini, (c) çubuk limit hıza ulaştıktan sonra devreden geçen akım şiddetini bulalım.

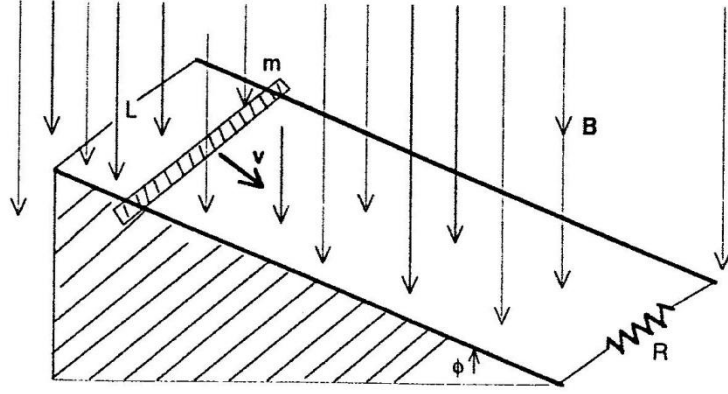
(a) Limit hız öncesi çubuğun hareket denklemi

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \phi - ILB \cos \phi$$

dır. Buradan,

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vLB}{R} \cos \phi$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{L^2 B^2 \cos^2 \phi}{mR} v = g \sin \phi$$



Şekil 3.13. Düzgün Manyetik Alanda Eğik Düzlem Üzerinde Kayan İletken Çubuk

diferansiyel denklemini elde edilir. Burada,

$$\frac{L^2 B^2 \cos^2 \phi}{mR} = a \quad \text{ve} \quad g \sin \phi = b$$

ile gösterilirse, yukarıdaki diferansiyel denklem,

$$\frac{dv}{dt} + av = b \quad \text{veya} \quad \frac{dv}{b - av} = dt$$

şeklini alır. Her iki tarafın integrali alındığında,

$$-\frac{1}{a} \ln(b - av) = t + C$$

elde edilir. $t=0$ anında çubuk serbest bırakıldığına göre,

$$C = -\frac{1}{a} \ln b$$

bulunur. Denkleme yerine yazılırsa,

$$-\frac{1}{a} \ln(b - av) = t - \frac{1}{a} \ln b$$

$$\ln \frac{b}{b - av} = at$$

$$v = \frac{b}{a} (1 - e^{-at})$$

olarak bulunur.

(b) $t = \infty$ olduğunda v hızı da limit değerine yaklaşacağından

$$v_L = \frac{b}{a} = \frac{mgR \sin \phi}{(LB \cos \phi)^2}$$

elde edilir.

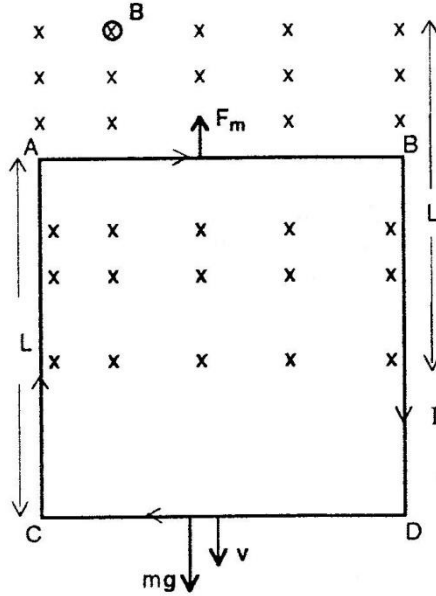
(c) Buradan,

$$I = \frac{LB \cos \phi}{R} \cdot \frac{mgR \sin \phi}{L^2 B^2 \cos^2 \phi} = \frac{mg}{LB} \tan \phi$$

olarak buluruz.

Örnek 3.23

Şekil 3.14'te görüldüğü üzere, atnalı şeklindeki bir mıknatısın kutupları arasındaki düzgün magnetik alanın dik kesiti, bir kenarı L olan bir kare şeklindedir. Kütlesi m, direnci R ve bir kenarının uzunluğu L olan kare şeklindeki bir iletken çerçeve, başlangıç anında, tüm magnetik kuvvet çizgileri çerçeve düzlemini dik olarak geçecek şekilde ilk hızsız biçimde kutuplar arasında serbest düşmeye bırakılmıştır. Tel çerçevenin, mıknatısın kutupları arasında ulaşacağı limit hızı bulalım.



Şekil 3.14. Mıknatıs dik kesiti

Çerçeve $t=0$ anında serbest düşmeye bırakıldığı andan itibaren, çerçevenin AB kenarı magnetik kuvvet çizgilerini dik olarak keseceğinden çerçeveden indüksiyon akımı geçecek ve çerçeve yukarıya doğru bir elektromagnetik kuvvetin etkisine maruz kalacaktır. Buna göre, t anında çerçevenin hareket denklemi,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - ILB \quad (3.65)$$

dir. Diğer taraftan, çerçevenin aşağı doğru y-ekseni doğrultusunda düştüğü göz önüne alınarak,

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -B \frac{dA}{dt} = BL \frac{dy}{dt}$$

olur. Görülüyor ki, çerçeve kapalı devresinde oluşan ε indüksiyon elektromotor kuvveti ve ona bağlı olarak I indüksiyon akımı zamana bağlı olarak değişmektedir.

$v=dy/dt$, çubuğun t anındaki ani hızını göstermek üzere,

$$\varepsilon = IR = BLv \Rightarrow I = \frac{BLv}{R}$$

bulunur. Bu değer denklem (3.65)'te yerine yazılırsa,

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 L^2}{R} v$$

veya

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B^2 L^2}{mR} v$$

elde edilir. Burada,

$$a = \frac{B^2 L^2}{mR}$$

ile gösterilirse,

$$\int \frac{dv}{g - av} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{a} \ln(g - av) = t + C$$

olur. Burada,

$$C = -\frac{1}{a} \ln g$$

olduğundan,

$$\frac{1}{a} \ln \frac{g}{g - av} = t \Rightarrow v = \frac{g}{a} (1 - e^{-at})$$

bulunur. t sonsuza yaklaştığında v de limit değerine yaklaşacağından,

$$v_L = \frac{g}{a} = \frac{mgR}{B^2 L^2}$$

olarak bulunur.

4. SABİT KATSAYILI İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

Yüksek mertebeden diferansiyel denklemler arasında ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler çok önemli uygulamaları olan denklemlerdir. Örneğin, fizikte, mekanikte ve elektrikte görülen titreşim hareketlerinin incelenmesinde ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. Bu problemlerden bazılarının çözümü bu bölümde ele alınacaktır.

4.1. Salınım Hareketi

Kütlesi ihmal edilebilen ve esneklik katsayısı k olan bir çelik yay bir ucundan tavana tutturulmuş olsun. Yayın serbest ucuna kütlesi m olan bir cisim asılmıştır. Sistem denge konumuna geldikten sonra cisim bir miktar aşağı doğru çekilir ve serbest bırakılırsa, denge konumu etrafında aşağı yukarı bir gidip gelme hareketi yapar ki, bu harekete salınım hareketi veya titreşim hareketi denir. Eğer hava direnci ihmal edilirse, diğer bir deyişle sürtünme yok kabul edilirse, cisim yukarıda ve aşağıda aynı limitler arasında bir gidip gelme hareketi yapacaktır ki, buna basit harmonik hareket denir. Eğer sürtünme varsa, cismin salınım hareketinin genliği gittikçe azalacak ve bir süre sonra cisim denge konumuna gelip duracaktır. Cismin bu tür salınım hareketine, serbest sönümlü titreşim hareketi denir. Bundan başka, bazen cisme devamlı ve sinüsoidal bir fonksiyonla ifade edilebilen bir ilave harmonik kuvvet etki edebilir. Bu durumda cismin hareketi zorlanmış sönümlü titreşim hareketi olur.

4.1.1. Basit Harmonik Hareket

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi, m kütleli cisim, yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde ve x -ekseni doğrultusunda, O denge konumu etrafında bir salınım hareketi yapmakta olsun. Cisim denge konumundan x uzaklığında bulunduğu sırada cisme etki eden tek kuvvet, Hook kanunu ile ifade edilen ve her zaman cismi O denge konumuna çağırma yönüne yönelik olan,

$$F = -kx \quad (4.1)$$

kuvvetidir. Burada görülen (-) işaretinin anlamı, cisim denge konumunun sağında olduğu zaman geri çağırma kuvveti sola doğru yönelmiş, denge konumunun solunda olduğu zaman da geri çağırma kuvveti sağa doğru yönelmiş demektir. Bu durumda cismin hareketi serbest ve sönümsüz bir titreşim hareketi, başka bir ifadeyle bir basit harmonik hareket olur. Bu hareketin denklemini,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (4.2)$$

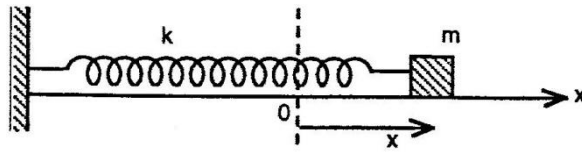
veya

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\omega_0^2 = k/m$ ’dir. Bu denklemin genel çözümü,

$$x = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t \quad (4.4)$$

dır. c_1 ve c_2 başlangıç şartları kullanılarak bulunur.



Şekil 4.1. Sürtünmesiz salınım hareketi

Cisim denge konumundan x_0 uzaklığında bulunduğu sırada ilk hızsız olarak harekete bırakılmış olsun. Buna göre başlangıç şartları $x(0) = x_0$ ve $x'(0) = 0$ olur. Bu durumda Denklem (4.3)’ün genel çözümü,

$$x = x_0 \cos \omega_0 t \quad (4.5)$$

olur.

Başlangıç şartlarına bağlı olarak, (4.3) denkleminin çözümü, genel olarak,

$$x = c \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada c ve φ birer integrasyon sabitidir. Genel çözümün sinüs ve kosinüs fonksiyonu olması da aynı şekilde başlangıç şartlarına bağlıdır.

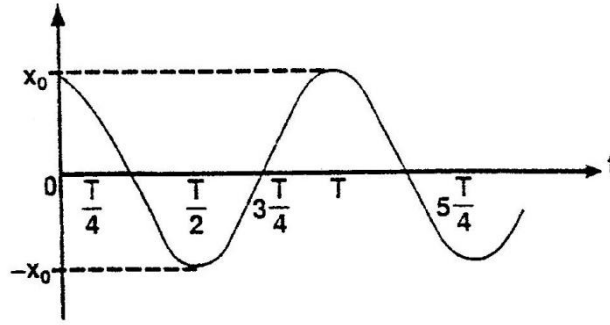
Cismin denge konumu etrafında bir tam devir yapması için geçen zaman T ile ve bir saniye içindeki devir sayısı f ile gösterilirse,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

olduğundan, (4.5) denklemini,

$$x = x_0 \cos \frac{2\pi}{T} t \quad (4.6)$$

şeklini alır. Bu durumda, zamana bağlı olarak cismin bulunduğu yer, Şekil 4.2'de görülen grafikte gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Salınım hareketinin zamana bağlı yeri

Cisim harekete başladıktan sonra herhangi bir t anındaki hızı,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega_0 x_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$$

denklemini ile ifade edilir. t'nin özel bir değeri için, örneğin $t=T/4$ veya daha genel olarak,

$$t = (2n-1) \frac{T}{4}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

için hız, $v_0 = \omega_0 x_0$ olur. Bu hız cismin maksimum hızıdır ve her geçişinde cisim denge konumundan bu hızla geçer.

Şimdi ise cismin bulunduğu yere bağlı olarak hızını bulmaya çalışalım. Enerjinin korunumu prensibine göre,

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

yazabiliriz. Buradan,

$$v = \pm\omega_0\sqrt{x_0^2 - x^2}$$

bulunur.

4.1.2. Serbest Sönümlü Titreşim Hareketi

Bir nokta etrafında basit, sinüsoidal titreşim hareketleri yapmakta olan bir cisim genel olarak bir sürtünme kuvvetinin etkisi altında kalabilir. Örneğin, cisim sürtünmeli bir yatay düzlem üzerinde veya viskozluk derecesi ihmal edilemeyen bir sıvı içinde hareket ediyor olabilir. Cismin hareketini geciktirici yönde etkili olan böyle bir kuvvet, büyük bir yaklaşımla cismin o andaki hızı ile orantılıdır. Orantılılık katsayısı R ile gösterilmek üzere, bu durumda cismin hareket denklemi,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4.7)$$

veya

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada R, m ve ω_0 bilinen sayılar olduğundan, (4.8) denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir. Yardımcı denklem

$$\lambda^2 + \left(\frac{R}{m}\right)\lambda + \omega_0^2 = 0$$

ve bu denklemin kökleri,

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2m} + \sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2m} - \sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

olduğundan denklem (4.8)'in genel çözümü,

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{\left(\frac{R}{2m}\right)t} e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t} + Be^{\left(\frac{R}{2m}\right)t} e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t}$$

$$x = e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} \left[Ae^{\sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t} + Be^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} t} \right]$$

olur. Burada,

$$\Delta = \left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2$$

diskriminantın aldığı üç farklı değere bağlı olarak, cismin titreşim hareketi üç farklı şekilde olmaktadır.

i) $\Delta < 0$ durumu veya $\omega_0^2 > \left(\frac{R}{2m}\right)^2$

Bu durumda,

$$\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2 = -\omega_1^2$$

ile gösterilirse, ki burada ω_1^2 pozitif bir sayıdır, o zaman Denklem (4.8)'in genel çözümü,

$$x = e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} (Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}) \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A ve B kompleks sayılardır. (4.9) denklemini yeniden düzenlenirse,

$$x = e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} [A(\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) + B(\cos \omega_1 t - i \sin \omega_1 t)]$$

$$x = e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} [(A+B)\cos \omega_1 t + i(A-B)\sin \omega_1 t]$$

olur. a ve b reel sayılar olmak üzere, eğer

$$A = a+ib \quad \text{ve} \quad B = a-ib \quad \text{ise,}$$

$$A+B = 2a \quad \text{ve} \quad i(A-B) = 2b$$

olacağından, genel çözüm

$$x = -e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} (2a \cos \omega_1 t - 2b \sin \omega_1 t)$$

şeklini alır. Burada, $2a=c \cdot \cos \varphi$ ve $2b=c \cdot \sin \varphi$ olmak üzere, Denklem (4.8)'in genel çözümü,

$$x = ce^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (4.10)$$

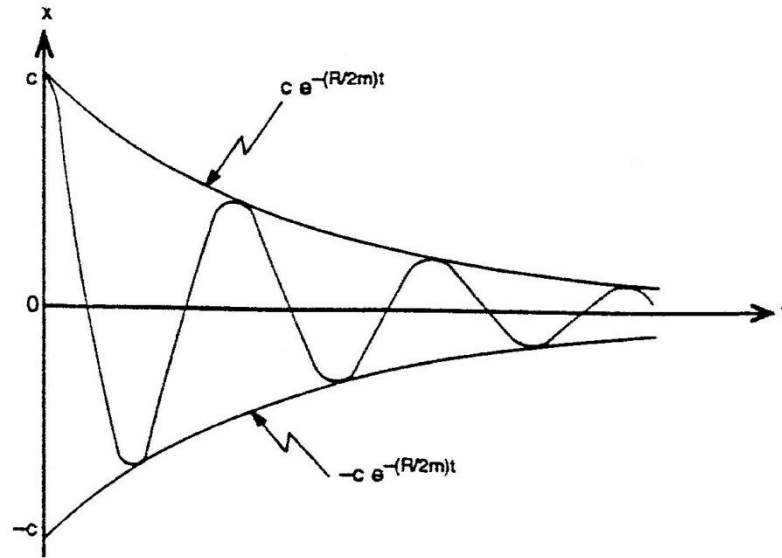
$$x = ce^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} \cos \left[\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2} t + \varphi \right]$$

olur. Burada c ve φ , keyfi sabit değerler olmak üzere integrasyon sabitleridir. Hemen ifade edelim ki, c_1 ve c_2 iki ayrı keyfi sabit sayı olmak üzere (4.10) denklemi,

$$x = -e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (4.10) açıkça göstermektedir ki cisim açısal hızı ω_1 olan bir titreşim hareketi yapmaktadır. Bu hareketin basit harmonik hareketten farkı, hareketin genliği sabit değildir ve zamanla küçülmektedir. Onun için bu harekete sönümlü titreşim hareketi denir.



Şekil 4.3. Sönümlü titreşim hareketi

Denklem (4.10)'un grafiği Şekil 4.3'te gösterilmiştir. Burada açıkça görülüyor ki, $\omega_1 t + \varphi = n\pi$, ($n=0, 1, 2, \dots$) denkleminin kökleri olan t değerleri,

$$A(t) = \pm ce^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t}$$

fonksiyonunda yerine yazılarak, sönümlü salınım hareketinin genliğinin zamanla nasıl değiştiği bulunmuş olur.

Özet olarak denilebilir ki, $R < 2\sqrt{km}$ olması halinde sistem sönümlü titreşim hareketi yapmaktadır ve bu hareketin frekansı

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{R}{2m}\right)^2}$$

dir. Eğer $R=0$ olsaydı normal harmonik hareketin frekansı,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

elde edilirdi. Bu demektir ki, sönümlü titreşim hareketinin frekansı, normal harmonik hareketin frekansından daha küçüktür.

$$\text{ii) } \Delta > 0 \text{ durumu veya } \omega_0^2 < \left(\frac{R}{2m}\right)^2$$

Bu durumda,

$$\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \omega_0^2 = \omega_1^2$$

ile gösterilirse, denklemin genel çözümü,

$$x = e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} (Ae^{\omega_1 t} + Be^{-\omega_1 t}) \quad (4.11)$$

olur. Görülüyor ki bu genel çözüm, exponansiyel çözümlerin bir lineer kombinasyonudur ve bu nedenle titreşim hareketi beklenemez. Burada $t \rightarrow \infty$ için $x=0$ olacaktır. R 'nin yeter derecede büyük olması bu sonucu doğuracak ve cisim yavaş yavaş denge konumuna geri dönecektir.

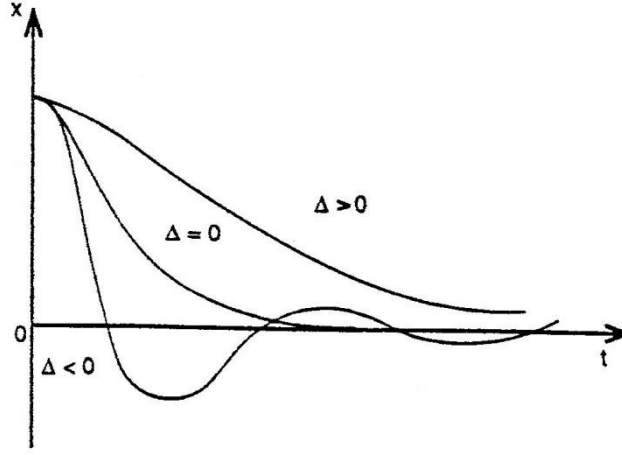
$$\text{iii) } \Delta = 0 \text{ durumu veya } \omega_0^2 = \left(\frac{R}{2m}\right)^2$$

Bu durumda, $\omega_1 = 0$ 'dır ve Denklem (4.8)'in genel çözümü,

$$x = e^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} (At + B) \quad (4.12)$$

olur. Görülüyor ki, $\Delta=0$ halinde cismin hareketi bir titreşim hareketi değildir. Denge konumundan x_0 uzaklığında serbest bırakılan cisim en kısa zamanda denge konumuna geri dönecektir. Burada önemle üzerinde durulması gereken husus, R değerinde meydana gelebilecek küçük bir azalma halinde cisim derhal sönümlü titreşim haline geçebilir. Bu nedenle $\Delta=0$ olması halinde cismin hareketine kritik sönümlü titreşim hareketi denir.

Δ 'nın değerine bağlı olarak yukarıda bahsettiğimiz her üç hareket türü Şekil 4.4'te birlikte gösterilmiştir.



Şekil 4.4. Sönümlü titreşim hareketinin durumları

4.1.3. Zorlanmış Sönümlü Titreşim Hareketi

Yukarıda incelediğimiz serbest sönümlü titreşim hareketine geri dönelim ve cisme dışarıdan etki etmekte olan sürtünme kuvveti veya başka bir deyişle sönüm kuvvetine ek olarak bu defa da, cisme devamlı olarak bir periyodik (sinüsoidal) kuvvetin, örneğin $F(t)=F_0\cos\omega t$ kuvvetinin etki etmekte olduğunu düşünelim. O zaman, Şekil 4.5'te görüldüğü gibi m kütleli cismin hareket denklemi,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (4.13)$$

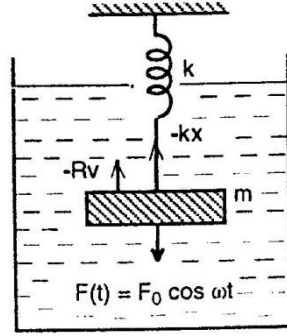
olur. Burada m , k , R , F_0 ve ω bilinen değerlerdir. Denklem (4.13)'de bütün terimler m ile bölünürse,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (4.14)$$

elde edilir. Görülüyor ki bu denklem, ikinci mertebeden, homojen olmayan, sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemdir.

Hemen ifade edelim ki, Denklem (4.14)'ün çok sayıda birbirinden farklı çözümü vardır ve biz bunlardan yalnız bir tanesini bulmaya çalışacağız. Örneğin, R 'nin yeter derecede küçük olması, başka bir deyişle $\Delta < 0$ olması halini ele alacağız. Bu durumda Denklem (4.14)'ün homojen kısmı açıkça gösteriyor ki, $F(t)$ kuvveti yok kabul edildiğinde cisim denge konumu etrafında sabit frekansla sönümlü bir titreşim

hareketi yapacaktır. Burada ayrıca kabul ediyoruz ki, titreşim hareketinin frekansı, $F(t)$ kuvvetinin frekansı ω 'ya eşittir.



Şekil 4.5. Zorlanmış sönümlü titreşim hareketi

$\Delta < 0$ halini incelediğimize göre homojen kısmın çözümü,

$$x_c = ce^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

dir.

Homojen olmayan kısmın x_p çözümü ise, önceden bildiğimize göre,

$$x_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.15)$$

dır. Burada A ve B reel sayılardır. Bu sayılar, belirsiz katsayılar yöntemine göre, x_p ve türevlerinin Denklem (4.14)'de yerlerine yazılması suretiyle aşağıdaki şekilde bulunur. Bunun için önce x_p 'nin zamana göre birinci ve ikinci türevlerini alt alta yazalım.

$$x_p' = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$x_p'' = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t$$

Şimdi, yukarıda belirtildiği gibi, x_p ve türevleri Denklem (4.14)'de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t - \omega A \frac{R}{m} \sin \omega t \\ + \omega B \frac{R}{m} \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 B \sin \omega t \\ = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağında ve solunda $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ fonksiyonlarının katsayıları birbirine eşit yazılırsa,

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{B\omega R}{m} = \frac{F_0}{m}$$

$$-\frac{A\omega R}{m} + B(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

bulunur. Bu iki denklemden,

$$A = \frac{F_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^2 R^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{F_0 \omega R}{\omega^2 R^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

elde edilir. Diğer taraftan, Denklem (4.15)'e özdeş olan bir denklem,

$$x_p = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \theta) \quad (4.16)$$

dır. Bunun doğru olduğunu anlamak için,

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \theta) = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \omega t \cos \theta + \sin \omega t \sin \theta)$$

yazılır. Burada,

$$A = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \theta \quad \text{ve} \quad B = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \theta$$

olduğundan, (4.15) ve (4.16) denklemlerinin birbiriyle özdeş olduğu açıkça görülür.

Öyle ise, yukarıda bulunan A ve B değerleri, Denklem (4.16)'da yerlerine yazılırsa,

$$x_p = \frac{F_0}{\left[m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \cos(\omega t - \theta) \quad (4.17)$$

elde edilir. Sonuç olarak, Denklem (4.14)'ün genel çözümü,

$$x = ce^{-\left(\frac{R}{2m}\right)t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + \frac{F_0}{\left[m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \cos(\omega t - \theta) \quad (4.18)$$

bulunur. Burada,

$$\tan \theta = \frac{B}{A} = \frac{\omega R}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

dır. Görülüyor ki, genel çözüm iki ayrı terimin toplamından meydana gelmektedir. Birinci terim, önceden tartışmış olduğumuz gibi bir sönümlü titreşim hareketini temsil etmektedir ve kısa zaman sonra bu terimin etkisi ortadan kalkacaktır. İkinci terim ise, periyodu $T=2\pi/\omega$ olan bir basit harmonik hareketi temsil etmektedir. Birinci terim önemini kaybettiğçe bu terim önem kazanır ve sonunda tüm hareket bu terimle kontrol edilir. Bu nedenle birinci terim geçiş hal terimi ve ikinci terim kararlı hal terimi olarak bilinir.

Yukarıda ifade edildiği üzere, (4.18) denklemini uyarınca ve belli bir süre sonra cisim, ω açısal hızı ile belirlenen bir basit harmonik hareket yapar. Hareketin genliği ω 'nin bir fonksiyonudur. Genlik A ile gösterilirse,

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\left[m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

dır. Burada $\omega=0$ ise F(t) fonksiyonu zamana bağlı değildir ve F sabit değerine eşittir. O zaman amplitüd,

$$\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} > 0$$

olur. Eğer $\omega \rightarrow \infty$ ise, açıkça görülüyor ki $A(\omega)=0$ olur. Öyle ise, $0 < \omega < \infty$ durumunda $A(\omega)$ nasıl bir değer kazanır, şimdi bunu araştıralım.

$A(\omega)$ 'nin ω 'ya göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse, buradan

$$2\omega \left[\frac{R^2}{2m^2} - (\omega_0^2 - \omega^2) \right] = 0$$

elde edilir. Görülüyor ki, ancak,

$$\omega=0 \quad \text{veya} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2m^2}}$$

olması durumunda $A(\omega)$ 'nin değeri maksimum olur. Bu nedenle,

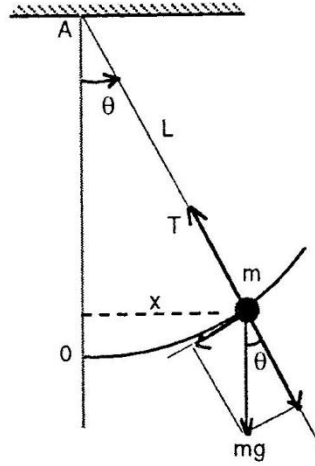
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2m^2}} \quad (4.19)$$

değerine, rezonans frekans değeri denir. Bu durumda sistem, F(t) ile rezonans durumunda olur.

Örnek 4.1

Bir basit sarkaç denge konumundan θ_0 açısı kadar ayrılıp serbest bırakılıyor. $\theta_0 < 5^\circ$ olması durumunda sarkacın denge konumu etrafında bir basit harmonik hareket yaptığını gösterelim ve sarkacın periyotunu bulalım.

Burada m kütleindeki cisim, L uzunluğunda bir ipin ucuna bağlı olarak A noktasında tavana asılı bulunmaktadır. Herhangi bir t anında cisim denge konumundan x uzaklıkta bulunmaktadır. Şekil 4.6'da görüldüğü gibi bu durumda sarkaç denge konumuyla θ açısı yapmakta ve buradan $\omega = d\theta/dt$ açısal hızı ile geçmektedir.



Şekil 4.6. Basit sarkaç

Sarkacın yatay doğrultudaki hareketinin diferansiyel denklemi,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \cos \theta \sin \theta \quad (4.20)$$

dır. Burada, $x=L\sin\theta$ 'dir. Küçük açılar için $\cos\theta\approx 1$ ve $\sin\theta\approx\theta$ olduğundan, Denklem (4.20) yerine,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (4.21)$$

yazılabilir. Burada başlangıç şartları, $\theta(0)=\theta_0$ ve $(d\theta/dt)_{t=0}=0$ olduğundan, Denklem (4.21)'in genel çözümü,

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (4.22)$$

elde edilir. Görülüyor ki, $\theta_0 < 5^\circ$ olması durumunda, basit sarkacın denge konumu etrafındaki hareketi basit harmonik harekettir. Burada $\omega = \sqrt{g/L}$ olduğundan, hareketin periyodu,

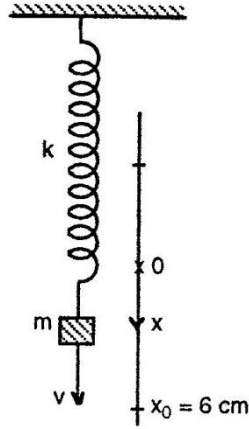
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

bulunur.

Örnek 4.2

Şekil 4.7'de görüldüğü gibi bir ucundan tavana asılı bulunan bir yayın diğer ucuna $m=2$ kg ağırlığında bir cisim asıldığı zaman yay 20 cm uzuyor. Sonra, denge konumundan $x_0=6$ cm uzaklığına kadar çekilip $t=0$ anında oradan ilk hızsız olarak

serbest bırakılan cismin herhangi bir t anında O'dan hangi uzaklıkta bulunduğunu ve hızını bulalım.



Şekil 4.7. Basit harmonik hareket

Yayın esneklik katsayısı,

$$k = F/\Delta x = mg/\Delta x = 2 \text{ kg} \cdot (9,8 \text{ m/sn}^2) / 0,20 \text{ m} = 98 \text{ N/m}$$

bulunur. Cisim O noktası etrafında bir salınım hareketi yapmaktadır. Hareketin denklemini,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 98x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 49x = 0 \quad (4.23)$$

olur. (4.23) denkleminin genel çözümü,

$$x = c_1 \cos 7t + c_2 \sin 7t \quad (4.24)$$

bulunur. t=0 anında x=x₀ olduğundan, c₁=x₀ olur. Denklem (4.24)'ün türevi alınırsa,

$$\frac{dx}{dt} = -7c_1 \sin 7t + 7c_2 \cos 7t$$

$$0 = 7c_2$$

$$c_2 = 0$$

elde edilir. Buna göre, cismin hareket denklemini,

$$x = 6 \cos 7t \quad (4.25)$$

olur. Denklem (4.25)'in türevi alınırsa,

$$\frac{dx}{dt} = v = -42 \sin 7t \quad (4.26)$$

elde edilir. Görülüyor ki, cismin hareketi basit harmonik harekettir. Hareketin genliği 6 cm ve açısal hızı 7 rad/sn'dir. Her defasında cisim denge konumundan, ± 42 cm/sn'lik bir hızla geçmektedir.

Örnek 4.3

Kabul edelim ki, Örnek 4.2'de serbest bırakıldığı andan itibaren devamlı olarak cisme, $F=9,26\cos\omega t$ kuvveti etki etmektedir. Bundan başka ayrıca sönüm katsayısı $R=16,25$ N.sn/m olacak şekilde ve her an cismin hızı ile orantılı bir sönüm kuvveti cisme etki etmektedir. Buna göre, hareketin rezonans frekansını ve rezonans genliğini bulalım.

Hareketin diferansiyel denklemi,

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 16,25\frac{dx}{dt} + 98x = 9,26\cos\omega t \quad (4.27)$$

dir. Bize burada, (4.27) denkleminin çözümü değil, önce rezonans frekansının değeri sorulmaktadır. Denklem (4.19) hatırlanacak olursa,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2m^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{98}{2} - \frac{16,25^2}{8}} \cong \frac{1}{2\pi} 4 = \frac{2}{\pi} \text{ sn}^{-1}$$

bulunur. Bu durumda, normal harmonik hareketin genliği,

$$A = \frac{F_0}{\left[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 R^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

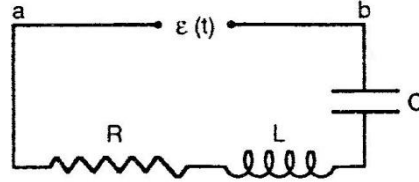
$$A = \frac{9,26}{\left[4(49 - 16)^2 + 16(16,25)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{9,26}{\left[4356 + 4225 \right]^{\frac{1}{2}}} \cong 0,1m$$

olur.

4.2. Elektrik Devre Problemleri

İkinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlere örnek olarak ikinci ve önemli bir uygulama elektrik-devre problemleridir. Burada göz önüne alınan elektrik-devre Şekil 4.8'de görüldüğü gibi, kutuplar arasındaki elektriksel potansiyel farkı zamanla değişen bir üreticinin uçları arasına seri olarak bağlanmış bulunan bir direnç, bir bobin ve bir kondansatör'den oluşan bir kapalı devredir.

$\varepsilon(t)$ 'nin değeri volt cinsinden, R'nin değeri ohm, L'nin değeri henry ve C'nin değeri ise farad cinsinden ölçülmektedir. R, L ve C verilen sabit değerlerdir. $\varepsilon(t)$ genel olarak bir sinüsoidal fonksiyonla, örneğin $\varepsilon(t)=\varepsilon_0\cos\omega t$ fonksiyonu ile ifade edilir. Burada ε , gerilimin volt cinsinden maksimum değeridir.



Şekil 4.8. Kapalı elektrik devresi

Şekil 4.8'de görülen RLC devresinden geçen akım, zamana bağlı olarak değişmektedir. Aynı şekilde kondansatörde toplanan elektrik yük miktarı da zamana bağlı olarak değişmektedir. Burada amacımız, elektrik akım şiddetinin $I(t)$ ile gösterilen ani değerini ve aynı şekilde, t anında kondansatörde bulunan elektrik yükü miktarı $Q(t)$ 'yi bulmaktır.

Devreden geçen akımın ani değeri $I(t)$, İkinci Kirchhoff kanunundan hareket edilerek bulunabilir. Buna göre, a ve b noktaları arasına tatbik edilen ani potansiyel farkı $\varepsilon(t)$, devrenin diğer kısımlarında meydana gelen ani potansiyel düşmeleri toplamına eşittir. Herhengi bir anda devreden geçen akımın ani şiddeti I ile ifade edilirse, o anda R direcinin uçları arasındaki potansiyel düşmesi IR , bobinin uçları arasındaki potansiyel düşmesi Ldl/dt ve kondansatörün uçları arasındaki potansiyel düşmesi Q/C olarak bilinmektedir. Bu durumda Kirchhoff kanununa göre,

$$L \frac{dl}{dt} + rI + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t) \quad (4.28)$$

yazılır. Burada Q , göz önüne alınan zamanda kondansatördeki yük miktarıdır. Bir dt zamanı sonra bu yük miktarı dQ kadar artacağından veya azalacağından ve bu sonsuz küçük zaman aralığında devreden geçen akım şiddeti sabit kabul edileceğinden,

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (4.29)$$

olur. Denklem (4.29)'un türevi alınırsa,

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \quad (4.30)$$

elde edilir. I ve dI/dt 'nin değerleri Denklem (4.28)'de yerine yazılırsa,

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \varepsilon(t) \quad (4.31)$$

elde edilir. Görülüyor ki, (4.31) denklemi, ikinci mertebeden, sabit katsayılı ve homojen olmayan lineer bir diferansiyel denklemdir. Başlangıç şartları da göz önüne alınarak bu denklem kolayca çözülür ve zamana bağlı olarak kondansatörün yükü bulunur.

Bu kez, Denklem (4.28)'de her terimin ayrı ayrı zamana göre türevi alınırsa,

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.32)$$

elde edilir. Bu denklem de aynı şekilde, ikinci mertebeden sabit katsayılı ve homojen olmayan bir lineer diferansiyel denklemdir. Başlangıç şartları kullanılarak denklem çözülür ve I(t) ani değeri kolayca bulunur.

Şimdi kabul edelim ki, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$ olsun. O zaman (4.31) denklemi

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad (4.33)$$

olur. Burada homojen kısmın özel çözümü $Q_p(t)$ ile gösterilirse, önceden biliyoruz ki,

$$Q_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.34)$$

olur. Belirsiz katsayılar metodu kullanılarak A ve B bulunur. Bunun için Q ve türevleri Denklem (4.33)'de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) A + \omega R B &= \varepsilon_0 \\ \Rightarrow -\omega R A + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) B &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan A ve B bulunur ve Denklem (4.34)'de yerlerine yazılırsa,

$$Q_p(t) = \frac{\varepsilon_0 \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) \cos \omega t + \omega R \varepsilon_0 \sin \omega t}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right)^2 + \omega^2 R^2} \quad (4.35)$$

elde edilir. Denklem (4.35) daha kısa olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$Q_p(t) = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta)}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right)^2 + \omega^2 R^2}} \quad (4.36)$$

$$Q_p(t) = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta)}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

olur. Burada δ 'ya faz açısı denir ve

$$\tan \delta = \frac{\frac{1}{C} - L\omega^2}{\omega R} = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

olduğundan, δ buradan bulunur ve (4.36) denkleminde yerine yazılır. Denklem (4.33)'ün genel çözümü,

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t)$$

olduğundan ve $t \rightarrow \infty$ için $Q_c(t) = 0$ olduğundan,

$Q_p(t)$ 'ye $Q(t)$ gözüyle bakabiliriz.

Akım şiddetinin ani değerine gelince, $I(t) = dQ/dt$ olduğundan, Denklem (4.36)'nın türevi alınır,

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (4.37)$$

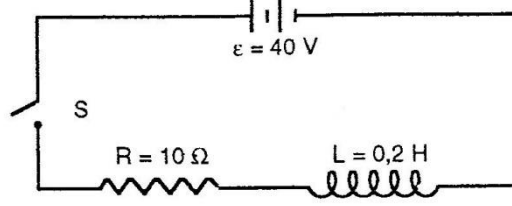
elde edilir. Görülüyor ki, ani akım şiddetinin frekansı, a ve b uçları arasında uygulanan ani gerilimin frekansına eşittir. (4.37) denkleminin paydasında görülen $(\omega L - 1/\omega C)$ ifadesine devrenin reaktans'ı denir. Tüm payda,

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = Z \quad (4.38)$$

ifadesi ise, devrenin impedans'ı adını alır.

Örnek 4.4

Direnci $R=10$ ohm olan bir direnç teli ve öz indüksiyon katsayısı $L=0,2$ henry olan bir bobin, elektromotor kuvveti 40 volt olan bir doğru akım üreticine, Şekil 4.9'da görüldüğü gibi seri olarak bağlanıyor. $t=0$ anında S anahtarı kapatıldığında, devreden geçen akım şiddeti sıfır değerinden başlayarak gittikçe artan bir değer alır ve en sonunda sabit bir değere ulaşır. İşte bu kısa zaman aralığı içinde bir t anında devreden geçen akım şiddetini bulalım.



Şekil 4.9. Kapalı elektrik devresi

ε , R ve L'nin verilen değerleri Denklem (4.32)'de yerlerine yazılırsa,

$$0,2 \frac{d^2 I}{dt^2} + 10 \frac{dI}{dt} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin genel çözümü,

$$I(t) = c_1 + c_2 e^{-50t}$$

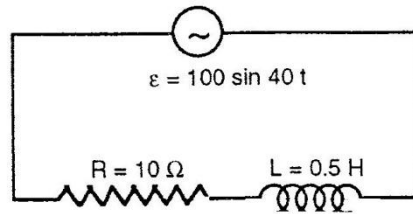
olur. $t=0$ için $I(0)=0$ ve $t \rightarrow \infty$ için $I=40/10=4$ amp olduğundan,

$$I(t) = 4(1 - e^{-50t})$$

bulunur.

Örnek 4.5

Elektromotor kuvveti $\varepsilon=100\sin 40t$ olan bir üreticinin uçları arasına 10 ohm'luk bir direnç teli ile 0,5 H'lik bir bobin seri olarak Şekil 4.10'daki gibi bağlanıyor. $t=0$ anında devreden geçen akım şiddeti sıfır ise herhangi bir t anında akım şiddetinin ne olacağını bulalım.



Şekil 4.10. Kapalı elektrik devresi

Denklem (4.28)'de bilinen değerler yerlerine konursa

$$0,5 \frac{dI}{dt} + 10I = 100 \sin 40t$$

elde edilir. Denklem sadeleştirilirse,

$$\frac{dI}{dt} + 20I = 200 \sin 40t$$

olur. Denklemin genel çözümü,

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2 \cos 40t) + ce^{-50t}$$

dır. Başlangıç şartı kullanılarak $c=4$ bulunur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa,

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2 \cos 40t) + 4e^{-50t}$$

bulunur. Burada belli bir zaman sonra ikinci terim sıfır olacağından $I(t)$ değeri,

$$I(t) = \frac{100 \sin(40t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

olur. Bilinen değerler yerlerine yazılırsa,

$$I(t) = 2\sqrt{5} \sin(40t + \delta) \quad (4.39)$$

elde edilir. $t \rightarrow \infty$ için (4.38) ve (4.39) denklemleri birbiriyle özdeştir.

$$\tan \delta = \frac{-L\omega^2}{\omega R} = -\frac{L\omega}{R} = -2$$

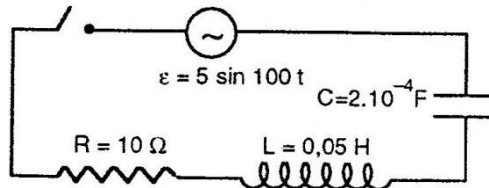
olduğundan, $\delta = -1,11$ radyan olur. Bu değer Denklem (4.39)'da yerine yazılırsa,

$$I(t) = 2\sqrt{5} \sin(40t - 1,11)$$

bulunur.

Örnek 4.6

Şekil 4.11'de görülen kapalı devre, bir RLC devresidir. Zaman başlangıcında devreden geçen akım şiddeti sıfır olduğuna göre herhangi bir t anındaki $I(t)$ 'nin ne olacağını bulalım.



Şekil 4.11. Kapalı elektrik devresi

Denklem (4.37) tekrar yazılır ve bilinen değerler burada yerine konulursa,

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \sin(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$I(t) = \frac{5 \sin(100t + \delta)}{\sqrt{100 + (5 - 50)^2}} \cong \frac{1}{9} \sin(100t + \delta)$$

ve

$$\tan \delta = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = \frac{50 - 5}{10} = 4,5$$

olur. Buradan $\delta=1,35$ radyan olduğundan,

$$I(t) \cong \frac{1}{9} \sin(100t + 1,35)$$

bulunur.

4.3. Mekanik-Mukavemet Problemleri

Yüksek mertebeden sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemlere dinamik, yapı ve elastik kiriş gibi mühendislik problemlerinde sık sık karşılaşılır. Newton'un ikinci hareket kanunu, her şeyden önce ikinci mertebeden bir doğrusal diferansiyel denklem olduğundan dinamik problemlerinde bu yasa esas alınır. Problemlerle birlikte verilen başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak çözüm fonksiyonu elde edilir.

Mukavemet problemlerinde düşey yüklerle yüklenmiş bir kirişin yer değiştirmesinin (elastik eğri) denklemi yine ikinci mertebeden bir doğrusal diferansiyel denklem olarak elde edilir.

Analitik geometride, düzlemsel bir eğrinin dik eksen sisteminde eğrilik ifadesi,

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

olarak verilir. Burada ρ eğrilik yarıçapı, x ve y kiriş üzerindeki bir noktanın koordinatları ve y aynı zamanda noktanın başlangıç konumundan itibaren yüklemeye altıda yer değiştirmesidir. Elastik eğrinin ρ eğrilik yarıçapı, M eğilme momenti ve I atalet momenti arasındaki bağıntı, E elastisite modülü olmak üzere,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

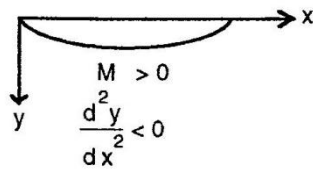
dır. Eğrilik ifadesi bu bağıntıda yerine yazılırsa elastik eğrinin diferansiyel denklemi tam olarak elde edilir. Ancak mühendislik uygulamalarında şekil değiştirme küçük

olacağından dy/dx eğimi de küçüktür ve eğimin karesi eğrilik ifadesinde ihmal edilirse,

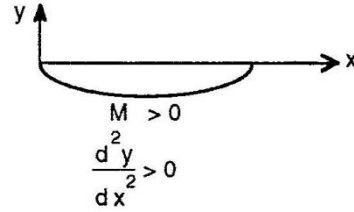
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI} \quad (4.40)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Denklemdaki iki farklı işaretten birisine karar vermek seçilen eksen sisteminin yönlenmesine ve eğilme momenti için kabul edilen işaret prensibine bağlıdır.

Şekil 4.12-a ve Şekil 4.12-b'de bu durum belirtilmiştir.



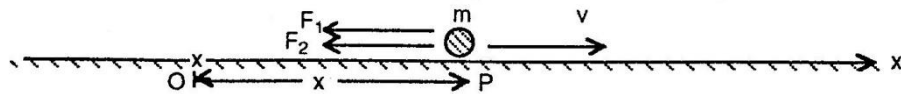
Şekil 4.12-a. Negatif eğrilik



Şekil 4.12-b. Pozitif eğrilik

Örnek 4.7

Kütlesi m olan bir P maddesel noktası, $t=0$ başlangıç anında $x=0$ noktasından v_0 ilk hızı ile geçecek şekilde x eksenini doğrultusunda Şekil 4.13'deki gibi hareket halindedir. Ancak hareket sırasında daima O noktasına yönelmiş bir $F_1=mn^2x$ geri çağırma kuvveti ile $F_2=2\lambda mnv$ harekete karşı direnç kuvveti cisme etki etmektedir. Burada $0<\lambda<1$ ve n sabitlerdir ve v cismin herhangi bir andaki hızıdır. Maddesel noktanın x yer değiştirmesini zamana bağlı olarak bulalım.



Şekil 4.13. Maddesel noktanın yer değiştirmesi

Cisim, O 'dan itibaren x uzaklığında bir v hızı ile pozitif x eksenini yönünde hareket etmekte iken, cisme negatif x eksenini yönünde $F_1=mn^2x$ ve $F_2=2\lambda mnv$ kuvvetleri etki etmektedir. Newton'un ikinci hareket kanununa göre,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mn^2x - 2\lambda mn \frac{dx}{dt}$$

ve buradan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda mn \frac{dx}{dt} + n^2x = 0 \quad (4.41)$$

elde edilir. Bu bir ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemdir.

Karakteristik denklem ve kökleri

$$t^2 + 2\lambda nt + n^2 = 0$$

$$t_{1,2} = -\lambda n \pm \sqrt{\lambda^2 n^2 - n^2}$$

$$t_1 = -\lambda n + n\sqrt{\lambda^2 - 1}$$

$$t_2 = -\lambda n - n\sqrt{\lambda^2 - 1}$$

olur. $0 < \lambda < 1$ verildiği için $\lambda^2 - 1 < 0$ dır. O halde diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$x(t) = e^{-\lambda nt} \left(c_1 \cos \sqrt{1 - \lambda^2} nt + c_2 \sin \sqrt{1 - \lambda^2} nt \right)$$

dir. Başlangıç koşulları kullanılarak c_1 ve c_2 sabitleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -n\lambda e^{-\lambda nt} \left(c_1 \cos \sqrt{1 - \lambda^2} nt + c_2 \sin \sqrt{1 - \lambda^2} nt \right) \\ &\quad + e^{-\lambda nt} \left(-c_1 n \sqrt{1 - \lambda^2} \sin \sqrt{1 - \lambda^2} nt + c_2 n \sqrt{1 - \lambda^2} \cos \sqrt{1 - \lambda^2} nt \right) \end{aligned}$$

$t=0$ için $x(0)=0$ ve

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = v_0$$

olduğundan

$$c_1=0 \text{ ve } c_2 = \frac{v_0}{n} \sqrt{1 - \lambda^2}$$

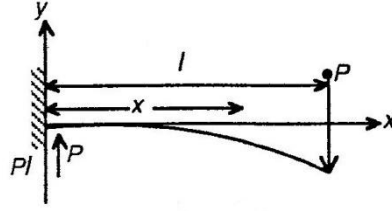
elde edilir. Bu durumda istediğimiz çözüm

$$x(t) = \frac{v_0 e^{-\lambda nt}}{n \sqrt{1 - \lambda^2}} \sin n \sqrt{1 - \lambda^2} t \quad (4.42)$$

bulunur.

Örnek 4.8

Şekil 4.14'te görüldüğü gibi tek bir P kuvveti etkisinde olan, I uzunluğundaki ankastre kirişte yer değiştirmeleri bulalım.



Şekil 4.14. Ankastre kirişte yer değiştirme

Mesnetteki tepkiler P dūřey tepki ve PI momentidir. Mesnetten herhangi bir x uzaklıęında yukarı etkiyen P kuvveti pozitif Px momentini doęurur. O halde x kesitindeki toplam eęilme momenti,

$$M = -PI + Px$$

olur ve elastik çubuğun diferansiyel denklemleri,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-PI + Px}{EI} \quad (4.43)$$

şeklinde elde edilir. Mesnette,

$$x=0 \text{ için } y=0 \text{ ve } \frac{dy}{dx}$$

sınır koşulları altında diferansiyel denklemin çözümleri art arda iki kere integral alınarak basitçe yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{P}{EI} \left[-Ix + \frac{x^2}{2} \right] + c_1 \\ y &= \frac{1}{EI} \left[-I \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right] + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

verilen kořullar kullanılarak integral sabitleri,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

bulunur. Bu durumda kirişin herhangi bir noktasındaki y yerdeęiřtirmeleri,

$$y = \frac{-PI}{EI} \frac{x^2}{2} + \frac{P}{EI} \frac{x^3}{6}$$

$$(4.44)$$

şeklinde elde edilir. $x=l$ için çubuk ucunda maksimum yer değiştirme ise,

$$y_{\max} = -\frac{PI^3}{3} \quad (4.45)$$

olarak bulunur.

Örnek 4.9

I boyunda, g yoğunluklu, gerilmiş elastik bir ip x eksenini boyunca denge konumundan itibaren ω açısal hızı ile dönmektedir. T ipteki gerilme kuvveti, $y(x)$ ise x dönme ekseninden itibaren ipin yer değiştirmesi olduğuna göre dönme hareketinin diferansiyel denklemi,

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho \omega^2 y = 0 \quad (4.46)$$

dır. İpin hareketi inceleyelim.

İp iki ucundan tesbit edilmiş olduğundan, sınır koşulları,

$$y(0) = 0, \quad y(I) = 0 \quad (4.47)$$

ile verilir. (4.46) diferansiyel denklemindeki sabitleri,

$$\lambda = \frac{\rho \omega^2}{T}$$

ile tanımlarsak denklem,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

şeklini alır ve çözümü,

$$y = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

olur. (4.47) sınır koşulları uygulanırsa,

x=0 için A=0 ve çözüm

$$y = B \sin \sqrt{\lambda} x \quad (4.48)$$

olur. x=I için,

$$B \sin \sqrt{\lambda} I = 0, \quad B \neq 0, \quad \sqrt{\lambda} I = n\pi$$

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{I^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$ öz değerleri için problemin sıfırdan farklı çözümü vardır ve her bir λ için (4.48) denkleminin çözümü,

$$y = B \phi_n(x) \quad (4.49)$$

olur. Burada $\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{I} x$ problemin öz fonksiyonlarıdır. Öz fonksiyonların

herhangi bir katı da problemin çözümüdür.

Her bir λ_n değerine ω açısal hızın bir değeri karşılık geleceğinden,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{I} \sqrt{\frac{T}{I}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.50)$$

bulunur. Bu değerler, dönen ipin kritik açısal hızlarıdır.

KAYNAKLAR

- Aydın M, Kuryel B, Gündüz G, Oturañ G (2001). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Barış Yayınları Fakülteler Kitabevi, İzmir.
- Murray R. Spiegel (1967). Applied Differential Equations. Prentice Hall.
- Paul D. Ritger and Nicholas J. Rose (1968). Differential Equations with Applications. Mc Graw-Hill Book Company.
- Shepley L. Ross (1974). Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc.
- Webster A. Gordon (1950). Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Hafner Publishing Company.
- William E. Boyce and Richard C. DiPrima (1977). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. John Wiley & Sons.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Turay ATABEY, 1969 yılında Hendek-SAKARYA’da doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Hendek’te yaptı. Yükseköğrenimine 1988 yılında Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladı. Özel nedenlerden dolayı okulu bırakmak zorunda kaldı. 1993 yılında tekrar sınava girerek Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde matematik dünyasına geri döndü. 2000 yılında mezun olduktan sonra özel kurumlarda öğretmen olarak çalıştı. 2001 yılında Hendek’te kendi dershanesini kurdu. 2005 yılında kurumu devrederek İstanbul’a yerleşti. Halen özel kurumlarda çalışmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.