T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

LİNEER OLMAYAN TAMAMEN ÇÖZÜLEBİLİR 2-BOYUTLU KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

Selma ADANMIŞ

Danışman

Prof. Dr. Ömer OĞUZ

İstanbul - 2014

T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

LİNEER OLMAYAN TAMAMEN ÇÖZÜLEBİLİR 2-BOYUTLU KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

Selma ADANMIŞ

Danışman

Prof. Dr. Ömer OĞUZ

İstanbul - 2014

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimin ve tez çalışmam süresince gösterdiği sabır ve hoşgörüyle beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan, yüksek lisans tez danışmanım olmayı kabul ederek kısa süre içerisinde bu çalışmayı ortaya çıkarmamı sağlayan saygı değer hocam Sayın Prof. Dr. Ömer OĞUZ‘ a sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışmayı hazırlama sürecinde her zaman yanı başımda olduklarını hissettirerek bana daima çalışma gücü veren tükenmez sevgi kaynağı aileme ve yakın dostum Tomris EKER’ e teşekkür ederim.

İstanbul, 2014 Selma ADANMIŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

SİMGELER

$\frac{d}{dt}$	: Zamana göre türev operatörü
$\frac{d}{dx}$	: x değişkenine göre türev operatörü
$\partial = \frac{\partial}{\partial x}$	: x değişkenine göre kısmi türev
$\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	: İkinci dereceden x değişkenine göre kısmi türev
L	: Lineer simetrik diferansiyel operatör
A	: Anti-simetrik lineer diferansiyel operatör
L_t	: L' nin t' ye göre kısmi türevi
ψ_t	: ψ' nin x' ye göre kısmi türevi
λ	: Sabit öz değer
$[L, A]$	: L ve A lineer operatörlerinin komütatörü
$\{g, h\}$	: g ve h fonksiyonlarının Poisson parantez gösterimi
σ_i	: Pauli spin matrisleri $(i = 1,2,3)$
$I[u]$	: $u(x, t)$ fonksiyonuna bağlı bi-vektör fonksiyoneli
$H_i[u]$	: Hamilton fonksiyonelleri ($i \in n$)
$h\ (u, u_x; x)$	: Hamilton fonksiyonu
J_i	: Hamilton operatörü ($i \in N$)
δ_{ij}	: Kronecker deltası sembolü
$\delta(x - y)$	: Dirac-Delta fonksiyonu
$\frac{\delta}{\delta u}$	: Fonksiyonel türev

I : Birim matris

θ : Bir form

: dış çarpım

KISALTMALAR

KdV	: Korteweg-de Vries
mKdV	: Modifiye Korteweg-de Vries
NLS	: Nonlinear Schröndinger
SG	: Sine-Gordon
AKNS	: Ablowitz, Kaup, Newell , Segur

GENEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı	: Selma ADANMIŞ
Anabilim Dalı	: Matematik
Program	: Uygulamalı Matematik
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Ömer OĞUZ
Tez Türü ve Tarihi	: Yüksek Lisans – Aralık 2014

ÖZET

Bu çalışmada son yıllarda gelişme gösteren lineer olmayan tamamen çözülebilir $(1+1)$ boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemler incelenmiştir. Genel olarak bu denklemlerin çözülebilirliğini gösteren yöntemler ele alınmıştır. Bu çalışmada incelediğimiz yöntemler Lax formalizmi, AKNS formülasyonu, sıfır eğrilik şartı ve Bi-Hamilton yapıdır. Lax formalizminde biri öz değer diğeri zaman değişim denklemi şeklindeki iki lineer denklemin uyumluluk şartından ortaya çıkan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler tamamen çözülebilir denklemler olmaktadır. Aynı zaman da AKNS ve sıfır eğrilik şartı formülasyonları, Lax formalizmini temel alan formülasyonlardır. Bu çalışmada yukarıda değinilen yöntemler detaylı bir şekilde incelenmiş ve örnekler verilmiştir. Lax formülasyonuyla KdV, Burgers ve Boussinesq denklemlerinin, AKNS denklemleriyle KdV, mKdV, NLS ve SG denklemlerinin ve sıfır eğrilik şartıyla da KdV denkleminin tamamen çözülebilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca AKNS denklemlerinin sıfır eğrilik şartı formülasyonu kullanılarak da elde edilebildiği gösterilmiştir. Daha sonra Poisson parantezlerinin sonlu ve sonsuz boyutlu lineer vektör uzaylarındaki özellikleri incelenerek Bi-Hamilton formalizmi verilmiştir. Bi-Hamilton yapıya sahip olan lineer olmayan denklemlerden biri olan KdV denkleminin Bi-Hamilton yapısı detaylı olarak incelenmiş ve elde edilen Hamilton operatörlerinin anti-simetri özelliği ve Jacobi özdeşliğini sağladığı gösterilmiştir. Sonrasında KdV denklemi için bulunan Bi-Hamilton fonksiyonları ve operatörleri yardımıyla KdV hiyerarşisindeki diğer denklemler elde edilmiştir. Son olarak Boussinesq denkleminin Bi-Hamilton yapısı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lax formalizmi, AKNS formülasyonu, Sıfır eğrilik şartı, Bi-Hamilton.

GENERAL KNOWLEDGE

Name and Surname	: Selma ADANMIŞ
Field	: Mathematics
Program	: Applied Mathematics
Supervisor	: Prof. Dr. Ömer OĞUZ
Degree Awarded and Date	: Master of Science - Dec 2014

ABSTRACT

In this study, showing the development in recent years, nonlinear compeletely solvable $(1+1)$ partial differential equations were investigated. In general, methods that show integrability of these equations were discussed. The methods examined in this study are Lax's formalism, AKNS formulation, zero curvature condition and Bi-Hamilton structure. In Lax formalism, nonlinear partial differential equations, originating from compatibility condition of two linear equations, consisting of eigenvalue equation and time evolution equation, become completely solvable equations. At the same time, AKNS formulation and zero curvature condition base on Lax formalism. In this study, above mentioned methods were examined in details and exemplified. It was shown that KdV, Burgers and Boussinesq equations are comletely integrable by using Lax formulation, AKNS equations provide the integrability of KdV, mKdV, NLS and SG equations , and the integrability of KdV equation is also shown by using zero curvature condition. It was shown that AKNS equations can be derived by using zero curvature condition formulation, too. Afterwards, Bi-Hamilton formalism was given, examining features of Poisson parentheses in infinite dimensional and finite dimensional linear vector space. Bi-Hamilton structure of the nonlinear equations-KdV equation, is examined in detail and it is shown that Hamilton operators provide antisymmetry feature and satisfy Jacobi identity. Then, other equations in KdV hierarchy are obtained with the help of Bi-Hamilton functions and operators, found for KdV equation. Finally, Bi-Hamilton structure of Boussinesq equation is investigated.

Keywords: Lax formalism, AKNS formulation, Zero curvature condition, Bi-Hamilton.

1.GİRİŞ

Doğadaki birçok olayın anlaşılması için yapılan modeller lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler içermektedir. Bu nedenle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tamamen çözülebilirliğinin gösterilmesi uygulamalı matematiğin gelişen güncel konularından birisi haline gelmiştir. Örneğin fiziğin birçok dallarında, lineer olmayan optik, hidrodinamik, katıhal fiziği, plazma fiziği, yüksek enerji fiziği gibi geniş bir alandaki fiziksel olayların incelenmesinde lineer olmayan sistemlerin tamamen çözülebilirliği fizikçiler ve matematikçilerin bir çalışma alanını oluşturmaktadır (Das, 1989; Ablowitz ve Clarkson, 1991).

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözülebilirliği üzerine yıllardır yapılan çalışmalar $(1+1)$ boyutta çok sayıda denklemin çözülebilirliğinin gösterilmesini sağlamıştır. Bu denklemlerin en önemlisi ve en çok bilineni Korteweg-de Vries (KdV) denklemidir. İlk olarak Gardner (1971) KdV denkleminin tamamen çözülebilir bir denklem olduğunu göstermiş ve bu fikir daha sonra Zakharov ve Fadeev (1971) tarafından geliştirilmiştir. Genel olarak tamamen çözülebilirlik kriterleri ile ilgili her yeni formülasyon genellikle ilk olarak KdV denklemi üzerinde sınanmaktadır. Örneğin, fermiyonik değişkenlerin ithali ile KdV denkleminin süper ve süper simetrik genelleştirmesi yapılarak tamamen çözülebilir süper denklemler incelenmeye başlanmıştır (Gürses M ve Oğuz Ö, 1985: 437-440; Mathieu P, 1988: 2499-2056; Kupershmidt BA, 1984: 213-215; Kupershmidt BA, 1987; Manin Yu I ve Radul AO, 1985: 65-67). Bir diğer yönde yapılan güncel çalışmalar ise çok bileşenli tamamen çözülebilir sistemlerin elde edilmesidir. Çok bileşenli KdV denklemi son yıllarda birçok çalışmanın odağı olmuştur (Svinolupov SI, 1991: 611-620; Oğuz Ö, 1995). Ayrıca çok bileşenli KdV denklemlerinin çok bileşenli süper KdV denklemlerine genellemesi yapılmıştır (Oguz O, Oguz Ö ve Yazıcı D, 2001: 7713-7718).

Genellikle tamamen çözülebilir sistemler $(1+1)$ boyutta incelenmektedir. Bu sistemlerle ilgili yıllardır birçok örneğe rastlanmaktadır. Bu örneklerin başlıcaları KdV, Burgers, NLS, Boussinesq ve Sine-Gordon denklemleridir. Bu denklemler matematiksel fizikte ve diğer bilim alanlarında birçok problemde karşımıza çıkmaktadır. Korteweg-de Vries (KdV) denklemi sığ su dalgalarını ve plazmalardaki akustik dalgalarını belirtir (Korteweg ve de Vries, 1895: 422-443). Lineer olmayan Schröndinger (NLS) denklemi derin sudaki yüzey dalgalarını ve lineer olmayan optiğini açıklar (Malomed ve Boris, 2005: 639–643). Sine-Gordon (SG) denklemi yer çekimine bağlı tele dik düşey düzlemlerde hareketini belirtir. (Frenkel ve Kontorova 1939: 137–149; Faddeev ve Korepin, 1978: 1–87). Boussinesq denklemi hareket eden bir basınç alanının yarattığı dalgaları modellemeyi açıklar (Demircioğlu, 2010) ve Burgers denklemi en önemli lineer olmayan yayılım denklemlerinden biri olmakla beraber akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit lineer olmayan denklem modelidir (Debnath, 1997). Aynı zamanda $(2+1)$ boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözülebilir olduğu $(1+1)$ boyutlu denklemlerin çözülebilir olduğundan yola çıkarak bulunmuştur. $(2+1)$ boyutta olan denklemlere de Kadomtesev-Petviashvili (1970), Davey-Stewartson (1974) ve Ishimori (1984) örnektir. Öte yandan $(3+1)$ boyuttaki lineer olmayan denklemlerin de tamamen çözülebilirliğinin gösterilmesi güncel problemlerden birisidir.

Tamamen çözülebilirliği bir kaç farklı yöntem ve yaklaşımla incelemek mümkündür . Bu yöntemlerin başlıcaları Lax formalizmi, AKNS formülasyonu , sıfır eğrilik şartı ve Bi-Hamilton yapıdır.

Bu çalışmada lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin $(1+1)$ boyutta tamamen çözülebilirliği yukarıda değinilen yöntemler çerçevesinde incelenecektir. 1. Bölümde çalışmanın içeriği, $(1+1)$ boyuttaki tamamen çözülebilir denklemlere örnekler ve bu örneklerin matematiksel fizikte ve diğer bilim alanlarında hangi problemlerde karşımıza çıktığından bahsedilmiştir. Aynı zamanda $(1+1)$ boyutlu sistemlerin çözümünden yola çıkarak $(2+1)$ boyutlu sistemlerinde çözülebilir olduğu gösterilmiştir. 2. Bölümde Lax formalizminde biri öz değer diğeri zaman değişim denklemi şeklindeki iki lineer denklemin uyumluluk şartının lineer olmayan denklemleri vermesi durumunda bu denklemlerin tamamen çözülebilir olduğunu gösterdiği ve bu formalizm çerçevesinde KdV, Burgers ve Boussinesq denklemlerinin tamamen çözülebilir olduğu gösterilmiştir. 3. Bölümde AKNS formülasyonunun Lax formalizmi temelli formülasyon olduğu belirtilerek KdV, mKdV, NLS ve SG denklemlerinin tamamen çözülebilir olduğu gösterilmiştir. 4. Bölümde sıfır eğrilik şartı formülasyonun Lax formalizminin matris form denklemi olduğu belirtilerek KdV Denklemi üzerinde sınanarak KdV denkleminin tamamen çözülebilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca AKNS denklemlerinin sıfır eğrilik şartı formülasyonu kullanılarak da elde edildiği gösterilmiştir. Yani $(1+1)$ boyutlu tamamen çözülebilir lineer olmayan denklemlere beş farklı örnek ayrıntılı bir şekilde gösterilmiştir. 5. Bölümde Poisson parantezlerinin Hamilton formalizmindeki rolü incelenmiş ve tekrarlama bağıntısı kullanılarak Bi-Hamilton yapı oluşturulmuştur. Bi Hamilton yapıya sahip bir sistem sonsuz tane korunan büyüklüğe, yani sonsuz tane Hamilton fonksiyonuna sahip olacağından, bu yapıya uyan lineer olmayan denklemler tamamen çözülebilir denklemler olmaktadır. KdV denkleminin Hamilton fonksiyonları ve Hamilton operatörleri çıkarılarak Bi-Hamilton yapısı kurulmuştur. Böylece bu yöntemle de KdV denkleminin tamamen çözülebilir olduğu gösterilmiştir. KdV denkleminin Bi-Hamilton yapısı oluşturulurken Hamilton operatörlerinin mutlaka sağlanması gereken anti-simetri özelliğinin ve Jacobi özdeşliğinin sağlandığı P.Olver'in (1986) metodu kullanılarak gösterilmiştir. Öte yandan tekrarlama bağıntısı kullanılarak KdV hiyerarşisinden bahsedildikten sonra Boussinesq denkleminin Bi-Hamilton yapısı inşa edilmiştir.

2. LAX FORMALİZMİ

1968 yılında Lax, bazı lineer olmayan kismi türevli diferansiyel denklemleri ters saçılma yöntemi ile tamamen çözülebilir olduklarını gösterdi (Lax , 1968: 467–490). Lax, lineer olmayan tamamen çözülebilir diferansiyel denklemleri, bir simetrik lineer operatörün öz değer problemi ile bir anti simetrik operatör yazılmış zaman değişimi problemi ile ilişkilendirdi (Spiro Karıgıannis, 1998: 9).

Lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem genel olarak,

$$K[u] = F[u, u_x, u_{xx}, \dots.] \tag{2.1}$$

fonksiyonu,u(x,t) ve u 'nun türevlerinin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\partial_t u = u_t = K[u] \tag{2.2}$$

şeklinde bir zaman değişimi denklemi şeklinde yazılabilir. Burada amaç, (2.2) denkleminin tamamen çözülebilirliğinin test edilmesine yarayacak operatörler bulabilmektir. Bu operatörler yardımıyla yazılan biri öz değer denklemi ile diğeri zaman değişimi denklemi şeklindeki iki lineer denklemin uyumluluk (compatibility) şartı (2.2) denklemini veriyorsa (2.2) denkleminin tamamen çözülebilir olduğu gösterilmiş olur. Şimdi bir ψ fonksiyonu yardımıyla simetrik lineer operatör L olmak üzere eş spekturumlu (isospectral) öz değer denklemini;

$$L\psi = \lambda\psi \tag{2.3}$$

ve anti-simetrik A lineer operatörü yardımıyla zaman değişim denklemini, alt indis zaman türev operatörünü göstermek üzere,

$$\psi_t = A\psi \tag{2.4}$$

şeklinde yazalım. Burada λ sabit bir öz değer olmaktadır. Bu denklemlerin uyumluluk şartını elde etmek için (2.3) denklemine ∂_t türev operatörünü ve (2.4) denklemine de L operatörünü uygulayalım. Böylece (2.3) denkleminden;

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.5) denkleminde $\lambda_t = 0$ ifadesini yerine koyup tekrar düzenlersek;

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda\psi_t \tag{2.6}$$

olur. Şimdi de (2.4) denklemine soldan L operatörü uygulandığında,

$$L\psi_t = LA\psi \tag{2.7}$$

bulunur. (2.6) denkleminde $L\psi_t = LA\psi$ (2.7) ve $\psi_t = A\psi$ (2.4) ifadelerini kullanıp tekrar düzenlersek;

$$L_t\psi + LA\psi = \lambda A\psi \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.8) denkleminde λ sabit olduğundan A lineer operatör ile yer değiştirebileceğinden (2.8) denklemi;

$$L_t\psi + LA\psi = A\lambda\psi \tag{2.9}$$

şeklinde de yazılabilir. (2.9) denkleminin sağ tarafında bulunan $\lambda\psi$ ifadesi yerine $L\psi$ ifadesini yazıp tekrar düzenlersek;

$$L_t\psi + LA\psi = AL\psi \ , \tag{2.10}$$

$$L_t\psi + LA\psi - AL\psi = 0 \ , \tag{2.11}$$

$$[L_t + (LA - AL)]\psi = 0 \tag{2.12}$$

olur. L ve A lineer operatörlerinin komütatörü $[L, A] = LA - AL$ olmak üzere;

$$(L_t + [L, A])\psi = 0 \tag{2.13}$$

yazılır ve böylece uyumluluk şartı;

$$L_t + [L, A] = 0 \tag{2.14}$$

olarak elde edilir. (2.14) denklemine Lax denklemi, L ve A operatörlerine de Lax çifti denir.

2.1. LAX FORMALİZMİNE ÖRNEKLER

2.1.1. KdV Denklemi

Örnek olarak literatürde de en çok bilinen denklemlerden biri olan KdV denkleminin tamamen çözülebilirliğini Lax formalizmi çerçevesinde inceleyelim.

KdV denklemi $(1+1)$ boyutta basit lineer olmayan bir dispersif dalga denklemidir. Dalga hızının dalga boyuna veya frekansına bağlı olmasından dolayı dalganın şekli zamanla değişiyorsa bu tür dalgalara dispersif dalga denir. KdV denklemi;

$$u_t + a u_{xxx} + b u u_x = 0 \tag{2.15}$$

şeklindedir ve özel olarak a ve b sabitleri, $a = b = 1$ seçildiği zaman,

$$u_t + u_{xxx} + u u_x = 0 \tag{2.16}$$

şeklini alır. Denklemdeki t ve x alt indisleri, sırasıyla ∂_t ve ∂ kısmi türevlerini ifade etmekte olup, burada ve bundan sonraki gösterimlerde bu şekilde kullanılacaktır.

KdV denkleminin çözümü olan dalgalara soliton adı verilmektedir. Tek başına hareket eden ve birbirleriyle çarpıştıktan sonra, çarpışma öncesinde sahip oldukları şekil ve hızlarını koruyan dalgaların parçacık benzeri doğaları, Zabusky ve Kruskal'ın bu gibi dalgaları soliton olarak adlandırılmasına sebep olmuştur (Zabusky ve Kruskal, 1965: 240–243).

KdV denkleminin Lax çiftini elde etmek için, α bir sabit olmak üzere,

$$\left(\partial^2 + \frac{1}{6}\alpha u\right)\psi = \lambda\psi \tag{2.17}$$

ile verilen lineer Schrödinger denklemini kullanabiliriz. Burada $u(x,t)$ KdV denkleminin bir çözümü olmak üzere Schrödinger eşitliğinin öz değerlerini etkilemez. Yani öz değerler değişmez (invariant) kalır. Böylece,

$$L = \partial^2 + \frac{1}{6}\alpha u \tag{2.18}$$

ve $\psi_t = A\psi$ lineer denkleminin A operatörü;

$$A = -4\,\partial^2 - \frac{1}{2}\alpha u\,\partial - \frac{1}{2}\alpha\,\partial u \tag{2.19}$$

olarak alalım. Problemi çözmeye öncelikle Lax denklemini yazmakla başlayalım.

$$L_t = [A\,,L] = AL - LA \tag{2.20}$$

Sonra Lax denklemini soldan ψ ile çarparsak,

$$L_t\psi = AL\psi - LA\psi \tag{2.21}$$

denklemini elde ederiz. Elde edilen bu denklemde KdV denklemi için seçilen A ve L ifadelerini kullanarak sırasıyla $AL\psi$ ve $LA\psi$ karşılığını bulup (2.21) denkleminde yerine yazalım.

(2.18) ve (2.19) ifadelerini $AL\psi$ için yazılırsa,

$$AL\psi = \left(-4\,\partial^3 - \frac{1}{2}\alpha u\,\partial - \frac{1}{2}\alpha\,\partial u\right)\left(\partial^2 + \frac{1}{6}\alpha u\right)\psi \tag{2.22}$$

olur. (2.22) denklemini türev işlemlerini alarak düzenleyelim.

$$\mathrm{AL}\psi = \left(-4\,\partial^3 - \tfrac{1}{2}\alpha u\,\partial - \tfrac{1}{2}\alpha\,\partial u\right)\left(\psi_{xx} + \tfrac{1}{6}\alpha u\psi\right)\ , \tag{2.23}$$

$$\mathrm{AL}\psi = -4\psi_{5x} - \tfrac{4}{6}\alpha\,\partial^3(u\psi) - \tfrac{1}{2}\alpha u\psi_{xxx} - \tfrac{1}{12}\alpha^2 u\,\partial(u\psi) - \tfrac{1}{2}\alpha\,\partial(u\psi_{xx}) - \tfrac{1}{12}\alpha^2\,\partial(u^2\psi)\ , \tag{2.24}$$

$$\mathrm{AL}\psi = -4\psi_{5x} - \tfrac{2}{3}\alpha(u_{xxx}\psi + 3u_{xx}\psi_x + 3u_x\psi_{xx} + u\psi_{xxx}) - \tfrac{1}{2}\alpha u\psi_{xxx} - \tfrac{1}{12}\alpha^2 u(u_x\psi + u\psi_x) - \tfrac{1}{2}\alpha(u_x\psi_{xx} + u\psi_{xxx}) - \tfrac{1}{12}\alpha^2\,(2uu_x\psi + u^2\psi_x) \tag{2.25}$$

(2.25) denklemini düzenlersek,

$$\mathrm{AL}\psi = -4\psi_{5x} - \tfrac{2}{3}\alpha u_{xxx}\psi - 2\alpha u_{xx}\psi_x - \tfrac{5}{2}\alpha u_x\psi_{xx} - \tfrac{5}{3}\alpha u\psi_{xxx} - \tfrac{1}{4}\alpha^2 uu_x\psi - \tfrac{1}{6}\alpha^2 u^2\psi_x \tag{2.26}$$

bulunur. Şimdi de (2.18) ve (2.19) denklemlerini $\mathrm{LA}\psi$ ifadesinde yerine yazarsak,

$$\mathrm{LA}\psi = \left(\partial^2 + \tfrac{1}{6}\alpha u\right)\left(-4\,\partial^3 - \tfrac{1}{2}\alpha u\,\partial - \tfrac{1}{2}\alpha\,\partial u\right)\psi \tag{2.27}$$

olur. (2.27) denklemini benzer şekilde düzenleyelim,

$$\mathrm{LA}\psi = \left(\partial^2 + \tfrac{1}{6}\alpha u\right)\left(-4\psi_{xxx} - \tfrac{1}{2}\alpha u\psi_x - \tfrac{1}{2}\alpha(u_x\psi + u\psi_x)\right)\ , \tag{2.28}$$

$$\mathrm{LA}\psi = \left(\partial^2 + \tfrac{1}{6}\alpha u\right)\left(-4\psi_{xxx} - \alpha u\psi_x - \tfrac{1}{2}\alpha u_x\psi\right)\ , \tag{2.29}$$

$$\mathrm{LA}\psi = -4\psi_{5x} - \alpha\,\partial^2(u\psi_x) - \tfrac{1}{2}\alpha\,\partial^2(u_x\psi) - \tfrac{4}{6}\alpha u\psi_{xxx} - \tfrac{1}{6}\alpha^2 u^2\psi_x - \tfrac{1}{12}\alpha^2 uu_x\psi\ , \tag{2.30}$$

$$\mathrm{LA}\psi = -4\psi_{5x} - \alpha(u_{xx}\psi_x + 2u_x\psi_{xx} + u\psi_{xxx}) - \tfrac{1}{2}\alpha(u_{xxx}\psi + 2u_{xx}\psi_x + u_x\psi_{xx}) - \tfrac{2}{3}\alpha u\psi_{xxx} - \tfrac{1}{6}\alpha^2 u^2\psi_x - \tfrac{1}{12}\alpha^2 uu_x\psi \tag{2.31}$$

(2.31) denklemini düzenlersek,

$$\mathrm{L A}\psi = -4\psi_{5x} - 2\alpha u_{xx}\psi_x - \frac{5}{2}\alpha u_x\psi_{xx} - \frac{5}{3}\alpha u\psi_{xxx} - \frac{1}{2}\alpha u_{xxx}\psi - \frac{1}{6}\alpha^2 u^2\psi_x - \frac{1}{12}\alpha^2 u u_x\psi \tag{2.32}$$

elde edilir. Öte yandan $L_t\psi = \frac{1}{6}\alpha u_t\psi$ olduğundan (2.21) denklemi;

$$\frac{1}{6}\alpha u_t\psi = \left(-4\psi_{5x} - \frac{2}{3}\alpha u_{xxx}\psi - 2\alpha u_{xx}\psi_x - \frac{5}{2}\alpha u_x\psi_{xx} - \frac{5}{3}\alpha u\psi_{xxx} - \frac{1}{4}\alpha^2 u u_x\psi - \frac{1}{6}\alpha^2 u^2\psi_x\right) - \left(-4\psi_{5x} - 2\alpha u_{xx}\psi_x - \frac{5}{2}\alpha u_x\psi_{xx} - \frac{5}{3}\alpha u\psi_{xxx} - \frac{1}{2}\alpha u_{xxx}\psi - \frac{1}{6}\alpha^2 u^2\psi_x - \frac{1}{12}\alpha^2 u u_x\psi\right) \tag{2.33}$$

olur. (2.33) denkleminde kısaltmaları yaparak;

$$\frac{1}{6}\alpha u_t\psi = -\frac{2}{3}\alpha u_{xxx}\psi + \frac{1}{2}\alpha u_{xxx}\psi - \frac{1}{4}\alpha^2 u u_x\psi + \frac{1}{12}\alpha^2 u u_x\psi\ , \tag{2.34}$$

$$\frac{1}{6}\alpha u_t\psi = -\frac{1}{6}\alpha u_{xxx}\psi - \frac{1}{6}\alpha^2 u u_x\psi\ , \tag{2.35}$$

$$u_t = -u_{xxx} - \alpha u u_x\ , \tag{2.36}$$

$$u_t + u_{xxx} + \alpha u u_x = 0 \tag{2.37}$$

elde edilir. α = 1 alındığında (2.37) denklemi,

$$u_t + u_{xxx} + u u_x = 0 \tag{2.38}$$

halini alır, yani KdV denklemi elde edilir. Sonuç olarak KdV (2.38) denklemi,

$$L = \partial^2 + \frac{1}{6}u \tag{2.39}$$

ve

$$A = -4\,\partial^3 - \frac{1}{2}u\,\partial - \frac{1}{2}\partial u \tag{2.40}$$

ile verilen Lax çifti operatörlerinin uyumluluk şartı olarak elde edildi. Bu operatörlerin varlığı bize KdV denkleminin tamamen çözülebilir bir lineer olmayan denklem olduğunu ifade etmektedir.

2.1.2. Burgers Denklemi

$$u_t + u_{xx} + uu_x = 0 \tag{2.41}$$

şeklinde ifade edilen Burgers denklemi en önemli lineer olmayan yayılım denklemlerinden biridir. Bu denklem akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit lineer olmayan denklem modelidir. İlk olarak Burger tarafından bir boyutlu türbülansı tanımlamak için kullanılmıştır (Burgers, 1939).

Burgers denkleminin Lax formalizmi ile tamamen çözülebilir bir denklem olduğunu gösterelim. Bunun için Lax operatörçifti,

$$L = \partial + u \ , \tag{2.42}$$

$$A = \partial^2 + 2u\partial + (\alpha + 1)u_x + \beta u^2 \tag{2.43}$$

şeklinde alınmaktadır (Masashi Hamanaka ve Kouichi Toda, 2003: 77). Burada $u = u(x,t)$ ve α, β ise keyfi sabitlerdir. Burgers denklemini elde etmek için daha önce ifade edilen (2.21),

$$L_t\psi = AL\psi - LA\psi$$

Lax denklemini yazalım. Burgers denklemi için seçilen A ve L ifadelerini kullanarak sırasıyla $AL\psi$ ve $LA\psi$ karşılığını bulup (2.21) denkleminde yerine yazalım.

$$AL\psi = (\partial^2 + 2u\partial + (\alpha + 1)u_x + \beta u^2)(\partial + u)\psi \tag{2.44}$$

(2.44) denkleminde türev işlemleri alınıp düzenlenirse,

$$AL\psi = (\partial^2 + 2u\partial + (\alpha + 1)u_x + \beta u^2)(\psi_x + u\psi) \tag{2.45}$$

$$\mathrm{AL}\psi = \psi_{xxx} + u_{xx}\psi + 2u_x\psi_x + u\psi_{xx} + 2u\psi_{xx} + 2uu_x\psi + 2u^2\psi_x + (\alpha + 1)u_x\psi_x + (\alpha+1)uu_x\psi + \beta u^2\psi_x + \beta u^3\psi \tag{2.46}$$

elde edilir. Şimdi de (2.42), (2.43) denklemlerini $\mathrm{LA}\psi$ ifadesinde yerine yazarsak,

$$\mathrm{LA}\psi = (\partial + u)(\partial^2 + 2u\,\partial + (\alpha+1)u_x + \beta u^2)\psi \tag{2.47}$$

(2.47) denkleminde de türev işlemleri alınıp düzenlenirse,

$$\mathrm{LA}\psi = (\partial + u)(\psi_{xx} + 2u\psi_x + (\alpha+1)u_x\psi + \beta u^2\psi)\ , \tag{2.48}$$

$$\mathrm{LA}\psi = \psi_{xxx} + u\psi_{xx} + 2u_x\psi_x + 2u\psi_{xx} + 2u^2\psi_x + (\alpha+1)u_{xx}\psi + (\alpha + 1)u_x\psi_x + (\alpha+1)uu_x\psi + 2\beta uu_x\psi + \beta u^2\psi_x + \beta u^3\psi \tag{2.49}$$

bulunur. Öte yandan $L_t\psi = u_t\psi$ olduğundan (2.21) denklemi;

$$u_t\psi = (\psi_{xxx} + u_{xx}\psi + 2u_x\psi_x + u\psi_{xx} + 2u\psi_{xx} + 2uu_x\psi + 2u^2\psi_x + (\alpha + 1)u_x\psi_x + (\alpha+1)uu_x\psi + \beta u^2\psi_x + \beta u^3\psi) - (\psi_{xxx} + u\psi_{xx} + 2u_x\psi_x + 2u\psi_{xx} + 2u^2\psi_x + (\alpha+1)u_{xx}\psi + (\alpha+1)u_x\psi_x + (\alpha + 1)uu_x\psi + 2\beta uu_x\psi + \beta u^2\psi_x + \beta u^3\psi) \tag{2.50}$$

olur. (2.50) denkleminde sadeleştirmeleri yaparak;

$$u_t\psi = 2uu_x\psi - \alpha u_{xx}\psi - 2\beta uu_x\psi \tag{2.51}$$

ve

$$u_t + \alpha u_{xx} + 2(\beta - 1)uu_x = 0 \tag{2.52}$$

olur. (2.53) denkleminde $\alpha = 1$ ve $\beta = \frac{3}{2}$ alınırsa

$$u_t + u_{xx} + uu_x = 0$$

Burgers denklemi elde edilir.

Sonuç olarak Burgers denklemi (2.42) ve (2.43) ile verilen Lax çifti operatörlerinin uyumluluk şartının bir sonucu olarak elde edildi. Bu operatörlerin varlığı bize Burgers denkleminin tamamen çözülebilir bir lineer olmayan denklem olduğunu ifade etmektedir.

2.1.3. Boussinesq Denklemi

$$u_{tt} - \beta u u_{xx} - \beta(u_x)^2 + \varepsilon u_{xx} + \alpha u_{4x} = 0 \qquad (2.53)$$

şeklinde ifade edilen Boussinesq denklemi lineer olmayan dispersif dalga denklemlerinden biridir. Burada α, β ve ε keyfi sabitlerdir. Aynı zamanda Boussinesq denklemi derin sulardan sığ sulara doğru hareket eden bir boyutlu dalga hareketlerini tarif etmede ve bunun sonucu olarak kıyı projelerinde etkili bir araç olarak kullanılmaktadır (Boussinesq, 1872: 55-108).

Bu denklem için Lax operatör çifti, $u = u(x,t)$ yardımcı fonksiyon $v = v(x,t)$olmak üzere,

$$L = \partial^3 - 2u\,\partial - u_x - iv \ , \qquad (2.54)$$

$$A = 3i\,\partial^2 - 4iu \qquad (2.55)$$

şeklinde alınmaktadır (Jennifer Larue, 2011: 31).

Boussinesq denklemini elde etmek için (2.21),

$$L_t\psi = AL\psi - LA\psi$$

Lax denklemini yazalım ve diğer örneklerde yapılan işlemleri bu seferde sırasıyla Boussinesq denklemi için yapalım.

$$AL\psi = (3i\,\partial^2 - 4iu)(\partial^3 - 2u\,\partial - u_x - iv)\psi \qquad (2.56)$$

(2.56) denkleminde türev işlemleri alınıp düzenlenirse,

$$AL\psi = (3i\,\partial^2 - 4iu)(\psi_{3x} - 2u\psi_x - u_x\psi - iv\psi) \ , \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned} AL\psi = {} & 3i\psi_{5x} - 6iu_{xx}\psi_x - 12iu_x\psi_{xx} - 6iu\psi_{xxx} - 3iu_{xxx}\psi - 6iu_{xx}\psi_x + \\ & 3iu_x\psi_{xx} + 3v_{xx}\psi + 6v_x\psi_x + 3v\psi_{xx} - 4iu\psi_{xxx} + 8iu^2\psi_x + 4iuu_x\psi - \\ & 4uv\psi \end{aligned} \tag{2.58}$$

elde edilir. Şimdi de (2.54), (2.55) denklemlerini $LA\psi$ ifadesinde yerine yazalım.

$$LA\psi = (\partial^3 - 2u\,\partial - u_x - iv)(3i\,\partial^2 - 4iu)\psi \tag{2.59}$$

(2.59) denkleminde de türev işlemleri alınıp düzenlenirse,

$$LA\psi = (\partial^3 - 2u\,\partial - u_x - iv)(3i\psi_{2x} - 4iu\psi) \ , \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} LA\psi = {} & 3i\psi_{5x} - 4iu_{xxx}\psi - 12iu_{xx}\psi_x - 12iu_x\psi_{xx} - 4iu\psi_{xxx} - 6iu\psi_{xxx} + \\ & 8iuu_x\psi + 8iu^2\psi_x - 3iu_x\psi_{xx} + 4iuu_x\psi + 3v\psi_{xx} - 4uv\psi \end{aligned} \tag{2.61}$$

bulunur. Öte yandan $L_t\psi = -2u_t\psi_x - u_{xt}\psi - iv_t\psi$ olduğundan (2.21) denklemi;

$$\begin{aligned} -2u_t\psi_x - u_{xt}\psi - iv_t\psi = {} & (3i\psi_{5x} - 6iu_{xx}\psi_x - 12iu_x\psi_{xx} - 6iu\psi_{xxx} - 3iu_{xxx}\psi - \\ & 6iu_{xx}\psi_x - 3iu_x\psi_{xx} + 3v_{xx}\psi + 6v_x\psi_x + 3v\psi_{xx} - \\ & 4iu\psi_{xxx} + 8iu^2\psi_x + 4iuu_x\psi - 4uv\psi) - (3i\psi_{5x} - \\ & 4iu_{xxx}\psi - 12iu_{xx}\psi_x - 12iu_x\psi_{xx} - 4iu\psi_{xxx} - \\ & 6iu\psi_{xxx} + 8iuu_x\psi + 8iu^2\psi_x - 3iu_x\psi_{xx} + 4iuu_x\psi + \\ & 3v\psi_{xx} - 4uv\psi) \end{aligned} \tag{2.62}$$

olur. (2.62) denkleminde sadeleştirmeleri yaparak;

$$-2u_t\psi_x - u_{xt}\psi - iv_t\psi = iu_{xxx}\psi - 8iuu_x\psi + 3v_{xx}\psi + 6v_x\psi_x \ , \tag{2.63}$$

$$(u_{xxx} - 8uu_x + v_t)i\psi + (3v_x + u_t)_x\psi + 2(3v_x + u_t)\psi_x = 0 \tag{2.64}$$

elde edilir. (2.64) denkleminden,

$$v_t = -u_{xxx} + 8uu_x \ , \tag{2.65}$$

$$u_t = -3v_x \tag{2.66}$$

olduğu kolayca görülür. (2.65) ve (2.66) denklemlerinden vfonksiyonu $v_{tx} = v_{xt}$ şartı kullanılarak yok edilerek, $\alpha = 3, \beta = 24$ ve $\varepsilon = 0$ değerleri için,

$$u_{tt} - 3u_{xxxx} + 24(u_x)^2 + 24uu_{xx} = 0 \tag{2.67}$$

Boussinesq denklemi bulunur.

Sonuç olarak Boussinesq denklemi (2.54) ve (2.55) ile verilen Lax çifti operatörlerinin uyumluluk şartı olarak elde edildi. Bu operatörlerin varlığı bize Boussinesq denkleminin tamamen çözülebilir bir lineer olmayan denklem olduğunu göstermektedir.

3. AKNS FORMÜLASYONU

Zakharov ve Shabat (1979) lineer olamayan tamamen çözülebilir olan Schrödinger denklemini anlamaya çalışırken yeni bir yaklaşım geliştirdiler. Daha sonra Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur (1973) bu formülasyonu genelleştirilerek diğer çeşitli tamamen çözülebilir modelleri anlamamızı sağlayan, AKNS denklemleri adını verdikleri bir formalizm elde etmişlerdir. Şimdi Lax gösterimi temelli bu AKNS denklemlerini elde etmek için bir önceki bölümde ele aldığımız lineer denklemlerin matris denklemleri olarak ele alalım. $(1+1)$ boyutlu problemlerle ilgilendiğimiz için bağımlı değişkenlerimiz r ve q; x ve t bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu, L operatörü (2×2) kare matris , A operatörü de (2×2) kare matris ve ψ fonksiyonu (2×1) şeklinde sütun matris olacaktır. Yine öz değerin $\lambda_t = 0$ şartını sağladığını kabul ederek, Lax formalizmine göre lineer matris denklemleri ve I, (2×2) birim matris olmak üzere,

$$L(t)\psi(t) = \lambda I\psi(t) \tag{3.1}$$

ve

$$\partial_t\psi(t) = A(t)\psi(t) \tag{3.2}$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemlerin uyumluluk şartı da;

$$L_t = [A(t), L(t)] \tag{3.3}$$

Lax denklemi olur. Pauli spin matrisleri,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

olmak üzere,

$$\sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

özelliklerini göz önüne alalım. Yukarıdaki büyüklükleri kullanarak L ve A matris operatörleri aşağıda olduğu gibi inşa edilebilir.

$$\mathrm{L} = \partial \mathrm{I} - q\sigma_+ - r\sigma_- + i\alpha\sigma_3 \ , \tag{3.7}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\sigma_3 + \mathrm{Q}\sigma_+ + \mathrm{R}\sigma_- \tag{3.8}$$

Burada r ve q dinamik büyüklükleri (bağımlı değişkenler), α sabit spektral parametresi ve $\mathrm{P}, \mathrm{R}, \mathrm{Q}$ fonksiyonları da spektral parametrenin ve dinamik büyüklüklerin fonksiyonlarıdır. (3.7) ve (3.8) denklemlerinin matris formunu yazacak olursak;

$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \partial + i\alpha & -q \\ -r & \partial - i\alpha \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{R} \\ \mathrm{Q} & -\mathrm{P} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

elde ederiz. Şimdi bu operatörlerin uyumluluk şartını inceleyelim. Bu amaçla;

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

olmak üzere (2.21) denklemini;

$$\mathrm{L}_t\psi = \mathrm{AL}\psi - \mathrm{LA}\psi$$

yazalım. Bu denkleminin sol tarafındaki L_t ifadesi;

$$L_t = \begin{bmatrix} 0 & -q_t \\ -r_t & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

olur. Denklemin sağ tarafını da matris formunda yazalım.

$$\begin{bmatrix} 0 & -q_t \\ -r_t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & R \\ Q & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial + i\alpha & -q \\ -r & \partial - i\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \partial + i\alpha & -q \\ -r & \partial - i\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & R \\ Q & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

(3.13) denkleminin sağ tarafındaki terimleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\begin{bmatrix} P & R \\ Q & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial + i\alpha & -q \\ -r & \partial - i\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & R \\ Q & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_{1x} + i\alpha\psi_1 - q\psi_2 \\ -r\psi_1 + \psi_{2x} - i\alpha\psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$= \begin{bmatrix} P\psi_{1x} + i\alpha P\psi_1 - qP\psi_2 - rR\psi_1 + R\psi_{2x} - i\alpha R\psi_2 \\ Q\psi_{1x} + i\alpha Q\psi_1 - qQ\psi_2 + rP\psi_1 - P\psi_{2x} + i\alpha P\psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \partial + i\alpha & -q \\ -r & \partial - i\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & R \\ Q & -P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial + i\alpha & -q \\ -r & \partial - i\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P\psi_1 + R\psi_2 \\ Q\psi_1 - P\psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$= \begin{bmatrix} P_x\psi_1 + P\psi_{1x} + \alpha iP\psi_1 + R_x\psi_2 + R\psi_{2x} + i\alpha R\psi_2 - qQ\psi_1 + qP\psi_2 \\ -rP\psi_1 - rR\psi_2 + Q_x\psi_1 + Q\psi_{1x} - i\alpha Q\psi_1 - P_x\psi_2 - P\psi_{2x} + i\alpha P\psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

bulunur. (3.14) ve (3.16) ifadeleri (2.21) denkleminde yerine yazıldığında;

$$\begin{bmatrix} 0 & -q_t \\ -r_t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_x\psi_1 - rR\psi_1 + qQ\psi_1 - R_x\psi_2 - 2i\alpha R\psi_2 - 2qP\psi_2 \\ -Q_x\psi_1 + 2i\alpha Q\psi_1 + 2rP\psi_1 + rR\psi_2 + P_x\psi_2 - qQ\psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

elde edilir. Denklemin sağ tarafını sol tarafına benzetilerek yazdığımızda;

$$\begin{bmatrix} 0 & -q_t \\ -r_t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_x - rR + qQ & -R_x - 2iR\alpha - 2qP \\ -Q_x + 2i\alpha Q + 2rP & rR + P_x - qQ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

olur. Buradan

$$0 = -P_x - rR + qQ \;, \tag{3.20}$$

$$-q_t = -R_x - 2i\alpha R - 2qP \;, \tag{3.21}$$

$$-r_t = -Q_x + 2i\alpha Q + 2rP \tag{3.22}$$

denklemleri elde edilir.
(3.20), (3.21) ve (3.22) denklemlerini düzenlenilirse;

$$P_x = qQ - rR \;, \tag{3.23}$$

$$r_t = Q_x - 2rP - 2i\alpha Q \;, \tag{3.24}$$

$$q_t = R_x + 2qP + 2i\alpha R \tag{3.25}$$

olur. (3.23), (3.24) ve (3.25) denklemlerine AKNS denklemleri adı verilir. Bu denklemlerdeki P, R ve Q; α ‘ nın kuvvet serisine aşağıdaki gibi açıldığında,

$$P = \sum_{m=0}^{M} a_m \alpha^m \;, \qquad R = \sum_{m=0}^{M} b_m \alpha^m \;, \qquad Q = \sum_{m=0}^{M} c_m \alpha^m \tag{3.26}$$

ve bu değerler (3.23), (3.24) ve (3.25) denklemlerinde yerlerine konulduğunda ve $m = 0$ alındığında;

$$q_t = b_{0\,x} + 2qa_0 \;, \tag{3.27}$$

$$r_t = c_{0\,x} - 2ra_0 \tag{3.28}$$

bulunur. Aynı zamanda $m \geq 0$ ve $m \geq 1$ olduğunda tekrarlama bağıntıları,

$$a_{mx} = qc_m - rb_m \qquad m \geq 0 \;, \tag{3.29}$$

$$b_{(m+1)\,x} + 2ib_m = -2qa_{m+1} \qquad m \geq 1 \ , \tag{3.30}$$

$$c_{(m+1)\,x} - 2ic_m = 2ra_{m+1} \qquad m \geq 1 \tag{3.31}$$

şeklinde elde edilir. Bu aşamada $a_m = \text{sabit}$, $b_m = 0$ ve $c_m = 0$ seçilmek suretiyle çeşitli çözülebilir lineer olmayan denklemler elde edilir.

3.1.AKNS FORMÜLASYONU KULLANILARAK ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ GÖSTERİLEBİLEN DEKLEMLERE ÖRNEKLER

3.1.1. KdV ve mKdV Denklemleri

Örneğin, $m = 2$, $b_3 = c_3 = 0$ ve $a_3 = i\mu$ için hangi denklemlerin elde edildiğini bulalım.

Belirlediğimiz bu değerleri öncelikle sırasıyla (3.30), (3.31) ve (3.29) denklemlerinde yerine yazalım.

$$b_{3x} + 2ib_2 = -2qa_3 \tag{3.32}$$

denklemi elde edilir. Elde edilen denklemde $b_3 = 0$ olduğundan $b_{3x} = 0$ olur. Aynı zamanda $a_3 = i\mu$ ifadesini yerine yazarsak,

$$b_2 = -q\mu \tag{3.33}$$

ve

$$c_{3x} - 2ic_2 = 2ra_3 \tag{3.34}$$

olur. Yukarıdaki denklemlerde $c_3 = 0$ olduğundan $c_{3x} = 0$ olur. Aynı zamanda $a_3 = i\mu$ ifadesini yerine yazarsak,

$$c_2 = -r\mu \tag{3.35}$$

ve

$$a_{2x} = qc_2 - rb_2 \tag{3.36}$$

bulunur. Daha önceden bulduğumuz $b_2 = -q\mu$ ve $c_2 = -r\mu$ denklemlerini (3.36) denkleminde yerine yazarsak,

$$a_{2x} = 0 \tag{3.37}$$

olur. Bu durumda $a_2 =$ sabit olduğundan $a_2 = 0$ seçilebilir.

$m = 1$ için sırasıyla (3.30), (3.31) ve (3.29) denklemlerini yazalım.

$$b_{2x} + 2ib_1 = -2qa_2 \tag{3.38}$$

ve daha önceden bulunan $b_2 = -q\mu$ ve $a_2 = 0$ denklemlerini (3.38) denkleminde yerine yazarsak,

$$b_1 = -\frac{i}{2}\mu q_x \tag{3.39}$$

ve

$$c_{2x} - 2ic_1 = 2ra_2 \tag{3.40}$$

bulunur. Aynı zamanda $c_2 = -r\mu$ ve $a_2 = 0$ denklemlerini kullanarak (3.40) denkleminde yerine yazarsak,

$$c_1 = \frac{i}{2}\mu r_x \tag{3.41}$$

ve

$$a_{1x} = qc_1 - rb_1 \tag{3.42}$$

olur. Daha önceden bulduğumuz $b_1 = -\frac{i}{2}\mu q_x$ ve $c_1 = \frac{i}{2}\mu r_x$ denklemlerini (3.42) denkleminde yerine yazarsak,

$$a_{1x} = \frac{i}{2}\mu\,(rq_x + qr_x) = \frac{i}{2}\mu(qr)_x \tag{3.43}$$

ve

$$a_1 = \frac{i}{2}\mu(qr) \tag{3.44}$$

elde edilir.

Bir de $m = 0$ için sırasıyla (3.30), (3.31) ve (3.29) denklemlerini yazalım.

$$b_{1x} + 2ib_0 = -2qa_1 \tag{3.45}$$

ve daha önceden bulunan $b_1 = \frac{i}{2}\mu q_x$ ve $a_1 = \frac{i}{2}\mu(qr)$ ifadelerini (3.45) denkleminde yerine yazarsak,

$$(\frac{i}{2}\mu q_x)_x + 2ib_0 = -iq\mu(qr)\ , \tag{3.46}$$

$$b_0 = \frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}q_{xx} - q^2r) \tag{3.47}$$

ve

$$c_{1x} - 2ic_0 = 2ra_1 \tag{3.48}$$

bulunur ve $c_1 = \frac{i}{2}\mu r_x$, $a_1 = \frac{i}{2}\mu(qr)$ ifadelerini (3.48) denkleminde yerine yazarsak,

$$(\frac{i}{2}\mu r_x)_x - 2ic_0 = ir\mu(qr) \quad , \tag{3.49}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}r_{xx} - qr^2) \tag{3.50}$$

ve

$$a_{ox} = qc_0 - rb_0 \tag{3.51}$$

olur ve $b_0 = \frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}q_{xx} - q^2r)$, $c_0 = \frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}r_{xx} - qr^2)$ denklemlerini (3.51) denkleminde yerine yazarsak,

$$a_{ox} = q(\frac{1}{2}\mu\left(\frac{1}{2}q_{xx} - q^2r\right)) - r(\frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}r_{xx} - qr^2)) \quad , \tag{3.52}$$

$$a_{0x} = \frac{1}{4}\mu(qr_{xx} - rq_{xx})$$

ve

$$a_0 = \frac{1}{4}\mu(qr_x - rq_x) \tag{3.53}$$

denklemleri bulunur. Şimdi de bulduğumuz $a_0 = \frac{1}{4}\mu(qr_x - rq_x)$, $b_0 = \frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}q_{xx} - q^2r)$, $c_0 = \frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}r_{xx} - qr^2)$ ifadelerini sırasıyla $q_t = b_{0\,x} + 2qa_0$ (3.28) ve $r_t = c_{0\,x} - 2ra_0$ (3.29) denklemlerinde yazalım.

$$q_t = (\frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}q_{xx} - q^2r))_x + 2q(\frac{1}{4}\mu(qr_x - rq_x)) \tag{3.54}$$

(3.54) denklemini düzenlersek,

$$q_t = \frac{1}{4}\mu q_{xxx} - \frac{3}{2}\mu rqq_x \tag{3.55}$$

olur.

$$r_t = (\frac{1}{2}\mu(\frac{1}{2}r_{xx} - qr^2))_x - 2r(\frac{1}{4}\mu(qr_x - rq_x)) \tag{3.56}$$

(3.55) denklemini düzenlersek,

$$r_t = \frac{1}{4}\mu r_{xxx} - \frac{3}{2}\mu qrr_x \tag{3.57}$$

denklemi bulunur. (3.55) denkleminde $\mu = 4$ ve $r = -\frac{1}{6}$ ve (3.57) denkleminde $\mu = 4$ ve $q = -\frac{1}{6}$ alındığında,

$$q_t = q_{xxx} + qq_x \tag{3.58}$$

ve

$$r_t = r_{xxx} + rr_x \tag{3.59}$$

KdV denklemi elde edilir.

(3.55) denkleminde $\mu = 4$ ve $r = -\frac{1}{6}q$ ve (3.57) denkleminde $\mu = 4$ ve $q = -\frac{1}{6}r$ alındığında,

$$q_t = q_{xxx} + q^2q_x \tag{3.60}$$

ve

$$r_t = r_{xxx} + r^2r_x \tag{3.61}$$

mKdV denklemi elde edilir.

3.1.2. Nonlineer Schrödinger (NLS) Denklemi

Aynı zamanda $a_1 = b_2 = c_2 = 0$, $a_2 = \text{sabit} = i\beta$ ve $r = -q$ alındığında hangi denklemin ortaya çıktığını bulalım.

Bunun için öncelikle $m = 1$ için sırasıyla (3.30), (3.31) ve (3.29) denklemlerinde yazalım.

$$b_{2x} + 2ib_1 = -2qa_2 \tag{3.62}$$

elde edilen (3.62) denkleminde $b_2 = 0$ olduğundan $b_{2x} = 0$ olur. Aynı zamanda $a_2 = i\beta$ ifadesini yerine yazarsak,

$$b_2 = -q\beta \tag{3.63}$$

ve

$$c_{2x} - 2ic_1 = 2ra_2 \tag{3.64}$$

olur. Bulunan denklem de $c_2 = 0$ olduğundan $c_{2x} = 0$ olur. Aynı zamanda $a_2 = i\beta$ ifadesini yerine yazarsak,

$$c_2 = -r\beta \tag{3.65}$$

ve

$$a_{1x} = qc_1 - rb_1 \tag{3.66}$$

bulunur. Daha önce elde edilen $b_2 = -q\beta$ ve $c_2 = -r\beta$ denklemleri (3.66) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a_{1x} = 0 \tag{3.67}$$

olur. Bu durumda $a_1 = \text{sabit}$ olduğundan $a_1 = 0$ seçilebilir.

$m = 0$ için sırasıyla (3.30), (3.31) ve (3.29) denklemlerini yazalım.

$$b_{1x} + 2ib_0 = -2qa_1 \tag{3.68}$$

$b_1 = -q\beta$ ve $a_1 = 0$ denklemlerini (3.68) denkleminde yerine yazarsak,

$$b_0 = -\frac{i}{2}\beta q_x \tag{3.69}$$

ve

$$c_{1x} - 2ic_0 = 2ra_1 \tag{3.70}$$

bulunur. Daha önceden bulunan $c_1 = -r\beta$ ve $a_0 = 0$ denklemlerini (3.70) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c_0 = \frac{i}{2\beta} r_x \tag{3.71}$$

ve

$$a_{0x} = qc_0 - rb_0 \tag{3.72}$$

olur ve $b_0 = -\frac{i}{2}\beta q_x$, $c_0 = \frac{i}{2}\beta r_x$ denklemlerini (3.72) denkleminde yerine yazarsak,

$$a_{0x} = \frac{i}{2}\beta\,(rq_x + qr_x) \ , \tag{3.73}$$

$$a_{0x} = \frac{i}{2\beta}(qr)_x \Longrightarrow a_0 = \frac{i}{2}\beta(qr) \tag{3.74}$$

bulunur. Elde edilen $a_0 = \frac{i}{2}\beta(qr)$, $b_0 = -\frac{i}{2}\beta q_x$ ve $c_0 = \frac{i}{2}\beta r_x$ ifadelerini sırasıyla $q_t = b_{0\,x} + 2qa_0$ (3.28) ve $r_t = c_{0\,x} - 2ra_0$ (3.29) denklemlerinde yazalım.

$$q_t = (-\frac{i}{2}\beta q_x)_x + 2q(\frac{i}{2}\beta(qr)) \tag{3.75}$$

(3.75) denklemini düzenlersek,

$$q_t = \beta irq^2 - \frac{i}{2}\beta q_{xx} \ , \tag{3.76}$$

$$q_t - \beta irq^2 + \frac{i}{2}\beta q_{xx} = 0 \tag{3.77}$$

olur ve

$$r_t = (\frac{i}{2}\beta r_x)_x - 2r(\frac{i}{2}\beta(qr)) \tag{3.78}$$

(3.78) denklemini düzenlersek,

$$r_t = \frac{i}{2}\beta r_{xx} - \beta iqr^2 \ , \tag{3.79}$$

$$r_t + \beta iqr^2 - \frac{i}{2}\beta r_{xx} = 0 \tag{3.80}$$

bulunur. (3.77) ve (3.80) denklemlerinin her iki tarafını $'i'$ ile çarpılırsa ,

$$iq_t - \beta rq^2 + \frac{1}{2}\beta q_{xx} = 0 \ , \tag{3.81}$$

$$ir_t + \beta qr^2 - \frac{1}{2}\beta r_{xx} = 0 \tag{3.82}$$

olur. Elde edilen (3.81) ve (3.82) denklemlerinde $r = -q$ ve $\beta = -2$ alınırsa,

$$iq_t + q_{xx} + 2qq^2 = 0 \tag{3.83}$$

Lineer olmayan Schrödinger denklemi elde edilir.

3.1.3. Sine-Gordon (SG) Denklemi

Bu kısım da AKNS denklemlerinde P, R, Q terimlerinin α' ın ters kuvvetlerini içeren fonksiyonların olduğu durumu göz önüne alalım.

Bunun için $m = -1$ alarak fonksiyonlarımızı $P = \frac{k(x,t)}{\alpha}$, $R = \frac{l(x,t)}{\alpha}$ ve $Q = \frac{m(x,t)}{\alpha}$ şeklinde tanımlayalım. Buradaki k, l, m büyüklükleri; x ve t'ye bağlı türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu fonksiyonları (3.23), (3.24) ve (3.25) denklemlerinde yerine koyup α' ların katsayılarını eşitleyerek,

$$k_x = qm - rl \quad , \tag{3.84}$$

$$l_x = -2kq \quad , \quad q_t = 2il \tag{3.85}$$

$$m_x = -2kr \quad , \quad r_t = 2im \tag{3.86}$$

bulunur. Burada $u = u(x,t)$ olmak üzere $k = \frac{i}{4}\cos u$, $l = m = \frac{i}{4}\sin u$ şeklinde alarak (3.84), (3.85) ve (3.86) denklemlerini yeniden düzenleyelim.
Öncelikle seçtiğimiz k, l, m değerlerini sırasıyla $l_x = -2kq$ ve $m_x = -2kr$ denklemlerinde yerine yazacak olursak,

$$\partial\left(\frac{i}{4}\sin u\right) = -2\left(\frac{i}{4}\cos u\right)q \tag{3.87}$$

olur. (3.87) denkleminin sol tarafındaki x' e göre türev alındığında,

$$\frac{i}{4}u_x\cos u = -2\left(\frac{i}{4}\cos u\right)q \tag{3.88}$$

bulunur. Elde edilen (3.88) denkleminin her iki tarafı $\frac{4}{i\cos u}$ ile çarpılırsa,

$$q = -\frac{1}{2}u_x = -r \tag{3.89}$$

olur. Bulunan (3.89) denklemini $q_t = 2il$ denkleminde yerine yazıldığında,

$$\partial_t\left(-\frac{1}{2}u_x\right) = 2i\left(\frac{i}{4}\ \mathrm{sinu}\ \right) \tag{3.90}$$

elde edilir. (3.90) denkleminde sadeleştirme işlemleri yapıldığında,

$$u_{xt} = \mathrm{sinu} \tag{3.91}$$

Sine-Gordon denklemi bulunur.

Sine-Gordon denklemi 19. yüzyıldan beri diferansiyel geometri çalışmalarında önemli bir denklem olarak biliniyordu (Bianchi, 1902) ve 20. yüzyılda kristallerin yayılmasında, ferromanyetik ve ferro elektrik malzemelerde, rezonans optikte kısa titreşim yayılmasında ve uzun Josephson kavşağı içinde manyetik akışın yayılmasında uygulandı. Böylece bir dizi ilginç fiziksel olayın lineer olmayan dalga denklemleri Sine-Gordon denklemi ile elde edildi (Ablowitz et al., 1973, 1974; Ablowitz et al., 1981).

4. SIFIR EĞRİLİK ŞARTI

Sıfır eğrilik şartı, tamamen çözülebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri elde etmek için kullanılan formülasyonlardan biridir.

Sıfır eğrilik şartı AKNS denklemleri gibi Lax gösterimi temellidir. Matris gösterimli, (2×2); X ve T operatörlerinin Lax çifti özelliklerine sahip olduklarını ve ϕ vektörü ile

$$\phi_t = T\phi \ , \tag{4.1}$$

$$\phi_x = X\phi \tag{4.2}$$

lineer denklemlerini sağladığını kabul edelim. Bu formülasyonda X ve T operatörlerinin her ikisi de λ özdeğer parametresine bağlı olabilir.
(4.1) ve (4.2) denklemlerinin uyumluluk şartı,

$$\phi_{xt} = \phi_{tx} \tag{4.3}$$

denklemi yukarıdaki lineer denklemleri kullanarak

$$X_t\phi + X\phi_t = T_x\phi + T\phi_x \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. (4.4) denkleminde $\phi_x = X\phi$ ve $\phi_t = T\phi$ ifadeleri tekrar kullanılarak yazılırsa,

$$X_t\phi + XT\phi = T_x\phi + TX\phi \tag{4.5}$$

ve

$$(X_t + XT - T_x - TX)\phi = 0 \tag{4.6}$$

bulunur. (4.6) denkleminde $[X,T] = XT - TX$ komütatör bağıntısını kullanarak her ϕ değeri için parantez içinin sıfıra eşit olması,

$$X_t - T_x + [X,T] = 0 \tag{4.7}$$

denklemini vermektedir. Bulunan (4.7) denklemine sıfır eğrilik şartı denklemi ya da Lax formalizminin matris form denklemi denir. Şimdi de sıfır eğrilik şartı formülasyonunu bazı örneklere uygulayalım.

4.1. SIFIR EĞRİLİK ŞARTI FORMÜLASYONU KULLANILARAK ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ GÖSTERİLEBİLEN DENKLEMLERE ÖRNEKLER

4.1.1. KdV Denklemi

KdV denkleminin tamamen çözülebilirliğini sıfır eğrilik şartı çerçevesinde inceleyelim. KdV denklemi için,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta - \frac{1}{6}\gamma u & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\gamma u_x & -4\beta - \frac{1}{3}\gamma u \\ -4\beta^2 + \frac{1}{3}\gamma\beta u + \frac{1}{18}\gamma^2 u^2 + \frac{1}{6}\gamma u_{xx} & -\frac{1}{6}\gamma u_x \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

olarak alalım (Mark Hickman, Willy Hereman, Jennifer Larue ve Ünal Göktaş, 2009 : 1-20). Burada β ve γ herhangi sabitlerdir. Bu durumda,

$$X_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{6}\gamma u_t & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

$$T_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\gamma u_{xx} & -4\beta - \frac{1}{3}\gamma u \\ \frac{1}{3}\gamma\beta u_x + \frac{1}{9}\gamma^2 u u_x + \frac{1}{6}\gamma u_{xxx} & -\frac{1}{6}\gamma u_{xx} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

olur. Şimdi de sırasıyla XT ve TX ifadelerini bulalım.

$$\mathrm{XT}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \beta-\frac{1}{6}\gamma u & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\gamma u_x & -4\beta-\frac{1}{3}\gamma u\\ -4\beta^2+\frac{1}{3}\gamma\beta u+\frac{1}{18}\gamma^2u^2+\frac{1}{6}\gamma u_{xx} & -\frac{1}{6}\gamma u_x\end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\mathrm{XT}=\begin{bmatrix}-4\beta^2+\frac{1}{3}\gamma\beta u+\frac{1}{18}\gamma^2u^2+\frac{1}{6}\gamma u_{xx} & -\frac{1}{6}\gamma u_x\\ \frac{1}{6}\beta\gamma u_x-\frac{1}{36}\gamma^2uu_x & -4\beta^2-\frac{1}{3}\beta\gamma u+\frac{2}{3}\beta\gamma u+\frac{1}{18}\gamma^2u^2\end{bmatrix} \tag{4.13}$$

ve

$$\mathrm{TX}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\gamma u_x & -4\beta-\frac{1}{3}\gamma u\\ -4\beta^2+\frac{1}{3}\gamma\beta u+\frac{1}{18}\gamma^2u^2+\frac{1}{6}\gamma u_{xx} & -\frac{1}{6}\gamma u_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ \beta-\frac{1}{6}\gamma u & 0\end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

$$\mathrm{TX}=\begin{bmatrix}-4\beta^2+\frac{2}{3}\beta\gamma u-\frac{1}{3}\beta\gamma u+\frac{1}{18}\gamma^2u^2 & \frac{1}{6}\gamma u_x\\ -\frac{1}{6}\beta\gamma u_x+\frac{1}{36}\gamma^2uu_x & -4\beta^2+\frac{1}{3}\gamma\beta u+\frac{1}{18}\gamma^2u^2+\frac{1}{6}\gamma u_{xx}\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Bulduğumuz (4.10), (4.11), (4.13) ve (4.15) denklemlerini (4.7) denkleminde yerine koyarsak,

$$X_t-T_x+[X,T]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{1}{6}\gamma u_t-\frac{1}{6}\gamma u_{xxx}-\frac{1}{6}\gamma^2uu_x & 0\end{bmatrix}=0 \tag{4.16}$$

bulunur. Bulduğumuz (4.16) denklemini düzenlersek,

$$-\frac{1}{6}\gamma(u_t+u_{xxx}+\gamma uu_x)=0\ , \tag{4.17}$$

$$u_t+u_{xxx}+\gamma uu_x=0 \tag{4.18}$$

olur. (4.18) denkleminde $\gamma=1$ alınırsa,

$$u_t+u_{xxx}+uu_x=0 \tag{4.19}$$

KdV denklemi elde edilir.

4.1.2. AKNS Denklemleri

İkinci örnek olarak AKNS denklemlerinin sıfır eğrilik şartı çerçevesinde çıkarılışını inceleyelim. AKNS denklemleri için operatörleri,

$$X = \begin{bmatrix} -i\zeta & q(x,t) \\ r(x,t) & i\zeta \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

$$T = \begin{bmatrix} P & R \\ S & T \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

ve vektörü

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

şeklinde alalım. Burada $\zeta = \text{sabit}$ ve $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ dinamik büyüklükleri ζ spektral parametresine bağlı değillerdir. P, R, S ve T fonksiyonları ise ζ parametresine ve $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ büyüklüklerine bağlıdır.
(4.20), (4.21), (4.22) ifadeleri (4.1) ve (4.2) denklemlerinde yerine yazacak olursak;

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} -i\zeta & q(x,t) \\ r(x,t) & i\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} P & R \\ S & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

ifadelerini elde ederiz. Bu denklemlerine integre edilebilirlik şartını uygulayalım. Bunun için öncelikle (4.23) denklemini t‘ ye göre türevini alalım.

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}_{xt} = \begin{bmatrix} 0 & q_t \\ r_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i\zeta & q \\ r & i\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & R \\ S & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

elde edilir.(4.25) denklemini düzenlersek ;

$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}_{xt} = \begin{bmatrix}0 - i\zeta P + qS & q_t - i\zeta R + qT\\ r_t + \ rP \ + i\zeta S & 0 + rR + i\zeta T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} \tag{4.26}$$

ifadesi bulunur. Şimdi de (4.24) denklemini x' ye göre türevini alalım.

$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}_{tx} = \begin{bmatrix}P_x & R_x\\ S_x & T_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}P & R\\ S & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i\zeta & q\\ r & i\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} \tag{4.27}$$

elde edilir. (4.27) denklemini düzenlersek;

$$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}_{tx} = \begin{bmatrix}P_x - \ i\zeta P + Rr & R_x + \ Pq + i\zeta T\\ S_x - i\zeta S + rT & T_x + qS + i\zeta T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} \tag{4.28}$$

denklemi elde edilir. İntegre edilebilirlik şartından aşağıdaki denklik yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}0 - i\zeta P + qS & q_t - i\zeta R + qT\\ r_t + \ rP \ + i\zeta S & 0 + rR + i\zeta T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}P_x - \ i\zeta P + Rr & R_x + \ Pq + i\zeta T\\ S_x - i\zeta S + rT & T_x + qS + i\zeta T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix} \tag{4.29}$$

(4.29) eşitliğinden;

$$P_x = qS - Rr \ , \tag{4.30}$$

$$R_x = q_t - 2i\zeta R + qT - \ Pq \ , \tag{4.31}$$

$$S_x = r_t + \ rP - rT + 2i\zeta S \ , \tag{4.32}$$

$$T_x = \ rR - \ qS \tag{4.33}$$

denklemleri bulunur. Yukarıdaki ifadelerden görüldüğü gibi $P = -T$ olur. Bu eşitliği yukarıdaki denklemlerde kullanıp tekrar düzenlersek;

$$P_x = qS - rR \ , \tag{4.34}$$

$$R_x + 2i\zeta R = q_t + 2Pq \ , \tag{4.35}$$

$$S_x - 2i\zeta S = r_t + 2rP \tag{4.36}$$

AKNS denklemleri elde edilir. Böylece (4.30-31-32) denklemleri ile verilen AKNS denklemlerinin "sıfır eğrilik şartı" kullanılarak elde edilebileceği gösterilmiş oldu.

5. Bİ-HAMİLTON YAPI

Lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemin tamamen çözülebilirliğini göstermek için kullanılan yöntemlerden biridir.

Klasik mekanikte kullanılan Hamilton formalizminde bir sistemin dinamiği, $q(x,t)$ ve $p(x,t)$ faz uzayını oluşturan sırası ile genelleştirilmiş koordinat, genelleştirilmiş momemtum olmak üzere,

$$q_{i,t} = \frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H \quad , \tag{5.1}$$

$$p_{i,t} = \frac{dp_i}{dt} = -\,\partial_{q_i} H \tag{5.2}$$

şeklinde bir Hamilton fonksiyonu yardımıyla incelenebilmektedir. Burada (q,p) dinamik değişkenler olarak adlandırılır ve bu değişkenler faz uzayını tararlar.

5.1. Poisson Parantezleri

Yukarıdaki hareket denklemleri $g = g(q_i\,, p_i)$ ve $h = h(q_i\,, p_i)$ dinamik değişkenlere bağlı fonksiyonlar olmak üzere;

$$\{g,h\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right) \tag{5.3}$$

şeklinde tanımlanan Poisson parantezi yardımıyla da ifade edilebilirler. (5.3) Poisson parantezlerinin önemli özellikleri,

(i)	$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f,h\} + \beta\{g,h\}$	(doğrusallık özelliği)	(5.4)
(ii)	$\{f,g\} = -\{g,f\}$	(anti-simetri özelliği)	(5.5)
(iii)	$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$	(Jacobi özdeşliği)	(5.6)
(iv)	$\{f,gh\} = g\{f,h\} + \{f,g\}h$	(Leibniz özelliği)	(5.7)

şeklinde verilebilir (Poisson, 1809: 266-298). Hamilton formalizminin dinamik değişkenleri arasındaki Poisson parantezleri, N boyutlu bir uzay için $(i = 1,2, \ldots \ldots, N)$ olmak üzere,

$$\{q_i , q_j\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right) \tag{5.8}$$

tanım bağıntısından

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0 \ , \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_k} = 0 \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \text{ ve } \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \tag{5.10}$$

şeklindeki türev ilişkileri kullanılarak kolayca,

$$\{q_i , q_j\} = 0 \text{ ve } \{p_i , p_j\} = 0 \tag{5.11}$$

elde edilir. Ayrıca benzer şekilde

$$\{q_i , p_j\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}\right) = \sum_{k=1}^{N} \delta_{ik}\, \delta_{jk} = \delta_{ij} \tag{5.12}$$

bulunur. Burada δ_{ij} Kronecker deltası sembolünü göstermektedir.

Şimdi burada $H = H(q_i, p_i)$ Hamilton fonksiyonu olmak üzere, dinamik değişkenler ile Hamilton fonksiyonları arasındaki Poisson parantezlerinin Hamilton formalizmindeki rolünü inceleyelim.

$$\{q_i, H\} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \tag{5.13}$$

$\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}$ ve $\frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0$ ifadelerini kullanarak

$$\{q_i, H\} = \sum_{k=1}^{N} \delta_{ik} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (5.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\{p_i, H\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = -\sum_{k=1}^{N} \delta_{ik} \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (5.15)$$

bulunur. Böylece (5.1) ve (5.2) hareket denklemlerinin

$$q_{i,t} = \{q_i\,, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ , \qquad (5.16)$$

$$p_{i,t} = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (5.17)$$

şeklinde de yazılabildiği görülmektedir.

Poisson parantezlerinin Hamilton formalizmindeki rolünü inceledikten sonra bu kısımda da $H = H(q_i, p_i)$ Hamilton fonksiyonu ile herhangi bir $A = A(q_i, p_i)$ fonksiyonun arasındaki Poisson parantezini hesaplayarak zaman değişim denklemini elde edeceğiz. Bu denklemi kullanarak korunan büyüklüklerin tanımını vereceğiz.

$$\{A, H\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \qquad (5.18)$$

(5.18) denklemi $q_{i,t} = \frac{\partial q_{i,t}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ve $p_{i,t} = \frac{dp_{i,t}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ ifadeleri ve çok değişkenli bir fonksiyonun diferansiyelinin tanımı kullanılarak

$$\{A\,, H\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} q_{k,t} + \frac{\partial A}{\partial p_k} p_{k,t}\right)\ , \qquad (5.19)$$

$$\{A\,, H\} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right) \qquad (5.20)$$

ve en genel hal için,

$$dA = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}dq_k + \frac{\partial A}{\partial p_k}dp_k\right) + \frac{\partial A}{\partial t}dt \qquad (5.21)$$

özelliği kullanılarak,

$$\{A\,,H\} = \frac{dA}{dt} - \frac{\partial A}{\partial t} \qquad (5.22)$$

elde edilir. (5.22) denkleminde A fonksiyonu t'ye açık bir şekilde bağlı değil ise,

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \qquad (5.23)$$

olur. Böylece

$$\frac{dA}{dt} = \{A\,,H\} \qquad (5.24)$$

zaman değişimi denklemi elde edilir. Eğer (5.24) denkleminde A bir korunan büyüklük ise sabit olacağından,

$$\frac{dA}{dt} = 0 \qquad (5.25)$$

olur. Böylece A korunan bir büyüklük ise, bu büyüklüğün Hamilton fonksiyonu ile Poisson parantezi de

$$\{A\,,H\} = 0 \qquad (5.26)$$

olacağı görülmektedir. Eğer n tane Hamiltonyenimiz var ise bunların hepsinin korunan büyüklük olduğunu $A_i = H_i(q,p)$, $(i = 1,2,3, \ldots .)$

$$\{H_i, H_j\} = 0 \tag{5.27}$$

bağıntısından görebiliriz. Bulduğumuz sonuçlar sonsuz boyutlu lineer vektör uzaylarına da kolayca genelleştirilebilir. Şimdi sonsuz boyutlu lineer vektör uzaylarında Hamilton formalizmini inceleyelim.

5.2. Sonsuz Boyutlu Lineer Vektör Uzaylarında Hamilton Formalizmi

Bu uzaylarda Poisson parantezleri,

$$\{F, G\}_{J_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)} J_i \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx \tag{5.28}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada fonksiyoneller herhangi bir $u = u(x)$ fonksiyonu ve onun türevleri cinsinden,

$$F[u] = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, u_x, u_{xx}, \ldots.)dx \qquad , \tag{5.29}$$

$$G[u] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u, u_x, u_{xx}, \ldots.)dx \qquad , \tag{5.30}$$

olarak verilmekte ve fonksiyonel türev,

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_{xx}}\right) - \cdots = \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial u_{ix}}\right) \tag{5.31}$$

şeklinde olmaktadır. Poisson parantez yapısını belirleyen J_i operatörü

$$\{F, G\}_{J_i} = -\{G, F\}_{J_i} \tag{5.32}$$

ve

$$\left\{F, \{G, H\}_{J_i}\right\}_{J_i} + \left\{G, \{H, F\}_{J_i}\right\}_{J_i} + \left\{H, \{F, G\}_{J_i}\right\}_{J_i} = 0 \tag{5.33}$$

anti-simetri özelliğini ve Jacobi özdeşliğini sağlıyorsa Hamilton operatörü olarak alınabilir.

Bu kısımda Bi-Hamilton formalizminin özelliklerini detaylı bir şekilde inceleyeceğiz. Eğer zaman evrim denklemi ile ilgili olarak yukarıdaki özellikleri sağlayan iki tane Hamilton operatörü bulunuyorsa oluşan yapıya Bi-Hamilton yapı adı verilmektedir.

Böylelikle zaman değişim denklemi Bi-Hamilton formalizminde, J_0 ve J_1 iki Hamilton operatörü yardımıyla,

$$u_t = \{u, H_1\}_{J_0} = \int \frac{\delta u(x)}{\delta u(y)} J_0 \frac{\delta H_1}{\delta u(y)} dy = \int \delta(x-y) J_0 \frac{\delta H_1}{\delta u(y)} dy = J_0 \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} \tag{5.34}$$

ve benzer şekilde

$$u_t = \{u, H_0\}_{J_1} = J_1 \frac{\delta H_0}{\delta u(x)} \tag{5.35}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\frac{\partial u(x)}{\partial u(y)} = \delta(x-y)$ ve $\delta(x-y)$ ifadesi Dirac-Delta fonsiyonudur.

Sonsuz tane Hamilton fonksiyonu elde etmek için ,

$$u_t = J_0 \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = J_1 \frac{\delta H_0}{\delta u(x)} \tag{5.36}$$

zaman değişim denklemini göz önüne alalım. (5.36) denkleminin sağ tarafına $J_0^{-1} J_0 = I$ birim operatörünü ekleyip tekrar düzenlersek,

$$J_0 \frac{\delta H_1}{\delta u} = J_1 J_0^{-1} J_0 \frac{\delta H_0}{\delta u} = R\left[J_0 \frac{\delta H_0}{\delta u}\right] \tag{5.37}$$

olur. Burada $R = J_1 J_0^{-1}$ şeklinde tanımlanan R operatörüne tekrarlama operatörü adı verilir. (5.37) denklemini herhangi bir n değeri için genelleştirerek,

$$J_0 \frac{\delta H_n}{\delta u} = R\left[J_0 \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u}\right] = R^n \left[J_0 \frac{\delta H_o}{\delta u}\right] \tag{5.38}$$

ve ya

$$J_0 \frac{\delta H_n}{\delta u} = J_1 \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} \tag{5.39}$$

şeklinde tekrarlama bağıntıları elde edilir. Tekrarlama bağıntısını yazmaktaki amaç J_0 ve J_1 diye iki tane Hamilton operatörü varsa $H_o[U]$ fonksiyonelinden başlayarak sonsuz tane Hamilton fonksiyoneli elde edilebilmektir. (5.39) denkleminde sonsuz tane korunan büyüklüğün varlığı bize tamamen çözülebilir bir dinamik sistemi işaret etmektedir. Sonuç olarak Bi-Hamilton yapıya sahip dinamik sistemlerin lineer olmayan zaman değişim denklemleri tamamen çözülebilir denklemler olmaktadır.

5.3. KdV Denkleminin Bi-Hamilton Yapısı

Şimdi de örnek olarak literatürde çok iyi bilinen tamamen çözülebilir KdV denkleminin Bi-Hamilton yapısını inceleyelim. Önce KdV denklemi için J_0 ve J_1 Hamilton operatörlerini KdV denklemini kullanarak elde edelim.
Herhangi bir dinamik sistemin zaman evrimi denklemini,

$$u_t = \{u, H_1\}_{J_0} = \{u, H_0\}_{J_1} \tag{5.40}$$

ve

$$u_t = J_0 \frac{\delta H_1[u]}{\delta u} = J_1 \frac{\delta H_0[u]}{\delta u} \tag{5.41}$$

olarak yazılabileceğini yukarıda görmüştük. Buradaki $H_i[u]$ Hamilton fonksiyonellerinin $h_i(u, u_x, \dots)$ fonksiyonları cinsinden

$$H_i[u] = \int h_i(u, u_x, \dots)\, dx \qquad\qquad (i=0,1,2,\dots..)$$

olduğunu göz önüne alarak, ilk olarak KdV denkleminin J_0 operatörünü ve $h_1(u, u_x, \ldots)$ Hamilton fonksiyonunu zaman evrimi denkleminden elde edelim. Bunun için,

$$u_t = -u_{xxx} - uu_x \tag{5.42}$$

KdV denklemini

$$u_t = \left[-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right]_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right] \tag{5.43}$$

şeklinde yazalım. (5.43) denklemini $u_t = J_0 \frac{\delta H_1[u]}{\delta u}$ denklemi ile karşılaştırdığımızda,

$$J_0 = \partial\ , \tag{5.44}$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = -u_{xx} - \frac{1}{2}u^2 \tag{5.45}$$

olduğu görülür. (5.45) denkleminde h_1 Hamilton fonksiyonunu bulmak için,

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = \frac{\partial h_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_x}\right) \tag{5.46}$$

fonksiyonel türev tanımını kullanarak,

$$h_1(u, u_x) = \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{6}u^3 \tag{5.47}$$

olduğu bulunur. (5.47) denklemini

$$H_1[u] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(u, u_x)dx \tag{5.48}$$

denkleminde yerine yazacak olursak,

$$H_1[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{6}u^3\right) dx \tag{5.49}$$

olur. Böylece Bi-Hamilton formalizmi için birinci Hamilton operatörü ile fonksiyonu tanımladık. Şimdi de ikinci bir Hamilton operatörü bulmamız gerekiyor. Bunun için,

$$u_t = -u_{xxx} - uu_x = J_1 \frac{\delta H_o[u]}{\delta u} \tag{5.50}$$

KdV denkleminden benzer şekilde J_1 Hamilton operatörü ve $h_0(u, u_x)$ Hamilton fonksiyonunu elde edelim. KdV denklemi

$$u_t = -u_{xxx} - uu_x = \left(-\partial^3 - \frac{1}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}\partial u\right) u \tag{5.51}$$

şeklinde de yazılabilir ve (5.51) denkleminden ,

$$J_1 = -\partial^3 - \frac{1}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}\partial u = -\partial^3 - \frac{2}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}u_x \tag{5.52}$$

ve

$$\frac{\delta H_o[u]}{\delta u} = u \tag{5.53}$$

olduğu görülmektedir. Buradan Hamilton fonksiyonu $h_0 = \frac{1}{2}u^2$ ve Hamilton fonksiyoneli

$$H_o[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 dx \tag{5.54}$$

elde edilir.

Sonuç olarak KdV denklemi için,

$J_0 = \partial$,

$J_1 = -\partial^3 - \frac{1}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}\partial u = -\partial^3 - \frac{2}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}u_x$,

$H_o[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2 dx$,

$H_1[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{6}u^3\right) dx$

olduğu görülür. Burada J_0, J_1 Hamilton operatörlerin ve $H_o[u], H_1[u]$ Hamilton fonksiyonellerinin varlığı bize KdV denkleminin bu formalizmin çerçevesi içinde de tamamen çözülebilir lineer olmayan bir denklem olduğunu ifade etmektedir. Şimdi de J_0 ve J_1 operatörlerin anti-simetri ve Jacobi özdeşliğini gösterelim.

5.4. J_0 Ve J_1 Operatörlerinin Anti-Simetri Ve Jacobi Özdeşliği

5.4.1. Anti-simetri Özelliği

a. $\{F, G\}_{J_0} = -\{G, F\}_{J_0}$ olduğunu gösterelim.

$$\{F, G\}_{J_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta u} J_0 \frac{\delta G}{\delta u} dx \qquad (5.55)$$

Burada $\frac{\delta F}{\delta u} = A$ ve $\frac{\delta G}{\delta u} = B$ dersek ve $J_0 = \partial$ ifadesi kullanılırsa (5.55) denklemi,

$$\{F, G\}_{J_0} = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\partial B dx = \int_{-\infty}^{\infty} AB_x dx \qquad (5.56)$$

şeklini alır. (5.56) denkleminde $AB_x = (AB)_x - A_x B$ kuralını kullanırsak,

$$\{F,G\}_{J_0} = \int_{-\infty}^{\infty}((AB)_x - A_xB)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(AB)_x dx - \int_{-\infty}^{\infty} A_xBdx \tag{5.57}$$

olur. Burada sınır şartlarından dolayı $\int_{-\infty}^{\infty}(AB)_x dx = 0$ olduğundan,

$$\{F,G\}_{J_0} = -\int_{-\infty}^{\infty} A_xBdx = -\int_{-\infty}^{\infty} BA_xdx = -\int_{-\infty}^{\infty} B\,\partial\, Adx = -\{G,F\}_{J_0} \tag{5.58}$$

bulunur.

b. $\{F,G\}_{J_1} = -\{G,F\}_{J_1}$ olduğunu gösterelim.

$$\{F,G\}_{J_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta u} J_1 \frac{\delta G}{\delta u} dx \tag{5.59}$$

(5.59) denkleminde $J_1 = -\partial^3 - \frac{1}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}\partial u$ eşitliğini kullanılırsa,

$$\{F,G\}_{J_1} = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(-\partial^3 - \frac{1}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}\partial u\right)Bdx \ , \tag{5.60}$$

$$\{F,G\}_{J_1} = -\int_{-\infty}^{\infty} A\,\partial^3 Bdx - \int_{-\infty}^{\infty} A\frac{1}{3}u\,\partial Bdx - \int_{-\infty}^{\infty} A\frac{1}{3}\partial uBdx \tag{5.61}$$

olur. (5.61) denkleminde integralleri,

$$Z_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} A\,\partial^3\, Bdx \ , \tag{5.62}$$

$$Z_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} A\frac{1}{3}u\,\partial Bdx \ , \tag{5.63}$$

$$Z_3 = -\int_{-\infty}^{\infty} A\frac{1}{3}\partial(uB)dx \tag{5.64}$$

şeklinde isimlendirip sırasıyla Z_1, Z_2, Z_3 ifadelerini düzenleyelim.

$$Z_1 = -\int_{-\infty}^{\infty} A\,\partial^3\, Bdx = -\int_{-\infty}^{\infty}[(A\,\partial^2 B)_x - (\partial A)\,\partial^2 B]\,dx \ , \tag{5.65}$$

$$Z_1 = -\int_{-\infty}^{\infty}(A\,\partial^2 B)_x dx + \int_{-\infty}^{\infty}(\partial A)\,\partial^2 Bdx \tag{5.66}$$

(5.66) denkleminde $\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{A}\,\partial^2\mathrm{B})_{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = 0$ olduğundan,

$$\mathrm{Z}_1 = \int_{-\infty}^{\infty}(\partial\mathrm{A})\,\partial^2\mathrm{Bdx} \tag{5.67}$$

halini alır. (5.67) denkleminde tekrar $\mathrm{AB}_{\mathrm{x}} = (\mathrm{AB})_{\mathrm{x}} - \mathrm{A}_{\mathrm{x}}\mathrm{B}$ kuralını kullanıp düzenlersek,

$$\mathrm{Z}_1 = \int_{-\infty}^{\infty}(\partial\mathrm{A})\,\partial^2\mathrm{Bdx} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left((\partial\mathrm{A})\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}}\mathrm{B}\right)_{\mathrm{x}} - (\partial^2\mathrm{A})\,\partial\mathrm{B}\right]\mathrm{dx}\ , \tag{5.68}$$

$$\mathrm{Z}_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\big((\partial\mathrm{A})\,\partial\mathrm{B}\big)_{\mathrm{x}}\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{\infty}(\partial^2\mathrm{A})\,\partial\mathrm{Bdx} = -\int_{-\infty}^{\infty}(\partial^2\mathrm{A})\,\partial\mathrm{Bdx}\ , \tag{5.69}$$

$$\mathrm{Z}_1 = -\int_{-\infty}^{\infty}\left[\big((\partial^3\mathrm{A})\mathrm{B}\big)_{\mathrm{x}} - (\partial^3\mathrm{A})\mathrm{B}\right]\mathrm{dx} - \int_{-\infty}^{\infty}\big((\partial^3\mathrm{A})\mathrm{B}\big)_{\mathrm{x}}\mathrm{dx} + \int_{-\infty}^{\infty}(\partial^3\mathrm{A})\mathrm{Bdx}\ , \tag{5.70}$$

$$\mathrm{Z}_1 = \int_{-\infty}^{\infty}(\partial^3\mathrm{A})\mathrm{Bdx} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{B}(\,\partial^3\,\mathrm{A})\mathrm{dx} \tag{5.71}$$

elde edilir.

$$\mathrm{Z}_2 = -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}\frac{1}{3}\mathrm{u}\,\partial\mathrm{Bdx} = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Au}\,\partial\mathrm{Bdx}\ , \tag{5.72}$$

$$\mathrm{Z}_2 = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}[(\mathrm{AuB})_{\mathrm{x}} - (\partial\mathrm{uA})\mathrm{B}]\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{AuB})_{\mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(\partial\mathrm{uA})\mathrm{Bdx} \tag{5.73}$$

Burada $\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{AuB})_{\mathrm{x}}\mathrm{dx} = 0$ olduğundan (5.73) denklemi,

$$\mathrm{Z}_2 = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(\partial\mathrm{uA})\mathrm{Bdx} = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{B}(\partial\mathrm{uA})\mathrm{dx} \tag{5.74}$$

şeklinde bulunur.

$$\mathrm{Z}_3 = -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}\frac{1}{3}\partial\mathrm{uBdx} = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}\,\partial\mathrm{uBdx}\ , \tag{5.75}$$

$$\mathrm{Z}_3 = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}[(\mathrm{AuB})_{\mathrm{x}} - (\partial\mathrm{A})\mathrm{uB}]\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{AuB})_{\mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty}(\partial\mathrm{A})\mathrm{uBdx}\ , \tag{5.76}$$

$$Z_3 = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} (\partial A)uBdx = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} Bu(\partial A)dx \tag{5.77}$$

olur. Bulanan (5.71), (5.74) ve (5.77) ifadelerini (5.61) denkleminde yerine yazarsak,

$$\{F, G\}_{J_1} = \int_{-\infty}^{\infty} B(\partial^3 A)dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} Bu(\partial A)dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} B(\partial uA)dx \ , \tag{5.78}$$

$$\{F, G\}_{J_1} = -\int_{-\infty}^{\infty} B\left[-(\partial^3 + \frac{1}{3}u\,\partial + \frac{1}{3}\partial u)\right]Adx \tag{5.79}$$

bulunur. Buradan ,

$$\{F, G\}_{J_1} = -\{G, F\}_{J_1}$$

olduğu kolayca görülür.

5.4.2. Jacobi Özdeşliği

Bu kısımda Hamilton operatör çifti olan J_o ve J_1‘ in Jacobi özdeşliği kontrolü detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

Operatörlerin Hamiltoniyen operatörü olabilmesi için $\{F, G\}_{J_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)} J_i \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx$ (5.28) ile daha önce verilen Poisson parantezinin anti-simetrik (5.5) ve Jacobi özdeşliğini (5.6) bütün f, g, h fonksiyonelleri için sağlamalıdır. Fakat (5.6) ile tanımlanan Jacobi özdeşliğini kullanmak basit bir Hamilton operatörü için bile çok zor ve karmaşıktır. Bu nedenle P.Olver'in metodu olarak bilinen (Olver, 1986) ve aşağıda verilen teorem kullanılacaktır.

Teorem: J_i anti-simetrik $q \times q$ matris diferansiyel operatör ve $I[u] = \frac{1}{2}\int \theta\ J_i\theta dx\, J_i$‘ ye karşılık gelen fonksiyonel bi-vektör olmak üzere,

$$\int J_i\, \theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u} dx = 0 \tag{5.80}$$

şeklindeki Jacobi özdeşliğini sağlıyor ise J_i bir Hamilton operatörüdür.

Burada ‘ ’ dış çarpım ve ‘θ’ da bir form olarak tanımlanır. Aynı zamanda dış çarpım $\theta\ \theta = 0$ özelliğine sahiptir. Şimdi de J_o ve J_1 operatörlerinin Jacobi özdeşliğini sağladığını gösterelim.

a. $\int J_o\,\theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u}dx = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\int J_o\,\theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u}dx = \int \frac{\partial}{\partial x}\ \theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u}dx \qquad (5.81)$$

Burada $I[u] = \frac{1}{2}\int \theta\ J_i\theta$ olduğunu hatırlayıp $i = 0$ için tekrar yazalım.

$$I[u] = \frac{1}{2}\int \theta\ J_0\theta = \frac{1}{2}\int \theta\ \theta_x \qquad (5.82)$$

olur. (5.81) denklemi u değişkeni içermediğinden $\frac{\delta I[u]}{\delta u} = 0$ olur. Bundan dolayı

$\int J_o\,\theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u}dx = 0$ olur.

b. $\int J_1\,\theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u}dx = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\int J_1\,\theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u}dx = \int \left(-\partial^3 - \frac{2}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}u_x\right)\theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u}dx \qquad (5.83)$$

Şimdi de $I[u] = \frac{1}{2}\int \theta\ J_i\theta$ ifadesini $i = 1$ için yazalım.

$$I[u] = \frac{1}{2}\int \theta\ J_1\theta = \frac{1}{2}\int \theta\ \left[-\partial^3 - \frac{2}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}u_x\right]\theta \qquad (5.84)$$

(5.84) denklemini düzenlersek,

$$I[u] = -\frac{1}{2}\int \left(\theta\,\theta_{xxx} - \frac{1}{3}\,\theta\,u\theta_x - \frac{1}{6}\,\theta\ \theta u_x\right) \qquad (5.85)$$

elde edilir. Burada $\theta\ \theta = 0$ kuralından ,

$$I[u] = -\frac{1}{2}\int \theta\,\theta_{xxx} - \frac{1}{3}\int \theta\,u\theta_x$$

$$\frac{\delta I[u]}{\delta u} = -\frac{1}{3}\int \theta\, \theta_x \tag{5.86}$$

olur. Bulunan $\frac{\delta I[u]}{\delta u} = -\frac{1}{3}\int \theta\, \theta_x$ ifadesi (5.83) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\int J_1\, \theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u} dx = \int \left(-\partial^3 - \frac{2}{3} u\, \partial - \frac{1}{3} u_x\right) \theta\ \left(-\frac{1}{3}\ \theta\, \theta_x\right) dx \tag{5.87}$$

elde edilir. (5.87) denklemini düzenlenirse,

$$\int J_1\, \theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u} dx = \int \left[\left(-\theta_{xxx} - \frac{2}{3} u\theta_x - \frac{1}{3} u_x\theta\right)\ \left(-\frac{1}{3}\ \theta\, \theta_x\right)\right] dx\ , \tag{5.88}$$

$$\int J_1\, \theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u} dx = \int \left[\frac{1}{3}\theta_{xxx}\, \theta\, \theta_x + \frac{2}{9} u\theta_x\theta\, \theta_x + \frac{1}{9} u_x\theta\theta\, \theta_x\right] dx \tag{5.89}$$

(5.89) denkleminde $\theta_x\theta_x = 0$ ve $\theta\theta=0$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$\int J_1\, \theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u} dx = \int \frac{1}{3}\theta_{xxx}\, \theta\, \theta_x dx \tag{5.90}$$

bulunur. (5.90) denkleminde $AB_x = (AB)_x - A_xB$ ifadesinden yararlanılarak,

$$\theta_{xxx}\, \theta\, \theta_x = (\theta_{xx}\, \theta\, \theta_x)_x - \theta_{xx}\, (\theta\, \theta_x)_x\ , \tag{5.91}$$

$$\theta_{xxx}\, \theta\, \theta_x = (\theta_{xx}\, \theta\, \theta_x)_x - \theta_{xx}\ \theta_x\theta_x - \theta_{xx}\ \theta\theta_{xx} \tag{5.92}$$

elde edilir. Burada $\theta_x\theta_x = 0$ ve $\theta_{xx}\, \theta_{xx} = 0$ olduğundan (5.92) denklemini,

$$\theta_{xxx}\, \theta\, \theta_x = (\theta_{xx}\, \theta\, \theta_x)_x \tag{5.93}$$

şeklini alır. (5.93) ifadesini (5.90) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\int J_1\, \theta\ \frac{\delta I[u]}{\delta u} dx = \int \frac{1}{3}(\theta_{xx}\, \theta\, \theta_x)_x dx \tag{5.94}$$

olur. Bulunan (5.94) denklemi sonsuz uzaylarda incelenirse,

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_1\,\theta\;\frac{\delta I[u]}{\delta u}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3}(\theta_{xx}\,\theta\,\theta_x)_x dx = 0 \tag{5.95}$$

olur. Böylelikle J_0 ve J_1 operatörlerinin anti-simetri ve Jacobi özdeşliğini sağladığı gösterildi.

5.5. KdV Hiyerarşisi

KdV denklemi için bulunan J_0, J_1 operatörleri ve $H_o[u]$, $H_1[u]$ fonksiyonelleri yardımıyla KdV hiyerarşisindeki diğer Hamilton fonksiyonellerini bulabiliriz.

Örnek olarak $H_2[u]$ Hamilton fonksiyonelini bulalım. Bunun için işe tekrarlama bağıntısını $\left[J_0\frac{\delta H_n}{\delta u} = J_1\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u}\right]$ hatırlamakta başlayalım.

Tekrarlama bağıntısı $n = 2$ için yazılırsa,

$$J_0\frac{\delta H_2}{\delta u} = J_1\frac{\delta H_1}{\delta u} \tag{5.96}$$

olur. Daha önce bulduğumuz,

$$J_0 = \partial\,,$$

$$J_1 = -\partial^3 - \frac{1}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}\partial u = -\partial^3 - \frac{2}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}u_x\,,$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = -u_{xx} - \frac{1}{2}u^2$$

ifadelerini (5.96) denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_2}{\delta u} = \left(-\partial^3 - \frac{2}{3}u\,\partial - \frac{1}{3}u_x\right)\left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right) \tag{5.97}$$

olur. (5.97) denkleminin sağ tarafında gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_2}{\delta u}=u_{5x}+\frac{1}{2}(u^2)_{xxx}+\frac{2}{3}uu_{xxx}+\frac{1}{3}u(u^2)_x+\frac{1}{3}u_xu_{xx}+\frac{1}{6}u^2u_x \tag{5.98}$$

ve bir takım düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_2}{\delta u}=u_{5x}+\frac{1}{2}(u^2)_{xxx}+\frac{2}{3}uu_{xxx}+\frac{2}{3}u^2u_x+\frac{1}{3}u_xu_{xx}+\frac{1}{6}u^2u_x \quad , \tag{5.99}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_2}{\delta u}=u_{5x}+\frac{1}{2}(u^2)_{xxx}+\frac{2}{3}uu_{xxx}+\frac{1}{3}u_xu_{xx}+\frac{5}{6}u^2u_x \tag{5.100}$$

bulunur. (5.100) denkleminde $\frac{\delta H_2}{\delta u}$ ifadesini bulmak için aşağıdaki eşitlikler işimizi kolaylaştıracaktır.

$$u^2u_x=\frac{1}{3}(u^3)_x \ , \tag{5.101}$$

$$u_xu_{xx}=\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x \ , \tag{5.102}$$

$$uu_{xxx}=(uu_{xx})_x-u_xu_{xx}=(uu_{xx})_x-\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x \ , \tag{5.103}$$

$$(u^2)_{xx}=2(uu_x)_x=2uu_{xx}+2u_x^2 \tag{5.104}$$

Yukarıdaki (5.101), (5.102), (5.103) eşitlikleri (5.104) denkleminde yerine yazacak olursak,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_2}{\delta u}=u_{5x}+\frac{1}{2}(u^2)_{xxx}+\frac{2}{3}(uu_{xx})_x-\frac{2}{3}\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x+\frac{1}{3}\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x+\frac{5}{18}(u^3)_x \ , \tag{5.105}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_2}{\delta u}=u_{5x}+\frac{1}{2}(u^2)_{xxx}+\frac{2}{3}(uu_{xx})_x-\frac{1}{3}\left(\frac{u_x^2}{2}\right)_x+\frac{5}{18}(u^3)_x \tag{5.106}$$

elde edilir. (5.106) denklemi,

$$\frac{\delta H_2}{\delta u} = u_{4x} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + \frac{2}{3}uu_{xx} - \frac{u_x^2}{6} + \frac{5}{18}u^3 \tag{5.107}$$

olur. (5.107) denklemindeki H_2 Hamilton fonksiyonelini bulmak için h_2 Hamilton fonksiyonunu, a, b, c, d keyfi sabitler olmak üzere,

$$h_2 = au_{xx}^2 + bu^2u_{xx} + cuu_x^2 + du^4 \tag{5.108}$$

şeklinde yazalım. Bu sabitleri

$$\frac{\delta H_2}{\delta u} = \frac{\partial h_2}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h_2}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial u_{xx}}\right) \tag{5.109}$$

fonksiyonel türev tanımından bulabiliriz. (5.108) denklemi (5.109) denkleminde yerine yazılıp gerekli türev işlemleri yapılırsa,

$$\frac{\delta H_2}{\delta u} = 2buu_{xx} + cu_x^2 + 4du^3 - \frac{\partial}{\partial x}(2cuu_x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2au_{xx} + bu^2) \quad , \tag{5.110}$$

$$\frac{\delta H_2}{\delta u} = 2au_{4x} + b(u^2)_{xx} + 4du^3 + 2buu_{xx} + cu_x^2 - 2cu_x^2 - 2cuu_{xx} \, , \tag{5.111}$$

$$\frac{\delta H_2}{\delta u} = 2au_{4x} + b(u^2)_{xx} + 4du^3 - \ cu_x^2 + 2(b-c)uu_{xx} \tag{5.112}$$

olur. Bulunan (5.112)denklemi ile (5.107) denklemi karşılaştırıldığında,

$$2a = 1 \ \text{ ve } \ a = \frac{1}{2} \ , \tag{5.113}$$

$$b = \frac{1}{2} \ , \tag{5.114}$$

$$c = \frac{1}{6} \ , \tag{5.115}$$

$$4d = \frac{5}{18} \ \text{ ve } \ d = \frac{5}{72} \tag{5.116}$$

olduğu kolaylıkla görülür. a, b, c, d sabitlerini bulduktan sonra h_2 yazılırsa,

$$h_2 = \frac{1}{2}u_{xx}^2 + \frac{1}{2}u^2u_{xx} + \frac{1}{6}uu_x^2 + \frac{5}{72}u^4 \tag{5.117}$$

olur. Aynı zamanda $u^2u_{xx} = (u^2u_x)_x - 2uu_x^2$ özdeşliği kullanılarak (5.117) denklemi tekrar düzenlenirse,

$$h_2 = \frac{1}{2}u_{xx}^2 - \frac{5}{6}uu_x^2 + \frac{5}{72}u^4 \tag{5.118}$$

olur. Bulunan (5.118) denklemi

$$H_2[u] = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(u, u_x, u_{xx})dx \tag{5.119}$$

denkleminde yerine yazacak olursak,

$$H_2[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}u_{xx}^2 - \frac{5}{6}uu_x^2 + \frac{5}{72}u^4\right] dx \tag{5.120}$$

bulunur. Böylece J_0, J_1 operatörleri ve $H_0[u]$, $H_1[u]$ fonksiyonelleri yardımıyla üçüncü $H_2[u]$ Hamilton fonksiyoneli de bulunmuş oldu.

KdV hiyerarşisindeki $H_2[u]$ fonksiyoneline karşılık gelen zaman evrimi denklemi

$$u_t = J_0 \frac{\delta H_2[u]}{\delta u}$$

denkleminden,

$$u_t = \left(u_{4x} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + \frac{2}{3}uu_{xx} - \frac{u_x^2}{6} + \frac{5}{18}u^3\right)_x$$

şeklinde beşinci mertebe KdV denklemi elde edilir. Bu işlemlere devam edilerek sonsuz tane Hamilton fonksiyoneli ve Hamilton fonksiyonu bulunur. Bunlara karşılık gelen KdV hiyerarşisinin diğer zaman evrimi denklemleri de kolayca elde edilir.

5.6. Boussinesq Denkleminin Bi-Hamilton Yapısı

Bu kısımda Boussinesq denkleminin Bi-Hamilton yapısını inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle

$$u_{tt} - 3u_{xxxx} + 24(u_x)^2 + 24uu_{xx} = 0$$

şeklindeki (2.67) Boussinesq denklemini hatırlayalım. Yine Lax formalizminde yapıldığı gibi bu denklemin Bi-Hamilton yapısını incelemek için Hamilton operatörleri ve Hamilton fonksiyonelleri u ve yardımcı v fonksiyonları cinsinden elde edilebilir. Bu sistem için zaman değişimi denklemi matris formunda yazılmalıdır. Matris formundaki zaman değişimi denklemi $\varphi = \binom{u}{v}$ olmak üzere

$$\varphi_t = J_0 \frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}} H_1[u, v] = J_1 \frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}} H_0[u, v] \tag{5.121}$$

şeklinde olacaktır. Yukarıdaki denklemdeki Hamilton fonksiyonellerinin fonksiyonel türevleri

$$\frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}} H_1[u, v] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta u} H_1 \\ \frac{\delta}{\delta v} H_1 \end{bmatrix}, \tag{5.122}$$

$$\frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}} H_0[u, v] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta u} H_0 \\ \frac{\delta}{\delta v} H_0 \end{bmatrix} \tag{5.123}$$

şeklinde sütun matrisler olarak tanımlanmaktadır. J_0 ve J_1 Hamilton operatörleri de anti simetri özelliğine sahip Jacobi özdeşliğini sağlayan kare matrisler olacaktır.

Şimdi Boussinesq denklemi için v ve u fonksiyonları cinsinden yazılan (2.65) ve (2.66) zaman değişim denklemlerini göz önüne alalım.

$$v_t = -u_{xxx} + 8uu_x$$

$$u_t = -3v_x$$

Bu denklemleri

$$v_t = (-u_{xx} + 4\gamma u^2)_x \tag{5.124}$$

ve

$$u_t = (-3v)_x \tag{5.125}$$

şeklinde yazarak J_o Hamilton operatörünü ve H_1 Hamilton fonksiyonelini (5.122) denklemini kullanarak elde edelim.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = J_0 \begin{bmatrix} \frac{\delta H_1}{\delta u} \\ \frac{\delta H_1}{\delta v} \end{bmatrix}$$

denklemindeki J_o Hamilton operatörü anti simetri özelliği ve Jacobi özdeşliğini sağlayacak şekilde

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{bmatrix} \tag{5.126}$$

şeklinde seçelim. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = J_0 \frac{\delta H_1}{\delta \mathfrak{U}} = J_0 \begin{bmatrix} \frac{\delta H_1}{\delta u} \\ \frac{\delta H_1}{\delta v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta H_1}{\delta u} \\ \frac{\delta H_1}{\delta v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\delta H_1}{\delta u}\right)_x \\ \left(\frac{\delta H_1}{\delta v}\right)_x \end{bmatrix} \tag{5.127}$$

ifadesinden,

$$u_t = \left(\frac{\delta H_1}{\delta v}\right)_x \quad , \tag{5.128}$$

$$v_t = \left(\frac{\delta H_1}{\delta u}\right)_x \tag{5.129}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemler (5.124) ve (5.125) denklemleri ile karşılaştırıldığında

$$\frac{\delta H_1}{\delta v} = -3v \ , \tag{5.130}$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = -u_{xx} + 4u^2 \tag{5.131}$$

olduğu görülür. Burada

$$H_1[u,v] = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(v,u,u_x)dx$$

Fonksiyonelini ve bunun fonksiyonel türevleri

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = \frac{\partial h_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_{xx}}\right)$$

ve

$$\frac{\delta H_1}{\delta v} = \frac{\partial h_1}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h_1}{\partial v_x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial h_1}{\partial v_{xx}}\right)$$

Göz önüne alınarak h_1 hamilton fonksiyonunun

$$h_1 = av^2 + bu^3 + cu_x^2 \tag{5.132}$$

a, b ve c sabitler olmak üzere şeklinde olabileceği kolayca tahmin edilebilir. (5.132) ifadesindeki sabit katsayıları bulmak için H_1 Hamilton fonksiyonelinin fonksiyonel türevleri hesaplandığında

$$\frac{\delta H_1}{\delta v} = 2av \ , \tag{5.133}$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta u} = 2cu_{xx} + 4bu^2 \tag{5.134}$$

elde edilir. (5.130) ve (5.131) denklemleri ile (5.133) ve (5.134) denklemleri karşılaştırıldıklarında, katsayılar

$$a = -\frac{3}{2} \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = -\frac{1}{2} \tag{5.135}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak Bi-Hamilton yapının Hamilton fonksiyonlarından bir tanesi

$$h_1 = -\frac{3}{2}v^2 + u^3 - \frac{1}{2}u_x^2 \tag{5.136}$$

ve Hamilton fonksiyoneli

$$H_1 = \int \left(-\frac{3}{2}v^2 + u^3 - \frac{1}{2}u_x^2\right) dx \tag{5.137}$$

bulunur. Öte yandan ikinci Hamilton operatörü

$$J_1 = \begin{bmatrix} \partial^3 + u\,\partial + \partial u & 6\,\partial v + v\,\partial \\ \partial v + 6v\,\partial & -\left(\partial^5 - 2(\partial^3 u + u\,\partial^3) + 3(\partial^2 u\,\partial + \partial u\,\partial^2) + 8(\partial u^2 + u^2\,\partial)\right) \end{bmatrix} \tag{5.138}$$

ve ikinci Hamilton fonksiyonu

$$h_0 = -\frac{1}{2}v \tag{5.139}$$

şeklinde verilmektedir (Popowicz, 1993). Böylece ikinci Hamilton fonksiyonelinin

$$H_0[u,v] = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(v)dx \tag{5.140}$$

Tanım bağıntısını kullanarak denkleminde yerine yazacak olursak,

$$H_0 = -\int \frac{1}{2}\, vdx \tag{5.141}$$

olduğu görülür.

Şimdi de J_0, H_1 ve J_1, H_0 ifadelerini sırasıyla (5.122) ve (5.123) denklemlerini sağladığını gösterelim.

Öncelikle Boussinesq denklemi için verilen J_0, H_1 ve $\frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}}$ ifadeleri $\varphi_t = J_0 \frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}} H_1[u,v]$ (2.316) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{xx} + 4u^2 \\ -3v \end{bmatrix}, \tag{5.142}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -3v_x \\ -u_{xxx} + 8uu_x \end{bmatrix} \tag{5.143}$$

olur ve buradan da

$$u_t = -3v_x \;,$$

$$v_t = -u_{xxx} + 8uu_x$$

ifadeleri yazılabilir. Böylece Boussinesq denkleminin Bi-Hamilton formalizmi için birinci Hamilton operatörü ile fonksiyonunun sağladığını gösterdik. Şimdi de ikinci Hamilton operatörü ve fonksiyonunun sağladığını gösterelim. İşe J_1, H_0 ve $\frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}}$ ifadeleri $\varphi_t = J_1 \frac{\delta}{\delta\mathfrak{A}} H_0[u,v]$ denkleminde yerine yazmakla başlanırsa,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \partial^3 + u\,\partial + \partial u & 6\,\partial v + v\,\partial \\ \partial v + 6v\,\partial & -\left(\partial^5 - 2(\partial^3 u + u\,\partial^3) + 3(\partial^2 u\,\partial + \partial u\,\partial^2) + 8(\partial u^2 + u^2\,\partial)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{5.144}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \partial^3 + 2u\,\partial + u_x & 7v\,\partial + 6v_x \\ 6v_x + 7v\,\partial & -(\partial^5 + 5u_x\,\partial^2 + u_{xx}\,\partial - 2u_{xxx} + 8u^2\,\partial + 16uu_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{5.145}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} -3v_x \\ -u_{xxx} + 8uu_x \end{bmatrix} \tag{5.146}$$

bulunur ve benzer şekilde

$$u_t = -3v_x\,,$$

$$v_t = -u_{xxx} + 8uu_x$$

u ve v ifadelerine bağlı zaman evrim denklemleri yazılır. Yukarıda ki denklemlerin $v_{xt} = v_{tx}$ integre edilebilir şartından da

$$u_{tt} - 3u_{xxxx} + 24(u_x)^2 + 248uu_{xx} = 0$$

Boussinesq denklemi bulunur.

Sonuç olarak yukarıda verilen J_0 , J_1 Hamilton operatörlerin ve $H_o[u]$, $H_1[u]$ Hamilton fonksiyonellerinin varlığı bize Boussinesq denkleminin bu formalizmin çerçevesi içinde de tamamen çözülebilir lineer olmayan bir denklem olduğunu ifade etmektedir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada son yıllarda gelişme gösteren lineer olmayan tamamen çözülebilir $(1+1)$ boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tamamen çözülebilirliği ele alınmıştır. Lineer olmayan denklemlerin çözülebirliğini göstermede kullanılan yöntemlerden başlıcaları olan Lax formalizmi, AKNS formalizmi, sıfır eğrilik şartı ve Bi-Hamilton yapısı detaylı bir şekilde incelenmiştir. İki boyutlu lineer olmayan KdV, mKdV, lineer olmayan Schrödinger, Sine Gordon, Burgers ve Boussinesq denlemlerinin çözülebilirliğinin gösterilmesi bu yöntemlere örnek olarak yapılmıştır.

Bu çalışmada incelenen yöntemler kullanılarak yeni lineer olmayan tamamen çözülebilir denklemler elde edilebilir. Ayrıca bu yöntemler tamamen çözülebilir denklemlerin çok bileşenli denklem sistemlerine genelleştirilmesinde de kullanılmaktadır. Tamamen çözülebilir denklemlerin süper denklemlere genelleştirilmesi yüksek enerji fiziğindeki süper simetrik alan denklemlerinin çözümüne yol gösterebileceği öngörülebilir.

7. KAYNAKLAR

Ablowitz MJ, Kaup DJ, Newell AC and Segur H (1973). *Nonlinear equations of physical significance.* Physical Review Letters, 31: 125–127.

Ablowitz MJ, Kaup DJ, Newell AC, and Segur H (1973). *Method for solving the sine-Gordon equation.* Phys. Rev. Lett., 30(25):1262–1264.

Ablowitz MJ, Kaup DJ, Newell AC and Segur H (1974). *The inverse scattering transform–Fourier analysis for nonlinear problems.* Studies in Applied Mathematics, 53: 249–315.

Ablowitz MJ and Segur H (1981). Solitons *and the Inverse Scattering Transform, Philadelphia,* PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Ablowitz MJ ve Clarkson PA (1991). *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering.* Cambridge University Press. Cambridge.

Bianchi I,(1902) *Lezoini De Geometria Differenziale* , 3 vols Pisa: Spoerri.

Boussinesq J (1872). *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond . Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Deuxième Série **17**: 55–108.

Burgers JM (1939). *Mathematical examples illustrating relation soccurring in the theory of turbulentuid motion.* Noord-Hollandsche Uitg. Mij.

Das A (1989). Integrable Models. *World Scientific Lecture Notes in Physics*. Vol. 30. Nevyork.

Davey A, Stewartson K (1974). *On three dimensional packets of surface waves*. Proc. R. Soc. A 338 (1613): 101–110.

Debnath L (1997). *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*, Birkhäuser, Boston.

Demircioğlu AY (2010). *Bir Boyutlu Boussinesq Denklemlerinin Hibrid Çözümünü İçeren Nümerik Dalga Modeli Geliştirlmesi*. Yüksek Lisans Tezi. İnşaat Mühendisliği. Fen Bilimleri Enstitüsü. Niğde Üniversitesi.

Faddeev LD, Korepin VE (1978). *Quantum theory of solitons*. Physics Reports 42 (1): 1–87.

Frenkel J, Kontorova T (1939). *On the theory of plastic deformation and twinning.* Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Fiziches kaya 1: 137–149.

Gardner CS (1971). *The Korteweg-de Vries Equation and Generalizations, IV. The Korteweg-de Vries Equation as a Hamiltonian System*. J. Math. Phys. **12**: 1548-1551.

Gürses M ve Oğuz Ö (1985). *A Super AKNS Scheme*. Physics Letters, 108A(9): 437-440.

Hamanaka M and Toda K (2003). *Phys. Lett.* A:316 ,77.

Ishimori, Yuji (1984). *Multi-vortex solutions of a two-dimensional nonlinear wave equation*. Prog. Theor. Phys. **72**: 33–37.

Kadomtsev BB, Petviashvili VI (1970). *On the stability of solitary waves in weakly dispersive media*. Sov. Phys. Dokl. **15**: 539–541.

Karigiannis S (1998). *The Inverse Scarttering And Integrability Of Nonlinear Evolution Equations*. 9.

Korteweg DJ ve G de Vries (1895). *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and On a New Type of Stationary Waves*. Philos. Mag. Ser. 5, 39: 422-443.

Kruskaland MD, Zabusky NJ (1965). *Interaction of "solitons" in a collisionless Plasma and there currence of initialstates.* Phys. Rev. Lett., 15(6): 240–243.

Kupershmidt BA (1984). *A Super Korteveg-de Vries Equation: An Integrable System*. Physics Letters, 102A(5, 6): 213-215.

Kupershmidt BA (1987). *Elements of Super Integrable Systems*. D. Reidel, Dortrecht.

Larue J (2011). *Symbolic verification of operator and matrix lax pairs for completeley integrable nonlinear partial differential equations.* M. S. Thesis, Colorado School of Mines.

Lax PD (1968). *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*. Comm. PureAppl. Math., 21(5): 467–490.

Malomed, Boris (2005). *Nonlinear Schrödinger Equations*. in Scott, Alwyn. Encyclopedia of Nonlinear Science. New York: Routledge. pp. 639–643.

Manin Yu I ve Radul AO (1985). *A Super Symmetric Extention of the Kodomtsev-Petviashvili Hierarchy*. Comm. Math. Phys. 98: 65-67.

Mark Hickman, Willy Hereman, Jennifer Larue ve Ünal Göktaş (2009). *Applicable Analysis Vol*. 00. No. 00. 1–20.

Mathieu P (1988). *Super Symmetric Extention of the Korteweg-de Vries Equation*. J. Math.Phys., 29(11): 2499-2056.

Oğuz Ö (1995). *Hamiltonian Stracture of Multicomponent KdV Equations*. Symmetries in Science VII, B.Gruber, Plenum Press, Newyork.

Oguz O, Oguz Ö ve Yazıcı D (2001). *J. Phys.A*: Math.Gen., 34, 7713-7718.

Olver PJ (1986). *Applications of Lie Groups to Diferential Equations.* Springer-Verlag.

Poisson SD (1809). *M´emoire sur la variationdes constantes arbitraires dansles questions de mecanique .Memoir on the variation of arbitrary constants in mechanics*. Journal de l'Ec´ ole polytechnique, cahier XV: 266-298.

Popowicz Z (1993). *The Super W3 Conformal algebra and the Boussinesq Hierarchy*. Research Institute for Theoretical Physics, P.O. Box 9 (Siltavuorenpenger 20 C), FIN-00014 University of Helsinki, Finland.

Ssvinolupov SI (1991). *Jordan Algebra And Generalization KdV Equations*. Theoretical Mathematics, Plenum Publishing Corpotation, 87: 611-620.

Zakharov VE and Shabat AB (1979). *Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering*. Funct. Anal. 166–174.

Zakharov VE and Faddeev LD (1971). *Korteweg–de Vries equation: a completely İntegrable Hamiltonian system*. Functional analysis and its applications, 5: 280-287.

8. ÖZ GEÇMİŞ

1985 yılında Siirt'te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. Trakya Üniversitesi Fizik bölümünden 2009 yılında mezun oldu. 2012 yılında Haliç Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Programı'na başladı. Şuan da özel bir dershanede matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.