T.C.
HALİÇ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

ASAL DOĞRULTU EĞRİLERİ, HELİSLER ve SLANT HELİSLER

Hazırlayan
Merve BAYRAKCI

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL

İstanbul - 2015

T.C.
HALİÇ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

ASAL DOĞRULTU EĞRİLERİ, HELİSLER ve SLANT HELİSLER

Hazırlayan
Merve BAYRAKCI

Danışman ve Tez Jürisi
Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL (Danışman)
Prof. Dr. Erol YARIZ
Doç. Dr. Tunç MISIRLIOĞLU

İstanbul - 2015

T.C.

HALİÇ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programı Tezli Yüksek Lisans öğrencisi **Merve BAYRAKCI** tarafından hazırlanan **"Asal Doğrultu Eğrileri, Helisler ve Slant Helisler"** adlı bu çalışma jürimizce Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Tarihi : 29.06.2015

(Jüri Üyesinin Ünvanı , Adı , Soyadı ve Kurumu) : İmzası :

Jüri Üyesi: Yrd.Doç.Dr.Tayfun YEGÜL
Danışman– HAL.Üniv.Matematik ABD Öğr.Üyesi ....

Jüri Üyesi: Prof.Dr.Erol YARIZ
HAL.Üniv.Matematik ABD Öğr.Üyesi ....

Jüri Üyesi : Doç.Dr.Tunç MISIRLIOĞLU
İst.Kül.Üniv. Öğr.Üyesi ....

Jüri Üyesi : Yrd.Doç.Dr.Nebi ÖNDER
HAL.Üniv. Matematik ABD Öğr.Üyesi (Yedek) ....

Jüri Üyesi : Doç.Dr.Hakan Mete TAŞTAN
İst.Üniv. (Yedek) ....

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında beni bilgi ve önerileri ile yönlendiren, yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL'e, lisans ve yüksek lisans eğitimimde katkıları bulunan başta Haliç Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dekanı Prof. Dr. Oya OĞUZ'a, Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Hamit AVCI'ya , Prof. Dr. Ömer OĞUZ'a, Yrd. Doç. Dr. Nebi ÖNDER'e ve Matematik Bölümünün değerli öğretim üyeleri, öğretim elemanları ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

İstanbul, 2015 — Merve BAYRAKCI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

SİMGELER

γ	: Frenet Eğrisi
$\gamma^{\bullet}$	: Hız Vektör Alanı
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma
E^3	: Öklid Uzayı
T	: Teğet Birim Vektör Alanı
N	: Normal Birim Vektör Alanı
B	: Binormal Birim Vektör Alanı
$\left(T(t), N(t), B(t)\right)$	:Frenet Tabanı
(T, N, B)	:Frenet Çatısı
γ_T	: Teğetler Göstergesi
γ_B	: Binormaller Göstergesi
$\overline{\gamma}$	: Asal Doğrultu Eğrisi
$\wedge$	: Vektörel Çarpım
$(\ )^{\bullet}$	: t Parametresine Göre Türev
$\langle\ \rangle$	: İç Çarpım
$\lVert\ \rVert$	: Vektörün Normu

GENEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı	: Merve BAYRAKCI
Anabilim Dalı	: Matematik
Programı	: Uygulamalı Matematik
Tez Danışmanı	: Yrd. Doç. Dr. Tayfun YEGÜL
Tez Türü ve Tarihi	: Yüksek Lisans - Mayıs 2015

ÖZET

ASAL DOĞRULTU EĞRİLERİ, HELİSLER ve SLANT HELİSLER

Bu çalışmada, bir Frenet eğrisinin asal doğrultu eğrisi ve asal donör eğrisi kavramları tanıtıldı. Bir düzlem eğrinin asal donör eğrisi olarak bir silindirik helisin parametrik gösterimleri elde edildi. Bir silindirik helisin asal donör eğrisi olarak bir slant helisin parametrik gösterimleri elde edildi.

Anahtar Kelimeler : Frenet eğrisi, asal doğrultu eğrisi, asal donör eğrisi, helis, slant helis

GENERAL INFORMATION

Name and Surnames	: Merve BAYRAKCI
Field	: Mathematics
Program	: Applied Mathematics
Supervisor	: Assist. Prof. Dr. Tayfun YEGÜL
Degree Awarded and Degree	: Master of Science - May 2015

ABSTRACT

PRINCIPAL DIRECTION CURVES, HELICES and SLANT HELICES

In this study, the notions of the principal direction curve and principal donor curve of a Frenet curve were introduced. Parametric representations of a cylindrical helix as a principal donor curve of a plane curve were obtained. Parametric representations of a slant helix as a principal donor curve of a cylindrical helix were obtained.

Keywords : Frenet curve, principal direction curve, principal donor curve , helix, slant helix

GİRİŞ

3 - boyutlu Öklid uzayında teğet doğruları sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan bir eğriye *silindirik helis* veya *genel helis* denir.

1802 yılında, M. A. Lancret tarafından ifade edilen ve 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ispatlanan teoreme göre bir eğrinin silindirik helis olması için gerek ve yeter koşul κ eğrinin eğriliği ve τ eğrinin burulması olmak üzere

$$\frac{\tau}{\kappa}$$

fonksiyonunun eğri boyunca sabit olmasıdır.

2004 yılında, Izumiya ve Takeuchi tarafından "New Special Curves and Devolopable Surfaces" isimli makalede asal normal doğruları sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan eğriler olarak tanımlanan slant helisler aynı yazarlar tarafından karakterize edildi. İzumiya ve Takeuchi tarafından yapılan karakterizasyona göre eğriliği sıfır olmayan birim hızlı bir eğrinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$$

fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır.

2005 yılında, L. Kula ve Y. Yaylı tarafından "On Slant Helix and Its Spherical Indicatrix" isimli makalede bir slant helisin teğetler göstergesinin ve binormaller göstergesinin birer silindirik helis olduğu gösterildi.

2012 yılında, Jin Ho Choi ve Young Ho Kim tarafından "Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications" isimli makalede asal doğrultu ve asal donör eğrileri tanımlandı. Bu kavramlar kullanılarak silindirik ve slant helisler arasındaki ilişkiler incelendi.

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde eğrilere ait genel bilgiler verildi. İkinci bölümünde helisler ve slant helisler ile ilgili tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde asal doğrultu ve asal donör eğrilerinin tanımları yapıldı. Asal doğrultu ve asal donör eğrilerinin eğrilik ve burulmaları ile ilgili önemli sonuçlar elde edildi. Dördüncü bölümde asal doğrultu eğrisi ve asal donör eğrisi kavramları kullanılarak silindirik ve slant helislerin parametrik gösterimleri elde edildi.

1.TEMEL KAVRAM ve TEOREMLER

Aşağıda verilecek olan tanımlar için O'Neill (2006), Kühnel (2002), Millman (2007) ve Struik (1988) kaynak kitaplarına bakılabilir.

I $\mathbb{R}$ de bir açık aralık ve $k \geq 1$ olmak üzere I açık aralığındaki her bir t reel sayısına bir $\gamma(t) \in E^3$ vektörünü karşı getiren $k.$ sınıftan bir γ fonksiyonuna I dan E^3 e *$k.$sınıftan parametrik eğri* denir.

$\gamma(t)$ vektörüne γ parametrik eğrisinin t parametresine *karşı gelen noktası* denir.

Her $t \in I$ için $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = \gamma^{\bullet}(t) \neq 0$ ise γ ya *regüler eğri* denir.

γ regüler bir eğri ise $T(t) = \dfrac{1}{\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|}\gamma^{\bullet}(t)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *teğet birim vektörü* denir.

$\kappa(t) = \dfrac{\left\|T^{\bullet}(t)\right\|}{\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|}$ sayısına γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *eğriliği* denir.

Her $t \in I$ için $\kappa(t) \neq 0$ veya denk olarak $\left\|T^{\bullet}(t)\right\| \neq 0$ ise γ ya *eğriliği sıfır olmayan eğri* denir.

γ eğriliği sıfır olmayan bir eğri ise $N(t) = \dfrac{1}{\left\| T^{\bullet}(t) \right\|} T^{\bullet}(t)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *asal normal birim vektörü* denir.

$B(t) = T(t) \wedge N(t)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *binormal birim vektörü* denir.

$$\langle T(t), T(t) \rangle = \langle N(t), N(t) \rangle = \langle B(t), B(t) \rangle = 1$$

$$\langle T(t), N(t) \rangle = \langle T(t), B(t) \rangle = \langle N(t), B(t) \rangle = 0$$

ve

$$\langle T(t) \wedge N(t), B(t) \rangle = 1$$

olduğundan

$\left(T(t), N(t), B(t) \right)$ üçlüsü E^3 te pozitif ortonormal bir tabandır.

$\left(T(t), N(t), B(t) \right)$ üçlüsüne γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *Frenet tabanı* denir.

$\tau(t) = \dfrac{\langle B(t), N^{\bullet}(t) \rangle}{\left\| \gamma^{\bullet}(t) \right\|} = -\dfrac{\langle N(t), B^{\bullet}(t) \rangle}{\left\| \gamma^{\bullet}(t) \right\|}$ sayısına γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *burulması* denir.

Her $t \in I$ için

$$T^{\bullet}(t) = \left\| \gamma^{\bullet}(t) \right\| \kappa(t) N(t)$$

$$N^{\bullet}(t) = -\left\| \gamma^{\bullet}(t) \right\| \kappa(t) T(t) + \left\| \gamma^{\bullet}(t) \right\| \tau(t) B(t)$$

$$B^{\bullet}(t) = -\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|\tau(t)N(t)$$

dir.

Bu eşitliklere *Frenet - Serret formülleri* denir.

$$\kappa(\mathrm{t}) = \frac{\left\|\gamma^{\bullet}(t)\wedge\gamma^{\bullet\bullet}(t)\right\|}{\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|^{3}}$$

ve

$$\tau(\mathrm{t}) = \frac{\left\langle \gamma^{\bullet}(t)\wedge\gamma^{\bullet\bullet}(t), \gamma^{\bullet\bullet\bullet}(t)\right\rangle}{\left\|\gamma^{\bullet}(t)\wedge\gamma^{\bullet\bullet}(t)\right\|^{2}}$$

dir.

Bir $t_0 \in I$ için $s : t \to s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|\gamma^{\bullet}(u)\right\| du$ şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna $\gamma(t_0)$ noktasına göre *yay uzunluğu* denir.

$s^{\bullet}(t) = \left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|$ dır.

Her $t \in I$ için $\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\| = 1$ ise γ eğrisine *birim hızlı eğri* denir.

Eğriliği sıfır olmayan birim hızlı bir γ eğrisine *Frenet eğrisi* denir.

γ bir Frenet eğrisi ise

$$T(t) = \gamma^{\bullet}(t)$$

$$\kappa(t) = \left\|T^{\bullet}(t)\right\|$$

$$\tau(t) = \left\langle B(t), N^{\bullet}(t) \right\rangle = -\left\langle N(t), B^{\bullet}(t) \right\rangle$$

$$T^{\bullet}(t) = \kappa(t) N(t)$$

$$N^{\bullet}(t) = -\kappa(t) T(t) + \tau(t) B(t)$$

$$B^{\bullet}(t) = -\tau(t) N(t)$$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} 1 \, du = t - t_0$$

dır.

$\gamma(t)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $T(t)$ olan doğruya γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *teğet doğrusu* denir.

$\gamma(t)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $N(t)$ olan doğruya γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *normal doğrusu* denir.

$\gamma(t)$ noktasından geçen ve doğrultu vektörü $B(t)$ olan doğruya γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki *binormal doğrusu* denir.

$\gamma^{\bullet}$, T , N ve B vektör fonksiyonlarına sırası ile *hız vektör alanı*, *teğet vektör alanı*, *asal normal vektör alanı* ve *binormal vektör alanı* denir.

(T, N, B) üçlüsüne γ eğrisinin *Frenet çatısı* denir.

(T, N, B) pozitif ortonormal bir çatıdır.

$V : t \to V(t) \in \mathrm{E}^3$ vektör alanı için

$u = \langle T, V \rangle$, $v = \langle N, V \rangle$ ve $w = \langle B, V \rangle$ olmak üzere

$V = uT + vN + wB$

dir.

$\kappa : t \to \kappa(t) \in \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin *eğrilik fonksiyonu* denir.

$\tau : t \to \tau(t) \in \mathbb{R}$ fonksiyonuna γ eğrisinin *burulma fonksiyonu* denir.

Bütün noktaları belirli bir düzlem eğri üzerinde bulunan bir eğriye *düzlem eğri* denir.

Teorem 1.1 : Eğriliği sıfır olmayan bir γ eğrisinin düzlem eğri olması için gerek ve yeter koşul $\tau = 0$ olmasıdır (Millman R ve Parker G. D., 2007).

Bütün noktaları belirli bir küre üzerinde bulunan bir eğriye *küresel eğri* denir.

Teorem 1.2 : Burulması sıfır olmayan bir γ Frenet eğrisinin küresel eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\frac{\kappa^{\bullet}}{\tau\kappa^2}\right)^{\bullet} = \frac{\tau}{\kappa}$$

olmasıdır (Kühnel W., 2002).

2. HELİSLER ve SLANT HELİSLER

Tanım 2.1 : Eğriliği sıfır olmayan ve teğet birim vektörleri sabit bir birim vektör ile sabit bir açı yapan bir eğriye *silindirik (genel) helis* denir (Millman R ve Parker G. D., 2007).

Teorem 2.2 : Eğriliği sıfır olmayan bir γ eğrisinin silindirik helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır (Millman R ve Parker G. D., 2007).

İspat : İşlemleri basitleştirmek için γ bir Frenet eğrisi olsun.

$\frac{\tau}{\kappa} = c$ sabit ve

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} T + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} B \quad \text{olsun.}$$

$$a^{\bullet} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \kappa N + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (-c\kappa) N = 0$$

olduğundan

a sabit bir birim vektördür.

$(0,\pi)$ açık aralığında $\cot\theta = c$ olacak şekilde bir θ sayısı vardır.

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta = 1 + c^2$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + c^2$$

olduğundan

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

ve

$$\cos\theta = \sin\theta\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}c$$

olduğundan

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

dir.

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{ve} \quad \cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{dir.}$$

$$\langle T, a\rangle = \left\langle T, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}T + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}B \right\rangle = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \cos\theta$$

olduğundan

θ sayısı $T(t)$ vektörleri ile a vektörü arasındaki sabit açıdır.

Tersine a sabit bir birim vektör ve $\theta \in (0,\pi)$ olmak üzere $\langle T, a\rangle = \cos\theta$ olsun.

Frenet tabanına göre a vektörü

$$a = \langle T, a\rangle T + \langle N, a\rangle N + \langle B, a\rangle B \quad \text{dir.}$$

$$\kappa\langle N, a\rangle = \langle \kappa N, a\rangle = \langle T^{\bullet}, a\rangle = \langle Ta\rangle^{\bullet} = 0 \quad \text{ve} \quad \kappa \neq 0$$

olduğundan

$$\langle N, a\rangle = 0$$

dır.

$$a = \cos\theta\ T + \langle B, a\rangle\ B$$

a sabit bir birim vektör olduğundan $\|a\| = 1$ dir.

$$1 = \|a\|^2 = \cos^2\theta + \langle B, a \rangle^2$$

dir.

$$\langle B, a \rangle = \mp \sin\theta$$

dır.

$$a = \cos\theta \; T \mp \sin\theta \; B$$

dir.

$$0 = a^{\bullet} = \cos\theta \;\kappa\; N \mp \sin\theta \;(-\tau)\; N = (\cos\theta\kappa \mp \sin\theta\tau)\; N$$

dir.

$N \neq 0$ olduğundan

$$\cos\theta\kappa \mp \sin\theta\tau = 0$$

dır.

$\dfrac{\tau}{\kappa} = \mp\cot\theta$ sabittir. □

Eğriliği ve burulması sabit olan bir eğri bu teoreme göre bir silindirik helistir.

Eğriliği ve burulması sabit olan bir eğriye *dairesel helis* denir.

Tanım 2.3 : Eğriliği sıfır olmayan ve asal normal birim vektörleri sabit bir birim vektör ile sabit bir açı yapan bir eğriye *slant helis* denir (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

Teorem 2.4 : Bir γ Frenet eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul

$\omega = \dfrac{\kappa^2}{(\kappa^2+\tau^2)^{3/2}}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$ fonksiyonunun sabit bir fonksiyon olmasıdır (Izumiya ve Takeuchi, 2004).

İspat : γ bir Frenet eğrisi olsun.

$D = \dfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}T + \dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}B$ olsun.

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet} = \frac{\tau^{\bullet}\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right) - \tau\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)^{\bullet}}{\kappa^2+\tau^2} =$$

$$= \frac{\tau^{\bullet}\sqrt{\kappa^2+\tau^2} - \tau\dfrac{\kappa\kappa^{\bullet}+\tau\tau^{\bullet}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}}{\kappa^2+\tau^2} =$$

$$= \frac{\tau^{\bullet}\left(\kappa^2+\tau^2\right) - \tau\left(\kappa\kappa^{\bullet}+\tau\tau^{\bullet}\right)}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\tau^{\bullet}\kappa^2 + \tau^2\tau^{\bullet} - \tau\kappa\kappa^{\bullet} - \tau^2\tau^{\bullet}}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\tau^{\bullet}\kappa^2 - \tau\kappa\kappa^{\bullet}}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\kappa\left(\tau^{\bullet}\kappa - \tau\kappa^{\bullet}\right)}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\kappa\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} = \kappa\omega$$

dır.

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet} = \frac{\kappa^{\bullet}\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right) - \kappa\left(\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)^{\bullet}}{\kappa^2+\tau^2} =$$

$$= \frac{\kappa^{\bullet}\sqrt{\kappa^2+\tau^2} - \kappa\dfrac{\kappa\kappa^{\bullet}+\tau\tau^{\bullet}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}}{\kappa^2+\tau^2} =$$

$$= \frac{\kappa^{\bullet}\left(\kappa^2+\tau^2\right)-\kappa\left(\kappa\kappa^{\bullet}+\tau\tau^{\bullet}\right)}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\kappa^2\kappa^{\bullet}+\kappa^{\bullet}\tau^2-\kappa^2\kappa^{\bullet}-\kappa\tau\tau^{\bullet}}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\kappa^{\bullet}\tau^2-\kappa\tau\tau^{\bullet}}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\tau\left(\kappa^{\bullet}\tau-\kappa\tau^{\bullet}\right)}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{-\tau\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}} = -\tau\omega$$

dır.

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet} = \kappa\omega$$

ve

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet} = -\tau\omega$$

olduğundan

$$D^{\bullet} = \kappa\omega T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\kappa N - \tau\omega B + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(-\tau)N =$$
$$= -\omega(-\kappa T + \tau B) =$$
$$= -\omega N^{\bullet}$$

dir.

$\omega = c$ sabit olsun.

$$D^{\bullet} = -cN^{\bullet}$$

dır.

$$a = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} N + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} D \quad \text{olsun.}$$

$$a^\bullet = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} N^\bullet + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} (-c) N^\bullet = 0$$

olduğundan

a sabit bir birim vektördür.

$\left(0,\pi\right)$ açık aralığında $\cot\theta = c$ olacak şekilde bir θ sayısı vardır.

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{ve} \quad \cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

dir.

$$\left\langle N,a\right\rangle = \left\langle N, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} N + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} D \right\rangle = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \cos\theta$$

olduğundan

θ sayısı $N(t)$ vektörleri ile a vektörü arasındaki sabit açıdır.

Tersine a sabit bir birim vektör ve $\theta \in \left(0,\pi\right)$ olmak üzere $\left\langle N,a\right\rangle = \cos\theta$ olsun.

$$\bar{D} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} N^\bullet = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} T + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} B \quad \text{olsun.}$$

Her $t \in I$ için $\left(N(t),\ \bar{D}(t),\ D(t)\right)$ E^3 te pozitif ortonormal bir tabandır.

$$a = \left\langle N,a\right\rangle N + \left\langle \bar{D},a\right\rangle \bar{D} + \left\langle D,a\right\rangle D$$

dir.

$$\left\langle \bar{D},a\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \left\langle N^\bullet,a\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \left\langle N,a\right\rangle^\bullet = 0$$

olduğundan

$$a = \cos\theta \; N + \langle D, a \rangle \; D$$

dir.

$$1 = \|a\|^2 = \cos^2\theta + \langle D, a \rangle^2$$

dir.

$$\langle D, a \rangle^2 = 1 - \cos^2\theta$$

$$\langle D, a \rangle = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$\langle D, a \rangle = \mp \sin\theta$$

dır.

$$a = \cos\theta \; N \mp \sin\theta \; D$$

dir.

$$0 = a^{\bullet} = \cos\theta N^{\bullet} \mp \sin\theta(-\omega) N^{\bullet} = (\cos\theta \mp \sin\theta \; \omega) N^{\bullet}$$

dir.

$N^{\bullet} \neq 0$ olduğundan $\cos\theta \mp \sin\theta \; \omega = 0$

dır.

$\omega = \mp \cot\theta$ sabittir. □

Tanım 2.5 : γ bir I açık aralığında tanımlı eğriliği sıfır olmayan bir eğri olmak üzere her $t \in I$ için $\gamma_T(t) = T(t)$ eşitliği ile tanımlanan γ_T eğrisine γ eğrisinin *teğetler göstergesi* denir.

Teğetler göstergesi bütün noktaları birim küre üzerinde olduğundan küresel bir eğridir.

Teorem 2.6 : Bir Frenet eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul teğetler göstergesinin silindirik helis olmasıdır (Kula ve Yaylı, 2005).

İspat : γ Frenet eğrisinin γ_T teğetler göstergesinin eğrilik ve burulması κ_T ve τ_T olsun.

$$\gamma_T^{\bullet} = T^{\bullet} = \kappa N$$

dir.

$$\gamma_T^{\bullet\bullet} = \kappa^{\bullet} N + \kappa N^{\bullet} =$$

$$= \kappa^{\bullet} N + \kappa\left(-\kappa T + \tau B\right)$$

olduğundan

$$\gamma_T^{\bullet\bullet} = -\kappa^2 T + \kappa^{\bullet} N + \kappa\tau B$$

dir.

$$\gamma_T^{\bullet\bullet\bullet} = \left(-\kappa^2\right)^{\bullet} T + \left(-\kappa^2\right) T^{\bullet} + \left(\kappa^{\bullet}\right)^{\bullet} N + \left(\kappa^{\bullet}\right) N^{\bullet} + \left(\kappa\tau\right)^{\bullet} B + \left(\kappa\tau\right) B^{\bullet} =$$

$$= -2\kappa\kappa^{\bullet} T + \left(-\kappa^2\right)\left(-\kappa N\right) + \left(\kappa^{\bullet\bullet}\right) N + \left(\kappa^{\bullet}\right)\left(-\kappa T + \tau B\right) + \left(\kappa^{\bullet}\tau + \kappa\tau^{\bullet}\right) B + \left(\kappa\tau\right)\left(-\tau N\right)$$

olduğundan

$$\gamma_T^{\bullet\bullet\bullet} = -3\kappa\kappa^{\bullet} T + \left(\kappa^{\bullet\bullet} - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right) N + \left(2\kappa^{\bullet}\tau + \kappa\tau^{\bullet}\right) B$$

dir.

$$\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet} = \left(\kappa N\right) \wedge \left(-\kappa^2 T + \kappa^{\bullet} N + \kappa\tau B\right)$$

olduğundan

$$\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet} = \kappa^2\tau T + \kappa^3 B$$

dir.

$$\left\|\gamma_T^{\bullet}\right\| = \kappa\,,$$

$$\left\|\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}\right\| = \sqrt{\left(\kappa^2\tau\right)^2 + \left(\kappa^3\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\kappa^4\tau^2 + \kappa^6} =$$

$$= \sqrt{\kappa^4\left(\kappa^2+\tau^2\right)}$$

olduğundan

$$\left\|\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}\right\| = \kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2} \quad \text{ve}$$

$$\left\langle \gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}, \gamma_T^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle = \left\langle \left(\kappa^2\tau T + \kappa^3 B\right), -3\kappa\kappa^{\bullet} T + \left(\kappa^{\bullet\bullet} - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right) N + \left(2\kappa^{\bullet}\tau + \kappa\tau^{\bullet}\right) B \right\rangle$$

$$= \kappa^2\tau\left(-3\kappa\kappa^{\bullet}\right) + \kappa^3\left(2\kappa^{\bullet}\tau + \kappa\tau^{\bullet}\right)$$

olduğundan

$$\left\langle \gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}, \gamma_T^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle = \kappa^3\left(\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau\right)$$

dur.

$$\kappa_T = \frac{\left\|\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}\right\|}{\left\|\gamma_T^{\bullet}\right\|^3} = \frac{\kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\kappa^3}$$

olduğundan

$$\kappa_T = \frac{\left\|\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}\right\|}{\left\|\gamma_T^{\bullet}\right\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\kappa}$$

dur.

$$\tau_T = \frac{\left\langle \gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}, \gamma_T^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle}{\left\|\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}\right\|^2} = \frac{\kappa^3\left(\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau\right)}{\left(\kappa^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)^2} = \frac{\kappa^3\left(\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau\right)}{\kappa^4\left(\kappa^2+\tau^2\right)}$$

olduğundan

$$\tau_T = \frac{\left\langle \gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}, \gamma_T^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle}{\left\|\gamma_T^{\bullet} \wedge \gamma_T^{\bullet\bullet}\right\|^2} = \frac{\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau}{\kappa\left(\kappa^2+\tau^2\right)}$$

dir.

$$\frac{\tau_T}{\kappa_T} = \frac{\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau}{\kappa\left(\kappa^2+\tau^2\right)} \cdot \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$$

olduğundan

$$\frac{\tau_T}{\kappa_T} = \frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$$

dir.

Bu eşitliğin sol tarafındaki fonksiyonun sabit olması sağ tarafındaki fonksiyonun sabit olmasına denk olduğundan teoremde belirtilen önerme doğrudur. □

Tanım 2.7 : γ bir I açık aralığında tanımlı, eğriliği ve burulması sıfır olmayan bir eğri olmak üzere her $t \in I$ için $\gamma_B(t) = B(t)$ eşitliği ile tanımlanan γ_B eğrisine γ eğrisinin *binormaller göstergesi* denir.

Binormaller göstergesi bütün noktaları birim küre üzerinde olduğundan küresel bir eğridir.

Teorem 2.8 : Burulması sıfır olmayan bir Frenet eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul binormaller göstergesinin silindirik helis olmasıdır (Kula ve Yaylı, 2005).

İspat : Burulması sıfır olmayan γ Frenet eğrisinin γ_B binormaller göstergesinin eğrilik ve burulması κ_B ve τ_B olsun.

$\gamma_B^{\bullet} = B^{\bullet} = -\tau N$ dir.

$$\gamma_B^{\bullet\bullet} = (-\tau)^{\bullet} N + (-\tau) N^{\bullet} =$$

$$= -\tau^{\bullet} N + (-\tau)(-\kappa T + \tau B)$$

olduğundan

$$\gamma_B^{\bullet\bullet} = \kappa\tau T - \tau^{\bullet} N - \tau^2 B$$

dir.

$$\gamma_B^{\bullet\bullet\bullet} = (\kappa\tau)^{\bullet} T + (\kappa\tau) T^{\bullet} + \left(-\tau^{\bullet}\right)^{\bullet} N + \left(-\tau^{\bullet}\right) N^{\bullet} + \left(-\tau^2\right)^{\bullet} B + \left(-\tau^2\right) B^{\bullet} =$$

$$= \left(\kappa^{\bullet}\tau + \kappa\tau^{\bullet}\right) T + (\kappa\tau)(\kappa N) + \left(-\tau^{\bullet\bullet}\right) N + \left(-\tau^{\bullet}\right)(-\kappa T + \tau B) + \left(-2\tau\tau^{\bullet}\right) B + \left(-\tau^2\right)(-\tau N) =$$

$$= \kappa^{\bullet}\tau T + \kappa\tau^{\bullet} T + \kappa^2\tau N - \tau^{\bullet\bullet} N + \kappa\tau^{\bullet} T - \tau\tau^{\bullet} B - 2\tau\tau^{\bullet} B + \tau^3 N$$

olduğundan

$$\gamma_B^{\bullet\bullet\bullet} = \left(\kappa^{\bullet}\tau + 2\kappa\tau^{\bullet}\right) T + \left(\kappa^2\tau - \tau^{\bullet\bullet} + \tau^3\right) N - 3\tau\tau^{\bullet} B$$

dir.

$$\gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} = (-\tau N) \wedge \left(\kappa\tau T - \tau^{\bullet} N - \tau^2 B\right)$$

$$\gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} = \tau^2 (\tau T + \kappa B)$$

dir.

$$\left\| \gamma_B^{\bullet} \right\| = |\tau| \ ,$$

$$\left\| \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} \right\| = \sqrt{\left(\tau^3\right)^2 + \left(\kappa\tau^2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\tau^6 + \tau^4\kappa^2} =$$

$$= \sqrt{\tau^4\left(\tau^2 + \kappa^2\right)}$$

olduğundan

$$\left\| \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} \right\| = \tau^2\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \quad \text{ve}$$

$$\left\langle \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet}, \gamma_B^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle = \left\langle \tau^2 (\tau T + \kappa B), \left(\kappa^{\bullet}\tau + 2\kappa\tau^{\bullet}\right) T + \left(\kappa^2\tau - \tau^{\bullet\bullet} + \tau^3\right) N - 3\tau\tau^{\bullet} B \right\rangle =$$

$$= \kappa^{\bullet}\tau^4 + 2\kappa\tau^3\tau^{\bullet} - 3\kappa\tau^3\tau^{\bullet}$$

olduğundan

$$\left\langle \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet}, \gamma_B^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle = -\tau^3\left(\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau\right)$$

dur.

$$\kappa_B = \frac{\left\| \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} \right\|}{\left\| \gamma_B^{\bullet} \right\|^3} = \frac{\tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\left| \tau \right|^3}$$

olduğundan

$$\kappa_B = \frac{\left\| \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} \right\|}{\left\| \gamma_B^{\bullet} \right\|^3} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}{\left| \tau \right|}$$

ve

$$\tau_B = \frac{\left\langle \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet}, \gamma_B^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle}{\left\| \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} \right\|^2} = \frac{-\tau^3 \left(\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau \right)}{\left(\tau^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \right)^2} =$$

$$= \frac{-\tau^3 \left(\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau \right)}{\tau^4 \left(\kappa^2 + \tau^2 \right)}$$

olduğundan

$$\tau_B = \frac{\left\langle \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet}, \gamma_B^{\bullet\bullet\bullet} \right\rangle}{\left\| \gamma_B^{\bullet} \wedge \gamma_B^{\bullet\bullet} \right\|^2} = -\frac{\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau}{\tau \left(\kappa^2 + \tau^2 \right)}$$

dir.

$$\frac{\tau_B}{\kappa_B} = -\frac{\kappa\tau^{\bullet} - \kappa^{\bullet}\tau}{\tau \left(\kappa^2 + \tau^2 \right)} \cdot \frac{\left| \tau \right|}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

olduğundan

$$\frac{\tau_B}{\kappa_B} = \mp \frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2 + \tau^2 \right)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)^{\bullet}$$

dir. □

3. ASAL DOĞRULTU EĞRİLERİ

Tanım 3.1 : γ ve $\overline{\gamma}$ Frenet eğrileri için $\overline{T} = N$ ise $\overline{\gamma}$ eğrisine γ eğrisinin *asal doğrultu eğrisi* denir.

γ eğrisine de $\overline{\gamma}$ eğrisinin *asal donör eğrisi* denir (Choi ve Kim, 2012).

Teorem 3.2 : $\overline{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin asal doğrultu eğrisi ise veya γ eğrisi $\overline{\gamma}$ eğrisinin asal donör eğrisi ise

a) $\overline{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$

b) $\overline{\tau} = \dfrac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$

c) $\dfrac{\overline{\tau}}{\overline{\kappa}} = \dfrac{\kappa^2}{\left(\kappa^2 + \tau^2\right)^{3/2}}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$

d) $T = -\dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\overline{N} + \dfrac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\overline{B}$

e) $T = -\cos\int \overline{\tau}dt.\overline{N} + \sin\int \overline{\tau}dt.\overline{B}$

dir (Choi ve Kim, 2012).

İspat : $\overline{T} = N$ olsun.

$$T = u\overline{T} + v\overline{N} + w\overline{B} \qquad \textbf{(3.1)}$$

olacak şekilde u , v ve w fonksiyonları vardır.

T birim vektör alanı olduğundan

$$u^2+v^2+w^2=1 \tag{3.2}$$

ve

$$uu^{\bullet}+vv^{\bullet}+ww^{\bullet}=0 \tag{3.3}$$

dır.

$$\kappa\overline{T}=\kappa N=T^{\bullet}=$$

$$=u^{\bullet}\overline{T}+u\overline{\kappa}\,\overline{N}+v^{\bullet}\overline{N}+v\left(-\overline{\kappa}\,\overline{T}+\overline{\tau}\,\overline{B}\right)+w^{\bullet}\overline{B}-w\overline{\tau}\,\overline{N}=$$

$$=(u^{\bullet}-\overline{\kappa}v)\overline{T}+(\overline{\kappa}u+v^{\bullet}-\overline{\tau}w)\overline{N}+(w^{\bullet}+\overline{\tau}v)\overline{B}$$

olduğundan

$$u^{\bullet}-\overline{\kappa}v=\kappa\neq 0\ ,\ \overline{\kappa}u+v^{\bullet}-\overline{\tau}w=0\ \text{ ve }\ w^{\bullet}+\overline{\tau}v=0 \tag{3.4}$$

dır.

$$u(u^{\bullet}-\overline{\kappa}v)=uu^{\bullet}-\overline{\kappa}uv=$$

$$=-vv^{\bullet}-ww^{\bullet}-\overline{\kappa}uv+\overline{\tau}vw-\overline{\tau}vw=$$

$$=-v(\overline{\kappa}u+v^{\bullet}-\overline{\tau}w)-w(w^{\bullet}+\overline{\tau}v)=0$$

ve

$$u^{\bullet}-\overline{\kappa}v\neq 0$$

olduğundan

$u=0$ dır.

Bu sonuç (3.1) , (3.2) , (3.3) ve (3.4) eşitliklerinde kullanılırsa

$$T=v\overline{N}+w\overline{B} \tag{3.5}$$

$$v^2+w^2=1 \tag{3.6}$$

$$vv^{\bullet}+ww^{\bullet}=0$$

$$\kappa=-\overline{\kappa}v \tag{3.7}$$

$$v^{\bullet} = \overline{\tau} w \ , \ w^{\bullet} = -\overline{\tau} v \tag{3.8}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$B = T \wedge N = \left(v\overline{N} \wedge w\overline{B}\right) \wedge \overline{T} = w\overline{N} - v\overline{B}$$

dir.

$$-\tau N = B^{\bullet} = w^{\bullet}\overline{N} - \overline{\kappa} w\overline{T} + \overline{\tau} w\overline{B} - v^{\bullet}\overline{B} + \overline{\tau} v\overline{N} =$$

$$= w^{\bullet}\overline{N} - \overline{\kappa} w\overline{T} + v^{\bullet}\overline{B} - v^{\bullet}\overline{B} - w^{\bullet}\overline{N} =$$

$$= -\overline{\kappa} w\overline{T} = -\overline{\kappa} wN$$

olduğundan

$$\tau = \overline{\kappa} w \tag{3.9}$$

olur.

$\kappa = -\overline{\kappa} v, \ \tau = \overline{\kappa} w$ ve $v^2 + w^2 = 1$

olduğundan

$$\kappa^2 + \tau^2 = \overline{\kappa}^2 \left(v^2 + w^2\right) = \overline{\kappa}^2$$

ve

$$\overline{\kappa} = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \tag{3.10}$$

dir.

$$\kappa^2 = \overline{\kappa}^2 v^2$$

ve

$$v^2 = \frac{\kappa^2}{\overline{\kappa}^2} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}$$

dir.

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet} = \left(-\frac{w}{v}\right)^{\bullet} = -\frac{w^{\bullet} v - w v^{\bullet}}{v^2} = -\frac{-\overline{\tau} v^2 - \overline{\tau} w^2}{v^2} = \frac{\overline{\tau}\left(v^2 + w^2\right)}{v^2} = \frac{\overline{\tau}}{v^2}$$

olduğundan

$$\bar{\tau} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$$

dir.

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$$

dir.

$$v = -\frac{\kappa}{\bar{\kappa}} = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}, \quad w = \frac{\tau}{\bar{\kappa}} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \text{ ve}$$

$T = v\bar{N} + w\bar{B}$ olduğundan

$$T = -\frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}\bar{N} + \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}\bar{B}$$

dir.

$$\bar{\tau} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2+\tau^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet} = \frac{1}{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet} = \left(\arctan\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$$

olduğundan

$$\arctan\frac{\tau}{\kappa} = \int \bar{\tau}\,dt$$

ve

$$\frac{\tau}{\kappa} = \tan\int \bar{\tau}\,dt$$

dir.

$$v = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\int\bar{\tau}\,dt}} = -\cos\int\bar{\tau}\,dt$$

ve

$$w=\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}=\frac{\tau}{\kappa}\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}=\tan\int\bar{\tau}\,dt.\cos\int\bar{\tau}\,dt=\sin\int\bar{\tau}\,dt$$

olduğundan

$$T=-\cos\left(\int\bar{\tau}\,dt\right)\bar{N}+\sin\left(\int\bar{\tau}\,dt\right)\bar{B}$$

dır. □

Teorem 3.3 : $\bar{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin asal doğrultu eğrisi ise veya denk olarak γ eğrisi $\bar{\gamma}$ eğrisinin asal donör eğrisi ise, γ eğrisinin silindirik helis olması için gerek ve yeter koşul $\bar{\gamma}$ eğrisinin düzlem eğri olmasıdır (Choi ve Kim, 2012)..

İspat : Teorem (3.2), (b) de belirtilen eşitliğe göre $\bar{\tau}$ nin sıfır fonksiyonu olması $\frac{\tau}{\kappa}$ nın sabit olmasına denk olduğundan teoremde belirtilen önerme doğrudur. □

Teorem 3.4 : $\bar{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin asal doğrultu eğrisi ise veya denk olarak γ eğrisi $\bar{\gamma}$ eğrisinin asal donör eğrisi ise, γ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter koşul $\bar{\gamma}$ eğrisinin silindirik helis olmasıdır (Choi ve Kim, 2012)..

İspat : Teorem (3.2), (c) de belirtilen eşitliğe göre $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}}$ nın sabit fonksiyon olması $\frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet}$ fonksiyonunun sabit fonksiyon olmasına denk olduğundan teoremde belirtilen önerme doğrudur. □

4. UYGULAMALAR

4.1. Bir Düzlem Eğrinin Asal Donör Eğrisi ve Silindirik Helisler

Bu bölümde Teorem 3.2 de belirtilen bilgiler kullanılarak asal doğrultu eğrisi belirli bir düzlem eğri olan birim hızlı silindirik helisler incelenecektir.

Sonuç 4.1 : $t_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ ve $A = \sqrt{1+c^2}$ olmak üzere

eğriliği κ ve burulması $\tau = c\kappa$ olan bir birim hızlı silindirik helis

$$\gamma(t) = \frac{1}{A}\left(\int_{t_0}^{t} \sin\left(A\int_{t_0}^{\sigma} \kappa(r)\,dr \right) d\sigma \ , \ -\int_{t_0}^{t} \cos\left(A\int_{t_0}^{\sigma} \kappa(r)\,dr \right) d\sigma \ , \ \mathrm{c}(t-t_0) \right) \qquad \textbf{(4.1)}$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

İspat : γ eğriliği κ ve burulması $\tau = c\kappa$ olan bir birim hızlı silindirik helis olsun.

$$\overline{\gamma}(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \cos\left(A\int_{t_0}^{\sigma} \kappa(r)\,dr \right) d\sigma \ , \ \int_{t_0}^{t} \sin\left(A\int_{t_0}^{t} \kappa(r)\,dr \right) d\sigma \ , \ 0 \right)$$

olsun.

$\overline{\gamma}$ bütün noktaları $z = 0$ düzleminde bulunan bir düzlem eğridir.

$$\overline{\gamma}^{\bullet}(t) = \left(\cos\left(A\int_{t_0}^{t} \kappa(r)\,dr \right) , \ \sin\left(A\int_{t_0}^{t} \kappa(r)\,dr \right) , 0 \right)$$

ve

$$\left\|\overline{\gamma}^{\bullet}(t)\right\| = 1$$

olduğundan

$\overline{\gamma}$ birim hızlı bir eğridir.

$$\overline{T}(t) = \overline{\gamma}^{\bullet}(t)$$

ve

$$\overline{T}^{\bullet}(t) = \left(-A\kappa(t)\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr \right), A\kappa(t)\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr \right), 0 \right)$$

olduğundan

$$\overline{\kappa}(t) = \left\|\overline{T}^{\bullet}(t)\right\| = A\kappa(t)$$

dir.

$$\overline{N}(t) = \frac{1}{\overline{\kappa}(t)}\overline{T}^{\bullet}(t) = \left(-\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr \right), \cos\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr \right), 0 \right)$$

ve

$$\overline{B}(t) = \overline{T}(t) \wedge \overline{N}(t) = (0,0,1)$$

dir.

$$T = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{N} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{B}$$

olsun.

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1}{A}$$

ve

$$\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}=\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\frac{c}{A}$$

olduğundan

$$T(t)=\frac{1}{A}\left(-\bar{N}(t)+c\bar{B}(t)\right)=$$

$$=\frac{1}{A}\left(\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right)\text{, -}\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right)\text{, c}\right)$$

dir.

$$\gamma(t)=\int_{t_0}^{t}T(\sigma)d\sigma$$

olsun.

$$\gamma(t)=\frac{1}{A}\left(\int_{t_0}^{t}\sin\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\kappa(r)dr\right)d\sigma\ ,\ -\int_{t_0}^{t}\cos\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\kappa(r)dr\right)d\sigma\ ,\ \text{c}(t-t_0)\right)$$

dır.

$$\gamma^{\bullet}(t)=T(t)$$

ve

$$\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|=\left\|T(t)\right\|=1$$

dir.

$$T^{\bullet}(t)=\frac{1}{A}\left(A\kappa(t)\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), A\kappa(t)\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), 0\right)$$

ve

$$\left\|T^{\bullet}(t)\right\|=\kappa(t)$$

dir.

$$N(t)=\left(\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), \sin\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), 0\right)$$

dır.

$$\overline{T}(t)=N(t)$$

olduğundan

$\overline{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin asal doğrultu eğrisidir.

$$B(t)=T(t)\wedge N(t)=$$

$$=\frac{1}{A}\left(-c\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), \text{c} \cos\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), 1\right)$$

ve

$$B^{\bullet}(t)=\frac{1}{A}\left(-cA\kappa(t)\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), \text{-}cA\kappa(t)\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\kappa(r)dr\right), 0\right)=$$

$$=-c\kappa(t)N(t)$$

olduğundan

$\tau(t)=c\kappa(t)$ dir. □

Sonuç 4.2 : g I da C^1 sınıfından pozitif reel değerli bir fonksiyon,

$t_0\in I$, a , $b\in\mathbb{R}$, $a>0$ ve $a^2+b^2=1$ olmak üzere

eğriliği $\kappa=ag$ ve burulması $\tau=bg$ olan bir birim hızlı silindirik helis

$$\gamma(t)=\left(a\int_{t_0}^{t}\sin\left(\int_{t_0}^{\sigma}g(r)dr\right)d\sigma , -a\int_{t_0}^{t}\cos\left(\int_{t_0}^{\sigma}g(r)dr\right)d\sigma , \text{b}(t-t_0)\right) \qquad \textbf{(4.2)}$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

İspat : γ eğriliği $\kappa = ag$ ve burulması $\tau = bg$ olan bir birim hızlı silindirik helis olsun.

$$\bar{\gamma}(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \cos\left(\int_{t_0}^{\sigma} g(r)\,dr \right) d\sigma \, , \, \int_{t_0}^{t} \sin\left(\int_{t_0}^{\sigma} g(r)\,dr \right) d\sigma \, , \, 0 \right)$$

olsun.

$\bar{\gamma}$ bütün noktaları $z = 0$ düzleminde bulunan bir düzlem eğridir.

$$\bar{\gamma}^{\bullet}(t) = \left(\cos\left(\int_{t_0}^{t} g(r)\,dr \right) , \, \sin\left(\int_{t_0}^{t} g(r)\,dr \right) , 0 \right)$$

ve

$$\left\| \bar{\gamma}^{\bullet}(t) \right\| = 1$$

olduğundan

$\bar{\gamma}$ birim hızlı bir eğridir.

$$\bar{T}(t) = \bar{\gamma}^{\bullet}(t)$$

ve

$$\bar{T}^{\bullet}(t) = \left(-g(t)\sin\left(\int_{t_0}^{t} g(r)\,dr \right) , \, \mathrm{g}(t)\cos\left(\int_{t_0}^{t} g(r)\,dr \right) , 0 \right)$$

olduğundan

$$\bar{\kappa}(t) = \left\| \bar{T}^{\bullet}(t) \right\| = g(t)$$

dir.

$$\bar{N}(t) = \frac{1}{\bar{\kappa}(t)} \bar{T}^{\bullet}(t) = \left(-\sin\left(\int_{t_0}^{t} g(r)\,dr \right) , \cos\left(\int_{t_0}^{t} g(r)\,dr \right) , 0 \right)$$

ve

$$\overline{B}(t)=\overline{T}(t)\wedge\overline{N}(t)=(0,0,1)$$

dir.

$$T=-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{N}+\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{B}$$

olsun.

$$\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}=\frac{ag}{\sqrt{a^2+b^2}\,g}=a$$

ve

$$\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}=\frac{bg}{\sqrt{a^2+b^2}\,g}=b$$

olduğundan

$$T(t)=-a\,\overline{N}(t)+b\,\overline{B}(t)=$$

$$=\left(a\sin\left(\int_{t_0}^{t}g(r)dr\right),\ \text{-}a\cos\left(\int_{t_0}^{t}g(r)dr\right),\ \mathrm{b}\right)$$

dir.

$$\gamma(t)=\int_{t_0}^{t}T(\sigma)d\sigma$$

olsun.

$$\gamma(t)=\left(a\int_{t_0}^{t}\sin\left(\int_{t_0}^{\sigma}g(r)dr\right)d\sigma\ ,\ -a\int_{t_0}^{t}\cos\left(\int_{t_0}^{\sigma}g(r)dr\right)d\sigma\ ,\ \mathrm{b}(t-t_0)\right)$$

dır.

$$\gamma^{\bullet}(t)=T(t)$$

ve

$$\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|=\left\|T(t)\right\|=1$$

dir.

$$T^{\bullet}(t)=\left(ag(t)\cos\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,\ ag(t)\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,\ 0\ \right)$$

ve

$$\kappa(t)=\left\|T^{\bullet}(t)\right\|=ag(t)$$

dir.

$$N(t)=\left(\cos\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,0\right)$$

dır.

$$\overline{T}(t)=N(t)$$

olduğundan

$\overline{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinin asal doğrultu eğrisidir.

$$B(t)=T(t)\wedge N(t)=$$

$$=\left(-b\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,\mathrm{b}\cos\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,\mathrm{a}\right)$$

ve

$$B^{\bullet}(t)=\left(-bg(t)\cos\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,\ -bg(t)\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t}g(r)dr\right)\ ,\ 0\right)=$$

$$=-b\ g(t)\ N(t)$$

olduğundan

$$\tau(t)=b\ g(t)$$

dir. □

Teorem 4.3 : Eğriliği κ ve burulması $\tau = c\kappa \neq 0$ olan bir birim hızlı silindirik helisin küresel eğri olması için gerek ve yeter koşul $\kappa_0 = \kappa(t_0)$ ve $d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\kappa(t) = \frac{\kappa_0}{\sqrt{-c^2\kappa_0^2 t^2 - 2d\kappa_0^2 t + 1}} \tag{4.3}$$

olmasıdır.

İspat : Eğriliği κ ve burulması $\tau = c\kappa \neq 0$ olan birim hızlı γ silindirik helisi küresel bir eğri olsun.

Teorem (1.2) ye göre

$$\left(\frac{\kappa^{\bullet}}{\tau\kappa^2}\right)^{\bullet} = \frac{\tau}{\kappa} = c$$

veya denk olarak

$$\left(\frac{\kappa^{\bullet}}{\kappa^3}\right)^{\bullet} = c^2$$

dir.

$$\left(-\frac{1}{2\kappa^2}\right)^{\bullet\bullet} = \left(\frac{\kappa^{\bullet}}{\kappa^3}\right)^{\bullet} = c^2$$

olduğundan

$$-\frac{1}{2\kappa(t)^2} = \frac{1}{2}c^2t^2 + dt + e$$

dir.

$$-\frac{1}{2\kappa_0^2} = e$$

olduğundan

$$-\frac{1}{2\kappa(t)^2}=\frac{1}{2}c^2t^2+dt-\frac{1}{2\kappa_0^2}$$

dir.

Bu eşitlik uygun şekilde düzenlenirse (4.3) eşitliği elde edilir.

Tersine (4.3) eşitliği doğru olsun.

$$\kappa^\bullet(t)=\kappa(t)^3\left(c^2t+d\right)$$

olduğundan

$$\left(\frac{\kappa^\bullet(t)}{\kappa(t)^3}\right)^\bullet=c^2$$

veya denk olarak

$$\left(\frac{\kappa^\bullet}{\tau\kappa^2}\right)^\bullet=c=\frac{\tau}{\kappa}$$

dır.

Sonuç 4.4 : Eğriliği κ ve burulması $\tau=c\kappa\neq 0$ olan birim hızlı küresel silindirik helis

$d\in\mathbb{R}$, $\kappa_0=\kappa(t_0)$,

$$\kappa(t)=\frac{\kappa_0}{\sqrt{-c^2\kappa_0^2t^2-2d\kappa_0^2t+1}}$$

ve

$$\varphi(t)=\sqrt{1+c^2}\int_{t_0}^{t}\kappa(r)\,dr$$

olmak üzere

$$\gamma(t)=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\left(\int_{t_0}^{t}\sin\varphi(\sigma)\,d\sigma,\ -\int_{t_0}^{t}\cos\varphi(\sigma)\,d\sigma,\ c(t-t_0)\right)\qquad\textbf{(4.4)}$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

Örnek : Sonuç 4.4. te $c=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $d=0$, $t_0=0$ ve $\kappa_0=\kappa(t_0)=1$ olsun.

$$\kappa(t)=\frac{\kappa_0}{\sqrt{-c^2\kappa_0^2t^2-2d\kappa_0^2t+1}}$$

olduğundan

$$\kappa(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

$$\varphi(t)=\sqrt{1+c^2}\int_0^t\kappa(r)\,dr$$

olduğundan

$$\varphi(t)=2\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\varphi(t)=\frac{2}{3}t\sqrt{3-t^2}$$

$$\cos\varphi(t)=1-\frac{2}{3}t^2$$

$$\int_0^t\sin\varphi(\sigma)\,d\sigma=-\frac{2}{9}\left(3-t^2\right)^{3/2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\int_0^t\cos\varphi(\sigma)\,d\sigma=t-\frac{2}{9}t^3$$

$$\gamma(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{2}{9}\left(3-t^2\right)^{3/2}+\frac{2}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{9}t^3-t,\ \frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$$

dir. □

4.2. Bir Silindirik Helisin Asal Donör Eğrisi ve Slant Helisler

Bu bölümde Teorem 3.2 de belirtilen bilgiler kullanılarak asal doğrultu eğrisi belirli bir silindirik helis olan birim hızlı slant helisler incelenecektir.

Sonuç 4.5 : $t_0 \in I$, $c \in \mathbb{R}$ ve $A = \sqrt{1+c^2}$ olmak üzere

eğrilik ve burulması $\omega = \dfrac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\dfrac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet} = c$ eşitliğini sağlayan bir birim hızlı slant helis

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

$$\bar{N}(t) = \left(\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)\,dr\right),\ \sin\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)\,dr\right),\ 0\right)$$

$$\bar{B}(t) = \left(-\frac{c}{A}\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)\,dr\right),\ \frac{\mathrm{c}}{A}\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)\,dr\right),\ \frac{1}{A}\right)$$

$$T = -\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\bar{N} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\bar{B}$$

olmak üzere

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} T(\sigma)\,d\sigma$$

eşitliği ile veya

$$\gamma(t)=\left(\int_{t_0}^{t}\left(\frac{-\kappa(\sigma)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(\sigma)}\cdot\cos\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(r)dr\right)-\frac{c\tau(\sigma)}{A\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(\sigma)}\cdot\sin\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(r)dr\right)\right)d\sigma\ ,\right.$$

$$,\int_{t_0}^{t}\left(\frac{-\kappa(\sigma)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(\sigma)}\cdot\sin\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(r)dr\right)+\frac{c\tau(\sigma)}{A\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(\sigma)}\cdot\cos\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(r)dr\right)\right)d\sigma\ ,$$

$$\left.,\frac{1}{A}\int_{t_0}^{t}\frac{\tau(\sigma)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}(\sigma)}d\sigma\right)$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

İspat : $\bar{\kappa}=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$ ve $\bar{\tau}=c\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$ olsun.

$\bar{\tau}=c\bar{\kappa}$ olduğundan Sonuç 4.1 e göre

$$\bar{\gamma}(t)=\frac{1}{A}\left(\int_{t_0}^{t}\sin\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\bar{\kappa}(r)dr\right)d\sigma\ ,\ -\int_{t_0}^{t}\cos\left(A\int_{t_0}^{\sigma}\bar{\kappa}(r)dr\right)d\sigma\ ,\ \mathrm{c}(t-t_0)\right)$$

bir birim hızlı silindirik helistir.

$$\bar{T}(t)=\frac{1}{A}\left(\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)dr\right),\ \text{-}\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)dr\right),\ \mathrm{c}\right)$$

$$\bar{N}(t)=\left(\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)dr\right),\ \sin\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)dr\right),\ 0\right)$$

$$\bar{B}(t)=\left(-\frac{c}{A}\sin\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)dr\right),\ \frac{\mathrm{c}}{A}\cos\left(A\int_{t_0}^{t}\bar{\kappa}(r)dr\right),\ \frac{1}{A}\right)$$

dır.

$$T=-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\bar{N}+\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\bar{B}$$

ve

$$\gamma(t)=\int_{t_0}^{t} T(\sigma)\,d\sigma$$

olsun.

$$\gamma^{\bullet}(t)=T(t) \quad \text{ve} \quad \left\|\overline{\gamma}^{\bullet}\right\|=\|T\|=1$$

olduğundan γ birim hızlı bir eğridir.

$$\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet}=-\omega\tau=-c\tau \ ,$$

$$\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet}=\omega\kappa=c\kappa$$

$$\overline{\kappa}=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

ve

$$\overline{\tau}=c\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

olduğundan

$$T^{\bullet}=-\left(\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet}\overline{N}-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{N}^{\bullet}+\left(\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\right)^{\bullet}\overline{B}+\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{B}^{\bullet}=$$

$$=c\tau\overline{N}-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\overline{T}+c\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\overline{B}\right)+c\kappa\overline{B}+\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-c\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\right)\overline{N}=$$

$$=c\tau\overline{N}+\kappa\overline{T}-c\kappa\overline{B}+c\kappa\overline{B}-c\tau\overline{N}=\kappa\overline{T}$$

dir.

$$\left\|T^{\bullet}\right\|=\left\|\kappa\overline{T}\right\|=\kappa$$

dır.

$$\overline{T}=\frac{1}{\kappa}T^{\bullet}=N$$

olduğundan

$\overline{\gamma}$ eğrisi γ nın asal doğrultu eğrisidir.

$$B = T \wedge N = \left(-\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{N} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{B} \right) \wedge \overline{T} =$$

$$= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{N} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\overline{B}$$

dir.

$$B^{\bullet} = c\kappa\overline{N} + \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\overline{T} + c\sqrt{\kappa^2+\tau^2}\,\overline{B} \right) - c\tau\overline{B} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}\left(-c\sqrt{\kappa^2+\tau^2} \right)\overline{N} =$$
$$= c\kappa\overline{N} - \tau\overline{T} + c\tau\overline{B} - c\tau\overline{B} - c\kappa\overline{N} = -\tau\overline{T} = -\tau N$$

dir.

$$-\left\langle NB^{\bullet} \right\rangle = -\left\langle N, -\tau N \right\rangle = \tau$$

dır.

γ eğriliği κ ve burulması τ olan birim hızlı slant helistir. □

Sonuç 4.6 : g I da C^1 sınıfından pozitif reel değerli bir fonksiyon,

$t_0 \in I$, $a > 0$, $a^2 + b^2 = 1$ ve $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(r)\,dr$ olmak üzere eğriliği

$\kappa = ag\cos(bG)$ ve burulması $\tau = ag\sin(bG)$ olan bir birim hızlı slant helis

$$\gamma(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \left(-\cos(bG(\sigma)) \cdot \cos G(\sigma) - b\sin(bG(\sigma))\sin G(\sigma) \right) d\sigma \right. ,$$
$$, \int_{t_0}^{t} \left(-\cos(bG(\sigma)) \cdot \sin G(\sigma) + b\sin(bG(\sigma))\cos G(\sigma) \right) d\sigma ,$$
$$\left. , a\int_{t_0}^{t} \sin(bG(\sigma))\,d\sigma \right)$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

İspat : Sonuç 4.2. ye göre

$$\bar{\gamma}(t)=\left(a\int_{t_0}^{t}\sin G(\sigma)\,d\sigma\ ,\ -a\int_{t_0}^{t}\cos G(\sigma)\,d\sigma\ ,\ \mathrm{b}(t-t_0)\right)$$

eğriliği $\bar{\kappa}=ag$ ve burulması $\bar{\tau}=bg$ olan bir birim hızlı silindirik helistir.

$$\bar{T}(t)=\left(a\sin G(t)\ ,\ -a\cos G(t)\ ,\ b\right)$$

$$\bar{N}(t)=\left(\cos G(t)\ ,\ \sin G(t)\ ,\ 0\right)$$

$$\bar{B}(t)=\left(-b\sin G(t)\ ,\ \mathrm{b}\cos G(t)\ ,\ a\right)$$

dır.

$$T(t)=-\cos\left(bG(t)\right)\bar{N}(t)+\sin\left(bG(t)\right)\bar{B}(t)$$

ve

$$\gamma(t)=\int_{t_0}^{t}T(\sigma)\,d\sigma$$

olsun.

$$\gamma(t)=\left(\int_{t_0}^{t}\left(-\cos\left(bG(\sigma)\right)\cdot\cos G(\sigma)-b\sin\left(bG(\sigma)\right)\sin G(\sigma)\right)d\sigma\ ,\right.$$
$$,\ \int_{t_0}^{t}\left(-\cos\left(bG(\sigma)\right)\cdot\sin G(\sigma)+b\sin\left(bG(\sigma)\right)\cos G(\sigma)\right)d\sigma\ ,$$
$$\left.,\ a\int_{t_0}^{t}\sin\left(bG(\sigma)\right)d\sigma\right)$$

dir.

$\gamma^{\bullet}(t)=T(t)$ ve $\left\|\gamma^{\bullet}(t)\right\|=\left\|T(t)\right\|=1$

olduğundan

γ birim hızlı bir eğridir.

$G^{\bullet}(t)=g(t)$ ve $G^{\bullet}=g$ dir.

$$T=-\cos(bG)\overline{N}+\sin(bG)\overline{B}$$

dir.

$$T^{\bullet}=bg\sin(bG)\overline{N}-\cos(bG)\left(-ag\overline{T}+bg\overline{B}\right)+bg\cos(bG)\overline{B}-\sin(bG).bg\overline{N}=$$

$$T^{\bullet}=ag\cos(bG)\overline{T}$$

olduğundan

$$\kappa=\left\|T^{\bullet}\right\|=ag\cos(bG)$$

dir.

$$N=\frac{1}{\kappa}T^{\bullet}=\overline{T}$$

olduğundan

γ , $\overline{\gamma}$ nin asal donör eğrisidir.

$$B=T\wedge N=\left(-\cos(bG)\overline{N}+\sin(bG)\overline{B}\right)\wedge\overline{T}=$$

$$B=\sin(bG)\overline{N}+\cos(bG)\overline{B}$$

dir.

$$-\tau N=B^{\bullet}=bg\cos(bG)\overline{N}+\sin(bG)\left(-ag\overline{T}+bg\overline{B}\right)-bg\sin(bG)\overline{B}-\cos(bG).bg\overline{N}=$$

$$=-ag\sin(bG)\overline{T}=$$

$$=-ag\sin(bG)N$$

olduğundan

$$\tau=ag\sin(bG)$$

dir.

$$\sqrt{\kappa^2+\tau^2}=ag \quad \text{ve} \quad \frac{\tau}{\kappa}=\tan(bG)$$

dir.

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet} = bg\left(1+\tan^2\left(bG\right)\right) = bg\left(1+\frac{\tau^2}{\kappa^2}\right) = bg\,\frac{\kappa^2+\tau^2}{\kappa^2}\,\frac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{ag}$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet} = \frac{b}{a}\,\frac{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}{\kappa^2}$$

olduğundan

$$\omega = \frac{\kappa^2}{\left(\kappa^2+\tau^2\right)^{3/2}}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{\bullet} = \frac{b}{a}$$

dır.

ω sabit olduğundan γ bir slant helistir. □

5. SONUÇ

Bu çalışmada, bir Frenet eğrisinin asal doğrultu eğrisi ve asal donör eğrisi kavramları tanımlanmıştır. Bir düzlem eğrinin asal donör eğrisi olarak bir silindirik helisin parametrik gösterimleri elde edilmiştir. Bir silindirik helisin asal donör eğrisi olarak bir slant helisin parametrik gösterimleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada verilen yöntemler ile eğrilik ve burulması verilen bir silindirik helisin parametrik gösterimleri bir düzlem eğri kullanılarak bulunmuştur.Yine eğrilik ve burulması verilen bir slant helisin parametrik gösterimleri bir silindirik helis kullanılarak bulunmuştur

6. KAYNAKLAR

Ali A. T., (2011) , *Position Vectors of General Helices in Euclidean Space E^3*, Bulletin of Mathematical Analysis and Application, Vol 3, 2, 198-205

Ali A. T., (2009) , *Position Vectors of Slant Helices in Euclidean Space E^3*, arXiv:0907.0750v1 [math. D.G]

Choi J. H. and Kim Y. H., (2012) ,*Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications*, Published by Elsevier, Applied Mathematics and Computation, 218, 9116-9124

Izumiya S.,Takeuchi N., (2011), *Generic Properties of Helices and Bertrand Curves*, J.Geometry, 74, 97 - 102

Izumiya S.,Takeuchi N., (2004), *New Special Curves and Developable Surfaces*, Turk. J. Math. 28 , 531–537.

Kula L., Ekmekci N., Yayli Y., Ilarslan K.,(2009), *Characterizations of Slant Helices in Euclidean 3-Space*, Truk. J. Math. 33 , 1 – 13.

Kula L., Yaylı Y., (2005), *On Slant Helix and Its Spherical Indicatrix*, Appl. Math. Com., 169, 600 - 607

Kühnel W, (2002), *Differential Geometry, Curves - Surfaces - Manifolds*, American Mathematical Society

Millman W, Parker G. D., (2007), *Elements of Differential Geometry*, Prentice Hall, Korea

Monterde J, (2007), *Curves with Constant Curvature Ratios*, Bull. Maxican Math. Soc., 13, 177 - 186

O'Neill B, (2006), *Elementary Differantial Geometry*, reivsed second edition, Academy Press

Struik D. J. , (1988), *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New York

Yılmaz S., Özyılmaz E., Turgut M., (2010), *New Spherical Indicatrices and Their Characterizations*, An. St.Univ. Ovidius Constanta, 18 (2) 337-354

7. ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimi ve Ortaöğrenimini İstanbul'da tamamladı. Lisans eğitimine 2008 yılında Haliç Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başlayarak 2012 yılında başarı ile tamamladı. 2013 yılında Haliç Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.