T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL KOŞULLU NEUMANN TİPİ ELİPTİK TERS PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aysel ÇAY

TEMMUZ 2018
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

İNTEGRAL KOŞULLU NEUMANN TİPİ ELİPTİK TERS PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aysel ÇAY

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
"Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı"
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09.07.2018
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 26.07.2018

TEMMUZ 2018

KABUL ve ONAY

Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV danışmanlığında **Aysel ÇAY** tarafından hazırlanan **"İNTEGRAL KOŞULLU NEUMANN TİPİ ELİPTİK TERS PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI"** isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Mühendisliği** Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak Oy Birliği / Oy Çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan (Danışman) :...
Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

Üye :...
Dr. Öğretim Üyesi Hakan AVCI

Üye :...
Dr. Öğretim Üyesi Özlem DEFTERLİ

ONAY
Bu tez 31/07/18 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ferkan SİPAHİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum "**İNTEGRAL KOŞULLU NEUMANN TİPİ ELİPTİK TERS PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI**" isimli tez çalışmasında; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 09/07/2018

Aysel ÇAY

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRAL KOŞULLU NEUMANN TİPİ ELİPTİK TERS PROBLEMİN İYİ TANIMLILIĞI

Aysel ÇAY

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV
2018, 68 sayfa

Bu çalışmada, herhangi bir Hilbert uzayında eliptik diferensiyel denklemler için integral koşullu Neumann tipi ters problemi ele alınacaktır. Problemin çözümü için kararlılık ve koersif kestirimleri elde edilecektir. Üst belirli problemin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci mertebeden sonlu fark şeması kurulacaktır. Fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimleri oluşturulacaktır. Sonra, çok boyutlu eliptik kısmi diferansiyel denklem için integral ve Dirichlet koşullu Neumann tipi üst belirli problemin çözümlerinin kararlılığı incelenecektir. Bu problem için hem birinci mertebeden fark şeması kurulacaktır hem de kararlılık analizi yapılacaktır.

İki boyutlu eliptik denklem için integral koşullu Neumann tipi üst belirli probleminin çözümünü bulmak için algoritma ve MATLAB kodları verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu fark şeması, İyi tanımlılık, Kararlılık, Sınır değer problemi, Eliptik ters problem, Üst belirlilik, Yaklaşık çözüm, İntegral koşul

ABSTRACT
MS THESIS

WELL-POSEDNESS OF NEUMANN TYPE ELLIPTIC INVERSE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION

Aysel ÇAY

Gumushane University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV
2018, 68 pages

In this thesis, the stability estimates for the solution of the Neumann type inverse problem with integral condition for elliptic differential equations in the an arbitrary Hilbert space have been investigated. Stability and coercive stability estimates will be obtained for solution of this problem. The first order of accuracy difference scheme for approximate solution of overdetermined elliptic problem will be constructed. Stability estimates for solution of difference scheme are obtained. Later, stability analysis for solution of Neumann type overdetermined problem with integral and Dirichlet conditions for multi-dimensional elliptic partial differential equation will be done. The first order of accuracy difference scheme for this problem will be constructed and stability analysis will be done.

Algorithm for numerical solution of Neumann type overdetermined problem with integral for two-dimensional elliptic partial differential equation and MATLAB codes will be described.

Key Words: Finite difference scheme, Well-posedness, Stability, Boundary Value Problem, Elliptic inverse problem, Overdetermination, Approximate solution, Integral condition

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez çalışmalarımın her aşamasında bana ışık tutarak yön gösterici olan, yardımlarını ve önerilerini esirgemeyen, bilgilerinden ve tecrübelerinden yararlandığım Saygıdeğer Hocam Prof. Dr. Charyyar ASHERYRALYYEV'e, yüksek lisans öğrenimim boyunca üzerimde emeği olan Matematik Mühendisliği bölümündeki tüm hocalarıma sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında beni destekleyen, sonsuz sevgileriyle yanımda olan, bugüne ulaşmamı sağlayan ve bana her daim inanıp güvenen bu hayattaki en büyük şansım olan başta annem Zaide ÇAY ve babam Ahmet ÇAY olmak üzere canım aileme teşekkür ederim.

Aysel ÇAY

Gümüşhane, 2018

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

H	: Hilbert uzayı
A	: Öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör
$D(A)$	: A operatörünün tanım bölgesi
$C(H)$	: $C(H)=C([0,T],H)$ uzayı $[0,T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan tüm sürekli fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı
$C_{0T}^{a,a}(H)$	: $C_{0T}^{a,a}(H)=C_{0T}^{a,a}([0,T],H)$ uzayı $(0<\alpha<1)$, $[0,T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan bütün düzgün fonksiyonların oluşturduğu Banach uzayı
$C([0,T],D(A))$	: $[0,T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri A operatörünün tanım bölgesinde olan tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$C^2([0,T],H)$	: $[0,T]$ aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri H Hilbert uzayında olan tüm ikinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi
$\Vert u\Vert_H$	: u 'nun H 'daki normu
Ω	: $\{(x_1,x_2,...x_n)\in R_n, 0<x_i<1, 1\le i\le n\}$ ile verilen birim açık küp
S	: Ω küpün sınırı
$\overline{\Omega}$	: $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$, küpün kapanışı
$L_2(\overline{\Omega})$	: $\overline{\Omega}$ kümesinde tanımlanan kuadratik integrallenebilen ve $\Vert v\Vert_{L_2(\overline{\Omega})}=\left\{\int\cdots\int_{x\in\overline{\Omega}}\vert v(x)\vert^2 dx_1...dx_n\right\}^{1/2}$ ile tanımlanan normlu v fonksiyonlardan oluşan Hilbert uzayı
NSD	: Neumann sınır değer problemi
İKNTETP	: İntegral koşullu Neumann tipi eliptik ters problem
BMDFŞ	: Birinci mertebeden doğruluk fark şeması

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Tez dört bölümden ve ekten oluşmaktadır. Birinci bölüm temel kavramlardan ve giriş alt bölümlerinden oluşmuştur.

İkinci bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde integral koşullu Neumann tipi lokal olmayan eliptik üst belirli problemin iyi tanımlılığı gösterilmiştir.

Kabul edelim ki H bir Hilbert uzayı, A ise H ‘da pozitif tanımlı herhangi bir öz-eşlenik operatörü olsun. Yani, $\delta > 0$ ve I birim operatör olmak üzere $A > \delta I.$

İleride, $\varphi, \psi, \zeta \in D(A)$ belirli elemanlar, $f(t)$ ise $[0,T]$ aralığında tanımlanan H değerli bir düzgün fonksiyon ve $0 < \lambda_0 < T$ bir bilinen sayı olarak kabul edilecektir.

$[0,T]$ kapalı aralığında tanımlı α düzgün skaler fonksiyonunun $\int_0^T |\alpha(\lambda)| d\lambda < 1$ koşulunu sağladığını varsayalım.

Bilinmeyen $u(.) \in C([0,T], D(A)) \cap C^2([0,T], H)$ fonksiyonu ve $p \in H$ elemanı $(0,T)$ aralığında

$$-u_{tt}(t) + Au(t) = f(t) + p \tag{1.1.1}$$

eliptik denklemi ve

$$u_t(0) = \varphi, \; u_t(T) = \int_0^T \alpha(\lambda) u_\lambda(\lambda) d\lambda + \psi, \; u(\lambda_0) = \zeta \tag{1.1.2}$$

koşulları sağlamış olsun. Tezin devamında $(1.1.1)$, $(1.1.2)$ problemine integral koşullu Neumann tipi lokal olmayan eliptik ters problemi diyeceğiz.

Bu alt bölümde problemin çözümü için kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri hakkında teoremler ispatlarıyla birlikte verilmektedir.

İkinci alt bölümde ise soyut problem için elde edilen sonuçların uygulaması verilmektedir. $\Omega=(0,l)^n$, n - boyutlu R_n Öklid uzayında sınırı $S=\partial\Omega$, kapanışı $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ olan bir küp olmak üzere, $[0,\mathrm{T}]\times\Omega$ bölgesinde, aşağıdaki çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi integral koşullu üst belirli Dirichlet sınır değer problemini

$$\begin{cases} -u_{tt}(t,x)-u_{xx}(t,x)+u(t,\mathrm{x})=f(t,x)+p(x),0<x<1,0<t<T, \\ u_t(0,x)=\varphi(x),u_t(T,x)=\int\limits_0^T\alpha(\lambda)u_\lambda(\lambda,x)d\lambda+\psi(x), \\ u(\lambda_0,x)=\zeta(x),x\in\overline{\Omega},(0<\lambda_0<T) \end{cases} \tag{1.1.3}$$

ele alacağız. Burada $a_r(x)$, $\varphi(x),\psi(x)$, $\zeta(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)(t\in(0,T),x\in\Omega)$ bilinen düzgün fonksiyonlar, $\alpha(t)\in[0,T]$ aralığında tanımlı skaler fonksiyonu, $\lambda_0\in(0,T)$, ayrıca $\alpha_\tau(x)\geq\alpha_0>0$ $(x\in\Omega)$. Bu üst belirli eliptik problemin çözümü için kararlılık ve hemen hemen koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde özgün önermeler sunulmaktadır. Bu alt bölümde, integral koşullu Neumann tipi $(1.1.1)$, $(1.1.2)$ eliptik ters problemin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_k=f_k+p,1\leq k\leq N-1,N\tau=T; \\ u_1-u_0=\tau\psi, \\ u_N-u_{N-1}=\sum\limits_{i=0}^{N-1}\tau\alpha(t_i)(u_{i+1}-u_i)+\tau\psi_n, \\ u_{l_0}=\zeta \end{cases} \tag{1.1.4}$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması sunulmuştur. $(1.1.4)$ fark şemasının çözümü için ise kararlılık ve koersif kararlılık kestirimlerini içeren teoremler ispatlarıyla verilmiştir.

İkinci alt bölümde, çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi integral koşullu $(1.1.3)$ üst belirli Dirichlet sınır değer problemin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şeması oluşturulmuştur. Fark şemasının çözümü için kararlılık ve hemen-hemen koersif kararlılık eşitsizlikleri hakkındaki teoremler ispatlarıyla birlikte sunulmaktadır.

Üçüncü alt bölüm sayısal sonuçlarını içermektedir. Bu alt bölümde çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi integral koşullu $(1.1.3)$ üst belirli Dirichlet sınır değer problemin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şemasının sayısal çözümü ele alınmıştır.

Bu kısımda, fark şemasını üçlü köşegen matrisler için değiştirilmiş Gauss yöntemi (Samarskii ve Nikolaev, 1989) uygulanarak matrislerden oluşan bir lineer sisteme dönüştürülmeleri sağlanmıştır. Üst belirli eliptik problemin sayısal çözümü için MATLAB programı kullanılmış olup, elde edilen grafikler ve hata analizini oluşturan tablolar bu kısımda verilmiştir.

Dördüncü ve son bölüm, elde edilen sonuçların ve önerilerin sunulduğu bölümdür. Ekler kısmında ise, çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi integral koşullu üst belirli Dirichlet sınır değer problemin yaklaşık çözümün birinci mertebeden doğruluk fark şemasının sayısal çözümünü bulmak için MATLAB program kodları sunulmuştur.

Direkt problem, var olan bir sebepten dolayı ortaya çıkabilecek sonuçların bulunması problemi iken, ters problem ise mevcut sonuçlardan sebebin belirlenmesi problemi olarak ifade edilebilir. Matematiksel fizikte, denklem, bölge ve şartlar verildiğinde denklemi ve şartları sağlayan çözümün bulunması problemi, direkt problem olarak adlandırılmaktadır. Ters problem, direkt problemin çözümü hakkında verilen ek bilgi yardımıyla ilgili denklemin katsayılarının belirlenmesi olarak da tanımlanabilir (Gölgeleyen ve Kaytmaz, 2016).

Sınır değer probleminin çözümü, denklemden ve bazı ek koşullardan elde edilir. Eliptik denklem için direkt problemler Dirichlet, Neumann ve Robin tip sınır değer problemleri olarak ele alınır.

Matematiksel fizik direkt problemleri sık karşılaşılan klasik sınır değer problemleri ile ilişkilendiririz. Direkt bir problemde, bazı kısmi diferansiyel denklemleri ve bazı başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan bir çözüm bulmak gerekir. Ters problemlerde, ana denklem ve / veya başlangıç koşulları ve / veya sınır koşulları tam olarak belirtilmemiştir, bunun yerine, bazı ek bilgiler mevcuttur. Bu yüzden ters matematiksel fizik problemlerini birbirinden ayırarak, katsayı problemlerini (denklemin bazı katsayıları bilinmediği gibi tam olarak belirtilmemiş olduğu durum), sınır ters problemlerini (sınır koşullarının bilinmediği durum) ve evrimsel ters problemlerden (başlangıç koşulları bilinmediği durum) söz edebiliriz (Samarskii ve Vabishchevich, 2007).

Prilepko vd. (2000), Isakov (2006), Samarskii ve Vabishchevich (2007) ile Kabanikhin'in (2011) kitapları özellikle ters problemlerin genel teorisine ve onların çözüm bulma yöntemlerine adanmıştırlar.

Son yıllarda, kısmi diferensiyel denklemler için üst belirli problemlerin etkisi mühendisliğin ve fiziğin farklı uygulama alanlarında da ortaya çıkmış olup, bu da üst belirli problemlerin bilimsel araştırılmasının önemini daha da arttırmıştır.

Üst belirli problemleri incelemek için klasik yöntemlerden Fourier integral yöntemi, Fourier seriler yöntemi ve Laplace dönüşümü yöntemi kullanılabilir. Ancak, bu yöntemler sadece sabit katsayılı diferensiyel denklemler için geçerlidir. Kısmi diferensiyel denklemler için üst belirli problemlerin yaklaşık çözüm yöntemlerinden en kullanışlı olanının operatör yaklaşımı uygulayan sonlu fark yöntemi olduğu bilinmektedir (Kabanikhin, 2011).

Farklı tipteki ters problemlerin; Eidel'man (1991), Dehghan (2001), Romanov vd. (2003), Sakamoto ve Yamamoto (2009), Orlovsky (2008), Orlovsky ve Piskarev (2009) Hasanov (2010), Kalmenov ve Shaldanbaev (2010), Ashyralyev ve Erdoğan (2010), Soloviev (2011), Alekseev vd. (2012), Orazov ve Sadybekov (2012), Erdoğan ve Uygun (2012), Aleroev vd. (2013), Qian (2013), Ashyralyyev ve Dedetürk (2013), Roberty (2013), Bouzitouna vd. (2013), Orlovsky (2013), Orlovsky ve Piskarev (2013), Ashyralyev ve Ağırseven (2014), Ashyralyev ve Ashyralyyev (2014), Ashyralyyev ve Dedetürk (2015), Ashyralyyev ve Akkan (2015), Abdelaziz vd (2015), Lee (2016), Ashyralyyev ve Akyüz (2016), Klibanov ve Romanov (2016), Ashyralyyev (2017), Ashyralyyev vd (2017), Orlovsky ve Piskarev (2018) çalışmalarında ele alındığı görülmektedir.

Eliptik denklemler için basit lokal sınır değer problemi Bitsadze ve Samarskii tarafından 1969 yılında koyulmuş ve incelenmiştir.

Yapılan araştırmalara bakıldığında, eliptik denklemler için farklı lokal olmayan sınır değer problemlerin yaklaşık çözümleri ve onlar için kararlık analizleri ise, Ashyralyev (2008), Ashyralyev ve Özesenli Tetikoğlu (2012), Ashyralyev ve Öztürk (2013), Ashyralyev ve Özesenli Tetikoğlu (2013), Ashyralyev ve Öztürk (2013, 2014) 'ün çalışmalarında araştırılmış olduğu anlaşılmaktadır. Bu çalışmalarda lokal olmayan direkt problemlerin ve yaklaşık fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimlerinin elde edildiği görülmektedir.

Orlovsky (2013), Orlovsky ve Piskarev (2013,2018) makalelerinde Dirichlet ve Neumann koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üst belirli problemi, Banach uzayında araştırılmıştır. Bu çalışmalarda varlık ve teklik teoremleri ele alınmıştır.

Ashyralyyev ve Akyuz (2016), Ashyralyyev vd (2017), Akyuz (2017) çalışmalarında çok noktalı Bitsadze-Samarskii tipi üst belirli problem için kararlılık analizi yapılmıştır.

Ancak integral koşullu üst belirli problemleri incelenmemiştir. Ayrıca, bu tip problemlerin çözümleri için kararlılık analizinin yapılmamış olduğu görülmektedir. İntegral koşullu üst belirli problemin yaklaşık çözümü için kararlılık soruları da açıktır. Bu tezde ele alınacak sonuçların literatürdeki bu boşluğu doldurması amaçlanmaktadır.

Bu tezdeki amaç eliptik kısmi diferensiyel denklemler için integral koşullu Neumann tipi üst belirli problemin çözümünün ve yaklaşık fark şemalarının çözümünün kararlılık analizini araştırmaktır.

1.2. Temel kavramlar

Bu kısımda, lineer ve normlu sistemler, Banach uzayı, iç çarpım uzayı, Hilbert uzayı, sınırlı lineer fonksiyoneller, sınırlı operatörler, öz-eşlenik ve pozitif operatörler ile ilgili kavramlar ve tanımlar verilmektedir.

Tanım 1.1.1. Bir E kümesi, her iki x ve y elemanı ile birlikte, $x+y$ ile gösterilen ve toplam olarak adlandırılan elamanını da içeriyor; her bir λ reel (karmaşık) sayısı için x elemanı ile birlikte λx ile gösterilen ve onların çarpımı olarak adlandırılan elemanı içeriyor hem de bu iki işlemler aşağıdaki koşulları sağlıyorsa o zaman E kümesine reel (karmaşık) *lineer sistem* denir (Krein, 1972):

1) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

2) $x+y=y+x$;

3) Her $x\in E$ için $0x=\theta$ olacak şekilde E 'nin elemanı vardır;

4) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\mu y$;

6) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$;

7) $1x = x$.

Tanım 1.1.2. Eğer E lineer sistemi her bir x elemanına karşılık gelen, $\|x\|$ ile gösterilen ve norm olarak adlandırılan negatif olmayan bir reel sayıya sahipse ve

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

koşulları sağlıyorsa o zaman E lineer sistemine *normlu lineer uzay* denir (Krein, 1972).

Tanım 1.1.3. X bir küme ve d ise $X \times X$ kümesinde tanımlanan fonksiyon olmak üzere (X, d) ikilisine, $x, y, z \in X$ herhangi elemanlar olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa *metrik uzayı* denir (Kreyszig, 1978):

1. d reel değerli, sonlu ve negatif olmayan bir fonksiyondur.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$

Tanım 1.1.4. (X, d) metrik uzayındaki (x_n) dizisine, her $\varepsilon > 0$ sayı ve herhangi $m, n > N$ doğal sayılar için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa *Cauchy veya temel dizisi* denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 1.1.5. Eğer E normlu uzayındaki her Cauchy dizisi uzayın bir elemanına yakınsıyorsa, o zaman E uzaya *tam uzay* denir (Krein, 1971).

Tanım 1.1.6. Eğer E bir tam normlu uzay ise E uzaya *Banach uzayı* denir (Krein, 1971).

Tanım 1.1.7. Bir X karmaşık lineer sistem üzerinde her $x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle$ ile belirlenen aşağıdaki özelliklere sahip olan iç çarpımı tanımlanırsa, X ' e *iç çarpım uzayı* denir (Cheney, 2001):

1. $\langle x, y \rangle$ karmaşık sayı;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \alpha \in C$;
4. Eğer $x \neq 0$ ise $\langle x, x \rangle > 0$;
5. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Tanım 1.1.8. Tam iç çarpım uzayı *Hilbert uzayıdır* (Cheney, 2001).
Bir H Hilbert uzayında iç çarpım ile her $x \in X$ için;

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olarak *norm* tanımlanabilir. O zaman H bir normlu uzaya dönüşür. Ayrıca, H bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.9. (Krein,1972) E bir karmaşık lineer sistem olsun. Eğer her $x \in E$ elemanı için karmaşık $f(x)$ sayısı karşılık getiriliyorsa, o zaman E üzerinde bir $f(x)$ *fonksiyonel* tanımlanmıştır.

Tanım 1.1.10. (Krein,1972) Eğer her $x, y \in E$ ve her $\alpha, \beta \in E$ için $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ise, o zaman $f(x)$ fonksiyoneline *lineer* denir.

Tanım 1.1.11. (Krein,1972) Eğer her $x \in E$ için

$$|f(x)| \leq c\|x\|$$

olacak şekilde negatif olmayan bir c sabiti varsa, $f(x)$ 'e *sınırlı lineer fonksiyonel* denir. Eşitsizliği sağlayan en küçük c sabitine $f(x)$ *lineer fonksiyonelin normu* denir ve $\|f\|$ ile gösterilir. Fonksiyonelin normu için

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

formülü geçerlidir.

Şimdi lineer sınırlı operatörlerin tanımlarını vereceğiz.

Tanım 1.1.12. (Krein,1972) E ve F iki lineer sistem verilmiş olsun. Eğer her bir $x \in D$ elemana karşılık $y = Ax \in F$ eleman alınırsa, $D \subset E$ alt kümede tanımlanan ve değeri F de olan A operatörü verilmiştir. D kümesine A operatörünün *tanım bölgesi* denir ve $D(A)$ ile gösterilir.

Eğer her $x_1, x_2 \in D(A)$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ için $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$ ise, o zaman A *lineer operatördür*.

Tanım 1.1.13. (Krein,1972) A lineer operatörü E de tanımlanmış olmak üzere, eğer her $x \in E$ için

$$\|Ax\|_F \le C\|x\|_E$$

olacak şekilde x den bağımsız bir C sabit varsa A *sınırlıdır* denir. Eşitsizliği sağlayan en küçük C sabitine A *operatörün normu* denir ve $\|A\|_{E\to F}$ ile gösterilir. Tanıma göre

$$\|A\|_{E\to F} = \sup_{x\in E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_F$$

olur.

Tanım 1.1.14. (Krein,1971) H Hilbert uzayında tanımlı A bir sınırlı lineer operatör olsun. Aynı uzaydaki A^* operatörü, A operatörün *eşleniği* olarak adlandırılır ve $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$ formülle belirlenir.

Eğer $A^* = A$ ise A 'ya *öz-eşlenik operatör* denir.

Tanım 1.1.15. (Krein,1971) Eğer her $x \ne 0$ eleman için $\langle Ax, x\rangle \ge \delta \langle x, x\rangle$ $(\delta > 0)$ ise öz-eşlenik A operatörüne *pozitif tanımlı* denir.

A pozitif tanımlı operatör ise $B = A^{\frac{1}{2}}$ operatörü de aynı zamanda pozitif tanımlıdır.

Öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörün $f(A)$ fonksiyonunun normu için

$$\|f(A)\| \le \sup_{\delta\le\lambda<\infty} |f(\lambda)|$$

kestirim geçerlidir (Krein,1972).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Neumann Tipi Lokal Olmayan Eliptik Ters Problemin İyi Tanımlılığı

A, bir H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör olsun. Yani, $\delta > 0$ ve I birim operatör olmak üzere $A > \delta I$. $\varphi, \psi, \zeta \in D(A)$ ve $f(t)$ bir düzgün fonksiyon ve $0 < \lambda_0 < T$ bir bilinen sayı olsun.

İntegral koşullu Neumann tipi lokal olmayan eliptik ters problemini bilinmeyen $p \in H$ elemanını ve $u(.) \in C([0,T], D(A)) \cap C^2([0,T], H)$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = f(t) + p, \ 0 < t < T, \\ u_t(0) = \varphi, \ u_t(T) = \int_0^T \alpha(\lambda) u_\lambda(\lambda) d\lambda + \psi, \ u(\lambda_0) = \zeta. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

üst belirli eliptik ters problem olarak ele alalım. $(2.1.1)$ ters problemi eliptik diferansiyel denklemden ve sınır koşullarından meydana gelmektedir. Orlovsky (2008), Orlovsky ve Piskarev (2009) makalelerinde

$$u(0) = \varphi, u(\mathrm{T}) = \psi, u(\lambda_0) = \zeta \tag{2.1.2}$$

koşulları ile belirlenen Dirichlet tipi üst belirli eliptik probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir.

Ashyralyyev ve Dedetürk (2013) Ashyralyev ve Ashyralyyev (2014) çalışmalarında Dirichlet tipi üst belirli eliptik problemin çözümü için kararlılık analizi yapılmıştır.

Neumann tipi üst belirli eliptik probleminin (Ashyralyev, 2014), yani $(2.1.2)$ yerine

$$u_t(0) = \varphi, u_t(\mathrm{T}) = \psi, u_t(\lambda_0) = \zeta \tag{2.1.3}$$

şartları alındığı durumda çözümün varlığı, tekliği ve kararlılığı incelenmiştir.

Ashyralyyev ve Akkan (2015) makalesinde çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi üst belirli karışık sınır değer problemin yaklaşım çözümü için kararlı fark şemalarına bakılmıştır. Çok noktalı Bitsadze-Samarskii tipi üst belirli problem Ashyralyev (2017) makalesinde ele alınmıştır.

Verilen α skaler düzgün fonksiyon

$$\int_0^T \left|\alpha\left(\lambda\right)\right| d\lambda < 1 \tag{2.1.4}$$

koşulunu sağladığını varsayalım. $C\left(H\right), C_{0T}^{a,a}(\mathrm{H})$ Banach uzaylarında normları tanımlayacağız. $\left[0,T\right]$ arağında tanımlı ve değerleri H uzayında olan düzgün $u(t)$ fonksiyonlarının normları

$$\|u\|_{C(\mathrm{H})} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_H \,,$$
$$\|u\|_{C_{0T}^{a,a}(\mathrm{H})} = \|u(t)\|_{C(H)} + \sup_{0\le t+\tau\le T} \left(t+\tau\right)^a \tau^{-a} (T-t)^a \left\|v(t+\tau) - \mathrm{v}(t)\right\|_H$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Önerme 2.1. $M\left(B\right) \in \left[1,+\infty\right)$, $a\left(B\right) \in \left(0,+\infty\right)$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004):

$$\begin{aligned}
&\left\|exp\left(-tB\right)\right\|_{H\to H} \le M\left(B\right)\exp\left(-a\left(B\right)t\right), \\
&\left\|tBexp\left(-tB\right)\right\|_{H\to H} \le M\left(B\right)\exp\left(-a\left(B\right)t\right), \ (t>0) \\
&\left\|Q^{-1}\right\|_{H\to H} \le M\left(B\right)(1-\exp\left(-2Ta\left(B\right)t\right) \ (\mathrm{Q} = I - exp\left(-2TB\right)).
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Önerme 2.2. Her biri $0 \le t \le t+\tau \le T$ ve $0 \le a \le 1$ için,

$$\left\|exp\left(-tB\right) - \exp\left(-t+\tau\right)B\right\|_{H\to H} \le M \frac{\tau^a}{(t+\tau)^a} \tag{2.1.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada M sabiti a, t ve τ'den bağımsızdır (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004).

Önerme 2.3. $P=\int_0^T \alpha(\gamma) Q\left(e^{-(T-\gamma)B}-e^{-(T+\gamma)B}\right) d\gamma$ olmak üzere $(2.1.4)$ koşulu altında $I-P$ operatörünün bir $S=(I-P)^{-1}$ tersi vardır ve

$$\|S\|_{H \to H} \leq M(\delta) \tag{2.1.7}$$

kestirimi doğrudur. Burada M pozitif bir sabittir.

İspat: B operatörünün spektral temsilini kullanarak

$$\left\|Q\left(e^{-(T-\gamma)B}-e^{-(T+\gamma)B}\right)\right\|_{H \to H}=\left\|\left(I-e^{-2TB}\right)^{-1}\left(e^{-(T-\gamma)B}-e^{-(T+\gamma)B}\right)\right\|_{H \to H}$$
$$\leq \sup_{\delta^{1/2} \leq \lambda < \infty} \frac{1}{\left|1-e^{-2T\delta^{1/2}}\right|}\left|e^{-(T-\gamma)\lambda^{1/2}}-e^{-(T+\gamma)\lambda^{1/2}}\right|$$
$$\leq e^{-(T-\gamma)\lambda^{1/2}} \sup_{\delta^{1/2} \leq \lambda < \infty} \frac{1-e^{-2\gamma\lambda^{1/2}}}{1-e^{-2T\delta^{1/2}}}$$
$$\leq e^{-(T-\gamma)\delta^{1/2}}$$

elde edilir. Buna göre,

$$|\langle Pu,u\rangle|=\left|\left\langle \int_0^T \alpha(\gamma) Q\left(e^{-(T-\gamma)B}-e^{-(T+\gamma)B}\right) d\gamma u,u\right\rangle\right|$$
$$\leq \left\|Q\left(e^{-(T-\gamma)B}-e^{-(T+\gamma)B}\right)\right\|_{H \to H}\left\langle \int_0^T |\alpha(\gamma)| d\gamma\, u,u\right\rangle$$
$$\leq e^{-(T-\gamma)} \int_0^T |\alpha(\gamma)| d\gamma \langle u,u\rangle \leq \int_0^T |\alpha(\gamma)| d\gamma \langle u,u\rangle$$

$$\langle (I-P)u,u\rangle \geq \langle u,u\rangle-\langle Pu,u\rangle \geq \left(1-\int_0^T |\alpha(\gamma)| d\gamma\right)\langle u,u\rangle$$

olur. Böylece, $I-P$ operatörünün bir $S=\left(I-P\right)^{-1}$ tersi vardır ve $\left(2.1.7\right)$ kestirimi doğrudur.

Teorem 2.1.1. $\varphi,\zeta,\psi\in D\left(A\right),\ f\left(t\right)\in C_{0T}^{a,a}\left(H\right)(0<a<1)$ olduğunu ve α skaler fonksiyonun $\left(2.1.4\right)$ koşulu sağladığını varsayalım. O halde, $\left(2.1.1\right)$ üst belirli problemin $\left(u\left(t\right),p\right)$ çözümü için

$$\|u\|_{C(H)}\le M\left(\delta\right)\left[\|\varphi\|_H+\|\zeta\|_H+\|\psi\|_H+\|f\|_{C(H)}\right], \tag{2.1.8}$$

$$\left\|A^{-1}p\right\|_H\le M\left(\delta\right)\left[\|\varphi\|_H+\|\zeta\|_H+\|\psi\|_H+\|f\|_{C(H)}\right], \tag{2.1.9}$$

$$\|p\|_H\le M\left(\delta\right)\left[\|A\varphi\|_H+\|A\zeta\|_H+\|A\psi\|_H+\frac{1}{\left(1-a\right)a}\|f\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right] \tag{2.1.10}$$

kararlılık kestirimleri geçerlidir. Burada $M\left(\delta\right)$ sabitleri, verilen φ,ζ,ψ elemanlarından ve $f\left(t\right)$'den bağımsızdır.

İspat: $\left(2.1.1\right)$ problemin çözümünü bulmak için üç adımdan ibaret olan algoritma kullanacağız. A operatörü pozitif, öz-eşleniktir. Buna göre onun tersi A^{-1} vardır ve sınırlıdır. Birinci adımda

$$u\left(t\right)=v\left(t\right)+A^{-1}\left(p\right) \tag{2.1.11}$$

formülü kullanarak, v(t) için

$$\begin{cases} -v_{tt}\left(t\right)+Av\left(t\right)=f\left(t\right),\ 0<t<T, \\ v_t\left(0\right)=\varphi,\ v_t\left(T\right)=\int_0^T\alpha\left(\lambda\right)v_\lambda\left(\lambda\right)d\lambda+\psi \end{cases} \tag{2.1.12}$$

bir lokal olmayan integral koşullu yardımcı problem elde edilir. İkinci adımda

$$p = A\xi - Av(\lambda_0) \tag{2.1.13}$$

formülü ile p elemanı belirleyeceğiz. Üçüncü adımda ise (2.1.11) formülü ile u(t) fonksiyonu elde edilir.

Orlovskii, Piskarev (2013) makalesinde

$$\begin{aligned} &-\mathrm{v}_{\mathrm{tt}}(\mathrm{t}) + Av(\mathrm{t}) = f(\mathrm{t}),\ \ 0 < t < T, \\ &\mathrm{v}_{\mathrm{t}}(0) = \varphi,\ \ \mathrm{v}_{\mathrm{t}}(\mathrm{T}) = \xi \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

sınır değer problemin çözümü

$$v(t) = -\mathrm{Q}\left[\left(e^{-tB} + e^{-(2T-t)B}\right)B^{-1}\varphi - \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right)B^{-1}\xi\right] + \int_0^T G(t,s)\, f(s)\, ds \tag{2.1.15}$$

olarak gösterilmiştir. Burada

$$G(t,s) = -\frac{1}{2B}\mathrm{Q}\left[e^{-(t+s)B} + e^{-(2T-t-s)B} + e^{-|t-s|B} + e^{-(2T-|t-s|)B}\right]$$

(2.1.14) problemin Greeen fonksiyonudur. Buna göre,

$$v_t(t) = Q\left[\left(e^{-tB} + e^{-(2T-t)B}\right)\varphi + (e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B})\xi\right] + F(B, f, t) \tag{2.1.16}$$

olacaktır.

Bundan dolayı

$$
\begin{aligned}
F(B,f,t) &= \frac{1}{2}\mathrm{Q}\int_0^T (e^{-(t+s)B} - e^{-(2T-t-s)B}) f(s)ds + \frac{1}{2}\mathrm{Q}\int_0^t (e^{-(t-s)B} - e^{-(2T-t+s)B}) f(s)ds \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathrm{Q}\int_t^T (e^{-(s-t)B} - e^{-(2T+t-s)B}) f(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.1.17}
$$

(2.1.16) formülü (2.1.12) problemin lokal olmayan sınır şartına uyguladığımızda

$$
\begin{aligned}
\xi &= \int_0^T \alpha(\lambda) Q\left(e^{-\lambda B} + e^{-(2T-\lambda)B}\right)\varphi d\lambda \\
&\quad + \int_0^T \alpha(\lambda)\left[Q(e^{-(T-\lambda)B} + e^{-(T+\lambda)B})\xi + F(B,f,\lambda)\right]d\lambda + \psi
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla burada

$$
\xi = S\int_0^T \alpha(\lambda)\left[Q(e^{-(T-\lambda)B} + e^{-(T+\lambda)B})\varphi + F(B,f,\lambda)\right]d\lambda + S\psi. \tag{2.1.18}
$$

alırız. Böylece, (2.1.12) probleminin çözümü

$$
\begin{aligned}
v(t) &= -\mathrm{Q}\left(e^{-tB} + e^{-(2T-t)B}\right)B^{-1}\varphi - \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right)B^{-1} \\
&\quad \times\left\{S\int_0^T \alpha(\lambda)\left[Q(e^{-(T-\lambda)B} + e^{-(T+\lambda)B})\varphi + F(B,f,\lambda)\right]d\lambda + S\psi\right\} + \int_0^T G(t,s) f(s)ds \\
&= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t) + I_5(t)
\end{aligned} \tag{2.1.19}
$$

olarak bulunur. Burada

$$
\begin{aligned}
I_1(t) &= -\mathrm{Q}\left(e^{-tB} + e^{-(2T-t)B}\right)B^{-1}\varphi, \\
I_2(t) &= -\left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right)B^{-1}S\int_0^T \alpha(\lambda) Q(e^{-(T-\lambda)B} + e^{-(T+\lambda)B})\varphi d\lambda,
\end{aligned}
$$

$$I_3(t) = -\left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S \int_0^T \alpha(\lambda) F(B, f, \lambda) d\lambda,$$
$$I_4(t) = \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S\psi,$$
$$I_5(t) = \int_0^T G(t,s) f(s) ds \ .$$

bu çözüm tektir.

$k = 1, \ldots, 5$ için ayrı ayrı $\|I_k\|_H$ kestirimlerini oluşturalım. İlk $\|I_1(t)\|_H$ ve $\|I_2(t)\|_H$ için Cauchy-Schwarz ve üçgen eşitsizliklerini, ayrıca $(2.1.5)-(2.1.6)$ kestirimlerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\|I_1(t)\|_H &\leq \left\|\mathrm{Q}\left(e^{-tB} + e^{-(2T-t)B}\right)\right\|_{H\to H} \left\|B^{-1}\varphi\right\|_H \\
&= \left\|\mathrm{Q}e^{-tB} + \mathrm{Q}e^{-(2T-t)B}\right\|_{H\to H} \left\|B^{-1}\varphi\right\|_H \\
&\leq \left(\left\|\mathrm{Q}e^{-tB}\right\|_{H\to H} + \left\|\mathrm{Q}e^{-(2T-t)B}\right\|_{H\to H}\right)\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H} \|\varphi\|_H \\
&\leq \left(\|\mathrm{Q}\|_{H\to H} \left\|e^{-tB}\right\|_{H\to H} + \|\mathrm{Q}\|_{H\to H} \left\|e^{-(2T-t)B}\right\|_{H\to H}\right)\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H} \|\varphi\|_H \\
&\leq \|\mathrm{Q}\|_{H\to H} (1+1) \left\|B^{-1}\right\|_{H\to H} \|\varphi\|_H \leq M(\delta) \|\varphi\|_H
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|I_2(t)\|_H &\leq \left(\left\|e^{-(T-t)B}\right\|_{H\to H} + \left\|e^{-(T+t)B}\right\|_{H\to H}\right)\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H} \|S\|_{H\to H} \\
&\quad \times \|Q\|_{H\to H} \|\varphi\|_H \int_0^T |\alpha(\lambda)| \left\|(e^{-(T-\lambda)B} + e^{-(T+\lambda)B})\right\| d\lambda \leq M(\delta)\|\varphi\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\|I_3(t)\|_H$ normu değerlendireceğiz. Bu nedenle $I_3(t)$ 'i

$$
\begin{aligned}
I_3(t) &= -\left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S \int_0^T \alpha(\lambda) \frac{1}{2} \mathrm{Q} \int_0^T (e^{-(t+s)B} - e^{-(2T-t-s)B}) f(s)\, ds d\lambda \\
&\quad - \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S \frac{1}{2} \mathrm{Q} \int_0^t (e^{-(t-s)B} - e^{-(2T-t+s)B}) f(s)\, ds d\lambda \\
&\quad + \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S \frac{1}{2} \mathrm{Q} \frac{1}{2} \mathrm{Q} \int_t^T (e^{-(s-t)B} - e^{-(2T+t-s)B}) f(s)\, ds d\lambda \\
&= I_{3,1}(t) + I_{3,2}(t) + I_{3,3}(t)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazalım. Burada

$$
\begin{aligned}
I_{3,1}(t) &= -\left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S \int_0^T \alpha(\lambda) \frac{1}{2} \mathrm{Q} \int_0^T (e^{-(t+s)B} - e^{-(2T-t-s)B}) f(s)\, ds d\lambda, \\
I_{3,2}(t) &= -\left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S \frac{1}{2} \mathrm{Q} \int_0^t (e^{-(t-s)B} - e^{-(2T-t+s)B}) f(s)\, ds d\lambda, \\
I_{3,3}(t) &= \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B}\right) B^{-1} S \frac{1}{2} \mathrm{Q} \frac{1}{2} \mathrm{Q} \int_t^T (e^{-(s-t)B} - e^{-(2T+t-s)B}) f(s)\, ds d\lambda.
\end{aligned}
$$

Cauchy-Schwarz, üçgen eşitsizliklerini ve $(2.1.5)-(2.1.7)$ kestirimlerini uygulayalım. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
\left\| I_{3,1}(t) \right\|_H &\leq \left(\left\| e^{-(T-t)B} \right\|_{H\to H} + \left\| e^{-(T+t)B} \right\|_{H\to H} \right) \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| S \right\|_{H\to H} \left\| \mathrm{Q} \right\|_{H\to H} \| f \|_{C(\mathrm{H})} \\
&\quad \times \frac{1}{2} \int_0^T |\alpha(\lambda)| \int_0^T \left\| \left(e^{-(t+s)B} - e^{-(2T-t-s)B} \right) \right\| ds d\lambda \leq M(\delta) \| f \|_{C(\mathrm{H})},
\end{aligned} \tag{2.1.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\| I_{3,2}(t) \right\|_H &\leq \left(\left\| e^{-(T-t)B} \right\|_{H\to H} + \left\| e^{-(T+t)B} \right\|_{H\to H} \right) \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| S \right\|_{H\to H} \\
&\quad \times \left\| Q \right\|_{H\to H} \int_0^T \left\| (e^{-(t-s)B} - e^{-(2T-t+s)B} \right\| ds d\lambda \leq M(\delta) \| f \|_{C(\mathrm{H})},
\end{aligned} \tag{2.1.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\| I_{3,3}(t) \right\|_H &\leq \left(\left\| e^{-(T-t)B} \right\|_{H\to H} + \left\| e^{-(T+t)B} \right\|_{H\to H} \right) \left\| B^{-1} \right\|_{H\to H} \left\| S \right\|_{H\to H} \frac{1}{2} \left\| \mathrm{Q} \right\|_{H\to H} \frac{1}{2} \left\| \mathrm{Q} \right\|_{H\to H} \\
&\quad \times \| f \|_{C(\mathrm{H})} \int_0^T \left\| (e^{-(s-t)B} - e^{-(2T+t-s)B}) \right\| ds d\lambda \leq M(\delta) \| f \|_{C(\mathrm{H})}
\end{aligned} \tag{2.1.22}
$$

kestirimleri elde edilir.

Sonuç olarak, $(2.1.20)$, $(2.1.21)$ ve $(2.1.22)$ eşitsizliklerini ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\|I_3(t)\|_H \leq M(\delta)\|f\|_{C(\mathrm{H})}$$

kestirimine ulaşacağız.

Cauchy-Schwarz, üçgen eşitsizliklerini ve $(2.1.5)-(2.1.7)$ eşitsizliklerinden

$$\|I_4(t)\|_H \leq \left(\left\|e^{-(T-t)B}\right\|_{H\to H} + \left\|e^{-(T+t)B}\right\|_{H\to H}\right)\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H}\|S\|_{H\to H}\|\psi\|_H \int_0^T |\alpha(\lambda)|\,d\lambda \leq M(\delta)\|\psi\|_H$$

kestirimi bulunur.

Şimdi $\|I_4(t)\|_H$ için değerlendirme yapalım. İlk önce Green fonksiyonun formülünü kullanarak $I_5(t)$ ‘yi

$$\begin{aligned} I_5(t) &= -\frac{Q}{2B}\int_0^T \left[e^{-(t+s)B} + e^{-(2T-t-s)B} + e^{-|t-s|B} + e^{-(2T-|t-s|)B}\right] f(s)\,ds \\ &= I_{5,1}(t) + I_{5,2}(t) + I_{5,3}(t) + I_{5,4}(t) \end{aligned}$$

formunda yazalım. Dolayısıyla

$$I_{5,1}(t) = -\frac{Q}{2B}\int_0^T e^{-(t+s)B} f(s)\,ds,$$

$$I_{5,2}(t) = -\frac{Q}{2B}\int_0^T e^{-(2T-t-s)B} f(s)\,ds,$$

$$I_{5,3}(t) = -\frac{Q}{2B}\int_0^T e^{-|t-s|B} f(s)\,ds,$$

$$I_{5,4}(t) = -\frac{Q}{2B}\int_0^T e^{-(2T-|t-s|)B} f(s)\,ds.$$

ayrı ayrı $\left\|I_{5,1}(t)\right\|_H$, $\left\|I_{5,2}(t)\right\|_H$, $\left\|I_{5,3}(t)\right\|_H$, $\left\|I_{5,4}(t)\right\|_H$ normları değerlendireceğiz.

$$\left\|I_{5,1}(t)\right\|_H \leq \frac{1}{2}\|\mathrm{Q}\|_{H\to H}\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H}\|f\|_{C(\mathrm{H})}\int_0^T\left\|e^{-(t+s)B}\right\|ds \leq M(\delta)\|f\|_{C(\mathrm{H})}. \qquad (2.1.23)$$

$$\left\|I_{5,2}(t)\right\|_H \leq \frac{1}{2}\|\mathrm{Q}\|_{H\to H}\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H}\|f\|_{C(\mathrm{H})}\int_0^T\left\|e^{-(2T-t-s)B}\right\|ds \leq M(\delta)\|f\|_{C(\mathrm{H})}. \qquad (2.1.24)$$

$$\left\|I_{5,3}(t)\right\|_H \leq \frac{1}{2}\|\mathrm{Q}\|_{H\to H}\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H}\|f\|_{C(\mathrm{H})}\int_0^T\left\|e^{-|t-s|B}\right\|ds \leq M(\delta)\|f\|_{C(\mathrm{H})}. \qquad (2.1.25)$$

$$\left\|I_{5,4}(t)\right\|_H \leq \frac{1}{2}\|\mathrm{Q}\|_{H\to H}\left\|B^{-1}\right\|_{H\to H}\|f\|_{C(\mathrm{H})}\int_0^T\left\|e^{-(2T-|t-s|)B}\right\|ds \leq M(\delta)\|f\|_{C(\mathrm{H})}. \qquad (2.1.26)$$

Sonuçta $(2.1.23),(2.1.24),(2.1.25)$ ve $(2.1.26)$ eşitsizliklerini ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$I_5(t)_H \leq M(\delta)\|f\|_{C(\mathrm{H})}$$

elde edilir.

Böylece,

$$\|v\|_{C(H)} \leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_H+\|\zeta\|_H+\|\psi\|_H+\|f\|_{C(H)}\right] \qquad (2.1.27)$$

elde edilir.

$$A^{-1}(p) = \zeta + \mathrm{Q}\left(e^{-\lambda_0 B} + e^{-(2T-\lambda_0)B}\right)B^{-1}\varphi$$
$$+\left(e^{-(T-\lambda_0)B} + e^{-(T+\lambda_0)B}\right)B^{-1}S\int_0^T \alpha(\lambda)Q(e^{-(T-\lambda)B} + e^{-(T+\lambda)B})\varphi d\lambda$$
$$+\left(e^{-(T-\lambda_0)B} + e^{-(T+\lambda_0)B}\right)B^{-1}S\int_0^T \alpha(\lambda)F(B, f, \lambda)d\lambda$$
$$+\left(e^{-(T-\lambda_0)B} + e^{-(T+\lambda_0)B}\right)B^{-1}S\psi + \int_0^T G(\lambda_0, s)f(s)ds$$

olduğuna göre, $(2.1.5)-(2.1.7)$ kestirimlerini kullanırsak,

$$\left\|A^{-1}p\right\|_H \leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\psi\|_H + \|f\|_{C(H)}\right]$$

olur. Şimdi $(2.1.13),(2.1.20)$ formüllerden

$$p = A\zeta + \mathrm{Q}\left(e^{-\lambda_0 B} + e^{-(2T-\lambda_0)B}\right)B^{-1}A\varphi$$
$$+\left(e^{-(T-\lambda_0)B} + e^{-(T+\lambda_0)B}\right)B^{-1}S\int_0^T \alpha(\lambda)Q(e^{-(T-\lambda)B} + e^{-(T+\lambda)B})\mathrm{A}\varphi d\lambda$$
$$+\left(e^{-(T-\lambda_0)B} + e^{-(T+\lambda_0)B}\right)BS\int_0^T \alpha(\lambda)F(B, f, \lambda)d\lambda$$
$$+\left(e^{-(T-\lambda_0)B} + e^{-(T+\lambda_0)B}\right)B^{-1}SA\psi + A\int_0^T G(\lambda_0, s)f(s)ds\ .$$

elde edilir. $(2.1.5)-(2.1.7)$ kestirimleri kullanarak, $(2.1.10)$ eşitsizliğine ulaşırız.

$(2.1.13)$, $(2.1.19)$, $(2.1.27)$ ve üçgen eşitsizliğinden $(2.1.11)$ bulunur. Teorem 2.1.1 ispatı elde edilir.

Teorem 2.1.2. $\varphi, \zeta, \psi \in D(A)$, $f(t) \in C_{0T}^{a,a}(H)(0 < a < 1)$ olduğunu ve α skaler fonksiyonun $(2.1.4)$ koşulu sağladığını varsayalım. O halde, $(2.1.1)$ üst belirli problemin $(u(t), p)$ çözümü için

$$\|u''\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}+\|Au\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}+\|p\|_H\le M(\delta)\left[\|\varphi\|_H+\|\zeta\|_H+\|\psi\|_H+\frac{1}{a(1-a)}\|f\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right] \quad (2.1.28)$$

koersif kararlılık kestirimleri geçerlidir.

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen φ,ζ,ψ elemanlarından ve $f(t)$'den bağımsızdır.

İspat: $(2.1.9)$, $(2.1.11)$, $(2.1.19)$ ifadelerden

$$\begin{aligned}
Au(t) &= -Q\left(e^{-tB}+e^{-(2T-t)B}\right)B\varphi-\left(e^{-(T-t)B}+e^{-(T+t)B}\right)\\
&\quad\times\left\{S\int_0^T\alpha(\lambda)\left[Q(e^{-(T-\lambda)B}+e^{-(T+\lambda)B})B\varphi+BF(B,f,\lambda)\right]d\lambda+SB\psi\right\}\\
&\quad+A\int_0^T G(t,s)\,f(s)\,ds+A\zeta+Q\left(e^{-\lambda_0 B}+e^{-(2T-\lambda_0)B}\right)B\varphi\\
&\quad+\left(e^{-(T-\lambda_0)B}+e^{-(T+\lambda_0)B}\right)S\int_0^T\alpha(\lambda)Q(e^{-(T-\lambda)B}+e^{-(T+\lambda)B})B\varphi d\lambda\\
&\quad+\left(e^{-(T-\lambda_0)B}+e^{-(T+\lambda_0)B}\right)BS\int_0^T\alpha(\lambda)F(B,f,\lambda)\,d\lambda\\
&\quad+\left(e^{-(T-\lambda_0)B}+e^{-(T+\lambda_0)B}\right)SB\psi+A\int_0^T G(\lambda_0,s)\,f(s)\,ds
\end{aligned} \quad (2.1.29)$$

formülü elde edilir. Teorem 2.1.2 nin ispatı $(2.1.29)$ formülüne ve $(2.1.5)-(2.1.7)$ kestirimlere dayanır.

2.2. Soyut Problemin Uygulaması

Bu kesirde çok boyutlu kısmi diferensiyel denklemler için integral koşullu neumann tipi sınır değer problemini inceleyeceğiz. n - boyutlu R_n Öklid uzayında sınırı $S=\partial\Omega$ olmak üzere, $\Omega=(0,I)^n$ bir açık küp olduğunu varsayalım. Ω kümesinin kapanışı ile belirleyelim. $a_r(x),\varphi(x),\psi(x),\zeta(x)(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)(t\in(0,T),x\in\Omega)$ bilinen düzgün fonksiyonlar, $\alpha(t)\in[0,T]$ aralığında tanımlı skaler fonksiyonu, $\sigma>0$ ve $\lambda_0\in(0,T)$ verilen reel sayılar, ayrıca $\alpha_\tau(x)\ge a_0>0$ $(x\in\Omega)$ olduğunu kabul edelim.

$H = L_2(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ kümesinde tanımlanan kuadratik integrallenebilen fonksiyonlardan olan Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda her $v \in L_2(\overline{\Omega})$ için norm,

$$\|v\|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left\{ \int \underset{x\in\Omega}{\cdots} \int |v(x)|^2 \, dx_1 ... dx_n \right\}^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. $W_2^2(\overline{\Omega})$ ise $\overline{\Omega}$ kümesinde ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve kuadratik integrallenebilen fonksiyonlardan oluşan Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda her $v \in W_2^2(\overline{\Omega})$ için norm,

$$\|v\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} = \left\{ \int \underset{x\in\Omega}{\cdots} \int \left(|v(x)|^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| v_{x_i x_j}(\mathrm{x}) \right|^2 \right) dx_1 ... dx_n \right\}^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır.

$C_{0T}^{a,a}\left(L_2(\overline{\Omega})\right)$ $(0 < a < 1)$ Banach uzayı ise $[0,T]$ üzerinde tanımlı ve $L_2(\overline{\Omega})$ değerli tüm düzgün v fonksiyonlarının kümesi olarak

$$\|v\|_{C_{0T}^{a,a}\left(L_2(\overline{\Omega})\right)} = \|v\|_{C\left(L_2(\overline{\Omega})\right)} + \sup_{0 \le t < \tau \le T} (t+\tau)^{\alpha} \tau^{-\alpha} (\mathrm{T}-t)^{\alpha} \|v(t+\tau) - v(t)\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

normu ile tanımlayalım.

Şimdi, $[0,\mathrm{T}] \times \Omega$ bölgesinde, aşağıdaki çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi integral koşullu üst belirli ve Dirichlet sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} -u_{tt}(t,x)-\sum_{r=1}^{n}\left(\mathrm{a}_r(x)u_{x_r}(t,x)\right)_{x_r}+\sigma u(t,x)=f(t,x)+p(x), 0<x<l, 0<t<T \\ u_t(0,x)=\varphi(x), u_t(T,x)=\int_0^T \alpha(\lambda)u_\lambda(\lambda)d\lambda+\psi, \\ u(\lambda_0,x)=\zeta(x), x\in\overline{\Omega}, (0<\lambda_0<T) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

(2.2.1) problemindeki α skaler fonksiyonu (2.1.2) şartını sağladığını varsayalım. (2.2.1) probleminin diferensiyel operatörü

$$A^x u=-\sum_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u_{x_r}(x)\right)_{x_r}+\sigma u(x) \tag{2.2.2}$$

şeklinde yazalım. Bu operatörün tanım kümesi,

$$D(A^x)=\left\{u(x)\in L_2(\overline{\Omega}), u(x)=0, x\in S\right\}$$

şeklindedir. A^x operatörü için $L_2(\overline{\Omega})$ uzayında bir operatör olmak üzere A^x operatörü öz- eşlenik pozitif tanımlıdır. Bu nedenle (2.2.1) ters problemi $H=\mathrm{L}_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayında $(2.1.1)$ soyut sınır değer problemine dönüştürülebilir. Böylece, $(2.1.1)$ soyut sınır değer problemi için Teorem 2.2.1 uygulanarak, (2.2.1) Dirichlet sınır değer üst belirli eliptik probleminin çözümünün kararlılığıyla ilgili sonuçları ifade edebiliriz.

Teorem 2.2.1. α skaler fonksiyonunun $\varphi, \psi, \zeta\in D\left(A^x\right)$ ve $f\in C_{0T}^{a,a}\left(L_2(\overline{\Omega})\right)(0<\alpha<1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (2.2.1) üst belirli problemin (u,p) çözümü için kararlılık kestirimleri geçerlidir.

$$\|u\|_{C\left(L_2(\overline{\Omega})\right)}\leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega})}+\|\zeta\|_{L_2(\overline{\Omega})}+\|\psi\|_{L_2(\overline{\Omega})}+\|f\|_{C\left(L_2(\overline{\Omega})\right)}\right] \tag{2.2.3}$$

$$\left\|(A^{x})^{-1}p\right\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le M(\delta)\left[\|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C\left(L_2(\bar{\Omega})\right)}\right], \tag{2.2.4}$$

$$\|p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \le M(\delta)\left[\|A\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|A\zeta\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|A\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \frac{1}{(1-a)a}\|f\|_{C_{0T}^{a,a}\left(L_2(\bar{\Omega})\right)}\right] \tag{2.2.5}$$

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen φ, ζ, ψ elemanlarından ve $f(\mathrm{t})$ ’den bağımsızdır.

Teorem 2.2.2. $\varphi, \psi, \zeta \in D\left(A^{x}\right)$ ve $f \in C_{0T}^{a,a}\left(L_2(\overline{\Omega})\right)$ $(0 < \alpha < 1)$ verilsin. Öyleyse $(2.2.1)$ üst belirli problemin (u, p) çözümü için

$$\begin{aligned} &\left\|u''\right\|_{C_{0T}^{a,a}\left(L_2(\bar{\Omega})\right)} + \|u\|_{C_{0T}^{a,a}\left(W_2^2(\bar{\Omega})\right)} + \|p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \\ &\le M(\delta)\left[\frac{1}{(1-a)a}\|f\|_{C_{0T}^{a,a}\left(L_2(\bar{\Omega})\right)} + \|A\varphi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|A\zeta\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|A\psi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})}\right]. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

koersif eşitsizliği doğrudur.

Burada $M(\delta)$ sabitleri, verilen φ, ζ, ψ elemanlarından ve f ‘den bağımsızdır.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. Neumann Tipi İntegral Koşullu Lokal Olmayan Eliptik Ters Problemin Fark Şeması

Bu bölümde $(2.1.1)$ Neumann tipi integral koşullu lokal olmayan eliptik ters problemi ile fark problemlerini ilişkilendireceğiz. $(2.1.1)$ probleminin yaklaşık çözümünün elde edilmesi için iyi tanımlı birinci mertebeden doğruluk fark şeması oluşturulmuştur.

A, H Hilbert uzayında sınırlı ve öz-eşlenik pozitif tanımlı operatör olduğunu varsaymıştık. $\tau > 0$ herhangi bir pozitif sayı olsun. O halde,

$$C = \frac{1}{2}\left(\tau A + \sqrt{4A + \tau^2 A^2}\right), \ \mathrm{R} = \left(I + \tau C\right)^{-1}$$

operatörleri de sınırlı öz-eşlenik pozitif tanımlı operatörleridir (Krein, 1972).
Aşağıdaki notasyonları sonra kullanacağız:

$$P = (I - R^{2N})^{-1}$$
$$D = (I + \tau C)(2I + \tau C)^{-1} C^{-1}.$$

Önerme 3.1.1. Aşağıdaki kestirimler sağlanır. (Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004):

$$\begin{aligned} &\left\| R^i \right\|_{H \to H} \leq M(1 + \delta^{1/2}\tau)^{-i}, \delta > 0, \\ &\left\| BR^i \right\|_{H \to H} \leq \frac{M}{i\tau}, i = 1, 2, ..., N, \\ &\left\| (\mathrm{I} - R^{2N})^{-1} \right\|_{H \to H} \leq M(\delta). \end{aligned} \qquad (3.1.1)$$

Verilen α skaler fonksiyonu M, τ' dan ve $\{t_k\}_{k=0}^{N}$ grid noktalardan bağımsız bir sabit olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)|+|\alpha(t_{N-1})|+|\alpha(t_0)|\le M \tag{3.1.2}$$

koşulunu sağladığını varsayalım.

Önerme 3.1.2. H Hilbert uzayında tanımlı olan

$$\begin{aligned}
G_1 &= (I-R)^2\left(R^{2N-2}(I+R)^2-\left(I+R^{2N-1}\right)^2\right)\\
&\quad -(I-R)\left(I+R^{2N-1}\right)\left\{-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\right.\\
&\quad \left.+\left[\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)-\tau\alpha(t_{N-1})(I-R^{2N})\right\}\\
&\quad -\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\left\{\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)\right.\\
&\quad \left.+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\right\}
\end{aligned}$$

operatörün G_1^{-1} tersi vardır ve

$$\left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\le M(\delta) \tag{3.1.3}$$

kestirimi sağlanır.

İspat:

$$G=(I-R)^2\left(R^{2N-2}(I+R)^2-\left(I+R^{2N-1}\right)^2\right) \tag{3.1.4}$$

olmak üzere determinant

$$\begin{aligned}
G_1 &= G+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\\
&\quad \times\left[(I-R)\left(I+R^{2N-1}\right)\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)+\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$-\left[\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left[\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)\left(R-R^{2N-1}\right)-\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)^{2}\right]$$
$$+\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)(I-R^{2N})\tau\alpha(t_{N-1})$$
$$-(I-R^{2N})\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\tau\alpha(t_{0})$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)+\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)$$
$$=\left(I-R\right)\left[\left(I+R^{2N-1}\right)\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)+\left(R^{N-1}+R^{N}\right)\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)\right]$$
$$=\left(I-R\right)\left[R^{N-i}+R^{3N-i-1}-R^{N+i}-R^{3N+i-1}+R^{N+i-1}+R^{N+i}-R^{3N-i-1}-R^{3N-i}\right]$$
$$=\left(I-R\right)\left[R^{N-i}-R^{3N+i-1}+R^{N+i-1}-R^{3N-i}\right]$$
$$=\left(I-R\right)\left[R^{N+i-1}\left(I-R^{2N}\right)+R^{N-i}\left(I-R^{2N}\right)\right]$$
$$=\left(I-R\right)\left(I-R^{2N}\right)\left(R^{N+i-1}+R^{N-i}\right)$$

bulunur. Buna göre,

$$G_{1}=G+\left(I-R\right)\left(I-R^{2N}\right)\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_{i})\right]\left(R^{N+i-1}+R^{N-i}\right)$$
$$-\left[\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left[\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)\left(R-R^{2N-1}\right)-\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)^{2}\right]$$
$$+\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)(I-R^{2N})\tau\alpha(t_{N-1})-(I-R^{2N})\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\tau\alpha(t_{0})$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, G operatörünü ele alalım.

$$G=\left(I-R\right)^{2}\left[R^{N-1}\left(I+R\right)-\left(I+R^{2N-1}\right)\right]$$
$$=\left(I-R\right)^{2}\left(R^{N-1}+R^{N}-I-R^{2N-1}\right)\left(R^{N-1}+R^{N}+I+R^{2N-1}\right)$$
$$=\left(I-R\right)^{2}\left[\left(R^{N-1}-I\right)-R^{N}\left(R^{N-1}-I\right)\right]\left[\left(R^{N-1}+I\right)+R^{N}\left(R^{N-1}+I\right)\right]$$
$$=\left(I-R\right)^{2}\left(R^{N-1}-I\right)\left(I-R^{N}\right)\left(R^{N-1}+I\right)\left(I+R^{N}\right)$$
$$=-\left(I-R\right)^{2}\left(I-R^{2N-2}\right)\left(I-R^{2N}\right)$$

olduğuna göre,

$$Q = G^{-1} = \left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(I - R^{2N-2}\right)^{-1}\left(I - R\right)^{-2}$$

ters operatörü vardır ve M , τ' dan bağımsız bir sabit olmak üzere

$$\|Q\|_{H\to H} = \left\|\left(I - R^{2N}\right)^{-1}\left(I - R^{2N-2}\right)^{-1}\left(I - R\right)^{-2}\right\|_{H\to H} \le M_1(\delta) \tag{3.1.5}$$

kestirimi kolayca elde edilir.

$Q_1 = G_1^{-1}$ notasyonunu kullanırsak,

$$\begin{aligned} S &= \left(I - R\right)\left(I - R^{2N}\right)\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right]\left(R^{N+i-1} + R^{N-i}\ \right) \\ &\quad -\left[\tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right] \\ &\quad \times\left[\left(I - R\right)\left(I + R^{2N-1}\right)\left(R - R^{2N-1}\right) - \left(R^{N-1} - R^{N+1}\right)^2\right] \\ &\quad +\left(I - R\right)\left(I + R^{2N-1}\right)(I - R^{2N})\tau\alpha(t_{N-1}) - (I - R^{2N})\left(R^{N-1} - R^{N+1}\right)\tau\alpha(t_0) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$Q_1 - Q = Q_1 Q S \tag{3.1.6}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|S\|_{H\to H} &\le \tau\|I - R\|_{H\to H}\left\|I - R^{2N}\right\|_{H\to H} \\ &\quad \times\sum_{i=1}^{N-2}\ \left|\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right|\left[\left\|R^{N+i-1}\right\|_{H\to H} + \left\|R^{N-i}\right\|_{H\to H}\right] \\ &\quad + \tau\left|\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right| \\ &\quad \times\left[\|I - R\|_{H\to H}\left\|I + R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\left\|R - R^{2N-1}\right\|_{H\to H} + \left\|R^{N-1} - R^{N+1}\right\|_{H\to H}^2\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tau\left\|I-R\right\|_{H\to H}\left\|I+R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left|\alpha(t_{N-1})\right| \\
&+\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\left|\alpha(t_0)\right| \qquad (3.1.7)\\
&\le \tau M_2(\delta)\sum_{i=1}^{N-1}\left|\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|+M_3(\delta)\left|\alpha(t_{N-1})\right|+M_4(\delta)\left|\alpha(t_0)\right|\le \tau M_5(\delta)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, $M_5(\delta)$, τ 'dan bağımsız bir sabittir. Son olarak, üçgen eşitsizliğini kullanarak, (3.1.5), (3.1.6) , (3.1.7) ifadelerden herhagi küçük pozitif τ için

$$
\begin{aligned}
\left\|Q_1\right\|_{H\to H} &\le \left\|Q\right\|_{H\to H}+\left\|Q_1\right\|_{H\to H}\left\|Q\right\|_{H\to H}\left\|S\right\|_{H\to H}\\
&\le M_1(\delta)+\left\|Q_1\right\|_{H\to H} M M_5(\delta)\tau
\end{aligned}
$$

elde edilir. Pozitif τ keyfi küçük sayı olduğuna göre, (3.1.3) eşitsizliğine ulaşılır. Böylece, ispat tamamlanmıştır.

$[\cdot]$ en büyük tam sayı fonksiyonunun notasyonu olmak üzere $l_0=\left[\dfrac{\lambda_0}{\tau}\right]$ olarak alacağız. (2.1.1) diferansiyel problemi için birinci mertebeden doğruluk fark şemasını

$$
\begin{cases}
-\dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_k = f_k+p, 1\le k\le N-1, N\tau=T;\\
u_1-u_0=\tau\psi,\\
u_N-u_{N-1}=\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1}\tau\alpha(t_i)(u_{i+1}-u_i)+\tau\psi_n,\\
u_{l_0}=\zeta
\end{cases} \qquad (3.1.8)
$$

olarak ele alalım. (3.1.8) problemine

$$
u_k=v_k+A^{-1}p \qquad (3.1.9)
$$

formülü uygulanırsa bilinmeyen v_k lar için,

$$\begin{cases} -\dfrac{v_{k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}+Av_k = f_k, 1\le k\le N-1, \\ v_1-v_0=\tau\psi, \\ v_N-v_{N-1}=\sum\limits_{i=0}^{N-1}\tau\alpha(t_i)(v_{i+1}-v_i)+\tau\psi_n \end{cases} \tag{3.1.10}$$

şeklindeki yardımcı lokal olmayan fark problemi elde edilir.

(3.1.8) problemin çözümünün algoritması üç adımdan oluşturulur. Birinci adımda (3.1.10) yardımcı problemin çözümü $\{v_k\}_0^N$ bulunur. v_{l_0} hesaplanılır. İkinci adımda ise $p=A\zeta-Av_{l_0}$ formülle p eleman belirlenir. Üçüncü adımda (3.1.9) formül ile $\{u_k\}_0^N$ elde edilir.

Teorem 3.1.1. α skaler fonksiyonun $(2.1.4)$ koşulunu sağladığını ve $\varphi, \psi, \zeta\in D(A)$, $\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\in C_{0T}^{a,a}(H)(0<a<1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (3.1.8) fark probleminin $\left(\left\|\{u_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|, p\right)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır.

$$\left\|\{u_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\le M(\delta)\left[\|\varphi\|_H+\|\zeta\|_H+\|\psi\|_H+\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right], \tag{3.1.11}$$

$$\left\|A^{-1}p\right\|_{\mathrm{H}}\le M(\delta)\left[\|\varphi\|_H+\|\zeta\|_H+\|\psi\|_H+\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right] \tag{3.1.12}$$

$$\|p\|_{\mathrm{H}}\le M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H+\|A\zeta\|_H+\|A\psi\|_H+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right]. \tag{3.1.13}$$

Bu kestirimde bulunan $M(\delta)$ sabitleri, verilen a,φ,ζ,ψ elemanlarından ve $\{f_k\}_{k=1}^{N-1}$ ‘dan bağımsızdır.

İspat:

$$\begin{cases} -\tau^2(v_{k+1}-2v_k+v_{k-1})+Av_k = f_k, 1\le k\le N-1, \\ v_0 \; ve \; v_N \; verilmiştir \end{cases} \tag{3.1.14}$$

direkt probleminin çözümü Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında,

$$\begin{aligned} v_i &= P\left[\left(R^i - R^{2N-i}\right)v_0 + \left(R^{N-i} - R^{N+i}\right)v_N\right] \\ &\quad - P\left(R^{N-i} - R^{N+i}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j} - R^{N+j}\right)f_j\tau \\ &\quad + D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|i-j|} - R^{i+j}\right)f_j\tau \; ,1\le i\le N-1. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

formülü ile ifade edilmiştir. (3.1.10) yardımcı lokal olmayan problemin ilk şartından

$$\begin{aligned} &P\left[\left(R - R^{2N-1} -\right)v_0 + \left(R^{N-1} - R^{N+1}\right)v_N\right] \\ &-P\left(R^{N-1} - R^{N+1}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j} - R^{N+j}\right)f_j\tau \\ &+D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|1-j|} - R^{1+j}\right)f_j\tau - v_0 = \tau\varphi. \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} &\left(R - R^{2N-1} - I + R^{2N}\right)v_0 + \left(R^{N-1} - R^{N+1}\right)v_N \\ &= \left(R^{N-1} - R^{N+1}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j} - R^{N+j}\right)f_j\tau \\ &-(I - R^{2N})D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|1-j|} - R^{1+j}\right)f_j\tau + \tau(I - R^{2N})\varphi \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$F_1 = \left(R^{N-1} - R^{N+1}\right) D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j}\right) f_j \tau$$
$$- (I - R^{2N}) D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|1-j|} - R^{1+j}\right) f_j \tau + \tau (I - R^{2N}) \varphi$$

olmak üzere,

$$\left(R - R^{2N-1} - I + R^{2N}\right) v_0 + \left(R^{N-1} - R^{N+1}\right) v_N = F_1 \tag{3.1.17}$$

alınır. (3.1.10) yardımcı lokal olmayan problemin ikinci lokal olmayan şartından

$$\tau\alpha(t_0) v_0 - \sum_{i=1}^{N-2} \tau \left[\ \alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right]\ v_i$$
$$+\left[-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right] v_{N-1}$$
$$+\left[1 - \tau\alpha(t_{N-1})\right] v_N = \tau\psi$$

alırız.

(3.1.15) formülü kullanarak,

$$\tau\alpha(t_0) v_0 - \sum_{i=1}^{N-2} \tau \left[\ \alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right] P\left[\left(R^i - R^{2N-i}\right) v_0 + \left(R^{N-i} - R^{N+i}\right) v_N\ \right]$$
$$-\sum_{i=1}^{N-2} \tau \left[\ \ \alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right] \left[P\left(R^{N-i} - R^{N+i}\right) D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j}\right) f_j \tau \right.$$
$$\left. -D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|i-j|} - R^{i+j}\right) f_j \tau \right] + \left[-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right]$$
$$\times P\left[\left(R^{N-1} - R^{N+1}\right) v_0 + \left(R - R^{2N-1}\right) v_N\ \right]$$
$$-\left[-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right] \left[P\left(R - R^{2N-1}\right) D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j}\right) f_j \tau \right.$$
$$\left. -D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|N-1-j|} - R^{N-1+j}\right) f_j \tau \right]$$
$$+\left[1 - \tau\alpha(t_{N-1})\right] v_N = \tau\psi$$

elde edilir. Buna göre,

$$
\Big\{\tau\alpha(t_0)-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]P\left(R^i-R^{2N-i}\right)
$$
$$
+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]P\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\Big\}v_0
$$
$$
+\Big\{-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]P\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]
$$
$$
\times P\left(R-R^{2N-1}\right)+\left[1-\tau\alpha(t_{N-1})\right]\Big\}v_N
$$
$$
=\tau\psi+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]
$$
$$
\times\left[P\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)f_j\tau-D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|i-j|}-R^{i+j}\right)f_j\tau\right]
$$
$$
+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]
$$
$$
\times\Bigg[P\left(R-R^{2N-1}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)f_j\tau
$$
$$
-D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right)f_j\tau\Bigg]
$$

ve

$$
\Big\{\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^i-R^{2N-i}\right)
$$
$$
+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\Big\}v_0
$$
$$
+\Big\{-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)
$$
$$
+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)+\left[1-\tau\alpha(t_{N-1})\right]\left(I-R^{2N}\right)v_N\Big\}
$$
$$
=\tau(I-R^{2N})\psi+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\Big[\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)D
$$
$$
\times\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)f_j\tau-(I-R^{2N})D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|i-j|}-R^{i+j}\right)f_j\tau\Big]
$$

$$+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left[\left(R-R^{2N-1}\right)D\right.$$
$$\left.\times\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)f_j\tau-(I-R^{2N})D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right)f_j\tau\right.$$

olur. Böylece,

$$F_2=\tau(I-R^{2N})\psi+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left[\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)D\right.$$
$$\left.\times\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)f_j\tau-(I-R^{2N})D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|i-j|}-R^{i+j}\right)f_j\tau\right]$$
$$+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left[\left(R-R^{2N-1}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)f_j\tau\right.$$
$$\left.-(I-R^{2N})D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right)f_j\tau\right]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left\{\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)\right.\\&\left.+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\right\}v_0\\&+\left\{-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\right.\\&\left.+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)+\left[1-\tau\alpha(t_{N-1})\right]\left(I-R^{2N}\right)\right\}v_N\\&=F_2\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

alınır. Sonuç olarak, $(3.1.17)$ ve $(3.1.18)$ denklemleri

$$\begin{cases}a_{11}v_0+a_{12}v_N=F_1,\\a_{21}v_0+a_{22}v_N=F_2\end{cases}\tag{3.1.19}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$a_{11}=R-R^{2N-1}-I+R^{2N}, a_{12}=R^{N-1}-R^{N+1},$$

$$a_{21}=\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)]\left(R^i-R^{2N-i}\right)+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)$$

$$a_{22}=-\sum_{i=1}^{N-2}\tau[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)+\left[1-\tau\alpha(t_{N-1})\right](I-R^{2N})$$

Şimdi

$$R-R^{2N-1}-I+R^{2N}=-\left(I-R\right)-R^{2N-1}\left(I-R\right)=-\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left(R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right)\left[-\left(R-R^{2N-1}\right)+(I-R^{2N})\right]+\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\\
&-\left(R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right)^2+\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)^2\\
&=\left(R^{N-1}-R^{N+1}-R+R^{2N-1}+I-R^{2N}\right)\left(R^{N-1}-R^{N+1}+R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right)\\
&=\left(R^{N-1}\left(I-R\right)\left(I+R\right)+\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)\right)\left(R^{N-1}\left(I-R\right)\left(I+R\right)-\left(I-R\right)\left(I+R^{2N-1}\right)\right)\\
&=\left(I-R\right)^2\left(R^{N-1}\left(I+R\right)+\left(I+R^{2N-1}\right)\right)\left(R^{N-1}\left(I+R\right)-\left(I+R^{2N-1}\right)\right)\\
&=\left(I-R\right)^2\left(R^{2N-2}\left(I+R\right)^2-\left(I+R^{2N-1}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

olduğuna göre, $(3.1.19)$ denklem sisteminden elde edilmiş olan operatörün determinantı

$$\begin{aligned}
G_1=&\left(R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right)\Big\{-\sum_{i=1}^{N-2}\tau[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\\
&+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)+\left[1-\tau\alpha(t_{N-1})\right](I-R^{2N})\Big\}\\
&-\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\Big\{\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)]\left(R^i-R^{2N-i}\right)\\
&+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\Big\}\\
&=\left(R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right)\left[-\left(R-R^{2N-1}\right)+(I-R^{2N})\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)-(I-R)\left(I+R^{2N-1}\right)\\
&\times\left\{-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\right.\\
&\left.+\left[\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)-\tau\alpha(t_{N-1})(I-R^{2N})\right\}\\
&-\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\left\{\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)\right.\\
&\left.+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\right\}\\
&=(I-R)^2\left(R^{2N-2}(I+R)^2-\left(I+R^{2N-1}\right)^2\right)\\
&-(I-R)\left(I+R^{2N-1}\right)\left\{-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\right.\\
&\left.+\left[\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)-\tau\alpha(t_{N-1})(I-R^{2N})\right\}\\
&-\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\left\{\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)\right.\\
&\left.+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 3.1.2 uygulanılırsa, (3.1.19) denklem sistemin çözümü

$$
\begin{aligned}
v_0=G_1^{-1}&\left\{\left[-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right)\right.\right.\\
&+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)+\left[1-\tau\alpha(t_{N-1})\right](I-R^{2N})\Big]F_1\\
&\left.-\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)F_2\right\}
\end{aligned}
\tag{3.1.20}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
v_N=G_1^{-1}&\left\{\left(R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right)F_2\right.\\
&-\left[\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{i}-R^{2N-i}\right)\right.\\
&\left.\left.+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\right]F_1\right\}
\end{aligned}
\tag{3.1.21}
$$

olarak bulunur. (3.1.14) problemin çözümü için Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) kitabında

$$\left\|\{v_k\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \leq M\left[\left\|\{f_k\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} + \|Rv_0\|_H + \|Rv_N\|_H\right] \tag{3.1.22}$$

kestirimin sağlandığı belirtilmiştir

Üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini $(3.1.20)$ ve $(3.1.21)$ eşitliklerini kullanarak, dahası $(3.1.1)$ ve $(3.1.3)$ kestirimlerini de uygulayarak,

$$\begin{aligned}
\|Rv_0\|_H \leq{} & \|G_1^{-1}\|_{H\to H}\|R\|_{H\to H}\Bigg\{\Bigg[-\tau\sum_{i=1}^{N-2}\big|[\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)]\big|\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H} \\
&+\big|[-1+\tau(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2}))]\big|\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}+\left|1-\tau\alpha(t_{N-1})\right|\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\Bigg] \\
&\times\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_k\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \\
&-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|1-j|}-R^{1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_j\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}+\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|\varphi\|_H \\
&-\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\Bigg[\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|\psi\|_H+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right| \\
&\times\Bigg[\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_j\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \\
&-\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|i-j|}-R^{i+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_j\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Bigg] \\
&+\left|-1+\tau(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2}))\right|\Bigg[\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_j\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \\
&-\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_j\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Bigg]\Bigg]\Bigg\} \\
\leq{} & M(\delta)\left(\|\psi\|_H+\|\varphi\|_H+\left\|\{f_k\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left\|Rv_N\right\|_H \le & \left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|R\right\|_{H\to H}\Big\{\left\|R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right\|_{H\to H}\\
&\times\Big[\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|\psi\right\|_{H\to H}+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|\\
&\times\Big[\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\\
&-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|i-j|}-R^{i+j}\right\|\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Big]\\
&+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\Big[\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\\
&-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Big]\Big]\\
&-\tau\left|\alpha(t_0)\right|\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|\left\|R^i-R^{2N-i}\right\|_{H\to H}\\
&+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\\
&\times\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\\
&-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|1-j|}-R^{1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}+\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi\right\|_{H\to H}\Big\}\\
\le & M(\delta)\left(\left\|\psi\right\|_H+\left\|\varphi\right\|_H+\left\|\left\{f_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right).
\end{aligned}
$$

kestirimi bulunur. Sonuçta, $(3.1.22)$ kestiriminden

$$\left\|\left\{v_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\le M(\delta)\left[\left\|\varphi\right\|_H+\left\|\psi\right\|_H+\left\|\left\{f_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right] \tag{3.1.23}$$

elde edilir. Burada

$$A^{-1}p=\zeta-v_{l_0} \tag{3.1.24}$$

uygulayalım.

$$A^{-1}p=\zeta-P\left[\left(R^{l_0}-R^{2N-l_0}\right)v_0+\left(R^{N-l_0}-R^{N+l_0}\right)v_N\right]$$
$$+P\left(R^{N-l_0}-R^{N+l_0}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j}-R^{N+j}\right)f_j\tau$$
$$-D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|l_0-j|}-R^{l_0+j}\right)f_j\tau$$

eşitliği bulunur. Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini kullanarak, (3.1.12) eşitsizliliğini,

$$\left\|A^{-1}p\right\|_H\leq\|\zeta\|_{H\to H}-\|P\|_{H\to H}\left[\left\|R^{l_0}-R^{2N-l_0}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\times\left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\{\left[-\sum_{i=1}^{N-2}\tau|\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)|\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\right.\right.$$
$$+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}$$
$$\left.\left.+|1-\tau\alpha(t_{N-1})|\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\right]\|F_1\|_{C(H)}-\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\|F_2\|_{C(H)}\right\}$$
$$+\left\|R^{N-l_0}-R^{N+l_0}\right\|\left[\left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\{\left\|R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right\|_{H\to H}\|F_2\|_{C(H)}\right.\right.$$
$$-\left[\tau|\alpha(t_0)|\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}-\sum_{i=1}^{N-2}\tau|\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)|\left\|R^{i}-R^{2N-i}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\right]\|F_1\|_{C(H)}\right\}\right]$$
$$+\|P\|_{H\to H}\left\|R^{N-l_0}-R^{N+l_0}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\max_{1\leq j\leq N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}$$
$$-\|D\|_{H\to H}\max_{1\leq j\leq N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|l_0-j|}-R^{l_0+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}$$
$$\leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_H+\|\zeta\|_H+\|\psi\|_H+\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}\right]$$

ve

$$\left\|A^{-1}p\right\|_{\mathrm{H}} \leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\psi\|_H + \left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right]$$

ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} p = A\zeta - PA&\left[\left(R^{l_0} - R^{2N-l_0}\right)v_0 + \left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\right)v_N\right] \\ &+ AP\left(R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\right)D\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{N-j} - R^{N+j}\right)f_j\tau \\ &- AD\sum_{j=1}^{N-1}\left(R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j}\right)f_j\tau \end{aligned}$$

Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini kullanarak, (3.1.13) kararlılık kestirimi

$$\begin{aligned} \|p\|_H \leq \|A\zeta\|_H - \|AP\|_H &\left[\left\|R^{l_0} - R^{2N-l_0}\right\|_{H\to H}\right. \\ &\times\left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\{\left[-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right|\left\|R^{N-i} - R^{N+i}\right\|_{H\to H}\right.\right. \\ &+\left|-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R - R^{2N-1}\right\|_{H\to H} \\ &\left.+\left|1 - \tau\alpha(t_{N-1})\right|\left\|I - R^{2N}\right\|_{H\to H}\right]\left\|F_1\right\|_{\mathrm{C}(H)} - \left\|R^{N-1} - R^{N+1}\right\|_{H\to H}\left\|F_2\right\|_{\mathrm{C}(H)}\Big\} \\ &\left\|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\right\|_{H\to H}\left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\{\left\|R - R^{2N-1} - I + R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|F_2\right\|_{\mathrm{C}(H)}\right. \\ &-\left[\tau\left|\alpha(t_0)\right|\left\|I - R^{2N}\right\|_{H\to H} - \sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right|\left\|R^i - R^{2N-i}\right\|_{H\to H}\right. \\ &\left.\left.\left.+\left|-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R^{N-1} - R^{N+1}\right\|_{H\to H}\right]\left\|F_1\right\|_{\mathrm{C}(H)}\right\}\right] \\ &+\left|AP\right|_H\left\|R^{N-l_0} - R^{N+l_0}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\max_{1\leq j\leq N-1}\left\|R^{N-j} - R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \\ &-\|AD\|_{H\to H}\,\tau\max_{1\leq j\leq N-1}\left\|R^{|l_0-j|} - R^{l_0+j}\right\|_{H\to H}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \\ &\leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\zeta\|_H + \|\psi\|_H + \left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right] \end{aligned}$$

$$\|p\|_{H} \leq M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\psi\|_H + \frac{1}{(1-a)a}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right].$$

(3.1.13) kararlılık kestirimi ulaşılır. (3.1.19) kestirimi ile $(3.1.23)$ eşitsizliği (3.1.10) denklemleri kullanılarak,

$$\left\|\{u_k\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(H)} \leq M(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \|\zeta\|_H + \left\|\{f_k\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(H)}\right]$$

(3.1.11) kararlılık kestirimi ulaşılır. Böylece, Teorem 3.1.1 ispatı elde edilmiş olur.

Teorem 3.1.2. α skaler fonksiyonun $(2.1.4)$ koşulunu sağladığını ve $\varphi, \psi, \zeta \in D(A)$, $\{f_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{a,a}(H)(0<a<1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (3.1.8) fark probleminin $\left(\left\|\{u_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|, p\right)$ çözümü aşağıdaki hemen hemen koersif eşitsizliği sağlanır.

$$\begin{aligned}&\left\|\left\{\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)} + \left\|\{Au_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)} + \|p\|_H \\ &\leq M(\delta)\left\{\|A\varphi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\psi\|_H + \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1+\left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right\}.\end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Bu kestirimde bulunan $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau, a, \varphi, \zeta, \psi$ elemanlarından ve $\{f_k\}_{k=1}^{N-1}$ ‘dan bağımsızdır.

İspat: (3.1.14) probleminin çözümü için,

$$\begin{aligned}&\left\|\left\{\frac{v_{k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)} + \left\|\{Av_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)} + \|p\|_H \\ &\leq M(\delta)\left\{\|Av_0\|_H + \|Av_N\|_H + \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1+\left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right\}.\end{aligned} \quad (3.1.26)$$

kestirimi Ashyralyev ve Sobolevskii'nin (2004) çalışmasında ispatlanmıştır. (3.1.1), (3.1.3) kestirimleri, Öztürk'ün (2013) çalışmasında ifade edilmiş olan

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left\|\left(I-R\right)R^{j-1}\right\|_{H\to H} \leq M \min\left\{ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1+\tau\left|In\|B\|_{H\to H}\right|\right\} \qquad (3.1.27)$$

eşitsizliği ve $(3.1.20)$ ve $(3.1.21)$ denklemleri kullanılarak lokal olmayan (3.1.10) formüllerinin çözümü için

$$\begin{aligned}\|Av_0\|_{\mathrm{H}} + \|Av_N\|_{\mathrm{H}} \leq M(\delta)\Big\{&\|A\varphi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\psi\|_H \\ &+ \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1+\left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}\Big\}\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşmamız gerekir. Bu durum için $(3.1.20)$ ve $(3.1.21)$ denklemleri kullanılarak ve $A=B^2$ kestiriminde,

$$\begin{aligned}Av_0 = G_1^{-1}\Big\{&\Big[-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{N-i}-R^{N+i}\right) \\ &+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R-R^{2N-1}\right)+\left[1-\tau\alpha(t_{N-1})\right](I-R^{2N})\Big]AF_1 \\ &-\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)AF_2\Big\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}Av_N = G_1^{-1}\Big\{&\left(R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right)AF_2 \\ &-\Big[\tau\alpha(t_0)(I-R^{2N})-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left[\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\left(R^{i}-R^{2N-i}\right) \\ &+\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\left(R^{N-1}-R^{N+1}\right)\Big]AF_1\Big\}\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$AF_1 = \left(R^{N-1} - R^{N+1}\right) AD \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j}\right) f_j \tau$$
$$- (I - R^{2N}) \mathrm{A}\, D \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|1-j|} - R^{1+j}\right) f_j \tau + \tau (I - R^{2N}) \mathrm{A}\, \varphi$$

ve

$$AF_2 = \tau(I - R^{2N}) A\psi + \sum_{i=1}^{N-2} \tau \left[\ \alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i)\right] \left[\left(R^{N-i} - R^{N+i}\right) AD \right.$$
$$\left. \times \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j}\right) f_j \tau - (I - R^{2N}) AD \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|i-j|} - R^{i+j}\right) f_j \tau \right]$$
$$+ \left[-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right] \left[\left(R - R^{2N-1}\right) AD \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{N-j} - R^{N+j}\right) f_j \tau \right.$$
$$\left. -(I - R^{2N}) AD \sum_{j=1}^{N-1} \left(R^{|N-1-j|} - R^{N-1+j}\right) f_j \tau \right]$$

şeklinde ifade edilmiştir.

Öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen eşitsizliğini ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini $\|AF_1\|_{C(\mathrm{H})}$ için uygulayarak,

$$\|AF_1\|_{C(\mathrm{H})} \le \left\|R^{N-1} - R^{N+1}\right\|_{H\to H} \|AD\|_{H\to H}$$
$$\times \tau \max_{1\le j\le N-1} \left\|R^{N-j} - R^{N+j}\right\|_{H\to H} \left\|\{ f_k \}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$
$$- \left\|I - R^{2N}\right\|_{H\to H} \|AD\|_{H\to H} \times \tau \max_{1\le j\le N-1} \left\|R^{|1-j|} - R^{1+j}\right\|_{H\to H} \left\|\{ f_k \}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$
$$- \tau \left\|I - R^{2N}\right\|_{H\to H} \|A\varphi\|_{H\to H}$$
$$\le M(\delta) \left(\|\varphi\|_H + \left\|\{ f_k \}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. $(3.1.1)$ ve $(3.1.27)$ eşitsizliklerinden,

$$\|AF_1\|_{C(\mathrm{H})} \le M(\delta) \left\{ \|A\varphi\|_H + \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1 + \left| ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H\to H} \right| \right] \left\|\{ f_k \}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)} \right\}$$

elde edilir. Benzer biçimde işlemler $\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})}$ için de uygulanarak,

$$\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})} \le \tau \left\|I - R^{2N}\right\|_{H\to H} \|A\psi\|_{H\to H} + \sum_{i=1}^{N-2} \tau \left| \alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i) \right|$$

$$\Big[\left\|R^{N-i} - R^{N+i}\right\|_{H\to H} \|AD\|_{H\to H} \tau \max_{1\le j\le N-1} \left\|R^{N-j} - R^{N+j}\right\|_{H\to H} \left\|\left\{ f_j \right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$- \left\|I - R^{2N}\right\|_{H\to H} \|AD\|_{H\to H} \tau \max_{1\le j\le N-1} \left\|R^{|i-j|} - R^{i+j}\right\|_{H\to H} \left\|\left\{ f_j \right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \Big]$$

$$+ \left|-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right)\right| \left\|R - R^{2N-1}\right\|_{H\to H} \|AD\|_{H\to H} \tau \max_{1\le j\le N-1} \left\|R^{N-j} - R^{N+j}\right\|_{H\to H} \left\|\left\{ f_j \right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$- \left\|R - R^{2N-1}\right\|_{H\to H} \|AD\|_{H\to H} \tau \max_{1\le j\le N-1} \left\|R^{|N-1-j|} - R^{N-1+j}\right\|_{H\to H} \left\|\left\{ f_j \right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} \Big]$$

$\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})}$ eşitsizliği elde edilir. $(3.1.1)$ ve $(3.1.27)$ eşitsizliklerinden,

$$\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})} \le M(\delta) \left\{ \|A\psi\|_H + \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1 + \left| ln \left\| A^{\frac{1}{2}} \right\|_{H\to H} \right| \right] \left\| \left\{ f_k \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)} \right\}.$$

bulunur. Au_0 ve Au_N öz-eşlenik operatörleri için operatör işlemlerini, üçgen eşitsizliğini ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak $\|Au_0\|_H$ ve $\|Au_N\|_H$ için,

$$\|Av_0\|_H \le \left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H} \|A\|_{H\to H} \left\{ \left[-\tau \sum_{i=1}^{N-2} \left\| \left[\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i) \right] \right\| \left\| R^{N-i} - R^{N+i} \right\|_{H\to H} \right. \right.$$

$$+ \left\| \left[-1 + \tau\left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2})\right) \right] \right\| \left\| R - R^{2N-1} \right|_{H\to H} + \left| 1 - \tau\alpha(t_{N-1}) \right| \left\| I - R^{2N} \right\|_{H\to H} \Big]$$

$$\times \left\| R^{N-1} - R^{N+1} \right\|_{H\to H} \|D\|_{H\to H} \tau \sum_{j=1}^{N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H\to H} \left\| \left\{ f_k \right\}_{k=0}^{N-1} \right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$- \left\| I - R^{2N} \right\|_{H\to H} \|D\|_{H\to H} \tau \sum_{j=1}^{N-1} \left\| R^{|1-j|} - R^{1+j} \right\|_{H\to H} \left\| \left\{ f_j \right\}_{j=1}^{N-1} \right\|_{C(\mathrm{H})} + \tau \left\| I - R^{2N} \right\|_{H\to H} \|\varphi\|_H$$

$$- \left\| R^{N-1} - R^{N+1} \right\|_{H\to H} \left[\tau \left\| I - R^{2N} \right\|_{H\to H} \|\psi\|_H + \sum_{i=1}^{N-2} \tau \left| \alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i) \right| \right.$$

$$\times \left[\left\| R^{N-i} - R^{N+i} \right\|_{H\to H} \|D\|_{H\to H} \tau \sum_{j=1}^{N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H\to H} \left\| \left\{ f_j \right\}_{j=1}^{N-1} \right\|_{C(\mathrm{H})} \right.$$

$$-\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|i-j|}-R^{i+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Bigg]$$

$$+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\Bigg[\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$-\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Bigg]\Bigg]\Bigg\}$$

$$\leq M(\delta)\left(\left\|\psi\right\|_H+\left\|\varphi\right\|_H+\left\|\left\{f_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right)$$

ve

$$\left\|Av_N\right\|_H\leq\left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|A\right\|_{H\to H}\Big\{\left\|R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\Bigg[\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|\psi\right\|_{H\to H}+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|$$

$$\times\Bigg[\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|i-j|}-R^{i+j}\right\|\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Bigg]$$

$$+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\Bigg[\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Bigg]\Bigg]$$

$$-\tau\left|\alpha(t_0)\right|\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|\left\|R^{i}-R^{2N-i}\right\|_{H\to H}$$

$$+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|1-j|}-R^{1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}+\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi\right\|_{H\to H}\Bigg\}$$

$$\leq M(\delta)\left(\left\|\psi\right\|_H+\left\|\varphi\right\|_H+\left\|\left\{f_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right)$$

kestirimleri sağlanır. $(3.1.1)$ ve $(3.1.3)$ eşitsizliklerini $(2.1.4)$ koşulunu ve $\|AF_1\|_{C(\mathrm{H})}$, $\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})}$ için elde edilmiş olan kestirimleride kullanarak, istenilen kestirim

$$\begin{aligned}\|Av_0\|_H + \|Av_N\|_H &\leq M(\delta)\Big[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \|A\zeta\|_H \\ &+ \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1 + \left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}\Big\}\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

$$\begin{aligned}\left\|\{Av_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)} &\leq M(\delta)\Big\{\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \|A\zeta\|_H \\ &+ \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1 + \left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}\Big\}\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

bulunur. Sonuçta (3.1.10) yardımcı lokal olmayan fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak $(3.1.26)$ kestirimi elde edilir.

$$p = A\zeta - Av_{l_0}$$

biçimindeki bağıntısına $\|Av_0\|_H$ için ifade edilen eşitsizliği ve üçgen eşitsizliğini uygulayarak $\|p\|_H$ için,

$$\|p\|_H \leq M(\delta)\Big[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \|A\zeta\|_H + \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1 + \left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}\Big\} \tag{3.1.29}$$

kestirimi bulunur. (3.1.9) denklemine $(3.1.28)$ ve $(3.1.29)$ eşitsizlikleri uygulanarak

$$\left\|\{Au_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)} \le M(\delta)\left[\|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \|A\zeta\|_H + \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1+\left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(H)}\right\} \quad (3.1.30)$$

elde edilir. Böylelikle, (3.1.8) doğruluk fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}\left\|\left\{\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})} &\le M(\delta)\{\|A\varphi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\psi\|_H \\ &+ \min\left[ln\left(\frac{1}{\tau}\right), 1+\left|ln\left\|A^{\frac{1}{2}}\right\|_{H\to H}\right|\right]\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right\}\end{aligned} \quad (3.1.31)$$

elde edilir. Sonuç olarak, üçgen eşitsizliğinden, $(3.1.29)$, $(3.1.30)$ ve $(3.1.31)$ eşitsizliklerinden $(3.1.25)$ elde edilir. Böylelikle, Teorem 3.1.2 ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.3. α skaler fonksiyonun $(2.1.4)$ koşulunu sağladığını ve $\varphi, \psi, \zeta \in D(A)$, $\{f_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{a,a}(H)(0<a<1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (3.1.8) fark probleminin $\left(\left\|\{u_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|, p\right)$ çözümü için aşağıdaki koersif kararlılık kestirimleri geçerlidir:

$$\begin{aligned}&\left\|\{\tau^{-2}u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)} + \left\|\{Au_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)} + \|p\|_H \\ &\le M(\delta)\left[\frac{1}{(1-a)a}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)} + \|A\varphi\|_H + \|A\zeta\|_H + \|A\psi\|_H\right].\end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Bu kestirimde bulunan $M(\delta)$ sabiti, verilen a, φ, ζ, ψ elemanlarından ve $\{f_k\}_{k=1}^{N-1}$ ‘dan bağımsızdır.

İspat: (3.1.14) direkt problemin çözümü için, Ashyralyev ve Sobolevskii’nin (2004) çalışmasında,

$$\left\| \left\{ \tau^{-2} v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}$$

$$\leq M(\delta) \left[\frac{1}{(1-a)a} \left\| \left\{ f_k \right\}_{k=1}^{N-1} \right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)} + \| Av_0 \|_H + \| Av_N \|_H \right].$$

eşitsizliğinin doğruluğu ifade edilmiştir. (3.1.10) yardımcı lokal olmayan fark probleminin çözümü için $(3.1.20)$ ve $(3.1.21)$ uygulanarak,

$$\begin{aligned} Av_0 = G_1^{-1} \Bigg\{ & \Bigg[-\sum_{i=1}^{N-2} \tau \left[\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i) \right] \left(R^{N-i} - R^{N+i} \right) \\ & + \left[-1 + \tau \left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2}) \right) \right] \left(R - R^{2N-1} \right) + \left[1 - \tau\alpha(t_{N-1}) \right] (I - R^{2N}) \Bigg] AF_1 \\ & - \left(R^{N-1} - R^{N+1} \right) AF_2 \Bigg\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Av_N = G_1^{-1} \Bigg\{ & \left(R - R^{2N-1} - I + R^{2N} \right) AF_2 \\ & - \Bigg[\tau\alpha(t_0)(I - R^{2N}) - \sum_{i=1}^{N-2} \tau \left[\alpha(t_{i-1}) - \alpha(t_i) \right] \left(R^i - R^{2N-i} \right) \\ & + \left[-1 + \tau \left(\alpha(t_{N-1}) - \alpha(t_{N-2}) \right) \right] \left(R^{N-1} - R^{N+1} \right) \Bigg] AF_1 \Bigg\} \end{aligned}$$

bulunur. İlk olarak, $A = B^2$ ve $P = (I - R^{2N})^{-1}$ eşitliklerinden, öz-eşlenik operatörler için operatör işlemlerini, üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayarak, $\|AF_1\|_{C(\mathrm{H})}$ ve $\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})}$ için,

$$\begin{aligned} \|AF_1\|_{C(\mathrm{H})} \leq & \left\| R^{N-1} - R^{N+1} \right\|_{H \to H} \|AD\|_{H \to H} \\ & \times \tau \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{N-j} - R^{N+j} \right\|_{H \to H} \left\| \left\{ f_k \right\}_{k=0}^{N-1} \right\|_{C(\mathrm{H})} \\ & - \left\| I - R^{2N} \right\|_{H \to H} \|AD\|_{H \to H} \times \tau \max_{1 \leq j \leq N-1} \left\| R^{|1-j|} - R^{1+j} \right\|_{H \to H} \left\| \left\{ f_k \right\}_{k=0}^{N-1} \right\|_{C(\mathrm{H})} \end{aligned}$$

$$-\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|A\varphi\|_{H\to H}$$
$$\leq M(\delta)\left(\|\varphi\|_H+\left\|\{f_k\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right)$$

ve

$$\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})}\leq\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|A\psi\|_{H\to H}+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|$$
$$\Big[\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\|AD\|_{H\to H}\,\tau\max_{1\leq j\leq N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$
$$-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|AD\|_{H\to H}\,\tau\max_{1\leq j\leq N-1}\left\|R^{|i-j|}-R^{i+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Big]$$
$$+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\|AD\|_{H\to H}\,\tau\max_{1\leq j\leq N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$
$$-\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\|AD\|_{H\to H}\,\tau\max_{1\leq j\leq N-1}\left\|R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Big]$$

bulunur. (3.1.1) ve (3.1.3) kestirimlerinden ve $(2.1.4)$ koşulundan

$$\|AF_1\|_{C(\mathrm{H})}\leq M(\delta)\left\{\|A\varphi\|_H+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right\}$$

ve

$$\|AF_2\|_{C(\mathrm{H})}\leq M(\delta)\left\{\|A\psi\|_H+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\{f_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right\}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Şimdi de üçgen eşitsizliği uygulanarak $\|Av_0\|_H$ ve $\|Av_N\|_H$ için,

$$
\begin{aligned}
\left\|Av_0\right\|_H \le& \left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|A\right\|_{H\to H}\left\{\left[-\tau\sum_{i=1}^{N-2}\left\|\left[\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right]\right\|\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\right.\right.\\
&+\left\|\left[-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right]\right\|\left|R-R^{2N-1}\right|_{H\to H}+\left|1-\tau\alpha(t_{N-1})\right|\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\Big]\\
&\times\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\\
&-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|1-j|}-R^{1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}+\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|\varphi\right\|_H\\
&-\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\left[\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|\psi\right\|_H+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|\right.\\
&\times\left[\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right.\\
&\left.-\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|i-j|}-R^{i+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right]\\
&+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left[\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right.\\
&\left.\left.\left.-\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right]\right]\right\}\\
&\le M(\delta)\left(\left\|\psi\right\|_H+\left\|\varphi\right\|_H+\left\|\left\{f_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left\|Av_N\right\|_H \le& \left\|G_1^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|A\right\|_{H\to H}\left\{\left\|R-R^{2N-1}-I+R^{2N}\right\|_{H\to H}\right.\\
&\times\left[\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|\psi\right\|_{H\to H}+\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|\right.\\
&\times\left[\left\|R^{N-i}-R^{N+i}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right.\\
&\left.-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|i-j|}-R^{i+j}\right\|\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right]\\
&+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left[\left\|R-R^{2N-1}\right\|_{H\to H}\left\|D\right\|_{H\to H}\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right.
\end{aligned}
$$

$$-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|N-1-j|}-R^{N-1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\Bigg]\Bigg]$$

$$-\tau\left|\alpha(t_0)\right|\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}-\sum_{i=1}^{N-2}\tau\left|\ \alpha(t_{i-1})-\alpha(t_i)\right|\left\|R^i-R^{2N-i}\right\|_{H\to H}$$

$$+\left|-1+\tau\left(\alpha(t_{N-1})-\alpha(t_{N-2})\right)\right|\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left\|R^{N-1}-R^{N+1}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{N-j}-R^{N+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}$$

$$\left.-\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|D\|_{H\to H}\,\tau\sum_{j=1}^{N-1}\left\|R^{|1-j|}-R^{1+j}\right\|_{H\to H}\left\|\left\{f_j\right\}_{j=1}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}+\tau\left\|I-R^{2N}\right\|_{H\to H}\|\varphi\|_{H\to H}\right\}$$

$$\leq M(\delta)\left(\|\psi\|_H+\|\varphi\|_H+\left\|\left\{f_k\right\}_{k=0}^{N-1}\right\|_{C(\mathrm{H})}\right)$$

şeklinde elde edilir. Bu kestirimleri kullanarak,

$$\left\|\left\{\tau^{-2}v_{k+1}-2v_k+v_{k-1}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}$$

$$\leq M\left(\delta\right)\left[\frac{1}{(1-a)a}\left\|\left\{f_k\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}+\|A\varphi\|_H+\|A\zeta\|_H+\|A\psi\|_H\right].$$

elde edilir. (3.1.10) yardımcı lokal olmayan fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak

$$\left\|\left\{Av_k\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\leq M\left(\delta\right)\left[\|A\varphi\|_H+\|A\zeta\|_H+\|A\psi\|_H+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\left\{f_k\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right] \qquad (3.1.33)$$

kestirimi elde edilir. (3.1.8) doğruluk fark şemasında $(3.1.32)$ ve (3.1.13) eşitsizlikleri uygulanarak,

$$\left\|\left\{Au_k\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\leq M\left(\delta\right)\left[\|A\varphi\|_H+\|A\zeta\|_H+\|A\psi\|_H+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\left\{f_k\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right] \qquad (3.1.34)$$

kestirimi elde edilir. (3.1.10) yardımcı lokal olmayan fark problemine üçgen eşitsizliği uygulanarak,

$$\begin{aligned}&\left\|\left\{\tau^{-2}u_{k+1}-2u_{k}+u_{k-1}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\\&\leq M(\delta)\left[\|A\varphi\|_{H}+\|A\zeta\|_{H}+\|A\psi\|_{H}+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\left\{f_{k}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right]\end{aligned} \quad (3.1.35)$$

kestirimine bulunur. Böylelikle, $(3.1.33)$, $(3.1.34)$ ve $(3.1.35)$ kestirimlerinden

$$\begin{aligned}&\left\|\left\{\tau^{-2}u_{k+1}-2u_{k}+u_{k-1}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}+\left\|\left\{Au_{k}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}+\|p\|_{H}\\&\leq M(\delta)\left[\|A\varphi\|_{H}+\|A\zeta\|_{H}+\|A\psi\|_{H}+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\left\{f_{k}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(H)}\right].\end{aligned}$$

$(3.1.32)$ kestirimine ulaşılır. Böylelikle Teorem 3.1.3 ispatlanmış olur.

3.2. İntegral Koşullu Neumann Tipi Eliptik Sınır Değer Ters Probleminin Fark Şeması

Bu bölümde bazı notasyonları anlatmakla başlayalım. $n-$boyutlu R_n Öklid uzayında $\Omega=(0,l)^n$ bir açık küp ele alalım. Sınır $S=\partial\Omega$ olsun. Ω küpün kapanışı $\overline{\Omega}=\Omega\cup S$ 'dır. $a_r(x),\varphi(x),\psi(x),\zeta(x)(x\in\overline{\Omega})$ ve $f(t,x)(t\in(0,T),x\in\Omega)$ bilinen düzgün fonksiyonlar, $\alpha(t)\in[0,T]$ aralığında tanımlı skaler fonksiyonu, $\sigma>0$ ve $\lambda_0\in(0,T)$ verilen reel sayılar, ayrıca $\alpha_\tau(x)\geq a_0>0$ $(x\in\Omega)$ olduğunu kabul edelim.

$[0,T]\times\Omega$ bölgesinde, aşağıdaki çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi integral koşullu üst belirli ve Dirichlet sınır değer problemini ele alalım:

$$
\begin{cases}
-u_{tt}(t,x)-\sum_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u_{x_r}(t,x)\right)_{x_r}+\sigma u(t,x)=f(t,x)+p(x), 0<x<l, 0<t<T, \\
u_t\left(0,x\right)=\varphi\left(x\right), u_t\left(T,x\right)=\int_0^T\alpha\left(\lambda\right)u_\lambda\left(\lambda,x\right)d\lambda+\psi\left(x\right), \\
u\left(\lambda_0,x\right)=\zeta(x), x\in\overline{\Omega}, (0<\lambda_0<T)
\end{cases}
\tag{3.2.1}
$$

(3.2.1) problemindeki α skaler fonksiyonu (2.1.4) şartını sağladığını varsayalım. (3.2.1) probleminin diferensiyel operatörünü

$$
A^x u=-\sum_{r=1}^{n}\left(\mathrm{a}_r(x)u_{x_r}(x)\right)_{x_r}+\sigma u(x) \tag{3.2.2}
$$

şeklinde yazalım. Bu operatörün tanım kümesi,

$$
D(A^x)=\left\{u(x)\in L_2(\overline{\Omega}), u(x)=0, x\in S\right\}
$$

şeklindedir.

(3.2.1) probleminin yaklaşımını iki adımda kuracağız. İlk adımda, grid noktalar uzayının

$$
\tilde{\Omega}_h=\left\{x=x_j=\left(h_1 j_1,...,h_n j_n\right); j=\left(j_1,...,j_n\right), j_r=0,...,\mathrm{J}_r, \mathrm{h}_r\mathrm{J}_r=l, r=1,...n\right\},
$$

$$
\Omega_h=\tilde{\Omega}_h\cap\Omega, S_h=\tilde{\Omega}_h\cap S
$$

belirleyelim.

(3.2.2) ile tanımlanan A^x diferensiyel operatörü yerine

$$A_h^x u^h(x) = -\sum_{r=1}^{n} \left(a_r(x) u_{x_r}^h(x) \right)_{x_r, x_i} + \sigma u^h(x) \tag{3.2.3}$$

şeklindeki A_h^x fark operatörü alacağız. Burada, $u(x)$ fonksiyonları tüm $x \in S_h$ noktaları için $u(x) = 0$ şartını sağlayan operatörün

$$D(A_h^x) = \left\{ u^h(x) \in L_{2h}, u^h(x) = 0, x \in S_h \right\}$$

olup kendisi ise öz-eşlenik pozitif tanımlı bir operatördür.

A_h^x operatörünü kullanarak, $u^h(t,x)$ ve $p^h(x)$ bilinmeyen fonksiyonlar için aşağıdaki adi diferensiyel denklem sistemi ele alınır.

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2 u^h(t,x)}{dt^2} + A_h^x u(t,x) = f^h(t,x) + p^h(x), 0 < x < l,\ 0 < t < T,\ x \in \Omega_h, \\ u_t^h(0,x) = \varphi^h(x), u_t^h(T,x) = \int_0^T \alpha(\lambda) u_\lambda^h(\lambda,x) d\lambda + \psi^h(x), \\ u^h(\lambda_0, x) = \zeta^h(x),\ x \in \overline{\Omega}_h,\ (0 < \lambda_0 < T) \end{cases} \tag{3.2.4}$$

İkinci adımda $(3.2.4)$ problemini t değişkenine göre yaklaşımını ele alalım. Bu nedenle N $-$sabit pozitif tam sayısı olmak üzere, grid noktalar uzayını $[0,T]_\tau = \{t_k = k\tau, k = 1,...,N, N\tau = T\}$ ile gösterelim. Şimdi, $u^h(\lambda_0, x)$ değeri için,

$$u^h(\lambda_0, x) = u\left(\left[\frac{\lambda_0}{\tau} \right] \tau, x \right) + o(\tau), x \in \Omega_h$$

şeklinde birinci mertebeden yaklaşım formülü kullanarak, $(3.2.4)$ problemi için

$$
\begin{cases}
-\dfrac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_k^h(x)=f_k^h(x)+p^h(x), 1\le k\le N-1, N\tau=T;\\
u_1^h(x)-u_0^h(x)=\tau\varphi^h(x),\\
u_N^h(x)-u_{N-1}^h(x)=\sum\limits_{i=0}^{N-1}\tau\alpha(t_i)(u_{i+1}^h(x)-u_i^h(x))+\tau\psi^h(x),\\
u_{l_0}^h(x)=\zeta^h(x)
\end{cases}
\tag{3.2.5}
$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması oluştururuz.

$(3.2.4)$ problemi

$$
u^h(t,x)=v^h(t,x)+\left(A_h^x\right)^{-1}p^h(x)
\tag{3.2.6}
$$

formülünü kullanarak, bilinmeyen $v^h(t,x)$ fonksiyonu için lokal olmayan

$$
\begin{cases}
-\dfrac{d^2v^h(t,x)}{dt^2}+A_h^x v(t,x)=f^h(t,x), 0<x<l, 0<t<T, x\in\Omega_h,\\
v_t^h(0,x)=\varphi^h(x), v_t^h(T,x)=\int\limits_0^T\alpha(\lambda)v_\lambda^h(\lambda,x)\,d\lambda+\psi^h(\text{x}),\\
v^h(\lambda_0,x)=\zeta^h(x), x\in\overline{\Omega}_h, (0<\lambda_0<T)
\end{cases}
\tag{3.2.7}
$$

bir yardımcı sınır değer problemini ifade edelim. $p^h(x)$ fonksiyonunun değerlerinin hesaplanması için, (2.1.13) formülüne göre,

$$
p^h(x)=A_h^x\varphi^h(x)-A_h^x u^h\left(t_{l_0},x\right)
\tag{3.2.8}
$$

bağlantısı kullanılacaktır. $(3.2.7)$ problemi için

$$\begin{cases} -\dfrac{v_{k+1}^h(x)-2v_k^h(x)+v_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x v_k^h(x)=f_k^h(x), 1\le k\le N-1, N\tau=T; \\ v_1^h(x)-v_2^h(x)=\tau\varphi^h(x), \\ v_N^h(x)-v_{N-1}^h(x)=\sum\limits_{j=0}^{N-1}\tau e^{-t_i}(v_{j+1}^h(x)-v_j^h(x))+\tau\psi^h(x) \end{cases} \tag{3.2.9}$$

birinci mertebeden doğruluk fark şeması elde edilir.

$L_{2h}=L_2\left(\tilde{\Omega}_h\right)$ ve $W_{2h}^2=W_{2h}^2\left(\tilde{\Omega}_h\right)$ uzaylarında $\tilde{\Omega}_h$ üzerinde tanımlı $\rho^x(x)=\{\rho(h_1 j_1,...,h_n j_n)\}$ grid fonksiyonlarının normları,

$$\left\|\rho^h\right\|_{L_{2h}}=\left(\sum_{x\in\tilde{\Omega}_h}\left|\rho^h(x)\right|^2 h_1...h_n\right)^{1/2}$$

ve

$$\left\|\rho^h\right\|_{W_{2h}^2}=\left\|\rho^h\right\|_{L_{2h}}+\left(\sum_{x\in\tilde{\Omega}_h}\sum_{r=1}^n\left|\left(\rho^h\right)_{x_r}(x)\right|^2 h_1...h_n\right)^{1/2}+\left(\sum_{x\in\tilde{\Omega}_h}\sum_{r=1}^n\left|\left(\rho^h\right)_{x_r\bar{x}_r,j_r}(x)\right|^2 h_1...h_n\right)^{1/2}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.1. α skaler fonksiyonun $(2.1.4)$ koşulunu sağladığını ve $\varphi^h,\psi^h,\zeta^h\in D\left(A_h^x\right)$, $\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^{N-1}\in C_{0T}^{a,a}(L_{2h})(0<a<1)$ olduğunu varsayalım. O halde, (3.2.5) fark şemasının $\left(\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|,p^h\right)$ çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri sağlanır:

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(0T,L_{2h})}\le M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\zeta^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\psi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})}\right], \tag{3.2.10}$$

$$\left\|p^h\right\|_{W_{2h}^2}\le M(\delta)\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\zeta^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{(1-a)a}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C_{0T}^{a,a}(L_{2h})}\right]. \tag{3.2.11}$$

Burada, $M(\delta)$ sabitleri, verilen $a,\varphi^h,\zeta^h,\psi^h$ elemanlardan ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$'den bağımsızdır.

Teorem 3.2.2. α skaler fonksiyonun $(2.1.4)$ koşulunu sağladığını ve $\varphi^h,\ \psi^h,\ \zeta^h \in D(A_h^x)$, $\{f_k\}_{k=1}^{N-1} \in C_{0T}^{a,a}(L_{2h})(0<a<1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, (3.2.5) fark probleminin $\left(\left\|\{u_k\}_{k=1}^{N-1}\right\|, p^h\right)$ çözümü aşağıdaki hemen hemen koersif eşitsizliği sağlanır:

$$\left\|\left\{\frac{u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h}{\tau^2}\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})}+\left\|\left\{A_h^x u_k^h\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})}+\left\|p^h\right\|_{L_{2h}}$$
$$\le M(\delta)\left\{\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\zeta^h\right\|_{W_{2h}^2}+\left\|\psi^h\right\|_{W_{2h}^2}+ln\left(\frac{1}{\tau+h}\right)\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^{N-1}\right\|_{C(L_{2h})}\right\}. \quad (3.2.12)$$

Burada, $M(\delta)$ sabiti, verilen $\tau,a,\varphi^h,\zeta^h,\psi^h$ elemanlardan ve $\{f_k^h\}_{k=1}^{N-1}$'den bağımsızdır.

3.3. Sayısal Uygulamalar

Bu bölümde integral koşullu Neumann tipi eliptik ters problemin sayısal çözümlerini ele alacağız. Sayısal çözümü bulmak için MATLAB programı kullanılmıştır.

İki boyutlu elliptik kısmi diferensiyel denklem için integral koşullu Neumann tipi üst belirli problemi ele alalım:

$$\begin{cases} -u_{tt}(t,x)-u_{xx}(t,x)+u(t,x)=f(t,x)+p(x), 0<x<1, 0<t<1, \\ u_t(0,x)=\varphi(x), u\left(\frac{1}{5},x\right)=\zeta(x), \\ u(1,x)=\int_0^1 e^{-\lambda}u_\lambda(\lambda,x)\,d\lambda+\psi(x), 0\le x\le 1, \\ u(t,0)=u(t,1)=0, 0\le t\le 1. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Burada,

$$f(t,x)=\left[-e^{-t}+(\pi^2+1)(e^{-t}+t)\right]\sin(\pi x),$$

$$\varphi(x)=0,\psi(x)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}\right]\sin(\pi x),\zeta(x)=\left(e^{-\frac{1}{5}}+\frac{6}{5}\right)\sin(\pi x).$$

$(3.3.1)$ problemin gerçek çözümü $u(t,x)=(e^{-t}+t-1)\sin(\pi x)$ ve $p(x)=(\pi^2+1)\sin(\pi x)^2$ olduğu açıktır. $(3.3.1)$ probleminin $u(t,x)$ çözümünü bulmak için $u(t,x)=v(t,x)+A^{-1}p(x)$ bağıntısını kullanarak, bilinmeyen $v(t,x)$ fonksiyonu için

$$\begin{cases} -v_{tt}(t,x)-v_{xx}(t,x)+v(t,x)=f(t,x), 0<x<1, 0<t<1, \\ v_t(0,x)=\varphi(x), \\ v(1,x)=\int_0^1 e^{-\lambda}v_\lambda(\lambda,x)\,d\lambda+\psi(x), 0\le x\le 1, \\ v(t,0)=v(t,1)=0, 0\le t\le 1 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

lokal olmayan integral koşullu yardımcı problem elde edilir.

$(3.3.1)$ problemin çözümünün algoritması üç adımdan oluşturulur. Birinci adımda $(3.3.2)$ yardımcı problemin çözümünü $v(t,x)$ olarak buluruz. İkinci adımda $p(x)=A\xi(x)-Av(\frac{1}{5},x)$ formülle p fonksiyonu belirleyeceğiz. Üçüncü adımda ise $u(t,x)$ fonksiyonu elde edilir.

$(3.3.2)$ problemin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci doğruluk fark şemalarını kuracağız. İlk önce $[0,1]_\tau\times[0,1]_h$ grid noktalar kümesini tanımlayalım:

$$[0,1]_\tau\times[0,1]_h=\left\{(t_k,x_n):t_k=k\tau,k=0,...N,N\tau=1,x_n=nh,n=0,...M,Mh=1\right\}$$

$\lambda_0=\frac{1}{5},l_0=\left[\frac{1}{5\tau}\right],\mu_0=\frac{1}{5\tau}-l_0$ olmak üzere t için birince mertebeden ve x için ikinci mertebeden $(3.3.2)$ problemin doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{v_n^{k+1}-2v_n^k+v_n^{k-1}}{\tau^2}+\dfrac{v_{n+1}^k-2v_n^k+v_{n-1}^k}{h^2}+v_n^k=-f(t_k,x_n), k=\overline{1,N-1}, n=\overline{1,M-1}, \\ v_n^1-v_n^0=0, \\ v_n^N-v_n^{N-1}=\sum\limits_{j=0}^{N-1}\tau e^{-t_i}(v_n^{j+1}-v_n^j)+\tau\psi_n, n=\overline{0,M}, \\ \varphi_n=\varphi(x_n), \psi_n=\psi(x_n), \zeta_n=\zeta(x_n), n=\overline{0,M}; \end{cases} \tag{3.3.3}$$

şeklinde ifade edilir. $(3.3.3)$ fark şemasını

$$V_{n-1}=\begin{bmatrix} v_{n-1}^0 \\ v_{n-1}^1 \\ \vdots \\ v_{n-1}^{N-1} \\ v_{n-1}^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, V_n=\begin{bmatrix} v_n^0 \\ v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^{N-1} \\ v_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, V_{n+1}=\begin{bmatrix} v_{n+1}^0 \\ v_{n+1}^1 \\ \vdots \\ v_{n+1}^{N-1} \\ v_{n+1}^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}$$

notasyonları kullanılarak,

$$\begin{aligned} &A_n v_{n+1}+B_n v_n+C_n v_{n-1}=Ig_n, n=\overline{1,M-1}, \\ &v_0=\vec{0}, v_M=\vec{0}. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

matris formunda yazabiliriz. Burada A, B ve C, $(N+1)\times(N+1)$ tipinde kare matrisler olup, g_n ise $(N+1)\times 1$ tipinde bir sütun matris, I, $(N+1)\times(N+1)$ tipindeki birim matristir.

$$A=C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)}, \tag{3.3.5}$$

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d & b & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & b & d & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d & b & d \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & \cdots & z_{N-2} & z_{N-1} & z_N \end{bmatrix}_{(N+1)\,x(N+1)}, \qquad (3.3.6)$$

$$a=\frac{1}{h^2}, b=-\frac{2}{\tau^2}-\frac{2}{h^2}-1, d=\frac{1}{\tau^2}. \qquad (3.3.7)$$

$$z_1=\left(\frac{3}{2}+\frac{e^{-t_1}}{2}\right)\tau, z_2=\left(-2+\frac{e^{-t_2}}{2}\right)\tau, z_3=-\left(\frac{1+e^{-t_1}-e^{-t_3}}{2}\right),$$

$$z_j=\left(\frac{e^{-t_{j-1}}-e^{-t_{j+1}}}{2}\right)\tau, \text{j}=4,...,\text{N}-2;$$

$$z_{N-1}=\left(-1-\frac{e^{-t_{N-2}}}{2}\tau\right), z_N=\left(1-\frac{e^{-t_{N-1}}}{2}\tau\right),$$

$$g_n=\begin{bmatrix} g_n^0 \\ g_n^1 \\ \vdots \\ g_n^{N-1} \\ g_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)x1}, n=1,...M-1$$

$$g_n^0=0, g_n^N=\tau\psi_n, n=\overline{1,M-1}$$

$$g_n^k=-f(t_k,x_n), k=\overline{1,N-1}, n=\overline{1,M-1}.$$

(3.3.3) denklem sisteminin çözümünü (Samarskii ve Nikolaev, 1989)

$$v_n=a_{n+1}v_{n+1}+\beta_{n+1}, n=1,...,M-1,$$

şeklinde arayacağız. Burada $\alpha_n(n=1,...M-1), (N+1)\times(N+1)$ tipindeki kare matrisler, $\beta_n(n=1,...M-1)$ ise $(N+1)\times 1$ tipindeki sütun matrislerdir. $\alpha_1, (N+1)\times(N+1)$ tipindeki sıfır kare matris ve β_1, $(N+1)\times 1$ tipindeki sıfır elemanlardan oluşan sütun vektörü olmak üzere, α_{n+1} , β_{n+1} katsayı matrisleri için,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -(\beta_n + C_n\alpha_n)^{-1} A_n, \\ \beta_{n+1} &= -(\beta_n + C_n\alpha_n)^{-1}(\mathrm{I}\, g_n - C_n\beta_n), n = 1,...M-1 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

formülleri geçerlidir. α_{n+1}, β_{n+1} katsayı matrisler bulunduktan sonra çözüm

$$v_n = a_{n+1}v_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1,...,1 \tag{3.3.9}$$

olarak bulunur. Algoritmanın ikinci adımındaki p_n ler

$$p_n = -\frac{\left(\xi_{n+1} - v_{n+1}^{l_0}\right) - 2(\xi_n - v_n^{l_0}) + \left(\xi_{n-1} - v_{n-1}^{l_0}\right)}{h^2} + (\xi_n - v_n^{l_0}), n = \overline{1, M-1} \tag{3.3.10}$$

şeklinde hesaplanılır. Sonra üçüncü adımda u_n^k ler

$$u_n^k = v_n^k + \xi_n - v_n^{l_0}, n = \overline{1, M-1} \tag{3.3.11}$$

olarak alınır.

Birinci mertebeden doğruluk fark şemasının yaklaşık çözümleri yukarıda ifade edilen algoritmayı MATLAB programında kullanarak elde edildi. Farklı N=M=10,20,40,80,160 değerlerde yaklaşık sayısal çözümün hata analizlerinden 3.3.1, 3.3.2 ve 3.3.3 tabloları oluşturulmuştur.

$(3.3.1)$ ve $(3.3.2)$ problemlerinin gerçek çözümlerinin (t_k, x_n) grid noktasındaki değerleri $u(t_k, x_n)$ ve $v(t_k, x_n)$ olarak alınmıştır. Sayısal çözümler sırasıyla u_n^k ve v_n^k ile belirlenmiştir.

$(3.3.1)$ problemindeki bilinmeyen p fonksiyonunun x_n noktalarındaki sayısal çözümü p_n olarak ifade edilmiştir. Buna göre, hata formülleri

$$Ev_M^N = \max_{1\le k\le N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|u(t_k,x_n)-u_n^k\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Ev_M^N = \max_{1\le k\le N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|v(t_k,x_n)-v_n^k\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$Ep_M = \left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|p(x_n)-p_n\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde alınmıştır.

Tablo 3.3.1. Neumann tipi lokal olmayan eliptik ters problemindeki *v* için hatalar

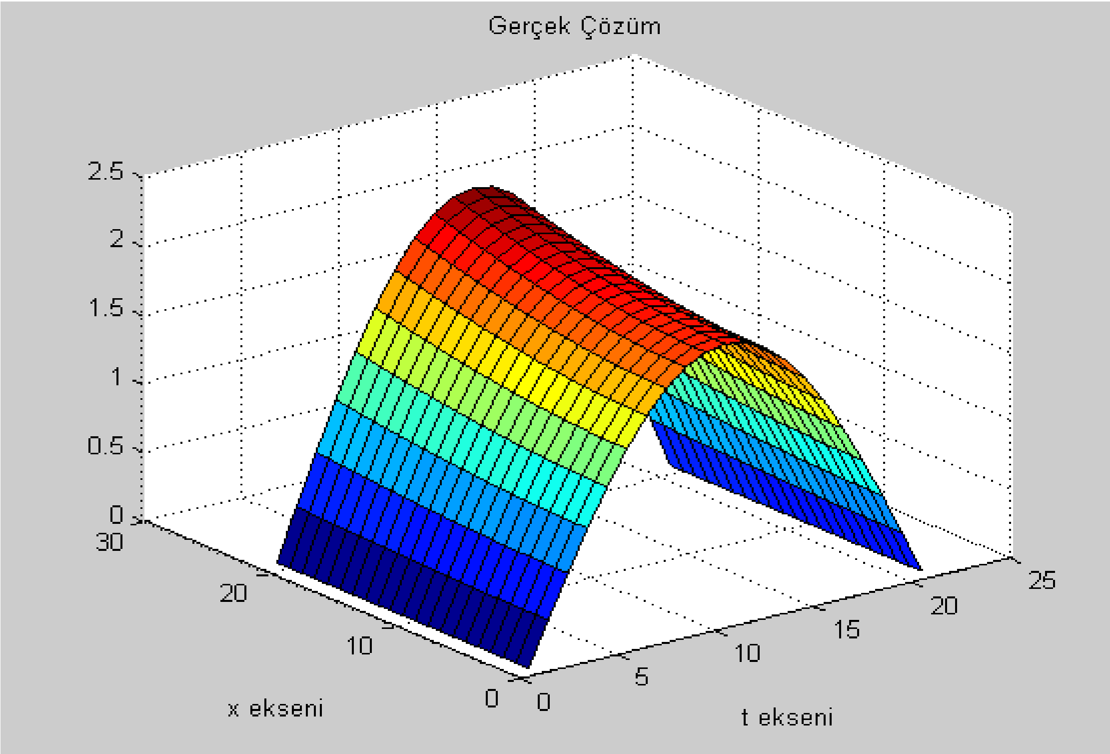
Fark Şeması	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması	1.77×10^{-2}	$7.09\,\mathrm{x}\,10^{-3}$	$3.10\,\mathrm{x}\,10^{-3}$	$1.44\,\mathrm{x}\,10^{-3}$	$6.94\,\mathrm{x}\,10^{-4}$

Tablo 3.3.2. Neumann tipi lokal olmayan eliptik ters problemindeki *p* için hatalar

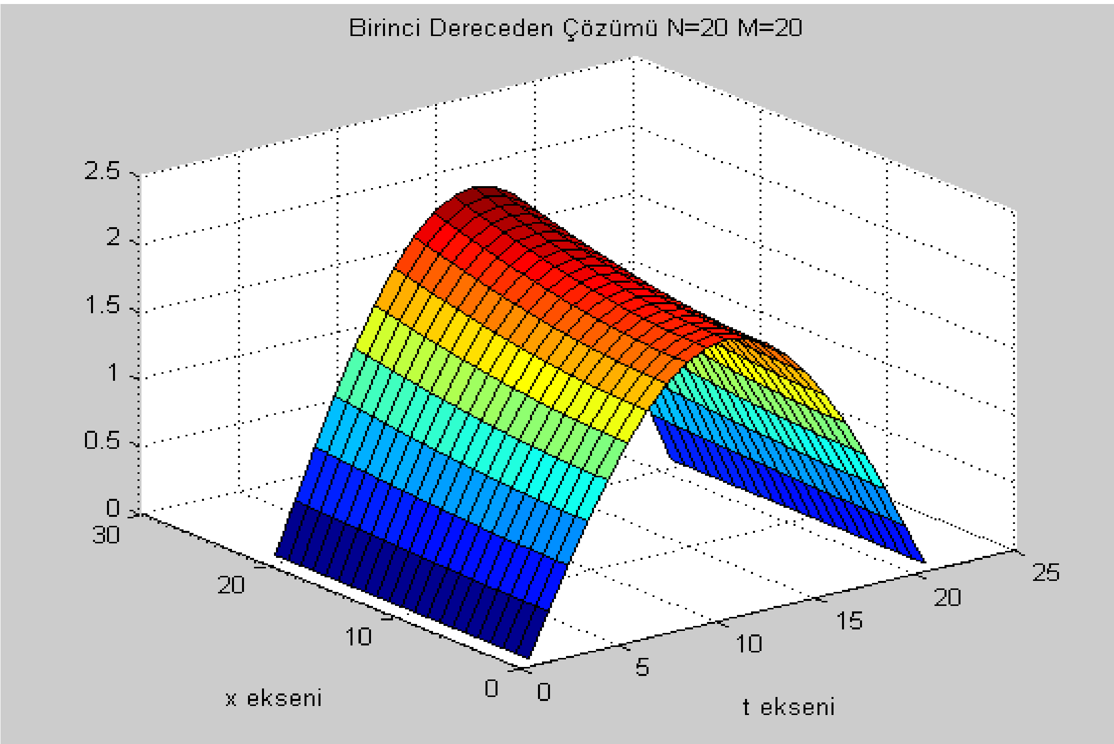
Fark Şeması	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması	$7.01\,\mathrm{x}\,10^{-2}$	$3.23\,\mathrm{x}\,10^{-2}$	$1.55\,\mathrm{x}\,10^{-2}$	$7.60\,\mathrm{x}\,10^{-3}$	$3.76\,\mathrm{x}\,10^{-3}$

Tablo 3.3.3. Neumann tipi lokal olmayan eliptik ters problemindeki *u* için hatalar

Fark şeması	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
Birinci Mertebeden Doğruluk Fark Şeması	$7.07\,\mathrm{x}\,10^{-3}$	$3.16\,\mathrm{x}\,10^{-3}$	$1.50\,\mathrm{x}\,10^{-3}$	$7.38\,\mathrm{x}\,10^{-4}$	$3.65\,\mathrm{x}\,10^{-4}$



Şekil 3.3.1. (3.3.1) NSD İKNTETP'nin gerçek çözüm grafiği



Şekil 3.3.2. (3.3.1) NSD İKNTETP'nin BMDFŞ yaklaşık çözüm grafiği

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, eliptik diferensiyel denklemler için Neumann tipi integral koşullu üst belirli problemin çözümünün ve yaklaşık çözüme tekabül eden fark şemasının çözümünün kararlılık analizi araştırılmıştır. Tezde elde edilen özgün sonuçlar maddeler halinde şu şekildedir:

1. H bir Hilbert uzayı, A ise H 'da pozitif tanımlı herhangi bir öz-eşlenik operatörü, $\varphi, \psi, \zeta \in D(A)$ ve $f(t)$ bilinen düzgün bir fonksiyon, $0 < \lambda_0 < T$ bir bilinen sayı, α düzgün skaler fonksiyonu ve $\int_0^T |\alpha(\lambda)| d\lambda < 1$ koşulu olmak üzere

$$\begin{cases} -u_{tt}(t) + Au(t) = f(t) + p, \ 0 < t < T, \\ u_t(0) = \varphi, \ u_t(T) = \int_0^T \alpha(\lambda) u_\lambda(\lambda) d\lambda + \psi, \ u(\lambda_0) = \zeta \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklindeki integral koşullu Neumann tipi üst belirli eliptik problemin çözümü için kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri kanıtlanmıştır.

2. $\Omega = (0,l)^n$, n- boyutlu R_n Öklid uzayında sınırı $S = \partial\Omega$, kapanışı $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ olan bir küp, $a_r(x), \varphi(x), \psi(x), \zeta(x) (x \in \overline{\Omega})$ ve $f(t,x) (t \in (0,T), x \in \Omega)$ bilinen düzgün fonksiyonlar, $\alpha(\mathrm{t}) \in [0,\mathrm{T}]$ aralığında tanımlı skaler fonksiyonu, $\sigma > 0$ ve $\lambda_0 \in (0,T)$ verilen reel sayılar, ayrıca $\alpha_r(x) \geq a_0 > 0 \ (x \in \Omega)$ olmak üzere, $[0,T] \times \Omega$ bölgesinde,

$$\begin{cases} -u_{tt}(t,x) - \sum_{r=1}^{n} \left(\mathrm{a}_r(x) u_{x_r}(t,x) \right)_{x_r} + \sigma u(t,x) = f(t,x) + p(x), 0 < x < l, 0 < t < T, \\ u_t(0,x) = \varphi(x), u_t(T,x) = \int_0^T \alpha(\lambda) u_\lambda(\lambda) d\lambda + \psi, \\ u(\lambda_0, x) = \zeta(x), x \in \overline{\Omega}, (0 < \lambda_0 < T) \end{cases} \tag{4.2}$$

biçimindeki çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için Neuman tipi integral koşullu üst belirli Dirichlet sınır değer problemi ele alınmıştır. (4.2) üst belirli problemin çözümü için kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

3. (4.1) üst belirli eliptik problemin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_k = f_k + p, 1 \le k \le N-1, N\tau = T; \\ u_1 - u_0 = \tau\psi, \\ u_N - u_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \tau\alpha(t_i)(u_{i+1}-u_i)+\tau\psi_n, u_{l_0} = \zeta \end{cases} \tag{4.3}$$

fark şeması araştırılmıştır ve onun çözümü için kararlılık, hemen-hemen koersif kararlılık ve koersif kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

4. Çok boyutlu eliptik kısmi diferensiyel denklem için (4.2) Neuman tipi integral koşullu üst belirli Dirichlet sınır değer problemin yaklaşık çözümü için birinci mertebeden doğruluk fark şeması incelenmiştir. Fark problemin çözümü için kararlılık ve hemen-hemen koersif kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

5. İki boyutlu eliptik denklem için Neumann tipi integral koşullu üst belirli problemin sayısal çözümleri MATLAB programı kullanılarak hesaplanmıştır. Birinci mertebeden doğruluk fark şemasının çözümü için elde edilmiş olan teorik ifadeler, sayısal deneylerin sonuçlarıyla desteklemektedir.

6. Neumann tipi integral koşullu üst belirli problemin çözümleri çok boyutlu eliptik denklemler için aynı algoritma ile bulunabileceğinden araştırılan yöntem üç boyutlu denklemlere de uygulanması önerilebilir.

7. Tezde incelenmiş problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için birinci mertebeden doğruluk fark şemaları kurulmuştur. İlerleyen zamanda yaklaşık çözümler için ikinci ve üst mertebeden kararlı doğruluk fark şemalarının kurulması daha iyi sonuçlara ulaştırabilir.

5. KAYNAKLAR

Abdelaziz, B., Badia, A. El., and Hajj, A. El., 2015. Direct algorithms for solving some inverse source problems in 2D elliptic equations, Inverse Problems, 31, (2015), (Article ID 105002).

Alekseev, G. V., Vakhitov, I. S., Soboleva O. V., 2012. Stability Estimates in Identification Problems for the Convection-Diffusion-Reaction Equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 52, 12, 1635-1649.

Aleroev, T. S., Kirane M., Salman A. Malik., 2013. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition, Electron. J. Differential Equations, 2013, 270, 1-16.

Akyüz, G., 2017. Dirichlet koşullu Bitsadze-Samarskii tipi üstbelirli eliptik probleminin kararlılık analizi, Yüksek Lisans Tezi, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Gümüşhane, 132 s.

Ashyralyev, A., 2008. A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 344, 1, 557-573.

Ashyralyev, A., Agirseven, D., 2014. On source identification problem for a delay parabolic equation, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 19, 3, 335-349.

Ashyralyev, A., Ashyralyev, C., 2014. On the problem of determining the parameter of an elliptic equation in a Banach space, Abstract and Applied Analysis,19, 3, 350-366.

Ashyralyev, A., Erdogan, A. S., 2010. Well-posedness of the inverse problem of a multidimensional parabolic equation, Vestn. Odessa Nat. Univ., Math. Mech., 15, 18,129-135.

Ashyralyev, A., Ozesenli Tetikoglu F. S., 2012. FDM for Elliptic Equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet Conditions, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 454831.

Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2013. On Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems for elliptic differential and difference equations: Well-posedness, Applied Mathematics and Computation, 219, 3, 1093-1107.

Ashyralyev, A., Ozturk, E., 2014. Stability of Difference Schemes for Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem Involving Integral Condition, Filomat, 28, 5, 1027-1047.

Ashyralyev A. and Sobolevskii, P. E., 2004. New Difference Schemes for Partial Differential Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 443p.

Ashyralyyev, C., 2014. Inverse Neumann problem for an equation of elliptic type, In: Ashyralyev, A., Malkowsky, E. (Eds.), 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), AIP Conference Proceedings, 1611, 46-52.

Ashyralyyev, C., 2017. Numerical solution to Bitsadze-Samarskii type elliptic over-determined multipoint NBVP, Boundary Value Problems, 2017:74, 1–22.

Ashyralyyev, C., Akkan, Y., 2015. Numerical solution to inverse elliptic problem with Neumann type overdetermination and mixed boundary conditions, Electronic Journal of Differential Equations, 2015, 188, 1-15.

Ashyralyyev, C., Akyuz, G., 2016. Stability estimates for solution of Bitsadze-Samarskii type inverse elliptic problem with Dirichlet conditions, AIP Conference Proceedings, 1759, 020129.

Ashyralyyev, C., Akyuz, G., Dedeturk, M., 2017, Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions, Electronic Jourlal of Differential Equations, 2017, 197, 1-16.

Ashyralyyev, C., Dedeturk, M., 2013. Approximate soluttion of inverse problem for elliptic equation with overdetermination, Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 548017.

Ashyralyyev, C., Dedeturk, M., 2015. Approximation of the inverse elliptic problem with mixed boundary value conditions and overdetermination, Boundary Value Problems, 2015:51, 1-15.

Bitsadze, A. V., Samarskii, A. A., 1969. On some simplest generalizations of linear elliptic problems.Dokl. Akad. Nauk SSSR.185, 139–159.

Bouzitouna, A., Boussetila N., Rebbani F., 2013. Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type, Boundary Value Problems, 2013: 178.

Cheney, W., 2001. Analysis for Applied Mathematics, Springer, 444p.

Dehghan, M., 2001. Determination of a control parameter in the two-dimensional diffusion equation, Appl. Numer. Math., 37, 4, 489-502.

Eidel'man, Y. S., 1991. An inverse problem for an evolution equation, Mathematical Notes, 49, 5, 535-540.

Erdogan, A. S., Uygun H., 2012. A Note on the Inverse Problem for a Fractional Parabolic Equation, Abstract and Applied Analysis, 2012, Article ID 276080.

Gölgeleyen, İ., Kaytmaz, Ö., 2016. Ters ve kötü konumlanmış problemler teorisinin bilim ve teknolojideki bazı uygulamaları, Karaelmas Fen ve Müh. Dergisi, 6, 1, 230-237.

Hasanov, A., 2010. Identification of unknown diffusion and convection coeffcients infusion transport problems from flux data: An analytical approach, Journal of Mathematical Chemistry, 48, 2, 413-423.

Isakov, V., 2006. Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer.

Kabanikhin, S. I., 2011. Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 456p.

Kalmenov, T. S., Shaldanbaev, A. A., 2010. On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 18, 471-492.

Klibanov, M. V., Romanov, V. G., 2016. Two reconstruction procedures for a 3D phaseless inverse scattering problem for the generalized Helmholtz equation, Inverse Problems, 32, 1.

Krein, S. G., 1971. Linear Differential Equations in Banach Space, Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 390p.

Krein, S. G., 1972. Functional Analysis, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 380p.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 390p.

Lee, D. S., 2016. An inverse problem for an elliptic equation, Applicable Analysis, 95, 919-929.

Orazov, I, Sadybekov, M. A., 2012. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature. Siberian Math. J. 53, 146-151

Orlovskii, D. G., 2008. Inverse Dirichlet Problem for an Equation of Elliptic Type, Differential Equations, 2008, 44, 1, 124-134.

Orlovsky, D. G., Piskarev, S., 2009. On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2009, 17, 8, 765-782.

Orlovsky, D. G., 2013. Inverse problem for elliptic equation in a Banach space with Bitsadze-Samarsky boundary value conditions, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2013, 21, 1, 141-157.

Orlovsky, D. G., Piskarev, S., 2013. Approximation of the Bitsadze-Samarskii inverse problem for an elliptic equation with the dirichlet conditions, Differential Equations, 49, 7, 895-907.

Orlovsky, D. G., Piskarev, S.I., 2018. On Approximation of Coefficient Inverse Problems for Differential Equations in Functional Spaces, Journal of Mathematical Sciences, Springer.

Prilepko, A. I., Orlovsky, D. G., Vasin, I. A., 2000. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, Marcel Dekker, New York.

Qian, A., 2013. Identifying an unknown source in the Poisson equation by a wavelet dual least square method, Bound. Value Probl., 2013, 267.

Romanov, V. G., Weng, C. I., Chen, T. C., 2003. An inverse problem for a layered elastic plate, Applied Mathematics and Computation, 137, 2-3, 349-369.

Roberty, N. C., 2013. Simultaneous Reconstruction of Coefficients and Source Parameters in Elliptic Systems Modelled with Many Boundary Value Problems, Mathematical Problems in Engineering, 2013, Article ID 631950.

Sakamoto K., Yamamoto M., 2009. Inverse heat source problem from time distributing overdetermination, Applicable Analysis, 88, 5, 735-748.

Samarskii, A. A., Nikolaev, E. S., 1989. Numerical methods for grid equations, Vol 2, Birkhauser, Basel, Switzerland, 1989.

Samarskii, A. A., Vabishchevich, P. N., 2007. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Inverse and Ill-Posed Problems Series, Walter de Gruyter, Berlin.

Soloviev, V. V., 2011. Inverse Coefficient Problems for Elliptic Equations in a Cylinder: I, Differential Equations, 49, 7, 908-916.

6. EKLER

6.1. Ek 1. Birinci Mertebeden Dogruluk Fark Şemasının Sayısal Çözümleri İçin MATLAB Program Kodları

```
function bsinverse_int_d(N,M,lam0)
%Numerical solution of the equation
%-utt-uxx-ux+u=f(t,x)+p(x);
%inverse problem
%ut(0,x)=fi(x),ut(1,x)=int(alfa(s)us(s)ds) +ksi(x)
%u(t,0)=u(t,1)=0
if nargin<1;end;close;close;
T=1;
tau=T/N;h=1/M;lbt0=lam0/tau;l0=floor(lbt0); lbtl0=lbt0-l0;
%%% First step FIRST ORDER ACCURACY
%%%%Calculation V
A=zeros(N+1,N+1,M+1);B=zeros(N+1,N+1,M+1);C=zeros(N+1,N+1,M+1);
for k=1:N+1
t(k)=(k-1)*tau;
end;
for n=1:M+1
for k=2:N
A(k,k,n)=1/h^2;C(k,k,n)=1/h^2;B(k,k,n)=-2/tau^2-2/h^2-1;
B(k,k+1,n)=1/tau^2;B(k,k-1,n)=1/tau^2;
end
B(1,1,n)=-1;B(1,2,n)=1;
B(N+1,1,n)=(3/2+exp(-t(2))/2)*tau;
B(N+1,2,n)=(-2+exp(-t(3))/2)*tau;
B(N+1,3,n)=(1/2-(exp(-t(2))-exp(-t(4)))/2)*tau;
B(N+1,N+1,n)=1-tau*exp(-t(N))/2;   B(N+1,N,n)=-1-tau*exp(-t(N-1))/2;
for j=4:N-1;
B(N+1,j,n)=-tau*(exp(-t(j-1))-exp(-t(j+1)))/2;
end;
end
R=eye(N+1,N+1);
fii=zeros(N+1,M+1);
for n=1:M+1
x=(n-1)*h;
for k=2:N
fii(k,n)=-rsf(t(k),x);
end
fii(1,n)=tau*ksii(0,x); fii(N+1,n)=tau*sin(pi*x)*(1-exp(-2))/2;
end
alphaf{1}=zeros(N+1,N+1);bethaf{1}=zeros(N+1,1);
for j=2:M
Q=inv(B(:,:,j)+C(:,:,j)*alphaf{j-1});
```

```
alphaf{j}=-Q*A(:,:,j);
bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,:,j)*bethaf{j-1}));
end
V=zeros(N+1,M+1);
for j=M:-1:1
V(:,j)=alphaf{j}*V(:,j+1)+bethaf{j};
end
%%Second step FRIST ORDER ACCURACY calculation of p(x)
p1=zeros(M+1,1);
for n=2:M
x=(n-1)*h;
vxx=(-2*V(l0+1,n)+V(l0+1,n+1)+V(l0+1,n-1))/h^2; Av=-vxx+V(l0+1,n);
p1(n,1)=aksii(lam0,x)-Av;
end
p1(1,1)=exactp(0);   p1(M+1,1)=exactp(1);
%%%Third step FIRST ORDER ACCURACY Calculation U
U=zeros (N+1,M+1);
for n=1:M+1
x=(n-1)*h;
for k=1:N+1
U(k,n)=V(k,n)+exact(lam0,x)-V(l0+1,n);
end
end

%%ERROR ANALYSES FOR FIRST ORDER ACCURACY
%\%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION U,V'\%\%\%\%\%\%\%\%
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
x=(n-1)*h;
es(k,n)=exact(t(k),x);
esv(k,n)=exactv(t(k),x);
end
end
%%%%%%%% EXACT P
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
esp(n,1)=exactp(x);
end
pv=V;
ftf=esv-pv;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerroru=max(fmat4);
maxerrorp=0;
%p2=zeros(M+1,1);
for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n,1)-p1(n,1))^2;
```

```
%p2(n,1)=esp(n)-p1(n);
end
%p3=p2
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);

pf=U;
ftf=es-pf;
fmat1=abs(ftf);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
maxerror=max(fmat4);
%Output FOR FIRST ORDER ACCURACY;
format('shortG');

Grids=[N,M];
cevapFirstAccuracy=[maxerroru,maxerrorp,maxerror];

%GRAPH OF THE SOLUTION for FIRST order;
str1=strcat('first order accuracy for N=',num2str(N),'M=',num2str(M));
figure;surf(pf);title(str1);xlabel('t axis');
ylabel('x axis');rotate3d;
figure; surf(es); title('exact solution'); xlabel('t axis');
ylabel('x axis');rotate3d ;


function estx=exact(t,x)

estx=(exp(-t)+t+1)*sin(pi*x);

function estxv=exactv(t,x)

estxv=(exp(-t)+t)*sin(pi*x);

function estxp=exactp(x)

estxp=(pi^2+1)*sin(pi*x);

function ksi=ksii(t,x)

ksi=(-exp(-t)+1)*sin(pi*x);
function aksi=aksii(t,x)

aksi=(pi^2+1)*(exp(-t)+t+1)*sin(pi*x);

function rsftx=rsf(t,x)

rsftx=(-exp(-t)+(pi^2+1)*(exp(-t)+t))*sin(pi*x);
```

ÖZGEÇMİŞ

Aysel ÇAY, 1990 yılında Adana'nın Yüreğir ilçesinde doğdu. İlk ve orta eğitimini Adana'da daha sonrada lise eğitimini Ankara Keçiören Lisesi'nde tamamladı. Lisans eğitimini ise Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünden 2016 yılında onur öğrencisi mezunu olarak tamamladı. Daha sonra ise ara vermeden Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde yüksek lisans eğitimini 2018 yılı itibariyle başarıyla tamamladı.