T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİN SONLU FARKLAR İLE BAZI YAKLAŞIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Beyza ÖZTÜRK

TEMMUZ 2018
GÜMÜŞHANE

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

KARMAŞIK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİN SONLU FARKLAR İLE BAZI YAKLAŞIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Beyza ÖZTÜRK

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 09.07.2018
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 26.07.2018

TEMMUZ 2018

KABUL ve ONAY

Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV danışmanlığında **Beyza ÖZTÜRK** tarafından hazırlanan **"KARMAŞIK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİN SONLU FARKLAR İLE BAZI YAKLAŞIMLARI"** isimli bu çalışma jürimiz tarafından Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Mühendisliği** Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak Oy Birliği / Oy Çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan (Danışman)	:... Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV
Üye	:... Dr. Öğretim Üyesi Hakan AVCI
Üye	:... Dr. Öğretim Üyesi Özlem DEFTERLİ

ONAY
Bu tez ...../...../2018 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ferkan SIPAHİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum "**KARMAŞIK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİN SONLU FARKLAR İLE BAZI YAKLAŞIMLARI**" isimli tez çalışmasında; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 09/07/2018

Beyza ÖZTÜRK

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KARMAŞIK DEĞERLİ FONKSİYONLARIN TÜREVLERİNİN SONLU FARKLAR İLE BAZI YAKLAŞIMLARI

Beyza ÖZTÜRK

Gümüşhane Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2018, 74 sayfa

Bu çalışmada, karmaşık değerli fonksiyonların türevleri için bazı yaklaşımlar verilmiştir. Karmaşık değerli fonksiyonların birinci ve ikinci mertebeden türevleri için sonlu farklar kavramı ele alınmıştır. Karmaşık değerli $\omega(z)$ fonksiyonu için tanım alanının iç noktalarında z ve $\bar{z}$ değişkenlerine göre birinci mertebeden ω_z ve $\omega_{\bar{z}}$ türevlerinin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden yaklaşımı olan sonlu farklar incelenmiştir. Sonra $\omega(z)$ fonksiyonu için tanım alanının iç noktalarında z ve $\bar{z}$ değişkenlere göre ω_{zz}, $\omega_{z\bar{z}}$, $\omega_{\bar{z}z}$ ve $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$ türevlerinin yaklaşımı olan sonlu farklar araştırılmıştır. Matlab programı kullanarak test örneklerde hata analizi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu fark, Karmaşık değer, Karmaşık değerli fonksiyon, Yaklaşım, İleri fark, Geri fark, Merkez fark, Taylor açılımı

ABSTRACT

MS THESIS

SOME APPROXIMATEONS OF COMPLEX-VALUED FUNCTIONS BY FINITE DIFFERENCES

Beyza ÖZTÜRK

Gumushane University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2018, 74 pages

In this thesis, some approximations of derivatives of complex-valued functions are described. Finite differences for first and second order derivatives of complex-valued functions are considered. In the interior points of domain, the first, second, third and fourth order of accuracy finite differences to calculate derivatives ω_z and $\omega_{\bar{z}}$ of complex-valued function $\omega(z)$ with respect z and $\bar{z}$ are studied.

Later, in the interior points of domain, finite differences to calculate approximate value of derivatives ω_{zz}, $\omega_{\bar{z}z}$ and $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$ for function $\omega(z)$ are investigated. Error analyses in test examples are carried out by using Matlab program.

Key Words: Finite difference, complex value, complex valued function, Approximation, Forward difference, Backward Difference, Center difference, Taylor's decomposition

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez çalışma konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın hazırlanma sürecinin her aşamasında yön gösterici olan, yardımlarını ve önerilerini esirgemeyen, bilgilerinden ve tecrübelerinden yararlandığım çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Charyyar ASHERYRALYYEV'e, yüksek lisans öğrenimim boyunca üzerimde emeği olan Matematik Mühendisliği bölümündeki tüm hocalarıma; ayrıca bugünlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve bende hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan annem Arife ÖZTÜRK'e ve babam Abdullah ÖZTÜRK'e başta olmak üzere tüm aileme sonsuz teşekkür ederim.

Beyza ÖZTÜRK
Gümüşhane, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\Omega,\ \Omega_1,\ \Omega_2$	: Karmaşık sayılar kümesinin alt kümeleri
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
x, y	: Reel sayılar
ω	: $\omega : \Omega \to \mathbb{C}$ tanımlı bir karmaşık fonksiyon
z	: x, y değişkenlerine bağlı karmaşık sayı
$\overline{z}$	: z ’in karmaşık eşleniği
$\omega_z(x, y)$	: $\omega(z)$’in $z = x + iy$ değişkenine göre birinci mertebeden türev
$\omega_{\overline{z}}(x, y)$	: $\omega(z)$’in $\overline{z} = x - iy$ değişkenine göre birinci mertebeden türev
u, v	: Gerçek değerli iki değişkenli fonksiyonlar
h_1, h_2	: Küçük pozitif gerçek sayılar
$\omega_{zz}(x, y)$	: $\omega(z)$’in $z = x + iy$ değişkenine göre ikinci mertebeden türev
$\omega_{z\overline{z}}(x, y)$	: $\omega_z(x, y)$’in $\overline{z} = x - iy$ değişkenine göre türev
$\omega_{\overline{z}\overline{z}}(x, y)$	: $\omega(z)$’in $\overline{z} = x - iy$ değişkenine göre ikinci mertebeden türev
Ω_h	: grid noktalar kümesi.

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Tez dört bölümden ve eklerden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş ve temel kavramlar adlı iki alt bölümden oluşan genel bilgiler kısmıdır. İkinci bölüm ise dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde birinci mertebeden sonlu farklar uygulanarak türevlerin yaklaşık değerleri bulunmuştur. Ayrıca, türevin gerçek değeri ile yaklaşık değeri arasındaki fark değerlendirilmiştir. İkinci alt bölümde ikinci mertebeden sonlu farklar uygulanarak türevlerin yaklaşık değerleri bulunmuştur ve gerçek değer ile yaklaşık değer arasındaki fark değerlendirilmiştir. Üçüncü alt bölümde üçüncü mertebeden sonlu farklar uygulanarak yaklaşık çözümler bulunmuştur. Ayrıca hata için değerlendirme sunulmuştur. Dördüncü alt bölümde dördüncü mertebeden sonlu farklar uygulanarak türevlerin yaklaşık değerleri için formül verilmiştir.

Üçüncü bölüm dört alt bölümü içerir. İkinci mertebeden türevler için sonlu farklar ele alınmıştır. Bu bölümün birinci alt bölümde ω_{zz} türevler için bazı sonlu farklar uygulanarak yaklaşık formüller ele alınmıştır. Daha sonra gerçek değer ile yaklaşık değer arasındaki hata değerlendirilmiştir. Devamında ikinci alt bölümde $\omega_{\bar{z}z}$ türevler için bazı sonlu farklar uygulanarak yaklaşık formüller elde edilmiş ve hata için değerlendirme yapılmıştır. Üçüncü alt bölümde ise $\omega_{\overline{zz}}$ türevler için sonlu fark yöntemiyle yaklaşık formüller sunulmuştur ve hata değerlendirilmiştir. Son olarak dördüncü alt bölümde Matlab programı kullanarak test örneklerde birinci ve ikinci mertebeden türevlerin farklı yaklaşımları için sayısal sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü ve son bölüm, elde edilen sonuçların ve önerilerin sunulduğu bölümdür. Ekler kısmında ise karmaşık değerli fonksiyonların türevlerinin sonlu farklar ile bazı yaklaşımlarının MATLAB program kodları verilmiştir.

Kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin yaklaşık çözüm yöntemlerinden en kullanışlısı olan operatör yaklaşımının sonlu farklar yöntemi olduğu bilinmektedir. Sonlu farklar yönteminin genel teorisine ve uygulamalarına Samarskii (2001) kitabında rastlanmaktadır.

Literatürde sonlu fark yöntemlerinin kısmi diferansiyel denklemleri ve denklem sistemlerinin farklı sınır değer problemleri için uygulamaları ele alınmıştır. Ama sonlu fark yöntemleri sadece gerçek değerli fonksiyonlar için verilmiştir. Karmaşık değerli fonksiyonlar için farklı sınır değer problemlerinin teorisi ve araştırma yöntemlerinin verildiği kitaplar Muskhelishvili (1953), Vekua (1962), Gakhov (1990), Monakhov(1983), Wen (1999) mevcuttur.

Bitzadze (1968), Soldatov (1991), Begehr, Hile (1997), Wen (1999), Wen (2002), Begehr (2005), Begehr, Vaitekhovich (2008), Raeisian (2012), Wen (2013), Babayan, Raeisian (2013), Wen vd. (2014) çalışmalarda karmaşık değerli fonksiyonlar için kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözüm yöntemlerine ve onların uygulamalarına bakılmıştır.

Karmaşık değerli fonksiyonları içeren kısmi diferansiyel denklemlerin geniş anlamda önemli uygulamaları vardır. Karmaşık değerli fonksiyonları içeren kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri, birçok bilim adamı tarafından kapsamlı bir şekilde geliştirilmiştir.

Squire ve Trapp (1998) tarafından gerçek değerli fonksiyonların türevi için Complex Step (CS) adlı yöntem teklif edilmiştir. Bu yöntemde gerçek değerli fonksiyonların türevleri için karmaşık değerli sonlu farklar kurulmuştur. Yöntemin performans analizi Kim vd. (2006) tarafından ve duyarlık analizi Vatsa (1999), Burg ve Newman (2003), Martins vd. (2003), Gao, He (2005), Wang, Apte (2006), Jin vd. (2010) tarafından incelenmiştir.

Abreu vd. (2013) çalışmada CS yöntemin genelleştirilmiş hali sunulmuştur. Ayrıca birinci ve ikinci mertebeden türevler için bazı yaklaşım formülleri verilmiştir. Analitik test örneklerde yaklaşımların sayısal kararlılığı incelenmiştir.

Ayrıca, Abreu (2013) Doktora tezinde bu yöntemin sismik modellerde uygulamalarını araştırmıştır.

Kiran ve Khandelwal (2014) makalede CS türev yaklaşımını tekrar gözden geçirmiş ve hiperelastik materyallerin yapısal modellemesine uygulanmasını sunmuştur.

Karmaşık değerli fonksiyonlar için karmaşık türevlerin sonlu farkları kaynaklarda bildiğimiz kadar hiç araştırılmamıştır. Tezde alınacak sonuçlar bu boşluğu dolduracaktır ve uygulamalara yol açacaktır.

1.2.Temel kavramlar

Şimdi bölümlerde kullanacağımız bazı kavramları vereceğiz. Ayrıca, karmaşık değerli fonksiyonlar için karmaşık değişkenlere göre kısmi türevleri, gerçek değerli fonksiyonlar için Taylor açılımını, gerçek değerli fonksiyonların birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin yaklaşık değerleri için bazı sonlu farkları açıklayacağız.

İlk olarak, karmaşık değerli fonksiyon için karmaşık değişkenlere göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri ele alalım.

Karmaşık sayıların kümesini $\mathbb{C}$ ile belirleyelim. $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ ve $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $\omega: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ karmaşık değerli ω fonksiyonu ele alalım. Her $z = x + iy \in \Omega_1$ için $\omega(z) = \omega(x, y) \in \Omega_2$ ve $\omega(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ şeklindedir.

$z = x + iy$ için $\overline{z} = x - iy$ değerine z in karmaşık eşleniği denir. z ve $\overline{z}$ değişkenlerine göre birinci mertebeden türevler

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right), \qquad \omega_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

olarak tanımlanır (Muskhelishvili, 1953).

Örneğin $x, y \in \mathbb{R}$ için homojen olmayan Cauchy-Riemann denklem sistemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = g(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = h(x, y)$$

şeklindedir (Vekua ,1962). Bu sistemi $\omega = u + iv$, $f = \dfrac{g + ih}{2}$ olmak üzere

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} = f$$

şeklinde yazabiliriz. $\overline{z}$ değişkenine göre kısmi türev

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \equiv \partial_{\overline{z}}\omega \equiv \omega_{\overline{z}}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} \equiv \partial_z \omega \equiv \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

şeklindedir.

ω fonksiyonu tanım bölgesinde $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x}$ koşulunu sağladığını varsayalım. z ve $\overline{z}$ değişkenlerine göre ikinci mertebeden ω_{zz}, $\omega_{z\overline{z}}$, $\omega_{\overline{z}z}$ ve $\omega_{\overline{z}\overline{z}}$ türevler için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\omega_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - i\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}{\partial x} - i\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right),$$

$$\omega_{z\overline{z}} = \omega_{\overline{z}z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + i\frac{\partial \omega_z}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}{\partial x} + i\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right),$$

$$\omega_{\overline{z}\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_{\overline{z}}}{\partial x} + i\frac{\partial \omega_{\overline{z}}}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}{\partial x} + i\frac{\partial\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + i\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2i\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right).$$

Şimdi, gerçek değerli fonksiyonlar için Taylor açılım teoremlerine bakalım.

Teorem 1.2.1 (Christensen ve Christensen, 1966) $[a,b] \subset R$, $x_0 \in (a,b)$, $n \in N$ ve $f:[a,b] \to R$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

olacak şekilde x ve x_0 arasında bir ξ vardır.

Teorem 1.2.2. (Christensen ve Christensen, 1966) $[a,b] \subset R$, $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu türevlenebilir olmak üzere her $n \in N$ ve her $x \in [a,b]$ için $\left|f^{(n)}(x)\right| \le C$ olacak şekilde $C > 0$ sabiti var ve $x_0 \in [a,b]$ olsun. O halde, her $N \in N$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \le \frac{C}{(N+1)!}\left|x-x_0\right|^{N+1}$$

Özellikle, $[a,b]$ aralığı sınırlı bir aralık olduğundan $\varepsilon > 0$ keyfi sabit olmak üzere her $x \in [a,b]$ ve her $N \ge N_0$ için

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| \le \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N_0 \in N$ vardır.

Tanım 1.2.1. (Mathews ve Fink, 1999) Kabul edelim ki h yeterli derecede küçük pozitif bir sayı olsun. N doğal sayı ve g gerçek değerli fonksiyon olmak üzere $\lim_{h \to 0} \frac{|g(h)|}{h^N} = 0$ ise $g(h)$ değeri $O(h^N)$ olarak belirlenir ve N. mertebeden küçüktür denir.

Son olarak, (Yang vd., 2005) kitabına göre $[a,b]$ aralığında tanımlanan gerçek değerli fonksiyonların birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin yaklaşımı için ileri, geri ve merkezi fark ifadelerini vereceğiz.

Yeterince küçük $h > 0$ sayısı için $x, x+h, x-h, x+2h, x-2h \in [\mathrm{a,b}]$ olsun.

O halde, f fonksiyonunun x noktasındaki birinci mertebeden türevinin değeri için

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ifadesine $O(h)$ birinci mertebeden ileri fark,

$\frac{f(x-h)-f(x)}{h}$ ifadesine $O(h)$ birinci mertebeden geri fark,

$\dfrac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}$ ifadesine $O(\mathrm{h}^2)$ ikinci mertebeden ileri fark,

$\dfrac{3f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{2h}$ ifadesine $O(\mathrm{h}^2)$ ikinci mertebeden geri fark,

$\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ ifadesine $O(\mathrm{h}^2)$ ikinci mertebeden merkezi fark denir.

f fonksiyonunun x noktasındaki ikinci mertebeden türevinin değeri için

$\dfrac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$ ifadesine $O(\mathrm{h}^2)$ ikinci mertebeden merkezi fark ve

$\dfrac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2}$ ifadesine $O(\mathrm{h}^4)$ dördüncü mertebeden merkezi fark denir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Karmaşık düzlem olan $\mathbb{C}$ 'nin alt kümesi Ω ve $\omega : \Omega \to \mathbb{C}$ karmaşık değerli fonksiyon olsun.

Bu bölümde ω_z ve $\omega_{\bar{z}}$ türevlerin değerleri için birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden yaklaşık formülleri ele alacağız.

2.1. Birinci Mertebeden Doğruluk Sonlu Farklar

Bu çalışmada u ve v, gerçek değerli fonksiyonlar olmak üzere her $z = x + iy$ için $\omega(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ olduğunu dikkate alacağız.

Şimdi, ω_z, $\omega_{\bar{z}}$ türevlerin değerleri için birinci mertebeden doğruluk sonlu farkları inceleyeceğiz.

Ω kümesinde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x + iy \in \Omega$, $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x + i(y \pm h_2) \in \Omega$ olsun. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ kısmi türevlerine sırasıyla (x, y) noktasında birinci mertebeden ileri fark uygulanırsa; c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları $x < c_1, c_2 < x + h_1, y < d_1, d_2 < y + h_2$ şartı altında olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{u(x + h_1, y) - u(x, y)}{h_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1, y)h_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{v(x + h_1, y) - v(x, y)}{h_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2, y)h_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{u(x, y + h_2) - u(x, y)}{h_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, d_1)h_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{v(x, y + h_2) - v(x, y)}{h_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, d_2)h_2$$

ifadeler geçerlidir. Buna göre,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y)}{h_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2 \qquad (2.1.1)$$

olur.

$(2.1.1)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1\\&\quad-i\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y)}{h_2}-i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\Bigg]\\&=\frac{1}{2h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{1}{2h_1}+\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)\\&\quad+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1-i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\right]\end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)\right|\le M_1,\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right|\le M_2,\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)\right|\le M_3,\left|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right|\le M_4 \qquad (2.1.3)$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1\pm i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\right]\right|\\&\le M_1h_1+M_2h_1+M_3h_2+M_4h_2\le M(h_1+h_2)\end{aligned} \qquad (2.1.4)$$

elde edilir.

$(2.1.2)$ formülü ve $(2.1.4)$ eşitsizliği kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{2h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{1}{2h_1}+\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)+O(h_1+h_2) \quad (2.1.5)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\omega_{\bar{z}}(x,y)=\frac{1}{2h_1}\omega(x+h_1,y)-\left(\frac{1}{2h_1}+\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)+O(h_1+h_2) \quad (2.1.6)$$

formülünün geçerli olacağı görülür.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ kısmı türevlerine sırasıyla (x,y) noktasında birinci mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-h_1<c_1,c_2<x,\ y-h_2<d_1,d_2<y$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{u(x,y)-u(x-h_1,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)h_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{v(x,y)-v(x-h_1,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)h_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{u(x,y)-u(x,y-h_2)}{h_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)h_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{v(x,y)-v(x,y-h_2)}{h_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)h_2$$

yazılabilir. O halde,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x,y)-\omega(x-h_1,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\omega(x,y)-\omega(x,y-h_2)}{h_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2 \qquad (2.1.7)$$

olur.

$(2.1.7)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{2}\left[\frac{\omega(x,y)-\omega(x-h_1,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1\right.\\&\left.\quad -i\frac{\omega(x,y)-\omega(x,y-h_2)}{h_2}-i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\right]\\&=-\frac{1}{2h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{1}{2h_1}-\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)\\&\quad+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1-i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\right]\end{aligned} \qquad (2.1.8)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.1.4)$ eşitsizliği ve $(2.1.8)$ formülü kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için

$$\omega_z(x,y)=-\frac{1}{2h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{1}{2h_1}-\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1+h_2) \qquad (2.1.9)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\omega_{\bar{z}}(x,y)=-\frac{1}{2h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{1}{2h_1}+\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1+h_2) \qquad (2.1.10)$$

formülü elde edilebilir.

$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 'nin (x,y) noktasında birinci mertebeden ileri fark ve $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 'nin (x,y) noktasında birinci mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x < c_1,c_2 < x+h_1,\ y-h_2 < d_1,d_2 < y$ şartı altında olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{u(x+h_1,y)-u(x,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)h_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{v(x+h_1,y)-v(x,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)h_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{u(x,y)-u(x,y-h_2)}{h_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)h_2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{v(x,y)-v(x,y-h_2)}{h_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)h_2$$

olur. Buradan

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\omega(x,y)-\omega(x,y-h_2)}{h_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2 \qquad (2.1.11)$$

ifadeleri elde edilir.

$(2.1.11)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)=\frac{1}{2}\Bigg[&\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1\\&-i\frac{\omega(x,y)-\omega(x,y-h_2)}{h_2}-i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\Bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2h_1}\omega\left(x+h_1,y\right)+\left(-\frac{1}{2h_1}-\frac{i}{2h_2}\right)\omega\left(x,y\right)+\frac{i}{2h_2}\omega\left(x,y-h_2\right) \\
&+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(c_1,y\right)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(c_2,y\right)\right)h_1-i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,d_1\right)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\left(x,d_2\right)\right)h_2\right]
\end{aligned} \tag{2.1.12}
$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.1.4)$ eşitsizliği ve $(2.1.12)$ formülü kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$
\omega_z\left(x,y\right)=\frac{1}{2h_1}\omega\left(x+h_1,y\right)+\left(-\frac{1}{2h_1}-\frac{i}{2h_2}\right)\omega\left(x,y\right)+\frac{i}{2h_2}\omega\left(x,y-h_2\right)+O(h_1+h_2) \tag{2.1.13}
$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$
\omega_{\bar{z}}\left(x,y\right)=\frac{1}{2h_1}\omega\left(x+h_1,y\right)+\left(-\frac{1}{2h_1}+\frac{i}{2h_2}\right)\omega\left(x,y\right)-\frac{i}{2h_2}\omega\left(x,y-h_2\right)+O(h_1+h_2) \tag{2.1.14}
$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ kısmi türevlerin (x,y) noktasında birinci mertebeden geri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ kısmi türevlerin (x,y) noktasında birinci mertebeden ileri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-h_1<c_1,c_2<x,y<d_1,d_2<y+h_2$ şartı altında olmak üzere

$$
\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,y\right)=\frac{u\left(x,y\right)-u\left(x-h_1,y\right)}{h_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(c_1,y\right)h_1,
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial x}\left(x,y\right)=\frac{v\left(x,y\right)-v\left(x-h_1,y\right)}{h_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(c_2,y\right)h_1,
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial y}\left(x,y\right)=\frac{u\left(x,y+h_2\right)-u\left(x,y\right)}{h_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x,d_1\right)h_2,
$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{v(x,y+h_2)-v(x,y)}{h_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)h_2$$

elde edilir. Buna göre,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x,y)-\omega(x-h_1,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y)}{h_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2 \qquad (2.1.15)$$

şeklinde olduğu görülür.

ω_z 'in (x,y) noktasındaki değerini $(2.1.15)$ 'i kullanarak

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\omega(x,y)-\omega(x-h_1,y)}{h_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1\\&\quad-i\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y)}{h_2}-i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\Bigg]\\&=-\frac{1}{2h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{1}{2h_1}+\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)\\&\quad+\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(c_1,y)+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(c_2,y)\right)h_1-i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,d_1)+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,d_2)\right)h_2\right]\end{aligned} \qquad (2.1.16)$$

formülüne ulaşırız. O halde $(2.1.4)$ eşitsizliği ve $(2.1.16)$ formülü dikkate alınırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için

$$\omega_z(x,y)=-\frac{1}{2h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{1}{2h_1}+\frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)+O(h_1+h_2) \qquad (2.1.17)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\omega_{\bar{z}}(x,y) = -\frac{1}{2h_1}\omega(x-h_1,y) + \left(\frac{1}{2h_1} - \frac{i}{2h_2}\right)\omega(x,y) + \frac{i}{2h_2}\omega(x,y+h_2) + O(h_1+h_2) \quad (2.1.18)$$

olur.

Teorem 2.1.1. Ω kümesinde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x+iy \in \Omega$, $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x + i(y \pm h_2) \in \Omega$ olsun. O halde ω_z için birinci mertebeden yaklaşık (2.1.5), (2.1.9), (2.1.13), (2.1.17) formülleri ve $\omega_{\bar{z}}$ için birinci mertebeden yaklaşık (2.1.6), (2.1.10), (2.1.14), (2.1.18) formülleri geçerlidir.

2.2. İkinci Mertebeden Doğruluk Sonlu Farklar

Bu bölümde ω_z, $\omega_{\bar{z}}$ türevleri için ikinci mertebeden doğruluk sonlu farkları inceleyeceğiz.

Ω kümesinde $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar, $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x+iy \in \Omega$, $x+i(y \pm h_2) \in \Omega$, $x+i(y \pm 2h_2) \in \Omega$ olsun. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin sırasıyla (x,y) noktasında ikinci mertebeden merkezi fark uygulanırsa; c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları $x-h_1 < c_1, c_2 < x+h_1$, $y-h_2 < d_1, d_2 < y+h_2$ koşulu altında olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{u(x+h_1,y) - u(x-h_1,y)}{2h_1} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{v(x+h_1,y) - v(x-h_1,y)}{2h_1} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{u(x,y+h_2) - u(x,y-h_2)}{2h_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{v(x,y+h_2) - v(x,y-h_2)}{2h_2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olduğundan

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x-h_1,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y-h_2)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6} \qquad (2.2.1)$$

elde edilir.

$(2.2.1)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{2}\left[\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x-h_1,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6}\right.\\&\left.\quad -i\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y-h_2)}{2h_2}-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}\right]\\&=\frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)\\&\quad+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\right|\le M_1,\left|\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right|\le M_2,\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\right|\le M_3,\left|\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right|\le M_4 \qquad (2.2.3)$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6}\pm i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}\right]\right|\\&\le M_1h_1^2+M_2h_1^2+M_3h_2^2+M_4h_2^2\le M(h_1^2+h_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

elde edilir.

O halde $(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.2)$ formülü kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y) &= \frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)\\ &+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.5)$$

ifadesinin geçerli olacağı görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\omega_{\bar z}(x,y) &= \frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)\\ &-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.6)$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin sırasıyla (x,y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x<c_1,c_2<x+2h_1,\ y<d_1,d_2<y+2h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{-u(x+2h_1,y)+4u(x+h_1,y)-3u(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{-v(x+2h_1,y)+4v(x+h_1,y)-3v(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{-u(x,y+2h_2)+4u(x,y+h_2)-3u(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{-v(x,y+2h_2)+4v(x,y+h_2)-3v(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olduğundan

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,y)=\frac{-\omega(x+2h_1,y)+4\omega(x+h_1,y)-3\omega(x,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}(x,y)=\frac{-\omega(x,y+2h_2)+4\omega(x,y+h_2)-3\omega(x,y)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6} \qquad (2.2.7)$$

elde edilir.

$(2.2.7)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)=&-\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{3}{4h_1}+\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\&+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)\\&+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\end{aligned} \qquad (2.2.8)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.8)$ formülü uygulanırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)=&-\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{3}{4h_1}+\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\&+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\omega_{\bar z}(x,y)=&-\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{3}{4h_1}-\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\&-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)+\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.10)$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ’nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ ’nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden merkezi fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x<c_1,c_2<x+2h_1,\ y-h_2<d_1,d_2<y+h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{-u(x+2h_1,y)+4u(x+h_1,y)-3u(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{-v(x+2h_1,y)+4v(x+h_1,y)-3v(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{u(x,y+h_2)-u(x,y-h_2)}{2h_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{v(x,y+h_2)-v(x,y-h_2)}{2h_2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)&=\frac{-\omega(x+2h_1,y)+4\omega(x+h_1,y)-3\omega(x,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},\\ \frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)&=\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y-h_2)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}\end{aligned}\qquad(2.2.11)$$

bulunur.

$(2.2.11)$ kullanılarak ω_z ’in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)=&-\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x,y)\\ &-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)\\ &+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\end{aligned}\qquad(2.2.12)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği dikkate alınırsa ve $(2.2.12)$ formülü uygulanırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y) &= -\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x,y)\\ &-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.13)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\omega_{\bar z}(x,y) &= -\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x,y)\\ &+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.14)$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden merkezi fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayılar $x-h_1 < c_1,c_2 < x+h_1, y < d_1,d_2 < y+2h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{u(x+h_1,y)-u(x-h_1,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{v(x+h_1,y)-v(x-h_1,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{-u(x,y+2h_2)+4u(x,y+h_2)-3u(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{-v(x,y+2h_2)+4v(x,y+h_2)-3v(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x-h_1,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}(x,y)=\frac{-\omega(x,y+2h_2)+4\omega(x,y+h_2)-3\omega(x,y)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}$$

$(2.2.15)$

olur.

$(2.2.15)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)\\&+\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)+\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y)\\&+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\end{aligned}\qquad(2.2.16)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.16)$ formülü uygulanırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)\\&+\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)+\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned}\qquad(2.2.17)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
\omega_{\bar{z}}(x,y) &= \frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2) \\
&\quad -\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)
\end{aligned} \tag{2.2.18}
$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin sırasıyla (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayılar $x-2h_1<c_1,c_2<x, y-2h_2<d_1,d_2<y$ şartı altında olmak üzere;

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{u(x-2h_1,y)-4u(x-h_1,y)+3u(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{v(x-2h_1,y)-4v(x-h_1,y)+3v(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{u(x,y-2h_2)-4u(x,y-h_2)+3u(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{v(x,y-2h_2)-4v(x,y-h_2)+3v(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}
$$

şeklindedir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y) &= \frac{\omega(x-2h_1,y)-4\omega(x-h_1,y)+3\omega(x,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6}, \\
\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y) &= \frac{\omega(x,y-2h_2)-4\omega(x,y-h_2)+3\omega(x,y)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}
\end{aligned} \tag{2.2.19}
$$

bulunur.

$(2.2.20)$ kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{3}{4h_1}-\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)$$
$$-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2) \qquad (2.2.20)$$
$$+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.20)$ formülü uygulanırsa ω_z ’in (x,y) noktasındaki değeri için

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{3}{4h_1}-\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)$$
$$-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2) \qquad (2.2.21)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\omega_{\bar z}(x,y)=\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{3}{4h_1}+\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)$$
$$+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)-\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2) \qquad (2.2.22)$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ’nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden merkezi fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ ’nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayılar $x-h_1<c_1,c_2<x+h_1,\ y-2h_2<d_1,d_2<y$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{u(x+h_1,y)-u(x-h_1,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{v(x+h_1,y)-v(x-h_1,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{u(x,y-2h_2)-4u(x,y-h_2)+3u(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{v(x,y-2h_2)-4v(x,y-h_2)+3v(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

şeklinde olacağından

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x+h_1,y)-\omega(x-h_1,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\omega(x,y-2h_2)-4\omega(x,y-h_2)+3\omega(x,y)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6} \qquad (2.2.23)$$

elde edilir.

$(2.2.23)$ kullanılarak ω_z ’in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)=&\frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)\\&+\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y)\\&+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\end{aligned} \qquad (2.2.24)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.24)$ formülü uygulanırsa ω_z ’in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)$$
$$+\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2) \tag{2.2.25}$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\omega_{\bar z}(x,y)=\frac{1}{4h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{4h_1}\omega(x-h_1,y)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)$$
$$-\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)+\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2) \tag{2.2.26}$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ’nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ ’nin sırasıyla (x,y) noktasında ikinci mertebeden merkezi fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayılar $x-2h_1 < c_1,c_2 < x_1,\ y-h_2 < d_1,d_2 < y+h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{u(x-2h_1,y)-4u(x-h_1,y)+3u(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{v(x-2h_1,y)-4v(x-h_1,y)+3v(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{u(x,y+h_2)-u(x,y-h_2)}{2h_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{v(x,y+h_2)-v(x,y-h_2)}{2h_2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x-2h_1,y)-4\omega(x-h_1,y)+3\omega(x,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}(x,y)=\frac{\omega(x,y+h_2)-\omega(x,y-h_2)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6} \qquad (2.2.27)$$

elde edilir.

$(2.2.27)$ kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\frac{3}{4h_1}\omega(x,y)\\&-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)\\&+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\end{aligned} \qquad (2.2.28)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.28)$ formülü uygulanırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)&=\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\frac{3}{4h_1}\omega(x,y)\\&-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.29)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\omega_{\bar z}(x,y)&=\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\frac{3}{4h_1}\omega(x,y)\\&+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+h_2)-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.30)$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin (x,y)

noktasında ikinci mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayılar $x < c_1, c_2 < x_1 + 2h_1,\ y - 2h_2 < d_1, d_2 < y$ şartı altında olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{-u(x+2h_1,y)+4u(x+h_1,y)-3u(x,y)}{2h_1} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{-v(x+2h_1,y)+4v(x+h_1,y)-3v(x,y)}{2h_1} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{u(x,y-2h_2)-4u(x,y-h_2)+3u(x,y)}{2h_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{v(x,y-2h_2)-4v(x,y-h_2)+3v(x,y)}{2h_2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

formüllere göre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y) &= \frac{-\omega(x+2h_1,y)+4\omega(x+h_1,y)-3\omega(x,y)}{2h_1} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},\\
\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y) &= \frac{\omega(x,y-2h_2)-4\omega(x,y-h_2)+3\omega(x,y)}{2h_2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}
\end{aligned} \quad (2.2.31)$$

alınır.

$(2.2.31)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}
\omega_z(x,y) = &-\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{3}{4h_1}-\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\
&-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)\\
&+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2 - i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]
\end{aligned} \quad (2.2.32)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.32)$ formülü kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y) &= -\frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{3}{4h_1}-\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\ &\quad -\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.33)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\omega_{\bar z}(x,y) &= \frac{1}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{h_1}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{3}{4h_1}+\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\ &\quad +\frac{i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)-\frac{i}{h_2}\omega(x,y-h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned} \qquad (2.2.34)$$

olur.

$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark uygulanırsa ve $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 'nin sırasıyla (x,y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayılar $x-2h_1<c_1,c_2<x_1,\ y<d_1,d_2<y+2h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{u(x-2h_1,y)-4u(x-h_1,y)+3u(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{v(x-2h_1,y)-4v(x-h_1,y)+3v(x,y)}{2h_1}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{-u(x,y+2h_2)+4u(x,y+h_2)-3u(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{-v(x,y+2h_2)+4v(x,y+h_2)-3v(x,y)}{2h_2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

elde edilebilir. Buna göre

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{\omega(x-2h_1,y)-4\omega(x-h_1,y)+3\omega(x,y)}{2h_1}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{-\omega(x,y+2h_2)+4\omega(x,y+h_2)-3\omega(x,y)}{2h_2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}$$

$(2.2.35)$

olur.

$(2.2.35)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)=&\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{3}{4h_1}+\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\&+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)\\&+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2-i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\end{aligned}\qquad(2.2.36)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.2.4)$ eşitsizliği ve $(2.2.36)$ formülü kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y)=&\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{3}{4h_1}+\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\&+\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned}\qquad(2.2.37)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\omega_{\bar z}(x,y)=&\frac{1}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{1}{h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{3}{4h_1}-\frac{3i}{4h_2}\right)\omega(x,y)\\&-\frac{i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)+\frac{i}{h_2}\omega(x,y+h_2)+O(\mathrm{h}_1^2+\mathrm{h}_2^2)\end{aligned}\qquad(2.2.38)$$

olur.

Teorem 2.2.1. Ω kümesinde $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar, $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$, $x + i(y \pm h_2) \in \Omega$, $x + i(y \pm 2h_2) \in \Omega$ olsun. Bu durumda ω_z için ikinci mertebeden yaklaşık (2.2.5), (2.2.9), (2.2.13), (2.2.17), (2.2.21), (2.2.25), (2.2.29), (2.2.33), (2.2.37) formülleri ve $\omega_{\bar{z}}$ için ikinci mertebeden yaklaşık (2.2.6), (2.2.10), (2.2.14), (2.2.18), (2.2.22), (2.2.26), (2.2.30), (2.2.34), (2.2.38) formülleri geçerlidir.

2.3. Üçüncü Mertebeden Doğruluk Sonlu Farklar

Bu kesirde ω_z , $\omega_{\bar{z}}$ türevler için üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farkları inceleyeceğiz.

Ω kümesinde $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x + i(y \pm h_2) \in \Omega$, $x + i(y \pm 2h_2) \in \Omega$, $x + i(y \pm 3h_2) \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$ olsun. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ‘nin (x, y) noktasında üçüncü mertebeden ileri fark uygulanırsa; c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları $x < c_1, c_2 < x + 3h_1, y < d_1, d_2 < y + 3h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{2u(x+3h_1,y)-9u(x+2h_1,y)+18u(x+h_1,y)-11u(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{2v(x+3h_1,y)-9v(x+2h_1,y)+18v(x+h_1,y)-11v(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{2u(x,y+3h_2)-9u(x,y+2h_2)+18u(x,y+h_2)-11u(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)\frac{h_2^3}{24},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{2v(x,y+3h_2)-9v(x,y+2h_2)+18v(x,y+h_2)-11v(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\frac{h_2^3}{24}$$

şeklindedir. O halde,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{2\omega(x+3h_1,y)-9\omega(x+2h_1,y)+18\omega(x+h_1,y)-11\omega(x,y)}{6h_1}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{2\omega(x,y+3h_2)-9\omega(x,y+2h_2)+18\omega(x,y+h_2)-11\omega(x,y)}{6h_2}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)\frac{h_2^3}{24} \qquad (2.3.1)$$

elde edilir.

$(2.3.1)$ kullanılırsa ω_z ’in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{2}\Bigg[\frac{2\omega(x+3h_1,y)-9\omega(x+2h_1,y)+18\omega(x+h_1,y)-11\omega(x,y)}{6h_1}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)\frac{h_1^3}{24}$$

$$-i\,\frac{2\omega(x,y+3h_2)-9\omega(x,y+2h_2)+18\omega(x,y+h_2)-11\omega(x,y)}{6h_2}$$
$$\left.-i\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)\frac{h_2^3}{24}\right]$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{6h_1}\omega(x+3h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{3}{2h_1}\omega(x+h_1,y)\\
&+\left(-\frac{11}{12h_1}+\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{6h_2}\omega(x,y+3h_2)\\
&+\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)\\
&+\frac{1}{48}\left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)h_1^3-i\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)h_2^3\right)
\end{aligned}\qquad (2.3.2)$$

şeklinde hesaplanabilir. O halde,

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)\right|\le M_1,\left|\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right|\le M_2,\left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)\right|\le M_3,\left|\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right|\le M_4 \qquad (2.3.3)$$

olacağı açıktır.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)\frac{h_1^3}{24}\pm i\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)\frac{h_2^3}{24}\right]\right|\\
&\le M_1h_1^3+M_2h_1^3+M_3h_2^3+M_4h_2^3\le M(h_1^3+h_2^3)
\end{aligned}\qquad (2.3.4)$$

elde edilir.

$(2.3.2)$ formülü ve $(2.3.4)$ eşitsizliği kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değerleri için;

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{6h_1}\omega(x+3h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{3}{2h_1}\omega(x+h_1,y)$$
$$+\left(-\frac{11}{12h_1}+\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{6h_2}\omega(x,y+3h_2)+\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2) \qquad (2.3.5)$$
$$-\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)+O\left(h_1^3+h_2^3\right)$$

formülünün geçerli olacağı görülür. Benzer şekilde,

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{6h_1}\omega(x+3h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{3}{2h_1}\omega(x+h_1,y)$$
$$+\left(-\frac{11}{12h_1}-\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{6h_2}\omega(x,y-3h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2) \qquad (2.3.6)$$
$$+\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)+O\left(h_1^3+h_2^3\right)$$

olur.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ ’nin (x,y) noktasında sırasıyla üçüncü mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-3h_1<c_1,c_2<x,\ y-3h_2<d_1,d_2<y$ şartı altında olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{-2u(x-3h_1,y)+9u(x-2h_1,y)-18u(x-h_1,y)+11u(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{-2v(x-3h_1,y)+9v(x-2h_1,y)-18v(x-h_1,y)+11v(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{-2u(x,y-3h_2)+9u(x,y-2h_2)-18u(x,y-h_2)+11u(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)\frac{h_2^3}{24},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{-2v(x,y-3h_2)+9v(x,y-2h_2)-18v(x,y-h_2)+11v(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\frac{h_2^3}{24}$$

olduğundan

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{-2\omega(x-3h_1,y)+9\omega(x-2h_1,y)-18\omega(x-h_1,y)+11\omega(x,y)}{6h_1}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{-2\omega(x,y-3h_2)+9\omega(x,y-2h_2)-18\omega(x,y-h_2)+11\omega(x,y)}{6h_2}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)\frac{h_2^3}{24} \qquad (2.3.7)$$

olur.

$(2.3.7)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\omega_z(x,y)=-\frac{1}{6h_1}\omega(x-3h_1,y)+\frac{3}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{3}{2h_1}\omega(x-h_1,y)+\left(\frac{11}{12h_1}-\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)$$
$$+\frac{i}{6h_2}\omega(x,y-3h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)$$
$$+\frac{1}{48}\left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)h_1^3-i\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)h_2^3\right) \qquad (2.3.8)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.3.4)$ eşitsizliği ve $(2.3.8)$ formülü uygulanırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\omega_{\bar z}(x,y)=-\frac{1}{6h_1}\omega(x-3h_1,y)+\frac{3}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{3}{2h_1}\omega(x-h_1,y)$$
$$+\left(\frac{11}{12h_1}-\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{6h_2}\omega(x,y-3h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2) \qquad (2.3.9)$$
$$+\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1^3+h_2^3)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
\omega_{\bar z}(x,y) = & -\frac{1}{6h_1}\omega(x-3h_1,y)+\frac{3}{4h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{3}{2h_1}\omega(x-h_1,y) \\
& +\left(\frac{11}{12h_1}+\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{6h_2}\omega(x,y+3h_2)+\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2) \\
& -\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y+h_2)+O\left(h_1^3+h_2^3\right)
\end{aligned}
\qquad (2.3.10)
$$

ifadeleri gerçektir.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ‘nin (x,y) noktasında üçüncü mertebeden ileri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ ’nin (x,y) noktasında üçüncü mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x < c_1,c_2 < x+3h_1,\ y-3h_2 < d_1,d_2 < y$ şartı altında olmak üzere;

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{2u(x+3h_1,y)-9u(x+2h_1,y)+18u(x+h_1,y)-11u(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)\frac{h_1^3}{24},
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{2v(x+3h_1,y)-9v(x+2h_1,y)+18v(x+h_1,y)-11v(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\frac{h_1^3}{24},
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{-2u(x,y-3h_2)+9u(x,y-2h_2)-18u(x,y-h_2)+11u(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)\frac{h_2^3}{24},
$$

$$
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{-2v(x,y-3h_2)+9v(x,y-2h_2)-18v(x,y-h_2)+11v(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\frac{h_2^3}{24}
$$

olur. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y) = & \frac{2\omega(x+3h_1,y)-9\omega(x+2h_1,y)+18\omega(x+h_1,y)-11\omega(x,y)}{6h_1} \\
& +\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)\frac{h_1^3}{24},
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{-2\omega(x,y-3h_2)+9\omega(x,y-2h_2)-18\omega(x,y-h_2)+11\omega(x,y)}{6h_2}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)\frac{h_2^3}{24} \qquad (2.3.11)$$

olur.

$(2.3.11)$ kullanılırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{6h_1}\omega(x+3h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{3}{2h_1}\omega(x+h_1,y)-\left(\frac{11}{12h_1}+\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)$$
$$+\frac{i}{6h_2}\omega(x,y-3h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y-h_2) \qquad (2.3.12)$$
$$+\frac{1}{48}\left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)h_1^3-i\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)h_2^3\right)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.3.4)$ eşitsizliği ve $(2.3.12)$ formülü kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{6h_1}\omega(x+3h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{3}{2h_1}\omega(x+h_1,y)$$
$$+\left(-\frac{11}{12h_1}-\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{6h_2}\omega(x,y-3h_2)-\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2) \qquad (2.3.13)$$
$$+\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)+O\left(h_1^3+h_2^3\right)$$

formülleri elde edilir. Benzer şekilde,

$$\omega_{\bar z}(x,y)=\frac{1}{6h_1}\omega(x+3h_1,y)-\frac{3}{4h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{3}{2h_1}\omega(x+h_1,y)$$
$$+\left(-\frac{11}{12h_1}+\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{6h_2}\omega(x,y-3h_2)+\frac{3i}{4h_2}\omega(x,y-2h_2) \qquad (2.3.14)$$
$$-\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y-h_2)+O\left(h_1^3+h_2^3\right)$$

olur.

$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 'nin (x,y) noktasında üçüncü mertebeden geri fark ve $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 'nin (x,y) noktasında sırasıyla üçüncü mertebeden ileri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-3h_1 < c_1,c_2 < x,\ y < d_1,d_2 < y+3h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{-2u(x-3h_1,y)+9u(x-2h_1,y)-18u(x-h_1,y)+11u(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{-2v(x-3h_1,y)+9v(x-2h_1,y)-18v(x-h_1,y)+11v(x,y)}{6h_1}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{2u(x,y+3h_2)-9u(x,y+2h_2)+18u(x,y+h_2)-11u(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)\frac{h_2^3}{24},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{2v(x,y+3h_2)-9v(x,y+2h_2)+18v(x,y+h_2)-11v(x,y)}{6h_2}+\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\frac{h_2^3}{24}$$

elde edilebildiğinden

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,y)=\frac{-2\omega(x-3h_1,y)+9\omega(x-2h_1,y)-18\omega(x-h_1,y)+11\omega(x,y)}{6h_1}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y)+i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)\frac{h_1^3}{24},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{2\omega(x,y+3h_2)-9\omega(x,y+2h_2)+18\omega(x,y+h_2)-11\omega(x,y)}{6h_2}$$
$$+\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1)+i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)\frac{h_2^3}{24} \qquad (2.3.15)$$

sonucuna ulaşılır.

$(2.3.15)$ kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\omega_z(x,y) = -\frac{1}{6h_1}\omega(x-3h_1,y) + \frac{3}{4h_1}\omega(x-2h_1,y) - \frac{3}{2h_1}\omega(x-h_1,y)$$
$$+\left(\frac{11}{12h_1}+\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y) - \frac{i}{6h_2}\omega(x,y+3h_2) + \frac{3i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2) - \frac{3i}{2h_2}\omega(x,y+h_2) \quad (2.3.16)$$
$$+\frac{1}{48}\left(\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(c_1,y) + i\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(c_2,y)\right)h_1^3 - i\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,d_1) + i\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}(x,d_2)\right)h_2^3\right)$$

şeklinde hesaplanabilir.

$(2.3.4)$ eşitsizliği ve $(2.3.16)$ formülü uygulanırsa ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri için;

$$\omega_z(x,y) = -\frac{1}{6h_1}\omega(x-3h_1,y) + \frac{3}{4h_1}\omega(x-2h_1,y) - \frac{3}{2h_1}\omega(x-h_1,y)$$
$$+\left(\frac{11}{12h_1}+\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y) - \frac{i}{6h_2}\omega(x,y+3h_2) + \frac{3i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2) \quad (2.3.17)$$
$$-\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y+h_2) + O\left(h_1^3+h_2^3\right)$$

formülleri elde edilir. Benzer yolla,

$$\omega_{\bar z}(x,y) = -\frac{1}{6h_1}\omega(x-3h_1,y) + \frac{3}{4h_1}\omega(x-2h_1,y) - \frac{3}{2h_1}\omega(x-h_1,y)$$
$$+\left(\frac{11}{12h_1}-\frac{11i}{12h_2}\right)\omega(x,y) + \frac{i}{6h_2}\omega(x,y+3h_2) - \frac{3i}{4h_2}\omega(x,y+2h_2) \quad (2.3.18)$$
$$+\frac{3i}{2h_2}\omega(x,y+h_2) + O\left(h_1^3+h_2^3\right)$$

elde edilebilir.

Teorem 2.3.1. Ω kümesinde $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar, $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x+i(y \pm h_2) \in \Omega$, $x+i(y \pm 2h_2) \in \Omega$, $x+i(y \pm 3h_2) \in \Omega$, $x+iy \in \Omega$ olsun. Bu durumda ω_z için üçüncü mertebeden yaklaşık (2.3.5), (2.3.9), (2.3.13), (2.3.17) formülleri ve $\omega_{\bar z}$

için üçüncü mertebeden yaklaşık (2.3.6), (2.3.10), (2.3.14), (2.3.18) formülleri geçerlidir.

2.4. Dördüncü Mertebeden Doğruluk Sonlu Farklar

Bu bölümde ω_z, $\omega_{\bar{z}}$ türevler için dördüncü mertebeden doğruluk sonlu farkları inceleyeceğiz.

Ω kümesinde $\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}, \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}, \frac{\partial^5 u}{\partial y^5}, \frac{\partial^5 v}{\partial y^5}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x+i\left(y \pm h_2\right) \in \Omega$, $x+i\left(y \pm 2h_2\right) \in \Omega$, $x+iy \in \Omega$ olsun. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$'nin sırasıyla $\left(x, y\right)$ noktasında dördüncü mertebeden merkezi fark uygulanırsa; c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları $x-2h_1 < c_1, c_2 < x+2h_1, y-2h_2 < d_1, d_2 < y+2h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(x, y\right) = \frac{-u\left(x+2h_1, y\right)+8u\left(x+h_1, y\right)-8u\left(x-h_1, y\right)+u\left(x-2h_1, y\right)}{6h_1} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\left(c_1, y\right)\frac{h_1^4}{120},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\left(x, y\right) = \frac{-v\left(x+2h_1, y\right)+8v\left(x+h_1, y\right)-8v\left(x-h_1, y\right)+v\left(x-2h_1, y\right)}{6h_1} + \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}\left(c_2, y\right)\frac{h_1^4}{120},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\left(x, y\right) = \frac{-u\left(x, y+2h_2\right)+8u\left(x, y+h_2\right)-8u\left(x, y-h_2\right)+u\left(x, y-2h_2\right)}{6h_2} + \frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\left(x, d_1\right)\frac{h_2^4}{120},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\left(x, y\right) = \frac{-v\left(x, y+2h_2\right)+8v\left(x, y+h_2\right)-8v\left(x, y-h_2\right)+v\left(x, y-2h_2\right)}{6h_2} + \frac{\partial^5 v}{\partial y^5}\left(x, d_2\right)\frac{h_2^4}{120}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\left(x, y\right) = \frac{-\omega\left(x+2h_1, y\right)+8\omega\left(x+h_1, y\right)-8\omega\left(x-h_1, y\right)+\omega\left(x-2h_1, y\right)}{6h_1}$$
$$+\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\left(c_1, y\right)+i\frac{\partial^5 v}{\partial x^5}\left(c_2, y\right)\right)\frac{h_1^4}{120},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,y)=\frac{-\omega(x,y+2h_2)+8\omega(x,y+h_2)-8\omega(x,y-h_2)+\omega(x,y-2h_2)}{6h_2}$$
$$+\left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x,d_1)+i\frac{\partial^5 v}{\partial y^5}(x,d_2)\right)\frac{h_2^4}{120} \tag{2.4.1}$$

olur.

$(2.4.1)$ kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değeri;

$$\omega_z(x,y)=\frac{1}{2}\left[\frac{-\omega(x+2h_1,y)+8\omega(x+h_1,y)-8\omega(x-h_1,y)+\omega(x-2h_1,y)}{6h_1}\right.$$
$$+\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(c_1,y)+i\frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(c_2,y)\right)\frac{h_1^4}{120}$$
$$-i\left(\frac{-\omega(x,y+2h_2)+8\omega(x,y+h_2)-8\omega(x,y-h_2)+\omega(x,y-2h_2)}{6h_2}\right)$$
$$\left.-i\left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x,d_1)+i\frac{\partial^5 v}{\partial y^5}(x,d_2)\right)\frac{h_2^4}{120}\right]$$
$$=-\frac{1}{24h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{3h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{3h_1}\omega(x-h_1,y)$$
$$+\frac{1}{24h_1}\omega(x-2h_1,y)+\frac{i}{24h_2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{i}{3h_2}\omega(x,y+h_2)$$
$$+\frac{i}{3h_2}\omega(x,y-h_2)-\frac{i}{24h_2}\omega(x,y-2h_2)$$
$$+\frac{1}{240}\left[\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(c_1,y)+i\frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(c_2,y)\right)h_1^4-i\left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x,d_1)+i\frac{\partial^5 v}{\partial y^5}(x,d_2)\right)h_2^4\right] \tag{2.4.2}$$

şeklinde hesaplanabilir.

$$\left|\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(c_1,y)\right|\le M_1,\left|\frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(c_2,y)\right|\le M_2,\left|\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x,d_1)\right|\le M_3,\left|\frac{\partial^5 v}{\partial y^5}(x,d_2)\right|\le M_4 \tag{2.4.3}$$

olacağı açıktır. O halde

$$\left|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(c_1,y)+i\frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(c_2,y)\right)\frac{h_1^4}{120}\pm i\left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x,d_1)+i\frac{\partial^5 v}{\partial y^5}(x,d_2)\right)\frac{h_2^4}{120}\right]\right| \tag{2.4.4}$$
$$\leq M_1 h_1^4 + M_2 h_1^4 + M_3 h_2^4 + M_4 h_2^4 \leq M(h_1^4 + h_2^4)$$

elde edilir.

$(2.4.2)$ formülü ve $(2.4.4)$ eşitsizliği kullanılarak ω_z 'in (x,y) noktasındaki değerleri için;

$$\begin{aligned}\omega_z(x,y) &= -\frac{1}{24h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{3h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{3h_1}\omega(x-h_1,y)\\ &+\frac{1}{24h_1}\omega(x-2h_1,y)+\frac{i}{24h_2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{i}{3h_2}\omega(x,y+h_2)\\ &+\frac{i}{3h_2}\omega(x,y-h_2)-\frac{i}{24h_2}\omega(x,y-2h_2)+O\left(h_1^4+h_2^4\right)\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

formülünün geçerli olacağı görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\omega_{\bar z}(x,y) &= -\frac{1}{24h_1}\omega(x+2h_1,y)+\frac{1}{3h_1}\omega(x+h_1,y)-\frac{1}{3h_1}\omega(x-h_1,y)\\ &+\frac{1}{24h_1}\omega(x-2h_1,y)-\frac{i}{24h_2}\omega(x,y+2h_2)+\frac{i}{3h_2}\omega(x,y+h_2)\\ &-\frac{i}{3h_2}\omega(x,y-h_2)+\frac{i}{24h_2}\omega(x,y-2h_2)+O\left(h_1^4+h_2^4\right)\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.1. Ω kümesinde $\frac{\partial^5 u}{\partial x^5},\frac{\partial^5 v}{\partial x^5},\frac{\partial^5 u}{\partial y^5},\frac{\partial^5 v}{\partial y^5}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar, $x\pm h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 2h_1+iy\in\Omega$, $x+iy\in\Omega$, $x+i(y\pm h_2)\in\Omega$, $x+i(y\pm 2h_2)\in\Omega$ olsun. Bu durumda ω_z için dördüncü mertebeden yaklaşık $(2.4.5)$ formülü ve $\omega_{\bar z}$ için dördüncü mertebeden yaklaşık $(2.4.6)$ formülü geçerlidir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. ω_{zz} Türevler için Bazı Sonlu Farklar

Ω kümesinde $\omega = u + iv$ fonksiyonu $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x}$ şartı altında ve $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3}, \dfrac{\partial^6 u}{\partial y^3 \partial x^3}$, $\dfrac{\partial^4 v}{\partial y \partial x^3}, \dfrac{\partial^6 v}{\partial y^3 \partial x^3}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar, $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$, $x + i(y \pm h_2) \in \Omega$, $x + i(y \pm 2h_2) \in \Omega$, $x + i(y \pm 3h_2) \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$ olsun.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 'nin (x, y) noktasında ikinci mertebeden merkezi fark uygulanırsa c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları ve $x - h_1 < c_1, c_2 < x + h_1, y - h_2 < d_1, d_2 < y + h_2$ şartı altında olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{u(x+h_1,y) - 2u(x,y) + u(x-h_1,y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = \frac{v(x+h_1,y) - 2v(x,y) + v(x-h_1,y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{u(x,y+h_2) - 2u(x,y) + u(x,y-h_2)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{v(x,y+h_2) - 2v(x,y) + v(x,y-h_2)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olur. Buna göre,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\omega(x+h_1,y) - 2\omega(x,y) + \omega(x-h_1,y)}{h_1^2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y) + i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\omega(x,y+h_2) - 2\omega(x,y) + \omega(x,y-h_2)}{h_2^2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1) + i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2) \right)\frac{h_2^2}{6} \qquad (3.1.1)$$

elde edilir. $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ kısmi türevin $(x, y+h_2)$ ve $(x, y-h_2)$ noktalarında ikinci mertebeden merkezi fark uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y+h_2) &= \frac{u(x+h_1,y+h_2) - u(x-h_1,y+h_2)}{2h_1} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_3, y+h_2)\frac{h_1^2}{6}, \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y-h_2) &= \frac{u(x+h_1,y-h_2) - u(x-h_1,y-h_2)}{2h_1} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_3, y-h_2)\frac{h_1^2}{6}
\end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

olacak şekilde $x-h_1$ ve $x+h_1$ noktaların arasında c_3 gerçek sayısı vardır. Şimdi, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y)$ ifadesi için diğer değişkene göre yine merkezi fark yaklaşımını kullanırsak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y+h_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y-h_2)}{2h_2} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^3 \partial x^3}(x,d_3)\frac{h_2^2}{6} \qquad (3.1.3)$$

olacak şekilde $y-h_2$ ve $y+h_2$ noktaların arasında bir d_3 sayısı vardır. Sonuçta, $(3.1.2)$ ve $(3.1.3)$ formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y) = {} & \frac{u(x+h_1,y+h_2) - u(x-h_1,y+h_2) - u(x+h_1,y-h_2) + u(x-h_1,y-h_2)}{4h_1h_2} \\
& + O\left(h_1^2 + h_2^2\right)
\end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x,y)=\frac{v(x+h_1,y+h_2)-v(x-h_1,y+h_2)-v(x+h_1,y-h_2)+v(x-h_1,y-h_2)}{4h_1h_2} \qquad (3.1.5)$$
$$+O\left(h_1^2+h_2^2\right)$$

alınır. $(3.1.1)$, $(3.1.4)$, $(3.1.5)$ formülleri kullanılarak

$$\omega_{zz}(x,y)=\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{1}{2h_1^2}+\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)+\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)$$
$$-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2) \qquad (3.1.6)$$
$$-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2)+O\left(h_1^2+h_2^2\right)$$

elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ ve $\frac{\partial v}{\partial y}$'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-h_1<c_1,c_2<x+3h_1,\ y-h_2<d_1,d_2<y+3h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-u(x+3h_1,y)+4u(x+2h_1,y)-5u(x+h_1,y)+2u(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-v(x+3h_1,y)+4v(x+2h_1,y)-5v(x+h_1,y)+2v(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-u(x,y+3h_2)+4u(x,y+2h_2)-5u(x,y+h_2)+2u(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-v(x,y+3h_2)+4v(x,y+2h_2)-5v(x,y+h_2)+2v(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-\omega(x+3h_1,y)+4\omega(x+2h_1,y)-5\omega(x+h_1,y)+2\omega(x,y)}{h_1^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-\omega(x,y+3h_2)+4\omega(x,y+2h_2)-5\omega(x,y+h_2)+2\omega(x,y)}{h_2^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6} \qquad (3.1.7)$$

şeklindedir. $(3.1.4)$, $(3.1.5)$ ve $(3.1.7)$ kullanılarak

$$\omega_{zz}(x,y)=-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)$$
$$+\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)$$
$$+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2) \qquad (3.1.8)$$
$$-\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y+2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)+O\left(h_1^2+h_2^2\right)$$

formülü elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark uygulanırsa; c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-3h_1<c_1,c_2<x+h_1,\ y-3h_2<d_1,d_2<y+h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-u(x-3h_1,y)+4u(x-2h_1,y)-5u(x-h_1,y)+2u(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-v(x-3h_1,y)+4v(x-2h_1,y)-5v(x-h_1,y)+2v(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-u(x,y-3h_2)+4u(x,y-2h_2)-5u(x,y-h_2)+2u(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-v(x,y-3h_2)+4v(x,y-2h_2)-5v(x,y-h_2)+2v(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,y)&=\frac{-\omega(x-3h_1,y)+4\omega(x-2h_1,y)-5\omega(x-h_1,y)+2\omega(x,y)}{h_1^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},\\\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(x,y)&=\frac{-\omega(x,y-3h_2)+4\omega(x,y-2h_2)-5\omega(x,y-h_2)+2\omega(x,y)}{h_2^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

şeklindedir. ω_{zz} ’in (x,y) noktasındaki değeri için (3.1.4) , (3.1.5) ve (3.1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\omega_{zz}(x,y)&=-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)\\&\quad+\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)\\&\quad+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2)\\&\quad-\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1^2+h_2^2)\end{aligned}\tag{3.1.10}$$

formülü elde edilir.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ kısmi türevlerini (x, y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark ve $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ kısmi türevlerinin (x, y) noktasında ikinci mertebeden merkezi fark uygulanırsa c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları $x - h_1 < c_1, c_2 < x + 3h_1, y - 3h_2 < d_1, d_2 < y + h_2$ şartı altında olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-u(x + 3h_1, y) + 4u(x + 2h_1, y) - 5u(x + h_1, y) + 2u(x, y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1, y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-v(x + 3h_1, y) + 4v(x + 2h_1, y) - 5v(x + h_1, y) + 2v(x, y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2, y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-u(x, y - 3h_2) + 4u(x, y - 2h_2) - 5u(x, y - h_2) + 2u(x, y)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-v(x, y - 3h_2) + 4v(x, y - 2h_2) - 5v(x, y - h_2) + 2v(x, y)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x, d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-\omega(x + 3h_1, y) + 4\omega(x + 2h_1, y) - 5\omega(x + h_1, y) + 2\omega(x, y)}{h_1^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1, y) + i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2, y)\right)\frac{h_1^2}{6}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-\omega(x, y - 3h_2) + 4\omega(x, y - 2h_2) - 5\omega(x, y - h_2) + 2\omega(x, y)}{h_2^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x, d_1) + i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x, d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.4), (3.1.5), (3.1.11) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\omega_{zz}(x,y) = & -\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y) \\
& +\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2) \\
& +\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2) \\
& -\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1^2+h_2^2)
\end{aligned}
\tag{3.1.12}
$$

formülü elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-3h_1<c_1,c_2<x+h_1, y-h_2<d_1,d_2<y+3h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-u(x-3h_1,y)+4u(x-2h_1,y)-5u(x-h_1,y)+2u(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-v(x-3h_1,y)+4v(x-2h_1,y)-5v(x-h_1,y)+2v(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-u(x,y+3h_2)+4u(x,y+2h_2)-5u(x,y+h_2)+2u(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-v(x,y+3h_2)+4v(x,y+2h_2)-5v(x,y+h_2)+2v(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-\omega(x-3h_1,y)+4\omega(x-2h_1,y)-5\omega(x-h_1,y)+2\omega(x,y)}{h_1^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$(3.1.13)$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-\omega(x,y+3h_2)+4\omega(x,y+2h_2)-5\omega(x,y+h_2)+2\omega(x,y)}{h_2^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}$$

elde edilir. (3.1.4), (3.1.5) ve $(3.1.13)$ kullanılarak

$$\begin{aligned}\omega_{zz}(x,y)=&-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)\\&+\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)\\&+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2)\\&-\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y+2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)+O(h_1^2+h_2^2)\end{aligned}\qquad(3.1.14)$$

formülü elde edilir.

Teorem 3.1.1. Ω kümesinde $\omega=u+iv$ fonksiyonu $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x}$ şartı altında ve $\frac{\partial^4 u}{\partial y\partial x^3},\frac{\partial^6 u}{\partial y^3\partial x^3},\frac{\partial^4 v}{\partial y\partial x^3},\frac{\partial^6 v}{\partial y^3\partial x^3}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x\pm h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 2h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 3h_1+iy\in\Omega$, $x+iy\in\Omega$, $x+i(y\pm h_2)\in\Omega$, $x+i(y\pm 2h_2)\in\Omega$, $x+i(y\pm 3h_2)\in\Omega$, $x+iy\in\Omega$ olmak üzere; ω_{zz} için ikinci mertebeden yaklaşık (3.1.6), (3.1.8), (3.1.10), (3.1.12), (3.1.14) formülleri geçerlidir.

3.2. $\omega_{z\bar{z}}$ Türevler için Bazı Sonlu Farklar

Teorem 3.2.1. Ω kümesinde $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x + i(y \pm h_2) \in \Omega$, $x + i(y \pm 2h_2) \in \Omega$, $x + i(y \pm 3h_2) \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\omega_{z\bar{z}}(x,y) &= \frac{1}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y) + \left(-\frac{1}{2h_1^2} - \frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y) + \frac{1}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y) \\ &\quad + \frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2) + \frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2) + O(h_1^2+h_2^2),\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}\omega_{z\bar{z}}(x,y) &= -\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y) + \frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y) - \frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{1}{2h_1^2}\right)\omega(x,y) - \frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2) + \frac{1}{h_1^2}\omega(x,y+2h_2) \\ &\quad - \frac{5}{4h_1^2}\omega(x,y+h_2) + O(h_1^2+h_2^2),\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

$$\begin{aligned}\omega_{z\bar{z}}(x,y) &= -\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y) + \frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y) - \frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y) - \frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2) + \frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2) \\ &\quad - \frac{5}{4h_2^2}\omega(x-h_2,y) + O(h_1^2+h_2^2),\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned}\omega_{z\bar{z}}(x,y) &= -\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y) + \frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y) - \frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2h_1^2} + \frac{1}{2h_1^2}\right)\omega(x,y) - \frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2) + \frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2) \\ &\quad - \frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2) + O(h_1^2+h_2^2),\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y) = &-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y) \\
&+\left(\frac{1}{2h_1^2}+\frac{1}{2h_1^2}\right)\omega(x,y)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2)+\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y+2h_2) \\
&-\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)+O\left(h_1^2+h_2^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

olur.

İspat: $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$'nin ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-h_1<c_1,c_2<x+h_1, y-h_2<d_1,d_2<y+h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{u(x+h_1,y)-2u(x,y)+u(x-h_1,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)=\frac{v(x+h_1,y)-2v(x,y)+v(x-h_1,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{u(x,y+h_2)-2u(x,y)+u(x,y-h_2)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=\frac{v(x,y+h_2)-2v(x,y)+v(x,y-h_2)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olur. O halde

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\omega(x+h_1,y)-2\omega(x,y)+\omega(x-h_1,y)}{h_1^2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\omega(x,y+h_2)-2\omega(x,y)+\omega(x,y-h_2)}{h_2^2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6} \tag{3.2.6}$$

elde edilir. $(3.2.6)$ kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\omega_{z\bar{z}}(x,y) &= \frac{1}{4}\left[\frac{\omega(x+h_1,y)-2\omega(x,y)+\omega(x-h_1,y)}{h_1^2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6}\right.\\
&\left.+\frac{\omega(x,y+h_2)-2\omega(x,y)+\omega(x,y-h_2)}{h_2^2}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}\right]\\
&=\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)+\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y) \qquad (3.2.7)\\
&+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2)\\
&+\frac{1}{24}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]
\end{aligned}$$

olur.

Teoremin şartına göre,

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\right|\le M_1,\left|\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right|\le M_2,\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\right|\le M_3,\left|\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right|\le M_4 \qquad (3.2.8)$$

olacağı açıktır.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2\pm i\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right]\right| \qquad (3.2.9)\\
&\le M_1h_1^2+M_2h_1^2+M_3h_2^2+M_4h_2^2\le M(h_1^2+h_2^2)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(3.2.7)$ formülü ve $(3.2.9)$ eşitsizliği kullanılarak $\omega_{z\bar{z}}$'in (x,y) noktasındaki değeri için $(3.2.1)$ formülünün geçerli olacağı görülür.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x<c_1,c_2<x+3h_1,\ y<d_1,d_2<y+3h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-u(x+3h_1,y)+4u(x+2h_1,y)-5u(x+h_1,y)+2u(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-v(x+3h_1,y)+4v(x+2h_1,y)-5v(x+h_1,y)+2v(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-u(x,y+3h_2)+4u(x,y+2h_2)-5u(x,y+h_2)+2u(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-v(x,y+3h_2)+4v(x,y+2h_2)-5v(x,y+h_2)+2v(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

elde edilebileceğinden

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,y)&=\frac{-\omega(x+3h_1,y)+4\omega(x+2h_1,y)-5\omega(x+h_1,y)+2\omega(x,y)}{h_1^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},\\\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(x,y)&=\frac{-\omega(x,y+3h_2)+4\omega(x,y+2h_2)-5\omega(x,y+h_2)+2\omega(x,y)}{h_2^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

olur. $(3.2.10)$ kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y)&=-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)\\&\quad+\left(\frac{1}{2h_1^2}+\frac{1}{2h_1^2}\right)\omega(x,y)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x,y+2h_2)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x,y+h_2)\\&\quad+\frac{1}{24}\left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right)\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

olur.

$(3.2.9)$ eşitsizliği ve $(3.2.11)$ formülü uygulanırsa $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$ 'in (x,y) noktasındaki değerleri için $(3.2.2)$ formülü elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 'nin (x, y) noktasında ikinci mertebeden geri fark uygulanırsa c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları $x-3h_1 < c_1, c_2 < x, y-3h_2 < d_1, d_2 < y$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-u(x-3h_1,y)+4u(x-2h_1,y)-5u(x-h_1,y)+2u(x,y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-v(x-3h_1,y)+4v(x-2h_1,y)-5v(x-h_1,y)+2v(x,y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-u(x,y-3h_2)+4u(x,y-2h_2)-5u(x,y-h_2)+2u(x,y)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-v(x,y-3h_2)+4v(x,y-2h_2)-5v(x,y-h_2)+2v(x,y)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-\omega(x-3h_1,y)+4\omega(x-2h_1,y)-5\omega(x-h_1,y)+2\omega(x,y)}{h_1^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6}, \\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{-\omega(x,y-3h_2)+4\omega(x,y-2h_2)-5\omega(x,y-h_2)+2\omega(x,y)}{h_2^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}
\end{aligned} \qquad (3.2.12)$$

şeklindedir. $(3.2.12)$ kullanılırsa;

$$\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y) = -\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y) + \frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y) - \frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)$$
$$+\left(\frac{1}{2h_1^2}+\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y) - \frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2) + \frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2) - \frac{5}{4h_2^2}\omega(x-h_2,y) \quad (3.2.13)$$
$$+\frac{1}{24}\left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y) + i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1) + i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right)$$

olur.

$(3.2.9)$ eşitsizliği ve $(3.2.13)$ formülü uygulanırsa $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$ ’in (x, y) noktasındaki değerleri için $(3.2.3)$ formülü elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ ’nin (x, y) noktasında ikinci mertebeden ileri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ’nin ikinci mertebeden geri fark uygulanırsa c_1, c_2, d_1, d_2 gerçek sayıları $x < c_1, c_2 < x + 3h_1$, $y - 3h_2 < d_1, d_2 < y$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-u(x+3h_1,y)+4u(x+2h_1,y)-5u(x+h_1,y)+2u(x,y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-v(x+3h_1,y)+4v(x+2h_1,y)-5v(x+h_1,y)+2v(x,y)}{h_1^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-u(x,y-3h_2)+4u(x,y-2h_2)-5u(x,y-h_2)+2u(x,y)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-v(x,y-3h_2)+4v(x,y-2h_2)-5v(x,y-h_2)+2v(x,y)}{h_2^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-\omega(x+3h_1,y)+4\omega(x+2h_1,y)-5\omega(x+h_1,y)+2\omega(x,y)}{h_1^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y) + i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-\omega(x,y-3h_2)+4\omega(x,y-2h_2)-5\omega(x,y-h_2)+2\omega(x,y)}{h_2^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6} \qquad (3.2.14)$$

olur. $(3.2.14)$ kullanılırsa;

$$\omega_{zz}(x,y)=-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)$$
$$+\left(\frac{1}{2h_1^2}+\frac{1}{2h_1^2}\right)\omega(x,y)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2)+\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2)-\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2) \qquad (3.2.15)$$
$$+\frac{1}{24}\left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right)$$

elde edilir.

$(3.2.9)$ eşitsizliği ve $(3.2.15)$ formülü uygulanırsa ω_{zz}'in (x,y) noktasındaki değerleri için $(3.2.4)$ formülü elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$'nin (x,y) noktasında ikinci mertebeden geri fark ve $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$'nin ikinci mertebeden ileri fark uygulanırsa c_1,c_2,d_1,d_2 gerçek sayıları $x-3h_1<c_1,c_2<x$, $y<d_1,d_2<y+3h_2$ şartı altında olmak üzere;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-u(x-3h_1,y)+4u(x-2h_1,y)-5u(x-h_1,y)+2u(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-v(x-3h_1,y)+4v(x-2h_1,y)-5v(x-h_1,y)+2v(x,y)}{h_1^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\frac{h_1^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-u(x,y+3h_2)+4u(x,y+2h_2)-5u(x,y+h_2)+2u(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)\frac{h_2^2}{6},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-v(x,y+3h_2)+4v(x,y+2h_2)-5v(x,y+h_2)+2v(x,y)}{h_2^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\frac{h_2^2}{6}$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-\omega(x-3h_1,y)+4\omega(x-2h_1,y)-5\omega(x-h_1,y)+2\omega(x,y)}{h_1^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)\frac{h_1^2}{6},$$
$$\tag{3.2.16}$$
$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-\omega(x,y+3h_2)+4\omega(x,y+2h_2)-5\omega(x,y+h_2)+2\omega(x,y)}{h_2^2}$$
$$+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)\frac{h_2^2}{6}$$

şeklindedir. $(3.2.16)$ kullanılarak;

$$\begin{aligned}\omega_{z\bar{z}}(x,y)=&-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)\\&+\left(\frac{1}{2h_1^2}+\frac{1}{2h_1^2}\right)\omega(x,y)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2)+\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y+2h_2)\\&-\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)\\&+\frac{1}{24}\left(\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(c_1,y)+i\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(c_2,y)\right)h_1^2+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x,d_1)+i\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(x,d_2)\right)h_2^2\right)\end{aligned}\tag{3.2.17}$$

elde edilir.

$(3.2.9)$ eşitsizliği ve $(3.2.17)$ formülü uygulanırsa $\omega_{z\bar{z}}$'in (x,y) noktasındaki değerleri için $(3.2.5)$ formülü elde edilir.

3.3. $\omega_{\overline{zz}}$ Türevler için Bazı Sonlu Farklar

Ω kümesinde $\omega=u+iv$ fonksiyonu $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial x}$ şartı altında ve $\frac{\partial^4 u}{\partial y\partial x^3},\frac{\partial^6 u}{\partial y^3\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 v}{\partial y\partial x^3},\frac{\partial^6 v}{\partial y^3\partial x^3}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli, h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar, $x\pm h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 2h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 3h_1+iy\in\Omega$, $x+i(y\pm h_2)\in\Omega$, $x+i(y\pm 2h_2)\in\Omega$, $x+i(y\pm 3h_2)\in\Omega$, $x+iy\in\Omega$ olduğunu varsayalım.

İlk önce $(3.1.1)$, $(3.1.4)$, $(3.1.5)$ formülleri yardımıyla

$$\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y)=\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)+\left(-\frac{1}{2h_1^2}+\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)+\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)$$
$$+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2) \qquad (3.3.1)$$
$$+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)-\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1^2+h_2^2)$$

ikinci mertebeden yaklaşık formülü elde edilir.

İkinci olarak, $(3.1.4)$, $(3.1.5)$ ve $(3.1.7)$ formüllerini kullandığımızda ikinci mertebeden yaklaşık formül

$$\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y)=-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)$$
$$+\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)$$
$$-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2) \qquad (3.3.2)$$
$$-\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y+2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)+O(h_1^2+h_2^2)$$

şeklinde olur.

Üçüncü olarak, $(3.1.4)$, $(3.1.5)$ ve $(3.1.9)$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y) = &-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)\\
&+\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)\\
&-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2)\\
&-\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1^2+h_2^2)
\end{aligned}
\tag{3.3.3}
$$

ifadesi elde edilir.

Dördüncü olarak, $(3.1.4)$, $(3.1.5)$, $(3.1.11)$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y) = &-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x+3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x+2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x+h_1,y)\\
&+\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)\\
&-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y-3h_2)\\
&-\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y-2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y-h_2)+O(h_1^2+h_2^2)
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

bulunur.

Son olarak, $(3.1.4)$, $(3.1.5)$ ve $(3.1.13)$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\omega_{\bar{z}\bar{z}}(x,y) = &-\frac{1}{4h_1^2}\omega(x-3h_1,y)+\frac{1}{h_1^2}\omega(x-2h_1,y)-\frac{5}{4h_1^2}\omega(x-h_1,y)\\
&+\left(\frac{1}{2h_1^2}-\frac{1}{2h_2^2}\right)\omega(x,y)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y+h_2)-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y+h_2)\\
&-\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x+h_1,y-h_2)+\frac{i}{8h_1h_2}\omega(x-h_1,y-h_2)+\frac{1}{4h_2^2}\omega(x,y+3h_2)\\
&-\frac{1}{h_2^2}\omega(x,y+2h_2)+\frac{5}{4h_2^2}\omega(x,y+h_2)+O(h_1^2+h_2^2)
\end{aligned}
\tag{3.3.5}
$$

yaklaşım formülüne ulaşılır. Buna göre, aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.3.1. Ω kümesinde $\omega = u + iv$ fonksiyonu $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x}$ şartı altında ve $\frac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3}, \frac{\partial^6 u}{\partial y^3 \partial x^3}, \frac{\partial^4 v}{\partial y \partial x^3}, \frac{\partial^6 v}{\partial y^3 \partial x^3}$ fonksiyonları sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x + i\left(y \pm h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 2h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 3h_2\right) \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$ olsun. Buna göre $\omega_{\overline{z}\overline{z}}$ için ikinci mertebeden yaklaşık (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) formülleri geçerlidir.

3.4. Sayısal Analiz

Bu bölümde ikinci ve üçüncü bölümlerde bahsedilen karmaşık değerli fonksiyonların sonlu farkların ve onlara karşılık gelen türevlerin hata analizi yapılmıştır. Test örneklerde türevlerin gerçek ve sayısal değerleri

$$\Omega = \left\{ z = x + iy \in C \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1 \right\}$$

karede MATLAB programını kullanarak hesaplanmıştır.

$h_1 = \frac{2}{N}, \ h_2 = \frac{2}{M}$ olmak üzere

$$\Omega_h = \left\{ z^h = z_{k,m} = x_k + iy_m \mid x_k = kh_1, y_m = mh_2, k = 0, \ldots, N; m = 0, \ldots, M \right\}$$

grid noktalar kümesini ele alalım. Ω_h grid noktalar kümesinde karmaşık değerli $\omega^h\left(z^h\right)$, $\omega_z^h\left(z^h\right)$, $\omega_{\overline{z}}^h\left(z^h\right)$ mesh fonksiyonları tanımlayalım. Yaklaşım değerlerini $\tilde{\omega}^h\left(z^h\right)$, $\tilde{\omega}_z^h\left(z^h\right)$, $\tilde{\omega}_{\overline{z}}^h\left(z^h\right)$ ile göstereceğiz.

Yaklaşım hatası için;

$\left\| \omega_z^h - \tilde{\omega}_z^h \right\|_{\Omega_h} = \max_{k \in I, m \in J} \left| \omega_z\left(z_{k,m}\right) - \tilde{\omega}_z\left(z_{k,m}\right) \right|$ ve $\left\| \omega_{\overline{z}}^h - \tilde{\omega}_{\overline{z}}^h \right\|_{\Omega_h} = \max_{k \in I, m \in J} \left| \omega_{\overline{z}}\left(z_{k,m}\right) - \tilde{\omega}_{\overline{z}}\left(z_{k,m}\right) \right|$

normlarını kullanacağız. Burada $S = \{0,1, \ldots, N\}, Q = \{0,1, \ldots, M\}$ olmak üzere $(2.1.5)-(2.1.6)$ için $I = S - \{N\}, J = Q - \{M\}$; $(2.1.9)-(2.1.10)$ için $I = S - \{0\}$, $J = Q - \{0\}$; $(2.1.13)-(2.1.14)$ için $I = S - \{N\}, J = Q - \{0\}$; $(2.1.17)-(2.1.18)$ için $I = S - \{0\}$, $J = Q - \{M\}$.

Sayısal örnek için $\omega\left(z\right) = z^2 \overline{z} + \cos z + \sin \overline{z}$ alındı. O halde

$\omega_z(z) = 2z\overline{z} - \sin z, \omega_{\overline{z}}(z) = z^2 + \cos \overline{z}$

olur.

$(2.1.5)-(2.1.6)$, $(2.1.9)-(2.1.10)$, $(2.1.13)-(2.1.14)$, $(2.1.17)-(2.1.18)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin birinci doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar N=M farklı 10,20,40,80,160,320 değerleri için Tablo 3.4.1-3.4.4'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.1. $(2.1.5)-(2.1.6)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin birinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.1.5) ω_z^h	0.5612	0.2892	0.1468	0.0739	0.0371	0.0186
(2.1.6) $\omega_{\overline{z}}^h$	0.5432	0.2849	0.1457	0.0737	0.0370	0.0186

Tablo 3.4.2. $(2.1.9)-(2.1.10)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin birinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.1.9) ω_z^h	0.5134	0.2771	0.1437	0.0732	0.0369	0.0185
(2.1.10) $\omega_{\overline{z}}^h$	0.5324	0.2816	0.1448	0.0734	0.0370	0.0186

Tablo 3.4.3. $(2.1.13)-(2.1.14)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin birinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.1.13) ω_z^h	0.5005	0.2741	0.1430	0.0730	0.0369	0.0185
(2.1.14) $\omega_{\overline{z}}^h$	0.5432	0.2849	0.1457	0.0737	0.0370	0.0186

Tablo 3.4.4. $(2.1.17)-(2.1.18)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin birinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.1.17) ω_z^h	0.5134	0.2771	0.1437	0.0732	0.0369	0.0185
(2.1.18) $\omega_{\overline{z}}^h$	0.5324	0.2816	0.1448	0.0734	0.0370	0.0186

$(2.2.5)-(2.2.6)$ için $I = S - \{0\}$, $J = Q - \{0\}$; $(2.2.9)-(2.2.10)$ için $I = S - \{N\}$, $J = Q - \{M-1, M\}$; $(2.2.13)-(2.2.14)$ için $I = S - \{N\}, J = Q - \{0\}$; $(2.2.17)-(2.2.18)$ için $I = S - \{0\}$, $J = Q - \{M\}$; $(2.2.21)-(2.2.22)$ için $I = S - \{0,1\}$, $J = Q - \{0,1\}$; $(2.2.25)-(2.2.26)$ için $I = S - \{0\}$, $J = Q - \{0,1\}$; $(2.2.29)-(2.2.30)$ için $I = S - \{0,1,N\}, J = Q - \{0\}$; $(2.2.33)-(2.2.34)$ için $I = S - \{N\}$, $J = Q - \{0,1,M\}$; $(2.2.37)-(2.2.38)$ için $I = S - \{0,1,N\}$, $J = Q - \{M\}$.

$(2.2.5)-(2.2.6)$, $(2.2.9)-(2.2.10)$, $(2.2.13)-(2.2.14)$, $(2.2.17)-(2.2.18)$, $(2.2.21)-(2.2.22)$, $(2.2.25)-(2.2.26)$, $(2.2.29)-(2.2.30)$, $(2.2.33)-(2.2.34)$, $(2.2.37)-(2.2.38)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar N=M farklı 10,20,40,80,160,320 değerleri için Tablo 3.4.5-3.4.13'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.5. $(2.2.5)-(2.2.6)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.5) ω_z^h	0.0354	0.0090	0.0023	0.5665×10^{-3}	0.1419×10^{-3}	0.3551×10^{-4}
(2.2.6) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0076	0.0022	0.0006	0.1465×10^{-3}	0.0371×10^{-3}	0.0935×10^{-4}

Tablo 3.4.6. $(2.2.9)-(2.2.10)$ formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.9) ω_z^h	0.0727	0.0182	0.0045	0.0011	0.2843×10^{-3}	0.7108×10^{-4}
(2.2.10) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0195	0.0049	0.0012	0.0003	0.0754×10^{-3}	0.1883×10^{-4}

Tablo 3.4.7. (2.2.13) – (2.2.14) formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.13) ω_z^h	0.0261	0.0071	0.0018	0.4661×10^{-3}	0.1176×10^{-3}	0.2952×10^{-4}
(2.2.14) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0550	0.0140	0.0035	0.8917×10^{-3}	0.2236×10^{-3}	0.5597×10^{-4}

Tablo 3.4.8. (2.2.17) – (2.2.18) formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.17) ω_z^h	0.0280	0.0073	0.0019	0.4694×10^{-3}	0.1180×10^{-3}	0.2957×10^{-4}
(2.2.18) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0554	0.0141	0.0036	0.8929×10^{-3}	0.2237×10^{-3}	0.5599×10^{-4}

Tablo 3.4.9. (2.2.21) – (2.2.22) formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.21) ω_z^h	0.0692	0.0177	0.0045	0.0011	0.2835×10^{-3}	0.7098×10^{-4}
(2.2.22) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0142	0.0042	0.0011	0.0003	0.0739×10^{-3}	0.1865×10^{-4}

Tablo 3.4.10. (2.2.25) – (2.2.26) formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.25) ω_z^h	0.0268	0.0071	0.0018	0.4663×10^{-3}	0.1176×10^{-3}	0.2952×10^{-4}
(2.2.26) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0554	0.0141	0.0036	0.8929×10^{-3}	0.2237×10^{-3}	0.5599×10^{-4}

Tablo 3.4.11. (2.2.29) – (2.2.30) formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.29) ω_z^h	0.0272	0.0072	0.0018	0.4675×10^{-3}	0.1177×10^{-3}	0.2954×10^{-4}
(2.2.30) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0560	0.0142	0.0036	0.8942×10^{-3}	0.2239×10^{-3}	0.5601×10^{-4}

Tablo 3.4.12. (2.2.33) – (2.2.34) formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.33) ω_z^h	0.0727	0.0182	0.0045	0.0011	0.2843×10^{-3}	0.7108×10^{-4}
(2.2.34) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0195	0.0049	0.0012	0.0003	0.0754×10^{-3}	0.1883×10^{-4}

Tablo 3.4.13. (2.2.37) – (2.2.38) formüllerle birinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.2.37) ω_z^h	0.0714	0.0180	0.0045	0.0011	0.2840×10^{-3}	0.7105×10^{-4}
(2.2.38) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0175	0.0046	0.0012	0.0003	0.0747×10^{-3}	0.1875×10^{-4}

(2.3.5) – (2.3.6) için $I = S - \{N-1, N\}, J = Q - \{M-1, M\}$; (2.3.9) – (2.3.10) için $I = S - \{0,1,2\}$, $J = Q - \{0,1,2\}$; (2.3.12) – (2.3.13) için $I = S - \{N-1, N\}$, $J = Q - \{0,1,2\}$; (2.3.17) – (2.3.18) için $I = S - \{0,1,2\}$, $J = Q - \{M-1, M\}$.

(2.3.5) – (2.3.6) , (2.3.9) – (2.3.10) , (2.3.13) – (2.3.14) , (2.3.17) – (2.3.18) formülü ile birinci mertebeden türevlerin üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar N=M farklı 10,20,40,80,160,320 değerleri için Tablo 3.4.14-3.4.17'de gösterilmiştir.

Sayısal sonuçlardan ikinci mertebeden doğruluk sonlu farkların birinci mertebeden doğruluk sonlu farklarından daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 3.4.14. (2.3.5) – (2.3.6) formülü ile birinci mertebeden türevlerin üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.3.5) ω_z^h	0.0032	0.4502×10^{-3}	0.5842×10^{-4}	0.7438×10^{-5}	0.9384×10^{-6}	0.1178×10^{-6}
(2.3.6) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0035	0.4666×10^{-3}	0.5941×10^{-4}	0.7499×10^{-5}	0.9422×10^{-6}	0.1181×10^{-6}

Tablo 3.4.15. (2.3.9) – (2.3.10) formülü ile birinci mertebeden türevlerin üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.3.9) ω_z^h	0.0030	0.4256×10^{-3}	0.5668×10^{-4}	0.7323×10^{-5}	0.9310×10^{-6}	0.1174×10^{-6}
(2.3.10) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0027	0.4077×10^{-3}	0.5564×10^{-4}	0.7260×10^{-5}	0.9271×10^{-6}	0.1171×10^{-6}

Tablo 3.4.16. (2.3.13) – (2.3.14) formülü ile birinci mertebeden türevlerin üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.3.13) ω_z^h	0.0027	0.4081×10^{-3}	0.5564×10^{-4}	0.7260×10^{-5}	0.9271×10^{-6}	0.1171×10^{-6}
(2.3.14) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0030	0.4260×10^{-3}	0.5669×10^{-4}	0.7323×10^{-5}	0.9310×10^{-6}	0.1174×10^{-6}

Tablo 3.4.17. $(2.3.17)-(2.3.18)$ formülü ile birinci mertebeden türevlerin üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.3.17) ω_z^h	0.0036	0.4661×10^{-3}	0.5940×10^{-4}	0.7499×10^{-5}	0.9422×10^{-6}	0.1181×10^{-6}
(2.3.18) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.0033	0.4498×10^{-3}	0.5841×10^{-4}	0.7438×10^{-5}	0.9384×10^{-6}	0.1178×10^{-6}

Sayısal sonuçlardan üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farkların birinci ve ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarından daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Şimdi $(2.4.5)-(2.4.6)$ için $I = S - \{0,1,N\}$, $J = Q - \{0,1,M\}$ olmak üzere $(2.4.5)-(2.4.6)$ formülü ile birinci mertebeden türevlerin dördüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar N=M farklı 10,20,40,80,160,320 değerleri için Tablo 3.4.18'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.18. $(2.4.5)-(2.4.6)$ formülü ile birinci mertebeden türevlerin dördüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(2.4.5) ω_z^h	0.4564×10^{-4}	0.3810×10^{-5}	0.2691×10^{-6}	0.1781×10^{-7}	0.1144×10^{-8}	0.7253×10^{-10}
(2.4.6) $\omega_{\bar{z}}^h$	0.6323×10^{-4}	0.4458×10^{-5}	0.2986×10^{-6}	0.1935×10^{-7}	0.1232×10^{-8}	0.7776×10^{-10}

Sayısal sonuçlardan dördüncü mertebeden doğruluk sonlu farkların birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden doğruluk sonlu farklarından daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Şimdi ikinci mertebeden türevlerin yaklaşık değerlerine geçelim.

$$\|\omega_{zz}^h - \widetilde{\omega}_{zz}^h\|_{C(\Omega_h)} = \max_{k\in I, m\in J} \left|\omega_{zz}(z_{k,m}) - \widetilde{\omega_{zz}}(z_{k,m})\right|,$$

$$\left\|\omega_{z\bar{z}}^h - \widetilde{\omega}_{z\bar{z}}^h\right\|_{C(\Omega_h)} = \max_{k\in I, m\in J} \left|\omega_{z\bar{z}}(z_{k,m}) - \widetilde{\omega_{z\bar{z}}}(z_{k,m})\right| \text{ ve}$$

$$\left\|\omega_{\bar{z}\bar{z}}^h - \widetilde{\omega}_{\bar{z}\bar{z}}^h\right\|_{C(\Omega_h)} = \max_{k\in I, m\in J} \left|\omega_{\bar{z}\bar{z}}(z_{k,m}) - \widetilde{\omega_{\bar{z}\bar{z}}}(z_{k,m})\right|$$

normlarını kullanacağız. Burada $S=\{0,1,\dots,N\}, Q=\{0,1,\dots,M\}$ olmak üzere

Yaklaşım hatası için

(3.1.6), (3.2.1), (3.3.1) için $I=S-\{0\}$, $J=Q-\{0\}$; (3.1.8), (3.2.2), (3.3.2) için $I=S-\{0,N-1,N\}$, $J=Q-\{0,M-1,M\}$; (3.1.10), (3.2.3), (3.3.3) için $I=S-\{0,1,2,N\}$, $J=Q-\{0,1,2,M\}$; (3.1.12), (3.2.4), (3.3.4) için $I=S-\{0,N-1,N\}$, $J=Q-\{0,1,2\}$; (3.1.14), (3.2.5), (3.3.5) için $I=S-\{0,1,2\}$, $J=Q-\{0,1,2,M-1,M\}$.

Sayısal örnek için $\omega(z)=z^2\bar{z}+\cos z+\sin\bar{z}$ alındı. Bu halde

$$\omega_{zz}(z)=2\bar{z}-\cos z\,,\omega_{z\bar{z}}(z)=2z,\omega_{\overline{zz}}(z)=-\sin\bar{z}$$

olur.

(3.1.6) – (3.1.8) – (3.1.10) – (3.1.12) – (3.1.14) formülü ile ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar N=M farklı 10,20,40,80,160,320 değerleri için Tablo 3.4.19-3.4.23'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.19. (3.1.6) formülü kullanılarak ω_{zz}'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.1.6) ω_{zz}^h	2.0208×10^{-5}	1.3891×10^{-6}	9.103×10^{-8}	5.8264×10^{-9}	3.7012×10^{-10}	3.8944×10^{-11}

Tablo 3.4.20. (3.1.8) formülü kullanılarak ω_{zz}'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.1.8) ω_{zz}^h	5.4973×10^{-3}	8.1312×10^{-4}	1.1051×10^{-4}	1.4403×10^{-5}	1.8383×10^{-6}	2.322×10^{-7}

Tablo 3.4.21. (3.1.10) formülü kullanılarak ω_{zz}'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.1.10) ω_{zz}^h	4.8116×10^{-3}	7.6059×10^{-4}	1.0688×10^{-4}	1.4164×10^{-5}	1.823×10^{-6}	2.3125×10^{-7}

Tablo 3.4.22. (3.1.12) formülü kullanılarak ω_{zz}'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.1.12) ω_{zz}^h	5.4973×10^{-3}	8.1312×10^{-4}	1.1051×10^{-4}	1.4403×10^{-5}	1.8383×10^{-6}	2.3219×10^{-7}

Tablo 3.4.23. (3.1.14) formülü kullanılarak ω_{zz}'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.1.14) ω_{zz}^h	4.8116×10^{-3}	7.6059×10^{-4}	1.0688×10^{-4}	1.4164×10^{-5}	1.823×10^{-6}	2.3124×10^{-7}

(3.2.1) - (3.2.5) formülü ile ikinci mertebeden türevlerin ikinci doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar N=M farklı 10,20,40,80,160,320 değerleri için Tablo 3.4.24-3.4.28'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.24. (3.2.1) formülü kullanılarak $\omega_{z\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.2.1) $\omega_{z\bar{z}}^h$	3.7836×10^{-3}	1.0386×10^{-3}	2.7231×10^{-4}	6.9732×10^{-5}	1.7644×10^{-5}	4.4378×10^{-6}

Tablo 3.4.25. (3.2.2) formülü kullanılarak $\omega_{z\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.2.2) $\omega_{z\bar{z}}^{h}$	3.6372×10^{-2}	1.0849×10^{-2}	2.9187×10^{-3}	7.5712×10^{-4}	1.9282×10^{-4}	4.8655×10^{-5}

Tablo 3.4.26. (3.2.3) formülü kullanılarak $\omega_{z\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.2.3) $\omega_{z\bar{z}}^{h}$	3.1141×10^{-2}	9.9763×10^{-3}	2.7957×10^{-3}	7.4085×10^{-4}	1.9072×10^{-4}	4.839×10^{-5}

Tablo 3.4.27. (3.2.4) formülü kullanılarak $\omega_{z\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.2.4) $\omega_{z\bar{z}}^{h}$	3.6372×10^{-2}	1.0849×10^{-2}	2.9187×10^{-3}	7.5712×10^{-4}	1.9282×10^{-4}	4.8655×10^{-5}

Tablo 3.4.28. (3.2.5) formülü kullanılarak $\omega_{z\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.2.5) $\omega_{z\bar{z}}^{h}$	3.2331×10^{-2}	9.9763×10^{-3}	2.7957×10^{-3}	7.4085×10^{-4}	1.9072×10^{-4}	4.839×10^{-5}

(3.3.1) - (3.3.5) formülü ile ikinci mertebeden türevlerin ikinci doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar N=M farklı 10,20,40,80,160,320 değerleri için Tablo 3.4.29-3.4.33'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.29. (3.3.1) formülü kullanılarak $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.3.1) $\omega^h_{\bar{z}\bar{z}}$	2.0214×10^{-5}	1.3897×10^{-6}	9.1034×10^{-8}	5.826×10^{-9}	3.6963×10^{-10}	3.5176×10^{-11}

Tablo 3.4.30. (3.3.2) formülü kullanılarak $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.3.2) $\omega^h_{\bar{z}\bar{z}}$	5.5046×10^{-3}	8.1349×10^{-4}	1.1053×10^{-4}	1.4404×10^{-5}	1.8384×10^{-6}	2.322×10^{-7}

Tablo 3.4.31. (3.3.3) formülü kullanılarak $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.3.3) $\omega^h_{\bar{z}\bar{z}}$	4.8053×10^{-3}	7.6025×10^{-4}	1.0686×10^{-4}	1.4163×10^{-5}	1.8229×10^{-6}	2.3124×10^{-7}

Tablo 3.4.32. (3.3.4) formülü kullanılarak $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.3.4) $\omega^h_{\bar{z}\bar{z}}$	5.5046×10^{-3}	8.1349×10^{-4}	1.1053×10^{-4}	1.4404×10^{-5}	1.8384×10^{-6}	2.322×10^{-7}

Tablo 3.4.33. (3.3.5) formülü kullanılarak $\omega_{\bar{z}\bar{z}}$'in ikinci mertebeden türevlerin ikinci mertebeden doğruluk sonlu farklarına göre hesaplamalar

Yaklaşım	N=M=10	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160	N=M=320
(3.3.5) $\omega^h_{\bar{z}\bar{z}}$	4.8053×10^{-3}	7.6025×10^{-4}	1.0686×10^{-4}	1.4163×10^{-5}	1.8229×10^{-6}	2.3122×10^{-7}

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

1. Ω kümesinde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x+iy\in\Omega$, $x\pm h_1+iy\in\Omega$, $x+i\left(y\pm h_2\right)\in\Omega$ olmak üzere ω fonksiyonunun z ve $\overline{z}$ değişkenlere göre birinci mertebeden türevlerin $\omega_z\left(x,y\right)$ ve $\omega_{\overline{z}}\left(x,y\right)$ değerleri için birinci mertebeden doğruluğu olan yaklaşım formülleri kurulmuştur.

2. Ω kümesinde $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\frac{\partial^3 v}{\partial x^3},\frac{\partial^3 u}{\partial y^3},\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x\pm h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 2h_1+iy\in\Omega$, $x+iy\in\Omega$, $x+i\left(y\pm h_2\right)\in\Omega$, $x+i\left(y\pm 2h_2\right)\in\Omega$ olmak üzere ω fonksiyonunun z ve $\overline{z}$ değişkenlere göre birinci mertebeden türevlerin $\omega_z\left(x,y\right)$ ve $\omega_{\overline{z}}\left(x,y\right)$ değerleri için ikinci mertebeden doğruluğu olan yaklaşım formülleri elde edilmiştir.

3. Ω kümesinde $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\frac{\partial^4 v}{\partial x^4},\frac{\partial^4 u}{\partial y^4},\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x\pm h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 2h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 3h_1+iy\in\Omega$, $x+i\left(y\pm h_2\right)\in\Omega$, $x+i\left(y\pm 2h_2\right)\in\Omega$, $x+i\left(y\pm 3h_2\right)\in\Omega$, $x+iy\in\Omega$ olmak üzere ω fonksiyonunun z ve $\overline{z}$ değişkenlere göre birinci mertebeden türevlerin $\omega_z\left(x,y\right)$ ve $\omega_{\overline{z}}\left(x,y\right)$ değerleri için üçüncü mertebeden doğruluğu olan yaklaşım formülleri ifade edilmiştir.

4. Ω kümesinde $\frac{\partial^5 u}{\partial x^5},\frac{\partial^5 v}{\partial x^5},\frac{\partial^5 u}{\partial y^5},\frac{\partial^5 v}{\partial y^5}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x\pm h_1+iy\in\Omega$, $x\pm 2h_1+iy\in\Omega$, $x+i\left(y\pm h_2\right)\in\Omega$, $x+i\left(y\pm 2h_2\right)\in\Omega$, $x+iy\in\Omega$ olmak üzere ω fonksiyonunun z ve $\overline{z}$ değişkenlere göre birinci mertebeden türevlerin $\omega_z\left(x,y\right)$ ve $\omega_{\overline{z}}\left(x,y\right)$ değerleri için dördüncü mertebeden doğruluğu olan yaklaşım formülü elde edilmiştir.

5. Ω kümesinde $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3}, \dfrac{\partial^6 u}{\partial y^3 \partial x^3}, \dfrac{\partial^4 v}{\partial y \partial x^3}, \dfrac{\partial^6 v}{\partial y^3 \partial x^3}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$, $x + i\left(y \pm h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 2h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 3h_2\right) \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$ olmak üzere ω fonksiyonunun z değişkenine göre ikinci mertebeden $\omega_{zz}(x,y)$ türevleri için ikinci mertebeden doğruluğu olan yaklaşım formülleri kurulmuştur.

6. Ω kümesinde $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x + i\left(y \pm h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 2h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 3h_2\right) \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$ olmak üzere ω fonksiyonunun z ve $\overline{z}$ değişkenlerine göre ikinci mertebeden $\omega_{z\overline{z}}(x,y)$ türevleri için ikinci mertebeden doğruluğu olan yaklaşım formülleri elde edilmiştir.

7. Ω kümesinde $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3}, \dfrac{\partial^6 u}{\partial y^3 \partial x^3}, \dfrac{\partial^4 v}{\partial y \partial x^3}, \dfrac{\partial^6 v}{\partial y^3 \partial x^3}$ fonksiyonlar sınırlı ve sürekli olsun. h_1 ve h_2 küçük pozitif gerçek sayılar ve $x \pm h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 2h_1 + iy \in \Omega$, $x \pm 3h_1 + iy \in \Omega$, $x + i\left(y \pm h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 2h_2\right) \in \Omega$, $x + i\left(y \pm 3h_2\right) \in \Omega$, $x + iy \in \Omega$ olmak üzere ω fonksiyonunun $\overline{z}$ değişkenine göre ikinci mertebeden $\omega_{\overline{z}\overline{z}}(x,y)$ türevleri için ikinci mertebeden doğruluğu olan yaklaşım formülleri kurulmuştur.

8. Tezde kullanılan yöntemler ile karmaşık değerli fonksiyonun z ve $\overline{z}$ değişkenlerine göre üst mertebeden türev değerlerinin yaklaşımlarını araştırmak önerilebilir.

9. Tezde elde edilen sonuçları sınır değer problemlerine uygulamak önerilebilir.

Numerik hesaplamalar için MATLAB kodları yazılmıştır**.**

5. KAYNAKLAR

Abreu, R., Stich, D., Morales, J., 2013. On the generalization of the Complex Step Method, Journal of Computational and Applied Mathematics 241 84–102.

Abreu, R., 2013. Complex Steps Finite Differences with applications to seismic problems, PhD Thesis, Universidad de Granada, Granada, Spain.

Babayan, A.O., Raeisian, S.M., 2013. On an effective solution of the Riemann problem for the second-order improperly elliptic equation in the rectangle, Advances in Difference Equations 190.

Begehr, H. and Hile, G.N., 1997. A hierarchy of integral operators, Rocky Mountain J. Math. 27, 669-706.

Begehr, H. and Vaitekhovich, T., 2008. Green functions in complex plane domains,Uzbek Math. J. 4, 29-34.

Begehr, H., 2005. Boundary value problems in complex analysis I, II, II, Boletin de la Asosiaci_on Matematica Venezolana, XII, 65-85, 217-250.

Bitzadze, AV, 1968. Boundary Value Problems for Elliptic Equations of Second Order. Nauka, Engl. Transl. North-Holland, Amsterdam.

Burg, C., Newman, J., 2003. Computationally efficient, numerically exact design space derivatives via the complex Taylor's series expansion method, Computers and Fluids 32 (3) 373–383.

Christensen O., Christensen Khadidija L., 1966. Approximation Theory From Taylor Polynomicals to Wavelets, 162p.

Gakhov, F. D., 1990. Boundary Value Problems, Courier Dover Publications.

Gao, X.-W., He, M.-C., 2005. A new inverse analysis approach for multi-region heat conduction bem using complex-variable-differentiation method, Engineering Analysis with Boundary Elements 29 (8) 788–795.

Jin W., Dennis, B., Wang, B., 2010. Improved sensitivity analysis using a complex variable semi-analytical method, Structural and Multidisciplinary Optimization 41 433–439.

Kim, J., Bates, D.G., Postlethwaite, I., 2006. Nonlinear robust performance analysis using complex-step gradient approximation, Automatica 42 (1) 177–182.

Kiran, R., Khandelwal, K., 2014. Complex step derivative approximation for numerical evaluation of tangent modul, Computers and Structures 140 1–13.

Martins, J., Kroo, I., Alonso, J., 2000. An automated method for sensitivity analysis using complex variable, American Institute of Aeronautics and Astronautics 38 (1) 1–12.

Martins, J.R.R.A., Sturdza, P., Alonso, J.J., 2003. The complex step derivative approximation, ACM Transactions on Mathematical Software 29 (3) 245–262.

Mathews J.H., Fink K.D., 1999, Numerical Methods Using MATLAB, Prentice Hall, 662p.

Monakhov, V. N., 1983. Boundary-Value Problems with Free Boundaries for Elliptic Systems of Equations (Translations of Mathematical Monographs), AMS, 541p.

Muskhelishvili, N.I., 1953. Singular Integral Equations Noordhoff International Publishing, Groningen.

Raeisian, S. M., 2012. Effective Solution of Riemann Problem for Fifth Order Improperly Elliptic Equation on a Rectangle, American Journal of Computational Mathematics, 2, 282-286.

Samarskii, A.A., 2001. The theory of difference schemes, Marcell Dekker, Inc., New York, USA.

Soldatov, 1999. AP: The method of theory of functions for the boundary value problems on the plane 1. Smooth case. Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 55(5), 1070-1100 (in Russian).

Squire, W., Trapp, G., 1998, Using complex variables to estimate derivatives of real functions, SIAM Journals Online 40 (1) 110–112.

Wang, B.P., 2006, Apte, A.P: Complex variable method for eigensolution sensitivity analysis, American Institute of Aeronautics and Astronautics 44 2958–2961.

Wen, G. C., 1999. Approximate Methods and Numerical Analysis for Elliptic Complex Equations, Gordon and Breach, Amsterdam.

Wen, G.C., 2002. Linear and Quasilinear Complex Equations of Hyperbolic and Mixed Type, Taylor & Francis.

Wen, G.C., 2013. Poincaré Problem for Nonlinear Elliptic Equations of Second Order in Unbounded Domains, Advances in Pure Mathematics, 3, 172-177.

Wen, G.C., Zhang, Y., Chen D., 2014. Approximate Solutions to the Discontinuous Riemann-Hilbert Problem of Eliptic Systems of First Order Complex Equations, Applied Mathematics, 5, 1546-1556.

Vatsa, N.V., 1999. Computation of sensitivity derivatives of Navier–Stokes equations using complex variables. Technical Report.

Vekua, I.N., 1962. Generalized Analytic Functions, Pergamon Press, Oxford.

Yang W. Y., Cao W., Chung T-S., Morsis J, 2005, Applied Numerical Methods Using Matlab, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 509.

6. EKLER

6.1. Ek 1. (2.1.5)- (2.1.6), (2.1.9)-(2.1.10), (2.1.13)-(2.1.14), (2.1.17)-(2.1.18) formülleri için MATLAB Program Kodları

```
function w2_1_1(N1,N2)
% grid points
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end;
end;
sz=0;sza=0;

for k=1:N1;
for m=1:N2;
s1=1/(2*h1)*w(k+1,m);s2=(-1/(2*h1)+i/(2*h2))*w(k,m);
s3=-i/(2*h2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(2*h1)*w(k+1,m);s2=(-1/(2*h1)-i/(2*h2))*w(k,m);
s3=i/(2*h2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end;
end;

d2=max(max(r2));d3=max(max(r3));
d=[d2,d3]
function w1=wz(z)
w1=z*z*conj(z)+cos(z)+sin(conj(z));
function w2=wz2(z)
w2=2*z*conj(z)-sin(z);
function w3=wz3(z)
w3=z*z+cos(conj(z));

function w2_1_2(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
```

```
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end;
end;
sz=0;sza=0;

for k=2:N1+1;
for m=2:N2+1;
s1=-1/(2*h1)*w(k-1,m);s2=(1/(2*h1)-i/(2*h2))*w(k,m);
s3=i/(2*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(2*h1)*w(k-1,m);s2=(1/(2*h1)+i/(2*h2))*w(k,m);
s3=-i/(2*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end;
end;

function w2_1_3(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end;
end;
sz=0;sza=0;

for k=1:N1;
for m=2:N2;
s1=1/(2*h1)*w(k+1,m);s2=(-1/(2*h1)-i/(2*h2))*w(k,m);
s3=i/(2*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(2*h1)*w(k+1,m);s2=(-1/(2*h1)+i/(2*h2))*w(k,m);
s3=-i/(2*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end;
end;

function w2_1_4(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
```

```
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;

for k=2:N1;
for m=1:N2;
s1=-1/(2*h1)*w(k-1,m);s2=(1/(2*h1)+i/(2*h2))*w(k,m);
s3=-i/(2*h2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(2*h1)*wz(z(k-1,m));s2=(1/(2*h1)-i/(2*h2))*wz(z(k,m));
s3=i/(2*h2)*wz(z(k,m+1));
s=s1+s2+s3;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;
```

6.2. Ek 2. (2.2.5)- (2.2.6), (2.2.9)-(2.2.10), (2.2.13)-(2.2.14), (2.2.17)-(2.2.18), (2.2.21)-(2.2.22), (2.2.25)-(2.2.26), (2.2.29)-(2.2.30), (2.2.33)-(2.2.34), (2.2.37)-(2.2.38) formülleri için MATLAB Program Kodları

```
function w2_2_1(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;

for k=2:N1;
for m=2:N2;
s1=1/(4*h1)*w(k+1,m);s2=-1/(4*h1)*w(k-1,m);
s3=-i/(4*h2)*w(k,m+1);s4=i/(4*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s=s1+s2-s3-s4;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_2(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
```

```
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;

for k=1:N1-1;
for m=1:N2-1;
s1=-1/(4*h1)*w(k+2,m);     s2=1/h1*w(k+1,m);
s3=(-3/(4*h1)+i*3/(4*h2))*w(k,m);
s4=i/(4*h2)*w(k,m+2);s5=-i/h2*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1)*w(k+2,m);     s2=1/h1*w(k+1,m);
s3=(-3/(4*h1)-i*3/(4*h2))*w(k,m);
s4=-i/(4*h2)*w(k,m+2);s5= i/h2*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_3(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=1:N1-1;
for m=2:N2;
s1=-1/(4*h1)*w(k+2,m);     s2=1/h1*w(k+1,m);
s3=-3/(4*h1)*w(k,m);
s4=-i/(4*h2)*w(k,m+1);s5=i/(4*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1)*w(k+2,m);     s2=1/h1*w(k+1,m);
s3=-3/(4*h1)*w(k,m);
s4=i/(4*h2)*w(k,m+1);s5=-i/(4*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_4(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
```

```
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=2:N1;
for m=1:N2-1;
s1=1/(4*h1)*w(k+1,m);    s2=-1/(4*h1)*w(k-1,m);
s3=i/(4*h2)*w(k,m+2);
s4=-i/h2*w(k,m+1);s5=3*i/(4*h2)*w(k,m);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(4*h1)*w(k+1,m);    s2=-1/(4*h1)*w(k-1,m);
s3=-i/(4*h2)*w(k,m+2);
s4=i/h2*w(k,m+1);s5=-3*i/(4*h2)*w(k,m);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_5(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=3:N1;
for m=3:N2;
s1=1/(4*h1)*w(k-2,m);    s2=-1/h1*w(k-1,m);
s3=(3/(4*h1)-i*3/(4*h2))*w(k,m);
s4=-i/(4*h2)*w(k,m-2);s5= i/h2*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(4*h1)*w(k-2,m);    s2=-1/h1*w(k-1,m);
s3=(3/(4*h1)+i*3/(4*h2))*w(k,m);
s4=i/(4*h2)*w(k,m-2);s5=-i/h2*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_6(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
```

```
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;

for k=2:N1;
for m=3:N2;
s1=1/(4*h1)*w(k+1,m);s2=-1/(4*h1)*w(k-1,m);
s3=-i/(4*h2)*w(k,m-2);s4=i/h2*w(k,m-1);
s5=-3*i/(4*h2)*w(k,m);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s=s1+s2-s3-s4-s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_7(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;

for k=3:N1+1;
for m=2:N2;
s1=1/(4*h1)*w(k-2,m);s2=-1/h1*w(k-1,m);
s3=3/(4*h1)*w(k,m);
s4=-i/(4*h2)*w(k,m+1);s5=i/(4*h2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s=s1+s2+s3-s4-s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_8(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
```

```
sz=0;sza=0;

for k=1:N1-1;
for m=3:N2+1;
s1=-1/(4*h1)*w(k+2,m);s2=1/h1*w(k+1,m);
s3=(-3/(4*h1)-3*i/(4*h2))*w(k,m);
s4=-i/(4*h2)*w(k,m-2);s5=i/h2*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1)*w(k+2,m);s2=1/h1*w(k+1,m);
s3=(-3/(4*h1)+3*i/(4*h2))*w(k,m);
s4=i/(4*h2)*w(k,m-2);s5=-i/h2*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_2_9(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=3:N1+1;
for m=1:N2-1;
s1=1/(4*h1)*w(k-2,m);s2=-1/h1*w(k-1,m);
s3=(3/(4*h1)+3*i/(4*h2))*w(k,m);
s4=i/(4*h2)*w(k,m+2); s5=(-i/h2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(4*h1)*w(k-2,m);s2=-1/h1*w(k-1,m);
s3=(3/(4*h1)-3*i/(4*h2))*w(k,m);
s4=-i/(4*h2)*w(k,m+2); s5=i/h2*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;
```

6.3. Ek 3. (2.3.5)-(2.3.6), (2.3.9)-(2.3.10), (2.3.13)-(2.3.14), (2.3.17)-(2.3.18) için MATLAB Program Kodları

```
function w2_3_1(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
```

```
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=1:N1-2;
for m=1:N2-2;
s1=1/(6*h1)*w(k+3,m);    s2=-3/(4*h1)*w(k+2,m);
s3= 3/(2*h1)*w(k+1,m);
s4=(-11/(12*h1)+11i/(12*h2))*w(k,m); s5=-i/(6*h2)*w(k,m+3);
s6=3*i/(4*h2)*w(k,m+2); s7=-3*i/(2*h2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(6*h1)*w(k+3,m);    s2=-3/(4*h1)*w(k+2,m);
s3=3/(2*h1)*w(k+1,m);
s4=(-11/(12*h1)-11i/(12*h2))*w(k,m); s5=i/(6*h2)*w(k,m+3);
s6=-3*i/(4*h2)*w(k,m+2); s7=3*i/(2*h2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_3_2(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=4:N1;
for m=4:N2;
s1=-1/(6*h1)*w(k-3,m);    s2=3/(4*h1)*w(k-2,m);
s3=(-3/(2*h1))*w(k-1,m); s4=(11/(12*h1)-11*i/(12*h2))*w(k,m);
s5=i/(6*h2)*w(k,m-3); s6=(-3*i/(4*h2))*w(k,m-2);
s7=(3*i/(2*h2))*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(6*h1)*w(k-3,m); s2=3/(4*h1)*w(k-2,m);
s3=(-3/(2*h2))*w(k-1,m);
s4=(11/(12*h1)+11*i/(12*h2))*w(k,m); s5=-i/(6*h2)*w(k,m-3);
s6=(3*i/(4*h2))*w(k,m-2); s7=(-3*i/(2*h2))*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_3_3(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
```

```
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=1:N1-2;
for m=4:N2;
s1=1/(6*h1)*w(k+3,m);     s2=-3/(4*h1)*w(k+2,m);
s3=(3/(2*h1))*w(k+1,m);
s4=(-11/(12*h1)-11*i/(12*h2))*w(k,m); s5=i/(6*h2)*w(k,m-3);
s6=(-3*i/(4*h2))*w(k,m-2); s7=(3*i/(2*h2))*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(6*h1)*w(k+3,m);     s2=-3/(4*h1)*w(k+2,m);
s3=(3/(2*h1))*w(k+1,m);
s4=(-11/(12*h1)+11*i/(12*h2))*w(k,m); s5=-i/(6*h2)*w(k,m-3);
s6=(3*i/(4*h2))*w(k,m-2); s7=(-3*i/(2*h2))*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;

function w2_3_4(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=4:N1;
for m=1:N2-2;
s1=(-1/(6*h1))*w(k-3,m);     s2=3/(4*h1)*w(k-2,m);
s3=(-3/(2*h1))*w(k-1,m);
s4=(11/(12*h1)+11*i/(12*h2))*w(k,m); s5=(-i/(6*h2))*w(k,m+3);
s6=(3*i/(4*h2))*w(k,m+2); s7=(-3*i/(2*h2))*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=(-1/(6*h1))*w(k-3,m);     s2=3/(4*h1)*w(k-2,m);
s3=(-3/(2*h1))*w(k-1,m);
s4=(11/(12*h1)-11*i/(12*h2))*w(k,m); s5=(i/(6*h2))*w(k,m+3);
s6=(-3*i/(4*h2))*w(k,m+2); s7=(3*i/(2*h2))*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;
```

6.4. Ek 4. (2.4.5) formülü için MATLAB Program Kodları

```
function w2_4_1(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=3:N1-1;
for m=3:N2-1;
s1=(-1/(24*h1))*w(k+2,m);    s2=1/(3*h1)*w(k+1,m);
s3=(-1/(3*h1))*w(k-1,m);
s4=(1/(24*h1))*w(k-2,m); s5=(i/(24*h2))*w(k,m+2);
s6=-(i/(3*h2))*w(k,m+1); s7=(i/(3*h2))*w(k,m-1);
s8=-(i/(24*h2))*w(k,m-2);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=(-1/(24*h1))*w(k+2,m);    s2=1/(3*h1)*w(k+1,m);
s3=(-1/(3*h1))*w(k-1,m);
s4=(1/(24*h1))*w(k-2,m); s5=-(i/(24*h2))*w(k,m+2);
s6=(i/(3*h2))*w(k,m+1); s7=-(i/(3*h2))*w(k,m-1);
s8=(i/(24*h2))*w(k,m-2);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s); end; end;
```

6.5. Ek 5. (3.1.6)-(3.2.1)-(3.3.1), (3.1.8)-(3.2.2)-(3.3.2), (3.1.10)-(3.2.3)-(3.3.3), (3.1.12)-(3.2.4)-(3.3.4), (3.1.14)-(3.2.5)-(3.3.5) için MATLAB Program Kodları

```
function w3_1_1(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;r4=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); ww4(k,m)=wz4(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
```

```
for k=2:N1;
for m=2:N2;
s1=1/(4*(h1^2))*w(k+1,m);s2=(-1/(2*(h1^2))+1/(2*(h2^2)))*w(k,m);
s3=1/(4*(h1^2))*w(k-1,m); s4=(-i/(8*h1*h2))*w(k+1,m+1);
s5=(i/(8*h1*h2))*w(k-1,m+1); s6=(i/(8*h1*h2))*w(k+1,m-1);
s7=(-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1)); s8=(-1/(4*(h2^2)))*w(k,m+1);
s9=(-1/(4*(h2^2)))*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=1/(4*(h1^2))*w(k+1,m);s2=(-1/(2*(h1^2))-1/(2*(h2^2)))*w(k,m);
s3=1/(4*(h1^2))*w(k-1,m); s4=1/(4*(h2^2))*w(k,m+1);
s5=1/(4*(h2^2))*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s);
s1=1/(4*(h1^2))*w(k+1,m);s2=(-1/(2*(h1^2))+1/(2*(h2^2)))*w(k,m);
s3=1/(4*(h1^2))*w(k-1,m);s4=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s5=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s6=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s7=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s8=-1/(4*(h2^2))*w(k,m+1);
s9=-1/(4*(h2^2))*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9;
r4(k,m)=abs(ww4(k,m)-s); end; end;

d2=max(max(r2));d3=max(max(r3));d4=max(max(r4));
d=[d2,d3,d4]
function w1=wz(z)
w1=z*z*conj(z)+cos(z)+sin(conj(z));
function w2=wz2(z)
w2=2*conj(z)-cos(z);
function w3=wz3(z)
w3=2*z;
function w4=wz4(z)
w4=-sin(conj(z));

function w3_1_2(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;r4=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); ww4(k,m)=wz4(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;

for k=2:N1-2;
for m=2:N2-2;
s1=-1/(4*h1^2)*w(k+3,m); s2=1/(h1^2)*w(k+2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k+1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
```

```
s5=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m+3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m+2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1^2)*w(k+3,m);s2=1/(h1^2)*w(k+2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k+1,m);
s4=(1/(2*h1^2)+1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=-1/(4*h2^2)*w(k,m+3); s6=1/(h2^2)*w(k,m+2);
s7=-5/(4*h2^2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1^2)*w(k+3,m); s2=1/(h1^2)*w(k+2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k+1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m+3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m+2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r4(k,m)=abs(ww4(k,m)-s); end; end;

function w3_1_3(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;r4=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); ww4(k,m)=wz4(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=4:N1-1;
for m=4:N2-1;
s1=-1/(4*h1^2)*w(k-3,m); s2=1/(h1^2)*w(k-2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k-1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m-3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m-2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1^2)*w(k-3,m); s2=1/(h1^2)*w(k-2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k-1,m);s4=(1/(2*h1^2)+1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=-1/(4*h2^2)*w(k,m-3);
s6=1/(h2^2)*w(k,m-2); s7=-5/(4*h2^2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s);
```

```
s1=-1/(4*h1^2)*w(k-3,m); s2=1/(h1^2)*w(k-2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k-1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m-3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m-2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r4(k,m)=abs(ww4(k,m)-s); end; end;

function w3_1_4(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;r4=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); ww4(k,m)=wz4(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=2:N1-2;
for m=4:N2;
s1=-1/(4*h1^2)*w(k+3,m); s2=1/(h1^2)*w(k+2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k+1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m-3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m-2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1^2)*w(k+3,m); s2=1/(h1^2)*w(k+2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k+1,m);s4=(1/(2*h1^2)+1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=-1/(4*h2^2)*w(k,m-3);
s6=1/(h2^2)*w(k,m-2); s7=-5/(4*h2^2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1^2)*w(k+3,m); s2=1/(h1^2)*w(k+2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k+1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m-3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m-2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m-1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r4(k,m)=abs(ww4(k,m)-s); end; end;

function w3_1_5(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;r4=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
```

```
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); ww4(k,m)=wz4(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=4:N1;
for m=4:N2-2;
s1=-1/(4*h1^2)*w(k-3,m); s2=1/(h1^2)*w(k-2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k-1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m+3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m+2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1^2)*w(k-3,m); s2=1/(h1^2)*w(k-2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k-1,m);s4=(1/(2*h1^2)+1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=-1/(4*h2^2)*w(k,m+3);
s6=1/(h2^2)*w(k,m+2); s7=-5/(4*h2^2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s);
s1=-1/(4*h1^2)*w(k-3,m); s2=1/(h1^2)*w(k-2,m);
s3=-5/(4*h1^2)*w(k-1,m);s4=(1/(2*h1^2)-1/(2*h2^2))*w(k,m);
s5=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s6=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s7=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s8=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s9=1/(4*h2^2)*w(k,m+3);
s10=-1/(h2^2)*w(k,m+2); s11=5/(4*h2^2)*w(k,m+1);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11;
r4(k,m)=abs(ww4(k,m)-s); end; end;

function w3_1_6(N1,N2)
h1=2/N1;h2=2/N2;
z=zeros(N1+1,N2+1);r2=zeros(N1+1,N2+1);r3=r2;r4=r2;
for k=1:N1+1;   x(k)=-1+(k-1)*h1; end;
for m=1:N2+1;   y(m)=-1+(m-1)*h2;   end;
for k=1:N1+1;
for m=1:N2+1;
z(k,m)=x(k)+i*y(m);
w(k,m)=wz(z(k,m)); ww2(k,m)=wz2(z(k,m));
ww3(k,m)=wz3(z(k,m)); ww4(k,m)=wz4(z(k,m)); end; end;
sz=0;sza=0;
for k=3:N1-1;
for m=3:N2-1;
s1=-1/(48*h1^2)*w(k+2,m); s2=1/(3*h1^2)*w(k+1,m);
s3=(-5/(8*h1^2)+5/(8*h2^2))*w(k,m); s4=1/(3*h1^2)*w(k-1,m);
s5=-1/(48*h1^2)*w(k-2,m);
s6=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
```

```
s7=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s8=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s9=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s10=1/(48*h2^2)*w(k,m+2);
s11=-1/(3*h2^2)*w(k,m+1); s12=-1/(3*h2^2)*w(k,m-1);
s13=1/(48*h2^2)*w(k,m-2);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11+s12+s13;
r2(k,m)=abs(ww2(k,m)-s);
s1=-1/(48*h1^2)*w(k+2,m); s2=1/(3*h1^2)*w(k+1,m);
s3=(-5/(8*h1^2)-5/(8*h2^2))*w(k,m); s4=1/(3*h1^2)*w(k-1,m);
s5=-1/(48*h1^2)*w(k-2,m);
s6=-1/(48*h2^2)*w(k,m+2); s7=1/(3*h2^2)*w(k,m+1);
s8=1/(3*h2^2)*w(k,m-1); s9=-1/(48*h2^2)*w(k,m-2);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9;
r3(k,m)=abs(ww3(k,m)-s);
s1=-1/(48*h1^2)*w(k+2,m); s2=1/(3*h1^2)*w(k+1,m);
s3=(-5/(8*h1^2)+5/(8*h2^2))*w(k,m); s4=1/(3*h1^2)*w(k-1,m);
s5=-1/(48*h1^2)*w(k-2,m);
s6=i/(8*h1*h2)*w(k+1,m+1);
s7=-i/(8*h1*h2)*w(k-1,m+1);s8=-i/(8*h1*h2)*w(k+1,m-1);
s9=i/(8*h1*h2)*w(k-1,m-1); s10=1/(48*h2^2)*w(k,m+2);
s11=-1/(3*h2^2)*w(k,m+1); s12=-1/(3*h2^2)*w(k,m-1);
s13=1/(48*h2^2)*w(k,m-2);
s=s1+s2+s3+s4+s5+s6+s7+s8+s9+s10+s11+s12+s13;
r4(k,m)=abs(ww4(k,m)-s); end; end;

d2=max(max(r2));d3=max(max(r3));d4=max(max(r4));
d=[d2,d3,d4]
function w1=wz(z)
w1=z*conj(z)+z^2*conj(z)^2+z^3*conj(z)^3;
function w2=wz2(z)
w2=2*conj(z)^2+6*z*conj(z)^3;
function w3=wz3(z)
w3=1+4*z*conj(z)+9*z^2*conj(z)^2;
function w4=wz4(z)
w4=2*z^2+6*z^3*conj(z);
```

ÖZGEÇMİŞ

Beyza ÖZTÜRK, 10.01.1994'de İstanbul'da doğdu. İlkokulu ve ortaokulu İstanbul'da Uçanevler İlköğretim Okulu'nda 2010-2018 yıllarında bitirdi. Liseyi Yavuz Sultan Selim Lisesi'nde tamamladı. 2012-2016 tarihlerinde lisans eğitimini Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği'nde bitirdi. Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde tezli yüksek lisans eğitimini 2016 yılında başlayıp 2018 yılı itibariyle tamamladı.