



T.C.  
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR  
DEĞER ÖZDEŞLEŞTİRME PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Pınar AKKAN

MAYIS 2020  
GÜMÜŞHANE

**T.C.  
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR  
DEĞER ÖZDEŞLEŞTİRME PROBLEMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Pınar AKKAN**

**Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
“Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı”  
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11/05/2020  
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 30/06/2020**

**MAYIS 2020**

## TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum "**Parabolik Denklemler İçin Çok Noktalı Lokal Olmayan Sınır Değer Özdeşleştirme Problemi**" isimli tez çalışmasında; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.  
11/05/2020

Pınar AKKAN

**ÖZET**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR  
DEĞER ÖZDEŞLEŞTİRME PROBLEMİ**

Pınar AKKAN

Gümüşhane Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV  
2020, 79 sayfa

Bu çalışmada, parabolik denklemler için çok noktali lokal olmayan sınır değer özdeşleştirme problemi ele alınmıştır. Problemin çözümünün varlığı ve kararlılık kestirimleri araştırılmıştır.

Özdeşleştirme problemin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci ve ikinci mertebeden sonlu fark şemaları kurulmuştur. Daha sonra, bu fark şemaların çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Soyut sonuçlar elde edildikten sonra Dirichlet şartları ile verilen çok boyutlu parabolik kısmi diferansiyel denklem için özdeşleştirme problemin çözümünün kararlılığı

incelenmiştir. Bu problem için hem birinci ve ikinci mertebeden fark şemaları kurulmuş hem de kararlılık analizi yapılmıştır.

Ayrıca test örneklerinde çok noktalı parabolik özdeşleştirme sınır değer probleminin çözümünü bulmak için algoritma ve MATLAB kodları sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** İyi tanımlılık, Kararlılık, Özdeşleştirme, Sınır değer problemi, Sonlu fark şeması, Ters parabolik problem, Yaklaşık çözüm



**ABSTRACT**

**MS THESIS**

**SOURCE IDENTIFICATION PROBLEM WITH MULTI POINT NONLOCAL  
BOUNDARY CONDITION FOR PARABOLIC EQUATION**

Pınar AKKAN

Gümüşhane University  
The Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV

2020, 79 pages

In this study, the multi-point non-local boundary value identification problem for parabolic equations was investigated. The existence of the solution of the problem and the stability estimates were investigated.

In finding the approximate solution of the identification problem, first and second order finite difference schemes have been established. Then, stability estimates were obtained for the solution of these difference schemes.

After obtaining the abstract results, the stability of the solution of the identification problem for the multidimensional parabolic partial differential equation given by Dirichlet

conditions was examined. For this problem, both first and second order difference schemes were established and stability analysis was performed.

In addition, algorithm and MATLAB codes are presented in the test samples to find the solution of the multi-point parabolic identification boundary value problem.

**Keywords:** Well-definition, Stability, Identification, Boundary value problem, Finite difference scheme, Inverse parabolic problem, Approximately solving



## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıŐtır. Tez konusunun belirlenmesi, bu tezin hazırlanmasının her aŐamasında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüŐ ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli danıŐmanım Sayın Prof. Dr. Charyyar ASHERYRALYYEV'e teşekkür ederim.

Ayrıca bu zor süreçte her zaman yanımda olan eŐim Prof. Dr. YaŐar AKKAN'a, büyürken gülücükleri ile beni gayretlendiren sevgili ocuklarım Alya Nisa AKKAN ve Alperen AKKAN' a çok teşekkür ederim.

Pınar AKKAN  
Gümüşhane, 2020



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VIII
İÇİNDEKİLER.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	XI
TABLolar DİZİNİ .....	XII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Temel Kavramlar.....	2
1.3. Literatür Taraması.....	6
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	11
2.1. Sabit Katsayılı Lineer Parabolik Denklem İçin Lokal Olmayan Özdeşleştirme Probleminin Çözümlerinin Klasik Yöntemlerle Bulunması .....	11
2.2. Parabolik Denklem İçin Lokal Olmayan, Çok Noktalı, Özdeşleştirme Probleminin Kararlılığı.....	37
2.3. Kararlılık Tahminleri.....	39
2.4. Uygulama.....	48
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	50
3.1. Ön Hazırlık.....	50
3.2. Özdeşleştirme Problemi İçin Birinci Mertebeden Fark Şeması.....	53
3.3. Özdeşleştirme Problemi İçin İkinci Mertebeden Fark Şeması.....	57
3.4. Sınır Değer Problemin Fark Şeması.....	60
3.5. Sayısal Sonuçlar.....	62
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	75
5. KAYNAKLAR.....	77
6. EKLER.....	80

6.1.	Ek 1. Problemin MATLAB Program Kodları.....	80
6.2.	Ek 2. Laplace Dönüşüm Tablosu.....	85
6.3.	Ek 3. Fourier Dönüşüm Tablosu.....	86
	ÖZGEÇMİŞ	87



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
Şekil 3.5.1. N=160, M=160 için gerçek çözüm grafiği .....	73
Şekil 3.5.2. N=160, M=160 için birinci dereceden doğruluk fark şeması grafiği.....	73
Şekil 3.5.3. N=160, M=160 için ikinci dereceden doğruluk fark şeması grafiği.....	74



## TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.5.1. $u$ için hata analizi .....	72
Tablo 3.5.2. $p$ için hata analizi .....	72
Tablo 3.5.3. $v$ için hata analizi .....	72



## SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$H$	:	Hilbert uzayı
$A: H \rightarrow H$	:	Bir $H$ Hilbert uzayında özeşlenlik pozitif tanımlı bir operatör.
$A^{-1}$	:	$A$ operatörünün tersi
$M(\delta)$	:	Bir pozitif sayı.
$C(H) = C([0,1], H)$	:	[0,1] aralığında tanımlı ve değerleri $H$ Hilbert uzayında olan tüm sürekli fonksiyonların oluşturulan bir Banach uzayı
$C_1^\alpha(H)$	:	[0,1] aralığı üzerinde tanımlı ve değerleri $H$ Hilbert uzayında olan tüm birinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi
$\ v\ _{C(H)}$	:	[0,1] aralığında tanımlanan $H$ değerli bir $v(t)$ fonksiyonun $C(H)$ Banach uzayındaki normu
$\ v\ _{C_1^\alpha(H)}$	:	[0,1] aralığında tanımlanan $H$ değerli bir $v(t)$ fonksiyonun $C_1^\alpha(H)$ Banach uzayındaki normu
$\ p\ _H$	:	$H$ Hilbert uzayındaki $p$ elemanın normu
$\ A\psi\ _H$	:	$H$ Hilbert uzayındaki $A\psi$ elemanın normu
$\ f\ _{C^\alpha(H)}$	:	$f$ fonksiyonun $C^\alpha(H)$ Banach uzayındaki normu
$\Omega = (0,1)^n$	:	$R^n$ Öklid uzayında açık birim küp
$C(\overline{\Omega})$	:	$\overline{\Omega}$ üzerinde tanımlanan tüm sürekli fonksiyonlardan oluşan Banach uzayı
$\ u\ _{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}}  u(x) $	:	$C(\overline{\Omega})$ Banach uzayındaki norm
$L_2(\overline{\Omega})$	:	$\overline{\Omega}$ üzerinde tanımlanan tüm kuadratik integrallenebilir fonksiyonların kümesi
$D(A)$	:	$A$ operatörünün tanım kümesi
$C(L_2(\overline{\Omega}))$	:	Banach uzayı
$W_2^2(\overline{\Omega})$	:	$\overline{\Omega}$ kümesinde tanımlanan sürekli, 1. ve 2. mertebeden kısmi türevlerine sahip ve kuadratik anlamda kendisi, 1. ve 2. mertebeden kısmi türevleri kuadratik integrallenebilen fonksiyonların oluşturduğu Sobolev uzayı
$[0,1]_\tau$	:	$\{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, N, N\tau = 1\}$ : eşit aralıklı grid noktalar kümesi
$q^\tau = \{q_k\}_1^N$	:	Ağ (grid) fonksiyonlar
$C([0,1]_\tau, H)$	:	Ağ (grid) fonksiyonlardan oluşan lineer uzay

$\ q^\tau\ _{C_\tau(H)} = \max_{1 \leq k \leq N} \ q_k\ _H$	:	$C_\tau(H)$ Banach uzayındaki $q^\tau$ ağ (grid) fonksiyonların normu
$R = (I + \tau A)^{-1}$	:	Rezolvent operatör
$F = \left( I + \tau A + \frac{1}{2}(\tau A)^2 \right)^{-1}$	:	Öz eşlenik pozitif tanımlı operatör
$A_n, B_n, C_n, D_n, E_n$	:	$(N+1) \times (N+1)$ kare matrisler
BMDFŞ	:	I. mertebeden doğrulukla fark şeması
İMDFŞ	:	II. mertebeden doğrulukla fark şeması



# 1. GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Parabolik diferensiyel denklemler için çok noktalı özdeşleştirme sınır değer probleminin incelendiği bu tezde sırasıyla aşağıdaki işlemler gerçekleştirilmiştir:

$A$  operatörü  $H$  Hilbert uzayında bir öz eşlenik pozitif tanımlı operatör,  $s_1, \mu_1, s_2, \mu_2, \dots, s_r, \mu_r$  verilen gerçekte sayılar için

$$\sum_{k=1}^r |\mu_k| < 1, 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_r < 1$$

koşulu sağlanmış olsun. Ayrıca,  $\varphi, \psi \in H$  elemanlar ve  $f : [0, 1] \rightarrow H$  fonksiyonu verilsin.  $(v, p)$  çifti için

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = p + f(t), 0 < t < 1, \\ v(1) = \varphi, v(0) = \sum_{k=1}^r \mu_k v(s_k) + \psi \end{cases}$$

sınır değer problemi ele alınmış ve onun çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

İlk olarak parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer özdeşleştirme probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için birinci mertebeden doğruluk

$$\begin{cases} \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + Av_k = f_k + p, f_k = f(t_k), 1 \leq k \leq N, \\ v_N = \varphi, v_0 - \sum_{i=1}^r \mu_i v_{i_i} = \psi, \tau = \frac{1}{N}, \end{cases}$$

fark şeması elde edilmiş ve kararlılık kestirimleri oluşturulmuştur. Burada  $l_i = \left[ \frac{s_i}{\tau} \right]$ ,

$i = 1, \dots, r$ . Daha sonra parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer özdeşleştirme probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için ikinci mertebeden doğruluk

$$\begin{cases} \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + A \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) v_k = \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) \left( f \left( t_{k-\frac{1}{2}} \right) + p \right), 1 \leq k \leq N, \\ v_N = \varphi, \\ v_0 - \sum_{i=1}^r \{ \mu_i (1 - \rho_i) v_{l_i} + \mu_i \rho_i v_{l_i+1} \} = \psi \end{cases}$$

fark şema elde edilmiş ve kararlılık kestirimleri oluşturulmuştur. Burada  $\rho_i = \frac{s_i}{\tau} - \left[ \frac{s_i}{\tau} \right]$ ,

$i = 1, \dots, r$ .

Sonraki aşamada Dirichlet şartı ile verilen parabolik kısmi diferansiyel denklem için çok noktalı özdeşleştirme sınır değer probleminin çözümünün kararlılığı incelenmiş ve birinci ve ikinci mertebeden fark şemaları oluşturulmuştur.

Bununla birlikte çalışmada diferansiyel problem için kararlılık kestirimlerini elde etmek için operatör yöntemleri (Krein, 1972; Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994), yaklaşık çözüm için sonlu fark yöntemi (Samarskii ve Nikolaev, 1989) kullanılmıştır. Numerik çözüm için ise MATLAB kodları yazılmıştır.

## 1.2. Temel Kavramlar

Bu kısımda, lineer ve normlu sistemler, Banach uzayı, iç çarpım uzayı, Hilbert uzayı, sınırlı lineer fonksiyoneller, sınırlı operatörler, öz-eşlenik ve pozitif operatörler ile ilgili kavramlar ve tanımlar verilmektedir. Gerçek sayılar kümesini  $R$ , karmaşık sayılar kümesini ise  $C$  ile gösterilecektir.

*Tanım 1.2.1.*  $A \neq \emptyset$  bir küme ve  $K$  bir cisim olsun.  $A$ 'da '+' ve ' $\cdot$ ' skalerle çarpma işlemleri,

$$+ : A \times A \rightarrow A, (a, b) \rightarrow a + b$$

$$\cdot : K \times A \rightarrow A, (\alpha, a) \rightarrow \alpha \cdot a$$



şeklinde tanımlansın.  $\forall a, b, c \in A$  ve  $\forall \alpha, \beta \in K$  için

- 1)  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,
- 2)  $a + b = b + a$ ,
- 3)  $a + 0 = a$  için  $A$ 'nın sıfır elemanı denilen bir  $0 \in A$  vardır,
- 4)  $\forall a \in A$  için  $a + (-a) = 0$  için  $a$ 'nın tersi denilen bir  $-a \in A$  vardır,
- 5)  $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ ,
- 6)  $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ ,
- 7)  $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$ ,
- 8)  $1 \cdot a = a$

koşulları sağlanıyorsa  $A$ 'ya  $K$  üzerinde bir lineer uzay denir (Debnath ve Mikusinski, 2005).

*Tanım 1.2.2.*  $A \neq \emptyset$  bir küme ve  $d : A \times A \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonu verilsin.  $d$  fonksiyonu  $\forall a, b, c \in A$  için

- 1)  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ,
- 2)  $d(a, b) = d(b, a)$ ,
- 3)  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

ifadelerini sağlıyorsa  $d$ 'ye  $A$  üzerinde bir metrik,  $(A, d)$  ikilisine ise metrik uzay adı verilir.

Burada  $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$  koşulu yerine  $d(a, a) = 0$  ifadesi alınırsa,  $d$ 'ye bir yarı-metrik,  $(A, d)$  ikilisine de yarı-metrik uzay adı verilir (Kreyszing, 1989).

*Tanım 1.2.3.*  $A$ , bir  $K$  cisminde lineer uzay ve  $\|\cdot\| : A \rightarrow [0, +\infty)$  bir fonksiyon ise,  $\|\cdot\|$  fonksiyonu  $\forall a, b \in A$  ve  $\forall \alpha \in K$  için,

- 1)  $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,
- 2)  $\|\alpha \cdot a\| = |\alpha| \|a\|$ ,
- 3)  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

ifadeleri sağlanıyorsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $A$ ' da bir norm,  $(A, \|\cdot\|)$ 'ya normlu uzay denir.

Burada  $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$  koşulu yerine  $\|a\| \geq 0$  eşitsiliği alınırsa  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $A$ ' da bir yarı-norm,  $(A, \|\cdot\|)$  ise yarı-normlu uzay adı verilir (Kreyszing, 1989).

*Tanım 1.2.4.*  $(A, \|\cdot\|)$  normlu uzayı için  $d : A \times A \rightarrow R$ ,  $d(a, b) = \|a - b\|$  biçiminde tanımlı  $d$  fonksiyonu,  $A$  üzerinde bir metrik fonksiyonudur. Burada betimlenen  $d$  metriğine normun ürettiği metrik veya norm metriği adı verilir (Kreyszing, 1989).

*Tanım 1.2.5.*  $(A, \|\cdot\|)$  normlu lineer uzayı verilsin.  $\forall \varepsilon > 0$  için bir  $N$  doğal sayısı vardır öyle ki  $\forall n > N$  için  $\|a_n - n\| < \varepsilon$  oluyorsa  $(a_n)$  dizisi  $a \in A$  'e yakınsaktır.  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ya da  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  ile ifade edilir (Maddox, 1973).

*Tanım 1.2.6.*  $(A, \|\cdot\|)$  normlu lineer uzay olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  şartını sağlayan bir  $M$  doğal sayısı vardır ki her  $m, n > M$  için  $\|a_m - a_n\| < \varepsilon$  ise  $(a_n)$  'e Cauchy dizisi adı verilir (Maddox, 1973).

*Tanım 1.2.7.* Her Cauchy dizisi bir normlu lineer uzayda yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay denir. Tam normlu bir uzaya ise Banach uzayı adı verilir (Maddox, 1973).

*Tanım 1.2.8.*  $K = R$  veya  $C$  için  $A$  bir lineer uzay olsun.  $\langle \cdot, \cdot \rangle : A \times A \rightarrow K$  fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, bu fonksiyona  $A$ 'de bir iç çarpım ve  $(A, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ifadesini de bir iç çarpım uzayı adı verilir (Musayev, 2000).  $\forall a, b, c \in A$  ve  $\mu \in K$  için

- 1)  $\langle a, a \rangle \geq 0$  ve  $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ,
- 2)  $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ ,
- 3)  $\langle \mu \cdot a, b \rangle = \mu \cdot \langle a, b \rangle$ ,
- 4)  $\langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle$ .

*Teorem 1.2.1.*  $A$  bir iç-çarpım uzayı ise,  $\forall a, b \in A$  için,

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

şeklindeki eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir (Musayev, 2000).

*Sonuç 1.2.1.*  $A$  bir iç çarpım uzayı ise,  $\forall a, b \in A$  için,

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

şeklindeki eşitsizliğe Üçgen Eşitsizliği adı verilir (Musayev, 2000).

*Tanım 1.2.9.* Bir  $A$  iç çarpım uzayı, iç çarpımla tanımlanan norm altında Banach uzayı ise  $A$ 'ya bir Hilbert uzayı adı verilir (Debnath ve Mikusinski, 2005).

*Tanım 1.2.10.*  $X$  bir karmaşık lineer sistemi verilsin. Her  $x \in X$  elemanı için bazı karmaşık  $f(x)$  sayı karşılaştırılabilirse, o zaman  $X$  üzerinde bir  $f(x)$  fonksiyonel tanımlanmıştır (Krein,1972).

*Tanım 1.2.11.* Her  $a, b \in X$  ve her  $\lambda, \mu \in X$  için  $f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$  ise, bu durumda  $f(x)$  fonksiyoneline lineer denir (Krein,1972).

*Tanım 1.2.12.* Eğer her  $a \in X$  için  $|f(x)| \leq c \|x\|$  olacak şekilde negatif olmayan bir  $c$  sabit varsa,  $f(x)$ 'e sınırlı lineer fonksiyonel denir. Eşitsizliği sağlayan en küçük  $c$  sabite  $f(x)$  lineer fonksiyonelin normu denir ve  $\|f\|$  ile gösterilir. Fonksiyonelin normu için

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \text{ formülü geçerlidir (Krein,1972).}$$

*Tanım 1.2.13.*  $X$  ve  $Y$  aynı  $F$  cismi üstünde iki lineer uzay ve  $A : X \rightarrow Y$  operatörü verilsin. Eğer  $D(A)$ ,  $X$ ' in bir alt uzayı ve  $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \forall x, y \in D(A)$  ve  $\forall \alpha, \beta \in F$  ise  $A$ 'ya lineer operatör adı verilir (Kreyszing, 1989).

*Tanım 1.2.14.*  $A : X \rightarrow X$  operatörü verilsin. Her  $x \in X$  için  $Ax = x$  ise  $A$  operatörüne birim(özdeşlik) operatör denir.  $I, E$  ve  $I_x$  sembollerinden biriyle gösterilir (Kreyszing, 1989).

*Tanım 1.2.15.*  $X$  ve  $Y$  iki normlu uzay olsun.  $A$  ise tanım kümesi  $D(A) \subset X$  ve görüntü kümesi  $R(A) \subset Y$  olan bir operatör olsun. Eğer  $A$  operatörü  $D(A)$ 'nın  $X$ ' de sınırlı her kümesine  $R(A)$ 'nın  $Y$  de sınırlı bir kümesini karşılık getiriyorsa  $A$ ' ya sınırlı bir operatör denir. Yani,  $\|Ax\|_Y \leq c \|x\|_X$ , her  $x \in D(A)$  olacak şekilde sabit bir  $c > 0$  sayısı varsa,  $A$ 'ya sınırlı bir operatör denir. Eşitsizliği sağlayan en küçük  $c$  sabitine  $A$  operatörün normu

denir ve  $\|A\|_{X \rightarrow Y}$  ile gösterilir. Tanıma göre,  $\|A\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{x \in X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$  olur

(Krein,1972; Kreyszing, 1989).

*Tanım 1.2.16.*  $H$  Hilbert uzayında tanımlı  $A$  bir sınırlı lineer operatör olsun. Aynı uzaydaki  $A^*$  operatörü,  $A$  operatörün eşleniği olarak adlandırılır ve  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$  formülle belirlenir. Eğer  $A^* = A$  ise  $A$ 'ya öz-eşlenik operatör adı verilir (Krein,1972).

*Tanım 1.2.17.* Eğer her  $x \neq 0$  eleman için  $\langle Ax, x \rangle \geq \delta \langle x, x \rangle$  ( $\delta > 0$ ) ise öz-eşlenik  $A$  operatörüne pozitif tanımlı denir. Öz-eşlenik pozitif tanımlı  $A$  operatörün  $f(A)$  fonksiyonunun normu için  $\|f(A)\| \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} |f(\lambda)|$  kestirim geçerlidir (Krein,1972).

*Tanım 1.2.18.*

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda p(x)y = 0, x \in I \quad (1.2.1)$$

$$Ly - \lambda p(x)y = 0 \quad (1.2.2)$$

(1.2.1) veya (1.2.2) eşitliklerinin

$$V_1(y) = K_1 y(a) + M_1 y'(a) = 0$$

$$V_2(y) = K_2 y(b) + M_2 y'(b) = 0$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün elde edilmesine Sturm-Liouville sınır değer problemi denir. Bu eşitliklerde  $K_1, K_2, M_1, M_2$  reel sabitler olup,  $K_1^2 + M_1^2 \neq 0$ ,  $K_2^2 + M_2^2 \neq 0$  koşulları sağlanmaktadır.

### 1.3. Literatür Taraması

Son yıllarda matematiksel fizik denklemler için ek koşulların verilmesiyle oluşturulmuş olan kurtarma modelleri mühendisliğin ve fiziğin farklı uygulamalı alanlarında etki etmesinden dolayı özdeşleştirme problemlerinin önemi daha da artmıştır.

Bu tür modelleri araştırmak için klasik yöntemler (Fourier serileri, Fourier ve Laplace integral yöntemler) sabit katsayılı durumlarda uygulanabilmektedir. Ancak kısmi diferensiyel denklemler için özdeşleştirme problemlerinin yaklaşık çözüm yöntemlerinden en kullanışlı yöntem; operatör yaklaşımı uygulayan sonlu farklar yöntemidir (Samarskii ve Nikolaev, 1989). Özellikle parabolik denklemler için farklı üst belirli sınır değer problemlerini ve onların yaklaşımlarını içeren literatürde birçok araştırma vardır (Eidelman, 1991; Dehghan, 2001; Kalmenov ve Shaldanbaev, 2010; Kabanikhin, 2011; Ashyralyev, 2011; Ashyralyev ve Erdogan, 2011; Ismailov ve Kanca, 2011; Ashyralyev, Erdogan ve Demirdag, 2012; Ashyralyev ve Demirdag, 2012; Guidetti, 2012; Rashedi, Adibi ve

Dehghan, 2014; Ashyralyev ve Erdogan, 2014; Mohebbi ve Abbasi, 2015; Kozhanov, 2017, Pyatkov ve Samkov, 2017; Azizbayov ve Mehraliyev, 2017; Sazaklioglu, Ashyralyev ve Erdogan, 2017; Sadybekov, Oralsyn, Ismailov, 2018; Sazaklioglu, Ashyralyev ve Erdogan, 2018; Ashyralyeva ve Ashyraliyev, 2018; Baglan ve Kanca, 2019)

Dehghan (2001) kaynak kontrol parametresi ile birlikte difüzyon denklemi ile ilgili ters bir problem ele almış ve kontrol parametresini tanımlamak için çeşitli sonlu fark şemaları sunmuştur.

Kalmenov ve Shaldanbaev (2010), bir ters ısı probleminin çözülebilirlik kriterini belirlemişlerdir. Bu bağlamda doğrusal operatör teorisi yöntemlerini kullanarak sınır değer probleminin kesin çözümünün varlığının bir kriterini oluşturmaya çalışmışlardır. Bu çalışmanın yönteminin geleneksel olanlardan temel farkı, verilen problemi Hilbert uzaylarında matematiksel fizikteki diğer birçok çalışmada olduğu gibi diferensiyel bir denklemden ziyade operatör olarak ele almalarıdır.

Ashyralyev (2011) ise  $E$  Banach uzayında tanımlı olan sert pozitif  $A$  operatörü ile verilen parabolik denklem için  $p$  parametresini belirlemek amacıyla

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = p + f(t), 0 < t < 1, \\ v(0) = \varphi, v(1) = \psi \end{cases}$$

sınır değer problemini ele almıştır. Çalışma sonucunda verilen sınır değer problemin çözümü için Hölder normlarında kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Ashyralyev ve Erdogan (2011) tek boyutlu parabolik denklemin sağ tarafının Dirichlet koşulu ile yeniden yapılandırılmasının ters probleminin sayısal çözümlerini sunmuşlardır. Çalışmada doğruluk farkı şemalarının birinci ve ikinci derecelerinin çözümleri için zorlayıcı kararlılık tahminleri yapılmıştır.

Ismailov ve Kanca (2011) lokal olmayan sınır ve üst belirli koşulları ile ısı denklemin çözümü ile birlikte zamana bağlı ısı kapasitesi katsayısının bulunması (ters) problemini ele almışlardır. Bu çalışmada, içerikle ilgili olan varlık ve teklik teoremleri kanıtlanmış ve bu ters problemin sayısal çözümü ile ilgili bazı düşünceler üzerine örnekler sunulmuştur.

Ashyralyev, Erdogan ve Demirdag (2012), Hilbert uzayında parabolik denklem için üst belirli başlangıç sınır değer problemin yaklaşık çözümü için I. ve II. mertebeden doğruluk

fark şemalarını incelemiştir. Bu bağlamda çalışmada oluşturulan fark şemalarının çözümü için kararlılık tahminleri elde edilmiş, sayısal teknikler geliştirilmiş ve algoritmalar bir örnek üzerinde test edilmiştir.

Ashyralyev ve Demirdag (2012) araştırmalarında, pozitif  $A$  operatörü ile keyfi bir  $E$  Banach uzayında  $v'(t) + Av(t) = f(t) + p$  ( $0 \leq t \leq 1$ ),  $v(0) = \varphi, v(1) = \psi$  parabolik denkleminin  $p$  parametresini belirleme sınır değeri problemini göz önüne almışlardır. Çalışmada yaklaşık çözüm için I. mertebeden doğruluk fark şemasının iyi tanımlılığı gösterilmiş ve onun çözümü için kararlılık ve hemen hemen koersiv kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

Guidetti (2012), kaynak terimin soyut bir parabolik sistemde yeniden yapılandırılması problemini ele almıştır. Sistemin çözümünü kaynak terimin bilinmeyen kısmı ile birlikte belirlemek için gerekli olan tamamlayıcı bilgiler, zaman aralığında genel Borel ölçüsüne göre çözümün bir zaman integrali bilgisi ile verilmiştir. Maksimum düzenlilik tipi olan bir çözümün varlığı ve tekliği teoremi kanıtlanmıştır.

Ashyralyev ve Erdogan (2014) lokal olmayan koşullarla parabolik bir denklemin sağ tarafının yeniden belirlenmesi problemini ele almışlardır. Bu problemin iyi tanımlılığı uyumlu uzaylarda ispatlanmıştır.

Mohebbi ve Abbasi (2015), bilinmeyen kontrol parametresini ve bilinmeyen parabolik ters problem çözümünü belirlemek için üst mertebede bir fark şeması kurmuşlardır. Araştırmacılar, önerilen sayısal şemada, konuma göre türevi dördüncü dereceden bir kompakt sonlu fark yaklaşımı ile değiştirmişlerdir. Daha sonra önerilen şemanın kararlılığını ve yakınsamasını araştırmışlardır.

Kozhanov (2017), birinci veya ikinci başlangıç sınır değer problemlerinin sınır koşullarına sahip olan parabolik denklemlerde  $u(x, t)$  çözümü ile  $p(t)$  ve  $q(t)$  katsayılarının belirlenmesinde doğrusal olmayan ters problemlerin çözülebilirliğini incelemiştir.

Pyatkov ve Samkov (2017) durağan olmayan ısı ve kütle aktarım (bir sıvının sıcaklığı ve konsantrasyonu için parabolik denklemleri içeren Navier-Stokes sistemi) için sağ tarafı ile çözümün kendisini bulma ters problemlerin çözülebilirliğini araştırmışlardır.

Sazaklioglu, Ashyralyev ve Erdogan (2017) integral koşullu üst belirli zamana bağlı kaynak tanımlama problemini (yarı doğrusal bir parabolik denklem tarafından yönetilen ters bir problemini) ele almışlardır. Bu diferensiyel problem için kararlılık tahminleri belirlenmiş ve problemin yaklaşık çözümü için I. ve II. doğruluk farkı şemaları önerilmiştir.

Sadybekov, Oralsyn ve Ismailov (2018) lokal olmayan sınır ve integral üstbelirli koşulları ile parabolik bir denklemden zamana bağlı bir ısı kaynağı bulmada ters bir problemi araştırmışlardır. Bu problemin sınır koşulları düzenli olmakla birlikte, problemdeki temel fark özfonksiyonlar sisteminin tam olmamasıdır. Ayrıca çalışmada varlık, teklik ve süreklilik bağlamında genel Fourier yönteminden yararlanılmıştır.

Sazaklioglu, Ashyralyev ve Erdogan (2018) Banach uzayında üstbelirli yarı doğrusal bir denklem için kaynak tanımlama ters problemin çözülebilirliğini ve çözümün tekliğini araştırmışlardır. Ayrıca, bu problemin sayısal çözümü için Rothe fark şeması incelenmiştir. Daha sonra bu fark şemasının varlığı ve tekliği ile ilgili sonuç verilmiştir. Önerilen yöntemin etkinliği hesaplama deneyi ile değerlendirilmiştir.

Ashyralyeva ve Ashyraliyev (2018) bir boyutlu hiperbolik-parabolik denklem için Neumann sınır koşulu ile kaynak tanımlama problemlerinin sayısal çözümlerini araştırmışlardır. Çalışmada, Neumann sınır koşulu ile hiperbolik-parabolik denklemler için tanımlama problemlerinin sayısal çözümü için bir birinci doğruluk farkı şeması sunulmuştur. Ayrıca bu fark şeması basit bir test problemi için uygulanmış ve sayısal sonuçlar sunulmuştur.

Baglan ve Kanca (2019) periyodik sınır ve integral üstbelirli koşulları ile iki boyutlu yarı doğrusal parabolik ters problemin katsayı problemini araştırmışlardır. İterasyon yöntemi ile çözümün varlığı, tekliği ve verilere sürekli bağımlılığı kanıtlanmıştır. Ayrıca, doğrusallaştırma ve implicit sonlu farklar şemasını kullanarak bu ters problem için sayısal çözümü düşünmüşlerdir.

Literatür taraması sonucu bazı araştırmacıların parabolik denklemler için üst belirli sınır değer problemlerinin iyi tanımlılığı incelediği (Ashyralyev, 2011; Ashyralyev, Erdogan, Demirdag, 2012; Ashyralyev, Demirdag, 2012), bazı araştırmacıların ise ters parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemlerinin iyi tanımlılığı incelediği (Ashyralyev, Dural ve Sozen, 2012; Ashyralyev, 2018, Ashyralyev, 2020) belirlenmiştir. Ancak parabolik denklemler için lokal olmayan sınır değer şartlarıyla özdeşleştirme problemleri incelenmemiş ve bu tür problemler için kararlılık analizi yapılmamıştır. İşte bu tez çalışması ile yaklaşık çözüm için kararlılık durumuna açıklık getirilecek ve elde edilen sonuçlar literatürdeki bu boşluğu dolduracaktır.

Bu amaçla çalışmada parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer özdeşleştirme probleminin çözümüne kararlılık kestirimleri oluşturulacaktır. Bu bağlamda parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer özdeşleştirme probleminin

yaklaşık çözümünü oluşturacak I. ve II. mertebeden fark şemaları kurulacak ve fark şemaların çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilecektir. Ayrıca Dirichlet sınır koşulu ile verilen özdeşleştirme problemin çözümlerinin kararlılığı incelenecek ve bu problem için birinci ve ikinci mertebeden kararlı fark şemaları kurulacaktır. Daha sonra çok noktalı parabolik özdeşleştirme sınır değer probleminin çözümünü bulmak için algoritma ve test örnekleri için MATLAB kodları verilecektir.

Ayrıca bu tezde araştırılacak problemlerde operatörler öz eşlenik ve pozitifdir. Sonuçların farklı sınır koşullarıyla parabolik kısmi diferensiyel denklemleri içeren modelleri incelemeye de katkısı olacaktır. Bununla birlikte kararlılık eşitsizlikleri problemin çözümünün verilere göre belli bir uzayda kararlı olmasını göstermektedir. Yani, bir uzayın normunda veriler az değiştiğinde çözümde belli bir uzay normunda az değişmelidir. Sonuçlar çözüm için kararlılık kestirimlerini içermelidir.



## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

### 2.1. Sabit Katsayılı Lineer Parabolik Denklem İçin Lokal Olmayan Özdeşleştirme Probleminin Çözümlerinin Klasik Yöntemlerle Bulunması

Bu kısımda, sabit katsayılı lineer parabolik kısmi diferensiyel denklem için lokal olmayan özdeşleştirme sınır değer problemleri; Fourier serileri, Fourier integral dönüşüm ve Laplace integral dönüşüm yöntemleri uygulanarak çözülecektir.

İlk olarak, Fourier serileri yöntemi uygulayarak Örnek 1'deki özdeşleştirme sınır değer problemin çözümünü ele alalım.

*Örnek 1:*  $[0,1] \times [0,1]$  bölgesinde  $u$  ve  $p$  bilinmeyen fonksiyonlar için

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x) + f(t, x), \\ f(t, x) = 2\pi^2 \sin \pi x + 2t\pi^2 \sin \pi x, \quad t \in (0,1), x \in (0,1), \\ u(0, x) = 2 \sin \pi x, \\ u(1, x) - u\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sin \pi x, \quad x \in [0,1], \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 0, \quad t \in [0,1] \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Başlangıç-sınır değer probleminin çözümü Fourier seri yöntemiyle aşağıdaki gibidir.

*Çözüm 1:* Çözümü

$$u(t, x) = v(t, x) + \omega(t, x)$$

şeklinde arayalım. Burada  $v(t, x)$  yardımcı fonksiyon

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f(t, x), t \in (0, 1), x \in (0, 1), \\ v(1, x) - v\left(\frac{1}{2}, x\right) - v(0, x) = -\sin \pi x, x \in [0, 1], \\ v(t, 0) = 0, v(t, 1) = 0, t \in [0, 1] \end{cases} \quad (2.1.2)$$

şeklindeki problemin çözümü ve  $\omega(t, x)$  yardımcı fonksiyonu

$$\begin{aligned} \omega_t - \omega_{xx} &= p(x), \quad t \in (0, 1), x \in (0, 1), \\ \omega(0, x) - \omega(1, x) + \omega\left(\frac{1}{2}, x\right) & \\ = u(0, x) - v(0, x) - u(1, x) + v(1, x) + u\left(\frac{1}{2}, x\right) - v\left(\frac{1}{2}, x\right), & x \in [0, 1], \\ \omega(t, 0) = 0, \omega(t, 1) = 0, & t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

formundaki probleminin çözümüdür.

İlk önce (2.1.3) probleminin çözümünü elde edelim. (2.1.3)'ün çözümünü

$$\omega(t, x) = \alpha(t, x) + \beta(t, x)$$

biçiminde arayalım. Bu çözümde  $\alpha(t, x)$  fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} &= 0, t \in (0, 1), x \in (0, 1), \\ \alpha(0, x) - \alpha(1, x) + \alpha\left(\frac{1}{2}, x\right) &= 0, x \in [0, 1], \\ \alpha(t, 0) = 0, \quad t &\in [0, 1] \\ \alpha(t, 1) = 0, \quad t &\in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

problemin çözümü ve  $\beta(t, x)$  fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
\beta_t - \beta_{xx} &= p(x), t \in (0,1), x \in (0,1), \\
\beta(0,x) - \beta(1,x) + \beta\left(\frac{1}{2}, x\right) &= 0, x \in [0,1], \\
\beta(t,0) &= 0, t \in [0,1] \\
\beta(t,1) &= 0, t \in [0,1]
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

problemin çözümüdür.

(2.1.4)'ün çözümünü değişkenlere ayırma yöntemiyle bulalım. Bu problemin çözümünü

$$\alpha(t, x) = X(x)T(t) \neq 0$$

şeklinde arayalım. Bu çözüm (2.1.4)'deki diferensiyel denklemde yerine yazılırsa

$$T'(t).X(x) = T(t).X''(x) \tag{2.1.6}$$

elde edilir. (2.1.6)'dan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{ve} \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

yazılır. (2.1.4) 'ün sınır şartlarını ve (2.1.6) denklemini kullanarak bilinmeyen  $X(x)$  fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
X''(x) - \lambda X(x) &= 0, 0 < x < 1 \\
X(0) &= 0, X(1) = 0
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Sturm-Liouville problemi elde edilir. (2.1.7) problemin karakteristik denklemi  $\mu^2 - \lambda = 0$  şeklindedir. Karakteristik denklemdeki  $\lambda$  parametresi için 3 durum söz konusudur:

1. Durum:

$\lambda > 0$ ,  $\mu_{1,2} = \mp\sqrt{\lambda}$  olduğu durumda (2.1.7) probleminin diferensiyel denklemin çözümü

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

şeklindedir. (2.1.7) sınır şartları kullanıldığında

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden,

$$c_2 = -c_1,$$

$$c_1 e^{\sqrt{\lambda}} - \frac{c_1}{e^{\sqrt{\lambda}}} = 0,$$

$$c_1 \left( e^{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{e^{\sqrt{\lambda}}} \right) = 0$$

yazılır. Sonuç olarak,

$$c_1 = 0, c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

elde edilir. O halde  $\lambda > 0$  durumunda (2.1.7) Sturm-Liouville problemin özdeğeri ve özfonksiyonu yoktur.

## 2. Durum:

$\lambda = 0$  ise  $X''(x) = 0$  olur ve bu denklemin genel çözümü

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

şeklindedir. (2.1.7) sınır şartlarını yerine koyarsak,

$$0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 0,$$

$$1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 0$$

yazılır. Bu iki denklemin çözümünden

$$c_1 = 0, c_2 = 0, X(x) \equiv 0.$$

elde edilir. O halde  $\lambda = 0$  özdeğer değildir ve bu durum için özfonksiyon yoktur.

### 3. Durum:

$\lambda < 0$  için denklemin genel çözümü  $c_1, c_2$  keyfi sabitleri için

$$X(x) = c_1 \cdot \cos \sqrt{-\lambda}x + c_2 \cdot \sin \sqrt{-\lambda}x$$

şeklindedir. (2.1.7) probleminin birinci sınır şartını yerine koyarsak

$$X(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0,$$

$$X(1) = c_1 \cdot \cos \sqrt{-\lambda} + c_2 \cdot \sin \sqrt{-\lambda} = 0$$

ifadeleri elde edilir. (2.1.7)'deki ikinci şart dikkate alındığında

$$c_2 \cdot \sin \sqrt{-\lambda} = 0, c_2 \neq 0,$$

$$\sin \sqrt{-\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-\lambda_k} = k\pi,$$

$$\lambda_k = -k^2\pi^2 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

özdeğerleri bulunur. Sonuçta her  $\lambda_k$  özdeğerine karşılık gelen öz fonksiyonlar

$$X_k(x) = \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklindedir. Elde edilen  $\lambda_k$  özdeğerleri kullanılarak

$$\frac{T_k'(t)}{T_k(t)} = \lambda_k = -k^2\pi^2$$

denkleminin genel çözümü;  $A_k$  keyfi sabit olmak üzere,

$$T_k(t) = A_k e^{-k^2 \pi^2 t}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde yazılabilir. Böylece  $\alpha(t, x)$ 'in çözümü,

$$\alpha(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k \pi x$$

olarak elde edilir. (2.1.4) problemindeki her  $x \in [0, 1]$  için sınır şartlarından yararlanılarak

$$\alpha(0, x) - \alpha(1, x) + \alpha\left(\frac{1}{2}, x\right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \left( 1 - e^{-k^2 \pi^2} + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{2}} \right) \sin k \pi x = 0$$

ifadeleri elde edilir. Bu durumda,

$$A_k \left( 1 - e^{-k^2 \pi^2} + e^{-\frac{k^2 \pi^2}{2}} \right) \sin k \pi x = 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow A_k = 0$$

olur. O halde (2.1.4) probleminin çözümü  $\alpha(t, x) = 0$ 'dır.

Şimdi (2.1.2) problemin çözümünü bulalım. Bu problemin çözümünü

$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin k \pi x$$

şeklinde arayalım. Bu durumda

$$v_t(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin k \pi x,$$

$$v_{xx}(t, x) = -(k\pi)^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin k \pi x$$

elde edilir. O halde (2.1.1) ve (2.1.2)'den

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k'(t) + (k\pi)^2 A_k(t) \right] \sin k\pi x = f(t, x) = (2+2t)\pi^2 \sin \pi x$$

elde edilir. Bu son ifadeden

$$A_1'(t) + \pi^2 A_1(t) = 2\pi^2 (1+t) \quad (2.1.8)$$

$$A_m'(t) + (m\pi)^2 A_m(t) = 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.1.9)$$

yazılır. Ayrıca

$$v(1, x) - v\left(\frac{1}{2}, x\right) - v(0, x) = -\sin \pi x$$

lokal olmayan koşul dikkate alındığında

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k(1) - A_k\left(\frac{1}{2}\right) - A_k(0) \right] \sin k\pi x = -\sin \pi x$$

olduğu aşikardır. Böylece,

$$A_m(1) - A_m\left(\frac{1}{2}\right) - A_m(0) = 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.1.10)$$

$$A_1(1) - A_1\left(\frac{1}{2}\right) - A_1(0) = -1 \quad m = 1 \quad (2.1.11)$$

elde edilir. (2.1.9) diferensiyel denkleminin çözümü  $c_1$  bir keyfi sabit olmak üzere

$A_m(t) = c_1 e^{-(m\pi)^2 t}$  şeklindedir. Her  $m = 2, 3, 4, \dots$  için (2.1.10) denklemini göz önüne alırsak,

$$c_1 e^{-(m\pi)^2} - c_1 e^{-\frac{(m\pi)^2}{2}} - c_1 = 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden  $c_1 = 0$  'dır. O halde,  $A_m(t) = 0$  olur. (2.1.8) diferensiyel denkleminin genel çözümü  $A_1(t) = c_2 e^{-\pi^2 t}$  şeklinde olduğuna göre (2.1.11) denkleminde

$$c_2 e^{-\pi^2} - c_2 e^{\frac{-\pi^2}{2}} - c_2 = -1$$

veya

$$c_2 = \frac{1}{1 - e^{-\pi^2} + e^{\frac{-\pi^2}{2}}}$$

dir. Bu durumda (2.1.2)'in çözümü

$$v(t, x) = \frac{e^{-\pi^2 t}}{1 - e^{-\pi^2} + e^{\frac{-\pi^2}{2}}} \cdot \sin \pi x$$

şeklindedir. Bu durumda

$$p(x) = -\frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(0, x)}{\partial x^2},$$

olur ve (2.1.1)'de  $u(0, x) = 2 \sin \pi x$  olduğundan,

$$\frac{\partial^2 u(0, x)}{\partial x^2} = -2\pi^2 \sin \pi x$$

yazılır. Ayrıca

$$v(t, x) = \frac{e^{-\pi^2 t}}{1 - e^{-\pi^2} + e^{\frac{-\pi^2}{2}}} \cdot \sin \pi x$$



olduğundan

$$v(0, x) = \frac{1}{1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}} \sin \pi x$$

$$\frac{\partial^2 v(0, x)}{\partial x^2} = \frac{-\pi^2}{1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}} \sin \pi x$$

olarak hesaplanır. Bu ifadeler yardımıyla

$$q_1 = \left( \frac{1 - 2e^{-\pi^2} + 2e^{-\frac{\pi^2}{2}}}{1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}} \right) \pi^2$$

olmak üzere

$$p(x) = q_1 \cdot \sin \pi x$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak  $\alpha(t, x)$  için çözüm bulunmuş olur.

İkinci olarak (2.1.5) problemi için  $\beta(t, x)$  çözümünü bulalım.  $A_k(t)$  bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere  $\beta(t, x)$  çözümünü,

$$\beta(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin k\pi x \quad (2.1.12)$$

şeklinde arayalım.  $\beta(0, x) - \beta(1, x) + \beta(\frac{1}{2}, x) = 0$  lokal olmayan şartından

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k(0) - A_k(1) + A_k(\frac{1}{2}) \right) \sin k\pi x = 0, \forall x \in [0, 1]$$

elde edilir. Bu ifadeden

$$A_k(0) - A_k(1) + A_k\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (2.1.13)$$

yazılabilir. Diğer taraftan (2.1.12) ifadesinin türevi alınırsa

$$\beta_t'(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin k\pi x$$

elde edilir. (2.1.5) probleminde  $\beta_{xx}(t, x)$  ve  $\beta_t'(t, x)$  ifadelerini yerine koyarsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \pi^2 \sin k\pi x = p(x)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k'(t) + A_k(t) k^2 \pi^2) \sin k\pi x = q_1 \cdot \sin \pi x$$

yazılabilir. Elde edilen eşitliğin her iki tarafını  $\sin m\pi x, m = 1, 2, 3, \dots$  ile çarpıp 0'dan 1'e kadar integral alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A_k'(t) + A_k(t) k^2 \pi^2) \int_0^1 \sin m\pi x \sin k\pi x dx = \int_0^1 \sin m\pi x \cdot q_1 \cdot \sin \pi x dx$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadedeki,

$$\int_0^1 \sin m\pi x \sin k\pi x dx$$

integralinin değeri;

$k \neq m$  için 0'a,  $k = m$  için  $\frac{1}{2}$ 'ye eşittir. O halde, her  $m = 1, 2, 3, \dots$  için

$$A'_m(t) + A_m(t) m^2 \pi^2 = 2 \int_0^1 \sin m\pi x \cdot q_1 \cdot \sin \pi x dx,$$

$$k = m = 1 \rightarrow A'_1(t) + A_1(t) \pi^2 = q_1 \quad (2.1.14)$$

$$k = m \neq 1 \rightarrow A'_m(t) + A_m(t) \pi^2 = 0 \quad (2.1.15)$$

olduğu aşıkardır. O halde (2.1.15) denkleminin çözümü  $m = 2, 3, 4, \dots$  için  $A_m(t) = c_3 e^{-\pi^2 t}$  olur ve (2.1.13) şartına göre

$$c_3 - c_3 e^{-\pi^2} + c_3 e^{-\frac{\pi^2}{2}} = 0$$

elde edilir. Bu ifadeden  $c_3 = 0$ 'dır. Bu durumda (2.1.14) denkleminin çözümü

$$A_1(t) = A_1(0) e^{-\pi^2 t} + \int_0^t e^{-\pi^2(t-s)} \cdot q_1 \cdot ds = A_1(0) e^{-\pi^2 t} + \frac{(1 - e^{-\pi^2 t})}{\pi^2} \cdot q_1$$

olur. Bu çözümde  $t = 1, \frac{1}{2}$  için

$$A_1(1) = A_1(0) e^{-\pi^2} + \frac{(1 - e^{-\pi^2})}{\pi^2} \cdot q_1$$

$$A_1\left(\frac{1}{2}\right) = A_1(0) e^{-\frac{\pi^2}{2}} + \frac{\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{2}}\right)}{\pi^2} \cdot q_1$$

şeklindedir. (2.1.13)'i dikkate alarak

$$A_1(0) = \frac{\left(-e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}\right) \cdot q_1}{\left(1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}\right) \pi^2} = q_2$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda (2.1.12)'deki

$$\beta(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin k\pi x \text{ için}$$

$$\beta(t, x) = A_1(t) \sin \pi x = \left( q_2 e^{-\pi^2 t} + \left( \frac{1 - e^{-\pi^2 t}}{\pi^2} \right) \cdot q_1 \right) \cdot \sin \pi x$$

elde edilir. Sonuç olarak  $\alpha(t, x) = 0$  olduğundan  $\omega(t, x)$  çözümü,

$$\omega(t, x) = \beta(t, x)$$

olur. Şimdi  $v(t, x)$  ve  $\omega(t, x)$  çözümlerini  $u(t, x)$  'de yerine yazacağız.

$$u(t, x) = v(t, x) + \omega(t, x) = \frac{e^{-\pi^2 t}}{1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}} \cdot \sin \pi x + \left( q_2 e^{-\pi^2 t} + \left( \frac{1 - e^{-\pi^2 t}}{\pi^2} \right) \cdot q_1 \right) \cdot \sin \pi x$$

denklemini elde edilir. Bu denklemlerin çözümü,

$$u(t, x) = \left[ \frac{e^{-\pi^2 t}}{1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}} + \frac{\left( -e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}} \right) \left( 1 - 2e^{-\pi^2} + 2e^{-\frac{\pi^2}{2}} \right)}{\left( 1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}} \right) \left( 1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}} \right)} e^{-\pi^2 t} \right. \\ \left. + \left( 1 - e^{-\pi^2 t} \right) \left( \frac{1 - 2e^{-\pi^2} + 2e^{-\frac{\pi^2}{2}}}{1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}} \right) \right] \sin \pi x$$

şeklindedir. Elde edilen bu çözümden

$$E(t) = e^{-\pi^2 t},$$

$$F = 1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}$$

kısaltmaları kullanılarak çözüm

$$u(t, x) = \left[ \frac{E(t)}{F} + \left( \frac{F-1}{F} \right) \left( \frac{2F-1}{F} \right) E(t) + (1-E(t)) \left( \frac{2F-1}{F} \right) \right] \sin \pi x$$

şeklinde yazılabilir. O halde,

$$u(t, x) = \left[ \frac{2F^2 - F - F.E(t) + E(t)}{F^2} \right] \sin \pi x$$

sonucu elde edilir. Bir başka ifadeyle sonuç,

$$u(t, x) = \left[ \frac{1 + 3e^{-\frac{\pi^2}{2}} - e^{-\pi^2} - 4e^{-\frac{3\pi^2}{2}} + 2e^{-2\pi^2}}{\left(1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}\right)^2} + \frac{\left(-e^{-\frac{\pi^2}{2}} + e^{-\pi^2}\right) e^{-\pi^2 t}}{\left(1 - e^{-\pi^2} + e^{-\frac{\pi^2}{2}}\right)^2} \right] \sin \pi x$$

şeklindedir.

Şimdi, sabit katsayılı lineer parabolik denklem için lokal olmayan özdeşleştirme sınır değer problemin çözümünü Fourier integral yöntemi kullanarak Örnek 2 üzerinden ele alalım.

Örnek 2:  $[0,1] \times R$  bölgesinde  $u$  ve  $p$  bilinmeyen fonksiyonlar için

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) = p(x) + f(t, x), \\ f(t, x) = -(4x^2 - 1) \cdot (3 + 2t) \cdot e^{-x^2}, \quad t \in (0, 1), x \in (-\infty, \infty), \\ u(0, x) = e^{-x^2}, \quad u(1, x) = \frac{1}{2} u\left(\frac{1}{2}, x\right) - \frac{1}{2} u\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{5}{2} e^{-x^2}, x \in (-\infty, \infty) \end{array} \right. \quad (2.1.16)$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümünü Fourier integral dönüşümü yöntemiyle bulalım.

Çözüm: Başlangıç sınır değer probleminin çözümünü

$$u(t, x) = v(t, x) + \omega(t, x) \quad (2.1.17)$$

şeklinde arayalım. Burada  $v(t, x)$  yardımcı fonksiyon

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} + v(t, x) = f(t, x), \quad t \in (0, 1), x \in (-\infty, \infty), \\ v(1, x) - \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}, x\right) - v(0, x) \\ = u(1, x) - \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}, x\right) - u(0, x) = \frac{5}{2}e^{-x^2}, x \in (-\infty, \infty) \end{array} \right. \quad (2.1.18)$$

şeklindeki lokal olmayan başlangıç sınır değer problemin çözümü ve  $\omega(t, x)$  yardımcı fonksiyonu ise

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_t(t, x) - \omega_{xx}(t, x) + \omega(t, x) = p(x), t \in (0, 1), x \in (-\infty, \infty), \\ \omega(0, x) - \omega(1, x) + \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{4}, x\right) - \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2}, x\right) \\ = u(0, x) - v(0, x) - u(1, x) + v(1, x) + \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{4}, x\right) - \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{4}, x\right) \\ - \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}, x\right) = 0, x \in (-\infty, \infty) \end{array} \right. \quad (2.1.19)$$

biçimindeki lokal olmayan sınır değer problemin çözümüdür.

İlk önce (2.1.18) probleminin çözümünü bulalım. (2.1.18)'deki diferensiyel denklemin her iki tarafına  $x$  değişkenine göre Fourier integral dönüşümünü uygulayalım. Bu durumda

$$V(t, s) = F \{v(t, x)\},$$

$$V_t(t, s) = F\{v_t(t, x)\},$$

$$F\{v_{xx}(t, x)\} = -s^2 F\{v(t, x)\} = -s^2 V(t, s)$$

olur. Bu ifadelerden

$$V_t(t, s) + s^2 V(t, s) + V(t, s) = F\{(1 - 4x^2)(3 + 2t)e^{-x^2}\} \quad (2.1.20)$$

denklemini elde edilir.  $E(s) = F\{e^{-x^2}\}$  notasyonu kullanılarak,

$$\begin{aligned} F\{(2 - 4x^2 - 1)(3 + 2t)e^{-x^2}\} &= F\{(2 - 4x^2)(3 + 2t)e^{-x^2}\} - (3 + 2t)F\{e^{-x^2}\} \\ &= -(3 + 2t)F\{e^{-x^2}\} - (3 + 2t)E(s) \\ &= -(3 + 2t)(is)^2 E(s) - (3 + 2t)E(s) \\ &= (3 + 2t)(s^2 + 1)E(s) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (2.1.20) denklemin çözümü  $c$  keyfi sabit ve  $V_o(t, s)$  özel çözüm olmak üzere  $V(t, s) = e^{-(s^2+1)t} \cdot c + V_o(t, s)$  şeklindedir. (2.1.20) denkleminin çözümünü tamamen elde etmek için  $V_o(t, s)$  özel çözümünü bulmalıyız.

Şimdi özel çözümü  $V_o(t, s) = a + bt$  şeklinde arayalım. Bu durumda

$$b + s^2(a + bt) + a + bt = (3 + 2t)(s^2 + 1)E(s)$$

olduğuna göre,

$$b + s^2(a + bt) + a + bt = (3 + 2t)(s^2 + 1)E(s),$$

$$b + (s^2 + 1)a = 3(s^2 + 1)E(s), \quad b(s^2 + 1) = 2(s^2 + 1)E(s),$$

$$b = 2E(s), \quad a = -\frac{2E(s)}{s^2 + 1} + 3E(s)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece, (2.1.20) denkleminin çözümü

$$V(t, s) = e^{-(s^2+1)t} \cdot c + a + bt = e^{-(s^2+1)t} \cdot c - \frac{2E(s)}{s^2+1} + 3E(s) + 2tE(s)$$

şeklindedir. (2.1.18) problemindeki  $t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0$  değerleri çözümde yerine yazılırsa

$$V(1, s) = e^{-(s^2+1)} \cdot c - \frac{2E(s)}{s^2+1} + 3E(s) + 2E(s),$$

$$V\left(\frac{1}{4}, s\right) = e^{-\frac{s^2+1}{4}} \cdot c - \frac{2E(s)}{s^2+1} + 3E(s) + \frac{1}{2}E(s),$$

$$V\left(\frac{1}{2}, s\right) = e^{-\frac{s^2+1}{2}} \cdot c - \frac{2E(s)}{s^2+1} + 3E(s) + E(s),$$

$$V(0, s) = c - \frac{2E(s)}{s^2+1} + 3E(s)$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu ifadeleri lokal olmayan şarta yerine koyarsak

$$V(1, s) - \frac{1}{2}V\left(\frac{1}{4}, s\right) + \frac{1}{2}V\left(\frac{1}{2}, s\right) - V(0, s) = c \left( e^{-(s^2+1)} - \frac{1}{2}e^{-\frac{s^2+1}{4}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{s^2+1}{2}} - 1 \right) + \frac{9}{4}E(s) = \frac{9}{4}E(s)$$

olur. Bu son ifadeden  $c = 0$  olduğu görülür. Böylece, çözüm için

$$V(t, s) = -\frac{2E(s)}{s^2+1} + 3E(s) + 2tE(s)$$

eşitliği alınabilir. Son eşitliğin her iki tarafına ters Fourier dönüşümü ve Fourier integral dönüşümün konvolüsyon özelliğini uygularsak

$$v(t, x) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-y^2} dy + (3+2t)e^{-x^2} \quad (2.1.21)$$

çözümüne ulaşırız.  $-\omega_{xx}(0, x) + \omega(0, x) = p(x)$  olduğuna göre,



$$-u_{xx}(0, x) + u(0, x) + v_{xx}(0, x) - v(0, x) = p(x)$$

olur. Son eşitlikteki  $p(x)$  değeri ise

$$\begin{aligned} p(x) &= -u_{xx}(0, x) + u(0, x) + v_{xx}(0, x) - v(0, x) \\ &= (4x^2 - 2)e^{-x^2} + e^{-x^2} - 2 \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-y^2} dy \right)_{xx} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-y^2} dy \right] - (4x^2 - 2)e^{-x^2} - e^{-x^2} \\ &= 4e^{-x^2} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi (2.1.19) lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım. Bu durumda

$$\begin{cases} \omega_t(t, x) - \omega_{xx}(t, x) + \omega(t, x) = 4e^{-x^2}, t \in (0, 1), x \in (-\infty, \infty), \\ \omega(0, x) - \omega(1, x) + \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{4}, x\right) - \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2}, x\right) = 0, x \in (-\infty, \infty) \end{cases} \quad (2.1.22)$$

problemi yazılır. (2.1.22) problemindeki diferensiyel denklemin her iki tarafına Fourier integral dönüşümünü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} W(t, s) &= F\{\omega(t, x)\}, \\ W_t(t, s) &= F\{\omega_t(t, x)\}, \\ F\{\omega_{xx}(t, x)\} &= -s^2 F\{\omega(t, x)\} = -s^2 W(t, s) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu durumda

$$W_t(t, s) + s^2 W(t, s) + W(t, s) = 4E(s) \quad (2.1.23)$$

denklemini yazılır. (2.1.23) homojen olmayan denklemin çözümü  $c$  keyfi sabit ve  $V_{\partial}(t, s)$  özel çözüm olmak üzere

$$W(t, s) = e^{-(s^2+1)t} \cdot c + W_{\partial}(t, s)$$

şeklindedir.

Bu çözümde, özel çözümü  $V_{\partial}(t, s) = a(s)$  şeklinde arayalım. Bu durumda

$$(s^2 + 1)a(s) = 4E(s), a(s) = 4 \frac{1}{s^2 + 1} E(s),$$

$$W(t, s) = e^{-(s^2+1)t} \cdot c + 4 \frac{1}{s^2 + 1} E(s)$$

elde edilir. (2.1.22) problemindeki sınır şartlarına Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$W(0, s) - W(1, s) + \frac{1}{2} W\left(\frac{1}{4}, s\right) - \frac{1}{2} W\left(\frac{1}{2}, s\right) = 0$$

olur. Buna göre,

$$\left[ 1 - e^{-(s^2+1)} + \frac{1}{2} e^{-\frac{(s^2+1)}{4}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{(s^2+1)}{2}} \right] \cdot c + 4 \frac{1}{s^2 + 1} E(s) - 4 \frac{1}{s^2 + 1} E(s) + \frac{4}{2} \frac{1}{s^2 + 1} E(s) - \frac{4}{2} \frac{1}{s^2 + 1} E(s) = 0$$

alınır. O halde bu son eşitlikten  $c = 0$ 'dır. Bu durumda

$$W(t, s) = 4 \frac{1}{s^2 + 1} E(s) \tag{2.1.24}$$

çözümü elde edilir.

(2.1.24) çözümüne Ters Fourier dönüşümü uygulanırsa,

$$\omega(t, x) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-y^2} dy \quad (2.1.25)$$

olur.

(2.1.17), (2.1.21) ve (2.1.25) formülleri dikkate alınır (2.1.16) probleminin çözümü

$$u(t, x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} e^{-y^2} dy + (3+2t)e^{-x^2}$$

olarak elde edilir.

Son olarak, sabit katsayılı lineer parabolik kısmi diferensiyel denklem için lokal olmayan özdeşleştirme sınır değer problemin çözümünü Laplace integral yöntemi kullanarak Örnek 3 üzerinden inceleyelim.

*Örnek 3:*  $[0,1] \times (0, \infty)$  bölgesinde  $u$  ve  $p$  bilinmeyen fonksiyonlar için

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) + 2u(t, x) = p(x) + f(t, x), & t \in (0,1), x \in (0, \infty) \\ f(t, x) = (3+2t) \cdot e^{-x}, & t \in (0,1), x \in (0, \infty), \\ u(0, x) = 3e^{-x}, \quad u(1, x) = \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}, x\right) - \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{19}{4}e^{-x}, & x \in (0, \infty), \\ u(t, 0) = (3+2t), \\ u_x(t, 0) = -(3+2t) \end{cases} \quad (2.1.26)$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümünü Laplace yöntemiyle bulalım.

*Çözüm:* Bu problemin çözümünü  $u(t, x) = v(t, x) + \omega(t, x)$  şeklinde arayalım. Bu çözümde  $v(t, x)$  yardımcı fonksiyon

$$\begin{cases} v_t(t, x) - v_{xx}(t, x) + 2v(t, x) = f(t, x), & t \in (0,1), x \in (0, \infty), \\ v(1, x) - \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{4}, x\right) + \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}, x\right) - v(0, x) = \frac{9}{4}e^{-x}, & x \in (0, \infty) \\ v(t, 0) = 3+2t, \quad v_x(t, 0) = -3-2t \end{cases} \quad (2.1.27)$$

şeklindeki problemin çözümü ve  $\omega(t, x)$  yardımcı fonksiyonu ise

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_t(t, x) - \omega_{xx}(t, x) + 2\omega(t, x) = p(x), \quad t \in (0, 1), x \in (0, \infty) \\ \omega(0, x) - \omega(1, x) + \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{4}, x\right) - \frac{1}{2}\omega\left(\frac{1}{2}, x\right) \\ = u(0, x) - v(0, x) - u(1, x) + v(1, x) \\ + \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{4}, x\right) - \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{4}, x\right) - \frac{1}{2}u\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}, x\right) = 0, \quad x \in (0, \infty) \\ \omega(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.28)$$

biçimindeki lokal olmayan sınır değer problemin çözümüdür.

İlk önce (2.1.27) probleminin çözümünü bulalım. (2.1.27)'deki diferensiyel denklemin her iki tarafına  $x$  değişkenine göre Laplace dönüşümünü uygulayalım. O halde

$$V(t, s) = L\{v(t, x)\},$$

$$L\{v_{xx}(t, x)\} = s^2V(t, s) - sv(t, 0) + v_x(t, 0) = V_t(t, s) - s^2V(t, s) + 2V(t, s) + sv(t, 0) + v_x(t, 0)$$

$$V_t(t, s) - s^2V(t, s) + 2V(t, s) + s(3 + 2t) + (-3 - 2t) = (3 + 2t)\frac{1}{s+1},$$

$$V_t(t, s) - (s^2 - 2)V(t, s) + s(3 + 2t) + (-3 - 2t) = (3 + 2t)\frac{1}{s+1},$$

$$V_t(t, s) - (s^2 - 2)V(t, s) = (3 + 2t)\left(\frac{1}{s+1} + 1 - s\right),$$

$$V_t(t, s) - (s^2 - 2)V(t, s) = \left(\frac{2 - s^2}{s+1}\right)3 + \left(\frac{2 - s^2}{s+1}\right)2t,$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerden

$$V_t(t, s) + s^2V(t, s) + V(t, s) = F\left\{(1 - 4x^2)(3 + 2t)e^{-x^2}\right\} = \frac{2 - s^2}{s+1} + \frac{2 - s^2}{s+1}2t$$

denklemini yazılabilir. Bu denklemin çözümü  $c$  keyfi sabit ve  $V_o(t, s)$  özel çözüm olmak üzere

$$V(t, s) = e^{(s^2-2)t} \cdot c + V_o(t, s) \text{ şeklindedir.}$$

Şimdi özel çözümü  $V_o(t, s) = at + b$  şeklinde arayalım. O halde

$$a - (s^2 - 2)(at + b) = \left(\frac{2-s^2}{s+1}\right)3 + \left(\frac{2-s^2}{s+1}\right)2t,$$

$$-(s^2 - 2).a = 2\left(\frac{2-s^2}{s+1}\right),$$

$$a = \frac{2}{s+1}$$

olur. Bu eşitliklerden

$$\frac{2}{s+1} + (2-s^2)b = 3\left(\frac{2-s^2}{s+1}\right),$$

$$b = \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)}$$

olarak bulunur. Böylece, özel çözüm

$$V_{\text{ö}}(t, s) = at + b = \frac{2}{s+1}t + \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)}$$

olarak alınır. Homojen ve özel çözüm birlikte yazılırsa

$$\begin{aligned} V(t, s) &= e^{(s^2-2)t}.c + at + b \\ &= e^{(s^2-2)t}.c + \frac{2}{s+1}t + \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)} \end{aligned}$$

olur. (2.1.27) problemindeki  $t = 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  değerlerini çözümde yerine yazarsak,

$$V(1, s) = e^{(s^2-2)}.c + \frac{2}{s+1} + \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)}$$

$$V(0, s) = c + \frac{4 - 3s^2}{(s+1)(2-s^2)},$$

$$V\left(\frac{1}{2}, s\right) = e^{\frac{s^2-2}{2}} \cdot c + \frac{1}{s+1} + \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)},$$

$$V\left(\frac{1}{4}, s\right) = e^{\frac{s^2-2}{4}} \cdot c + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)},$$

elde edilir. Bu ifadeler denkleme yerine koyulursa

$$\begin{aligned} V(1, s) - \frac{1}{2}V\left(\frac{1}{4}, s\right) + \frac{1}{2}V\left(\frac{1}{2}, s\right) - V(0, s) &= c \left( e^{(s^2-2)} - \frac{1}{2}e^{\frac{s^2-2}{4}} + \frac{1}{2}e^{\frac{s^2-2}{2}} - 1 \right) \\ &+ \left( \frac{2}{s+1} - \frac{1}{4(s+1)} + \frac{1}{2(s+1)} \right) \\ &+ \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)} - \frac{4-3s^2}{2(s+1)(2-s^2)} \\ &+ \frac{4-3s^2}{2(s+1)(2-s^2)} - \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$c \left( e^{(s^2-2)} - \frac{1}{2}e^{\frac{s^2-2}{4}} + \frac{1}{2}e^{\frac{s^2-2}{2}} - 1 \right) + \frac{9}{4(s+1)} = \frac{9}{4(s+1)},$$

olur. Bu son eşitlikten  $c = 0$ 'dır. O halde,

$$V(t, s) = \frac{2t}{s+1} + \frac{4-3s^2}{(s+1)(2-s^2)} = \frac{2t}{s+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{2s}{s^2-2} + \frac{2}{s^2-2}$$

$$v(t, x) = L^{-1}\{V(t, s)\} = 2t.e^{-x} + e^{-x} + 2.\cosh \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x$$

$$v(1, x) = 3.e^{-x} + 2.\cosh \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x$$

elde edilir. Yani

$$v(t, x) = L^{-1}\{V(t, s)\} = 2t.e^{-x} + e^{-x} + 2.\cosh \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x \quad (2.1.29)$$

olur. Şimdi  $p(x)$ ' i bulalım. Bu durumda

$$p(x) = -u_{xx}(1, x) + 2u(1, x) + v_{xx}(1, x) - 2v(1, x)$$

için

$$u(1, x) = 5e^{-x},$$

$$-u_{xx}(1, x) = -5e^{-x},$$

$$-u_{xx}(1, x) + 2u(1, x) = 5e^{-x},$$

$$v(1, x) = 3e^{-x} + 2 \cosh \sqrt{2}x + \sinh \sqrt{2}x,$$

$$v_x(1, x) = -3e^{-x} + 2\sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x - 2 \cosh \sqrt{2}x,$$

$$v_{xx}(1, x) = 3e^{-x} - 4 \cosh \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x$$

ifadeleri dikkate alınır

$$-v_{xx}(1, x) + 2v(1, x) = 3e^{-x},$$

$$p(x) = 5e^{-x} - 3e^{-x} = 2e^{-x}.$$

olur.

Son olarak (2.1.28)'deki  $w(t, x)$  fonksiyonunu bulalım. Laplace dönüşümlerinden yararlanarak

$$L\{\omega(t, x)\} = W(t, s)$$

$$p(x) = \omega_t(t, x) - \omega_{xx}(t, x) + 2\omega(t, x)$$

$$L\{p(x)\} = W_t - s^2W + 2W$$

$$W(t, s) = e^{-(2-s^2)t}W(0, s) + \int_0^t e^{-(2-s^2)t(y)}L\{p(x)\}dy$$

$$W(t, s) = e^{-(2-s^2)t}W(0, s) + \frac{1}{2-s^2}\left(1 - e^{-(2-s^2)t}\right)L\{p(x)\}$$

olur. Bu son eşitliklerde  $t = 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  değerleri yerine yazılırsa,

$$W(0, s) - W(1, s) + \frac{1}{2}W\left(\frac{1}{4}, s\right) - \frac{1}{2}W\left(\frac{1}{2}, s\right) = 0$$

$$W(1, s) = e^{-(2-s^2)}W(0, s) + \frac{1}{2-s^2}\left(1 - e^{-(2-s^2)}\right)L\{p(x)\}$$

$$W\left(\frac{1}{4}, s\right) = e^{-\frac{(2-s^2)}{4}}W(0, s) + \frac{1}{2-s^2}\left(1 - e^{-\frac{(2-s^2)}{4}}\right)L\{p(x)\}$$

$$W\left(\frac{1}{2}, s\right) = e^{-\frac{(2-s^2)}{2}}W(0, s) + \frac{1}{2-s^2}\left(1 - e^{-\frac{(2-s^2)}{2}}\right)L\{p(x)\}$$

elde edilir.  $t$ 'nin farklı değerleri için elde edilen ifadeler denklemlerde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} W(0, s) - e^{-(2-s^2)}W(0, s) - \frac{1}{2-s^2}\left(1 - e^{-(2-s^2)}\right)L\{p(x)\} + \frac{1}{2}e^{-\frac{(2-s^2)}{4}}W(0, s) \\ + \frac{1}{2-s^2}\frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{(2-s^2)}{4}}\right)L\{p(x)\} - \frac{1}{2}e^{-\frac{(2-s^2)}{2}}W(0, s) - \frac{1}{2-s^2}\frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{(2-s^2)}{2}}\right)L\{p(x)\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$W(0, s)\left(1 - e^{-(2-s^2)} + \frac{1}{2}e^{-\frac{(2-s^2)}{4}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{(2-s^2)}{2}}\right) = \left(1 - e^{-(2-s^2)} - \frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{(2-s^2)}{4}}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{(2-s^2)}{2}}}{2}\right)\frac{1}{2-s^2}L\{p(x)\}$$



olur. Bu son eşitlikten

$$W(0, s) = \frac{1}{2-s^2} L\{p(x)\}$$

bulunur. O halde,

$$W(t, s) = e^{-(2-s^2)t} \frac{1}{2-s^2} L\{p(x)\} + \frac{1}{2-s^2} \left(1 - e^{-(2-s^2)t}\right) L\{p(x)\}$$

$$\frac{1}{2-s^2} L\{p(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2}} L\{-\sinh \sqrt{2}x\} L\{p(x)\}$$

$$= -L\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) p(y) dy\right\}$$

şeklindedir. Ters Laplace dönüşümünden

$$w(t, x) = L^{-1}\{W(t, s)\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) p(y) dy \quad (2.1.30)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w(1, x)}{\partial x^2} + 2w(1, x) &= -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) p(y) dy\right)_{xx} \\ &\quad + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) p(y) dy\right) = p(x) \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2 w(1, x)}{\partial x^2} + 2w(1, x) = p(x)$$

$$\frac{\partial^2 u(1, x)}{\partial x^2} + 2u(1, x) + \frac{\partial^2 v(1, x)}{\partial x^2} - 2v(t, x) = p(x)$$

elde edilir. (2.1.29) ile (2.1.30) çözümlerini dikkate alarak

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$$

$$= 2te^{-x} + e^{-x} + 2 \cosh \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) p(y) dy$$

$$= 2te^{-x} + e^{-x} + 2 \cosh \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) 2e^{-y} dy$$

çözümü yazılır. Yani

$$u(t, x) = 2te^{-x} + e^{-x} + 2 \cosh \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x - \mathfrak{I} \quad (2.1.31)$$

şeklindedir. Bu çözümde

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) 2e^{-y} dy = \mathfrak{I}$$

ifadesini  $\mathfrak{I}$  şeklinde gösterelim ve çözelim. Öyleyse

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \sinh \sqrt{2}(x-y) 2e^{-y} dy \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2}} \int_0^x \left( e^{\sqrt{2}(x-y)} - e^{-\sqrt{2}(x-y)} \right) e^{-y} dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} e^{\sqrt{2}x - (\sqrt{2}+1)y} \Big|_0^x - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} e^{-\sqrt{2}x + (\sqrt{2}-1)y} \Big|_0^x \\ &= -\frac{e^{-x} - e^{\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} - \frac{e^{-x} - e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \\ &= -e^{-x} \left( \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \right) + \frac{e^{\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \\ &= -2e^{-x} + e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x} - \frac{e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= -2e^{-x} + 2 \cosh \sqrt{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \sinh \sqrt{2}x$$

$$\mathfrak{S} = -2e^{-x} + 2 \cosh \sqrt{2}x - \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x$$

elde edilir. Elde edilen  $\mathfrak{S}$  değeri (2.1.31) de yerine yazılırsa

$$u(t, x) = 2te^{-x} + e^{-x} + 2 \cosh \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}x - \mathfrak{S}$$

$$u(t, x) = 2te^{-x} + 3e^{-x}$$

$$u(t, x) = (2t + 3)e^{-x}$$

çözümüne ulaşılır.

## 2.2. Parabolik Denklem İçin Lokal Olmayan, Çok Noktalı, Özdeşleştirme Probleminin Kararlılığı

$A$ , bir  $H$  Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı bir operatör olsun. Ayrıca  $\delta > 0$  için  $A > \delta I$  'dir.  $s_1, \mu_1, s_2, \mu_2, \dots, s_r, \mu_r$  verilen gerçektek sayılar

$$\sum_{k=1}^r |\mu_k| \leq 1, 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_r < 1 \quad (2.2.1)$$

şartı altında olduğunu varsayalım.

*Önerme 2.2.1.*  $\forall 0 < t < t + \tau \leq 1$  ve  $0 \leq \beta \leq 1$  için

$$\begin{aligned} \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \|t^k A^k e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta), \\ \|e^{-tA} - e^{-(t+\tau)A}\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\delta) \frac{\tau^\beta}{(t+\tau)^\beta}, \\ \|A(e^{-tA} - e^{-(t+\tau)A})\|_{H \rightarrow H} &\leq M(\delta) \frac{\tau^\beta}{t(t+\tau)^\beta} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

eşitsizlikler geçerlidir (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994). Bu eşitsizliklerde  $M(\delta)$  bir pozitif sayıdır.

*Önerme 2.2.2.*  $s_1, s_2, \dots, s_r$  noktalarının ve  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  katsayılarının (2.2.1) koşulu sağladığını kabul edelim. Bu durumda,

$$S = I - \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-A})^{-1} (e^{-s_k A} - e^{-A})$$

$D = S^{-1}$  operatörü vardır ve sınırlıdır. Yani,

$$\|D\|_{H \rightarrow H} \leq M(\delta) \quad (2.2.3)$$

olacak şekilde bir pozitif sayı vardır.

*İspat:*  $\forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$  için

$$\left| \frac{e^{-\lambda} - e^{-s_k \lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right| \leq \frac{e^{-\lambda} - e^{-s_k \lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \leq \frac{e^{(1-s_k)\lambda} - 1}{e^\lambda - 1} \leq \frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda - 1} = 1$$

eşitsizliği yazılabilir. Cauchy eşitsizliği ve öz-eşlenik pozitif tanımlı fonksiyonunun normu için kestirim (Krein, 1972) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|D\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{\left| 1 - \sum_{k=1}^r \mu_k \frac{e^{-\lambda} - e^{-s_k \lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right|} \leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^r |\mu_k| \left| \frac{e^{-\lambda} - e^{-s_k \lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right|} \\ &\leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^r |\mu_k|} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^r |\mu_k|} \leq M \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi  $(v, p)$  çifti için,

$$\frac{dv(t)}{dt} + Av(t) = p + f(t), 0 \leq t \leq 1, \quad (2.2.4)$$

parabolik denklemi ile ilgili

$$v(0) = \sum_{k=1}^r \mu_k v(s_k) + \psi, \quad (2.2.5)$$

$$v(1) = \varphi \quad (2.2.6)$$

sınır değer problemini ele alalım.  $C(H)$ ,  $C^\alpha(H)$  ve  $C_1^\alpha(H)$  Banach uzaylarında normları

$$\|v\|_{C(H)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|v(t)\|_H, \|v\|_{C^\alpha(H)} = \|v\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \frac{\|v(t+\tau)\|_H - \|v(t)\|_H}{\tau^\alpha},$$

$$\|v\|_{C_1^\alpha(H)} = \|v\|_{C(H)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \frac{(1-t)^\alpha \|v(t+\tau)\|_H - \|v(t)\|_H}{\tau^\alpha}$$

olarak tanımlayalım. Bu ifadelerde  $v(t)$  fonksiyonu  $[0,1]$  aralığında tanımlanan  $H$  değerli bir fonksiyondur.

### 2.3. Kararlılık Tahminleri

Şimdi (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) problemin çözümü için

$$v(t) = e^{-tA}v(0) + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds + (I - e^{-tA})A^{-1}p \quad (2.3.1)$$

eşitliğini alalım. (2.3.1) fonksiyonun (2.2.4) denklemi ve (2.2.6) başlangıç koşulunu sağladığı açıktır (Ashyralyev, 2011). (2.3.1) eşitliğinden

$$v(1) = e^{-A}v(0) + \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s)ds + (I - e^{-A})A^{-1}p, \quad (2.3.2)$$

$$v(s_k) = e^{-s_k A}v(0) + \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s)ds + (I - e^{-s_k A})A^{-1}p, \forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$$

elde edilir. Daha sonra (2.2.5), (2.2.6) ve (2.3.2) eşitlikleri kullanılarak

$$v(0) - \sum_{k=1}^r \mu_k v(s_k) = \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) v(0) - \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) A^{-1} p = \psi + \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds$$

$$e^{-A} v(0) + (I - e^{-A}) A^{-1} p = \varphi - \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemin determinant operatörü

$$D = (I - e^{-A}) \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) + e^{-A} \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) A^{-1} = I - e^{-A} - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} + e^{-A} \sum_{k=1}^r \mu_k$$

$$= (I - e^{-A}) \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-A})^{-1} (e^{-s_k A} - e^{-A}) \right) = (I - e^{-A}) S$$

şeklindedir.

Buradaki  $S$  operatörü Önerme 2.2.2 deki operatördür. Bu son eşitlikte, Önerme 2.2.1 ve Önerme 2.2.2 dikkate alınarak  $D$  operatörünün sınırlı tersinin varlığı ve

$$\|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq M$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$v(0) = D^{-1} \left\{ (I - e^{-A}) \left( \psi + \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds \right) + \left( \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) \right) \left( \varphi - \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds \right) \right\}$$

$$A^{-1} p = D^{-1} \left\{ e^{-A} \left( \psi + \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds \right) \right.$$

$$\left. + \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) \left( \varphi - \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds \right) \right\} \quad (2.3.3)$$

olarak bulunur. Bu nedenle, lokal olmayan (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) sınır değer probleminin tek bir çözümünün varlığı gösterilir. Ayrıca,  $v(t)$  ve  $p$ , sırasıyla (2.3.1) ve (2.3.3) ile tanımlanmaktadır.

*Teorem 2.3.1.* İç noktalar ve katsayılar için (2.2.1) şartlarının sağlandığını ve  $\varphi \in H, \psi \in D(A), f \in C^\alpha(H)$  olduğunu varsayalım. O halde (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) probleminin  $(v(t), p)$  çözümü için

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[ \|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{C^\alpha(H)} \right] \quad (2.3.4)$$

$$\|v\|_{C(H)} \leq M(\delta) \left[ \|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \|f\|_{C(H)} \right] \quad (2.3.5)$$

kestirimleri geçerlidir. Burada  $M(\delta)$ , sabit  $\varphi, \psi, f, \alpha$  değerlerinden bağımsızdır.

*İspat:* (2.3.3) formülünden

$$p = D^{-1}e^{-A}A\psi + AD^{-1}e^{-A} \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds + D^{-1} \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) A\varphi - D^{-1}A \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

yazılır. Bu durumda,

$$I_1 = D^{-1}e^{-A}A\psi,$$

$$I_2 = AD^{-1}e^{-A} \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds,$$

$$I_3 = D^{-1} \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) A\varphi,$$

$$I_4 = -D^{-1}A \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds$$

olarak alınır. Şimdi sırasıyla  $I_1, I_2, I_3, I_4$  için kestirimleri inceleyelim.

İlk olarak,  $\|I_1\|_H$  kestirimini oluşturalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_H &= \|D^{-1}e^{-A}A\psi\|_H \\
&\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-A}\|_{H \rightarrow H} \|A\psi\|_H \\
&\leq M(\delta) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{e^{-\lambda}} \|A\psi\|_H \\
&= \frac{M(\delta)}{e^{-\delta}} \|A\psi\|_H \\
&= M(\delta) \|A\psi\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

İkinci olarak  $\|I_2\|_H$  kestirimini bulalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_H &= \left\| AD^{-1}e^{-A} \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds \right\|_H \\
&\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-A}\|_{H \rightarrow H} \left\| \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} A e^{-(s_k-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq M(\delta) \|f\|_{C_1^\alpha(H)} \int_0^{s_k} A (s_k - s)^{\alpha-1} ds \\
&= M(\delta) \|f\|_{C_1^\alpha(H)} \left[ -\frac{(s_k - s)^\alpha}{\alpha} \right]_0^{s_k} \\
&= M(\delta) \frac{\|f\|_{C_1^\alpha(H)}}{\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Üçüncü olarak  $\|I_3\|_{H \rightarrow H}$  kestirimini oluşturalım. Bu durumda,

$$\|I_3\|_{H \rightarrow H} = \left\| D^{-1} \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) A\varphi \right\|_{H \rightarrow H}$$



$$\begin{aligned}
&\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\| I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right\|_{H \rightarrow H} \|A\varphi\|_H \\
&\leq M(\delta) \left( \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \left( 1 - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k \lambda} \right) \right) \|A\varphi\|_H \\
&\leq M(\delta) \|A\varphi\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak,  $\|I_4\|_{H \rightarrow H}$  kestirimini bulalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|I_4\|_{H \rightarrow H} &= \left\| -D^{-1} A \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \| -D^{-1} \|_{H \rightarrow H} \left\| \int_0^1 A e^{-(1-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq M(\delta) \|f\|_{C_1^\alpha(H)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= M(\delta) \|f\|_{C_1^\alpha(H)} \left[ -\frac{(1-s)^\alpha}{\alpha} \right]_0^1 \\
&= M(\delta) \frac{\|f\|_{C_1^\alpha(H)}}{\alpha}
\end{aligned}$$

kestirimi elde edilir. Elde edilen bu kestirimler dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
\|p\|_H &\leq M(\delta) \|A\psi\|_H + M(\delta) \frac{\|f\|_{C^\alpha(H)}}{\alpha} + M(\delta) \|A\varphi\|_H + M(\delta) \frac{\|f\|_{C^\alpha(H)}}{\alpha} \\
&\leq M(\delta) \left[ \|A\psi\|_H + \|A\varphi\|_H + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{C^\alpha(H)} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (2.3.4) kestiriminin ispatıdır.

Şimdi, (2.3.5) kestirimini ispatlayalım. (2.3.1) ve (2.3.3) eşitlikleri kullanılarak

$v(t) = \sum_{i=1}^9 J_i(t)$  ifadesi yazılabilir. Bu durumda,

$$J_1(t) = D^{-1} e^{-tA} (I - e^{-A}) \psi,$$

$$J_2(t) = D^{-1} e^{-tA} (I - e^{-A}) \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds,$$

$$J_3(t) = D^{-1} e^{-tA} \left( \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) \right) \varphi,$$

$$J_4(t) = D^{-1} e^{-tA} \left( \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) \right) \left( - \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds \right),$$

$$J_5(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds,$$

$$J_6(t) = D^{-1} e^{-A} \psi (I - e^{-tA}),$$

$$J_7(t) = D^{-1} e^{-A} (I - e^{-tA}) \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds,$$

$$J_8(t) = D^{-1} (I - e^{-tA}) \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) \varphi,$$

$$J_9(t) = -D^{-1} (I - e^{-tA}) \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds,$$

ifadeleri elde edilir. Şimdi sırasıyla  $J_1, \dots, J_9$  ' a kadar olan kestirimleri oluşturalım.

İlk olarak  $\|J_1(t)\|_H$  kestirimini oluşturalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|J_1(t)\|_H &= \|D^{-1} e^{-tA} (I - e^{-A}) \psi\|_H \\ &\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \| (I - e^{-A}) \|_{H \rightarrow H} \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \|\psi\|_H \\ &\leq M(\delta) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} (e^{-\lambda A}) \|\psi\|_H \\ &\leq M(\delta) \|\psi\|_H \end{aligned}$$

olur.

İkinci olarak,  $\|J_2(t)\|_H$  kestirimini bulalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|J_2(t)\|_H &= \left\| D^{-1} e^{-tA} (I - e^{-A}) \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \|D^{-1} (I - e^{-A})\|_{H \rightarrow H} \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \sum_{k=1}^r |\mu_k| \int_0^{s_k} \|e^{-(s_k-s)A}\|_{H \rightarrow H} ds \max_{0 \leq s \leq 1} |f(s)| \\
&\leq M(\delta) \sum_{k=1}^r |\mu_k| \|f\|_{C(H)} \\
&\leq M(\delta) \|f\|_{C(H)}
\end{aligned}$$

olarak alınır.

Üçüncü olarak  $\|J_3(t)\|_H$  kestirimini oluşturalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|J_3(t)\|_{H \rightarrow H} &= \left\| D^{-1} e^{-tA} \left( \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) \right) \varphi \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \left\| \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) \right\|_{H \rightarrow H} \|\varphi\|_H \\
&\leq M(\delta) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} (e^{-t\lambda}) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \left( \sum_{k=1}^r \mu_k (1 - e^{-s_k \lambda}) \right) \|\varphi\|_H \\
&\leq M(\delta) \|\varphi\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dördüncü olarak,  $\|J_4(t)\|_H$  kestirimi bulalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|J_4(t)\|_H &= \left\| D^{-1} e^{-tA} \left( \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) \right) \left( -\int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds \right) \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \left\| \sum_{k=1}^r \mu_k (I - e^{-s_k A}) \right\|_{H \rightarrow H} \left\| -\int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq M(\delta) \|e^{-(1-\tau)A}\|_{H \rightarrow H} \cdot \max_{0 \leq s \leq 1} |f(s)| \\
&\leq M(\delta) \|f\|_{C(H)}
\end{aligned}$$

olarak alınır.

Beşinci olarak,  $\|J_5(t)\|_H$  kestirimini oluşturalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|J_5(t)\|_H &= \left\| \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-s)A} f(s) \right\|_{H \rightarrow H} ds \\
&\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-s)A} \right\|_{H \rightarrow H} \max_{0 \leq \tau \leq 1} \|f(\tau)\| ds \\
&\leq M \|f\|_{C(H)} \int_0^t ds \\
&\leq Mt \|f\|_{C(H)} \\
&\leq M(\delta) \|f\|_{C(H)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Altıncı olarak,  $\|J_6(t)\|_H$  kestirimini bulalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|J_6(t)\|_H &= \left\| D^{-1} e^{-A} \psi (I - e^{-tA}) \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-A}\|_{H \rightarrow H} \|(I - e^{-tA})\|_{H \rightarrow H} \|\psi\|_H \\
&\leq M(\delta) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{e^{-\lambda}} \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} (1 - e^{-t\lambda}) \|\psi\|_H \\
&\leq M(\delta) \|\psi\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yedinci olarak  $\|J_7(t)\|_H$  kestirimini oluşturalım. Bu durumda,

$$\|J_7(t)\|_H = \left\| D^{-1} e^{-A} (I - e^{-tA}) \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|e^{-A}\|_{H \rightarrow H} \|(I - e^{-tA})\|_{H \rightarrow H} \left\| \sum_{k=1}^r \mu_k \int_0^{s_k} e^{-(s_k-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq M(\delta) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{e^{-\lambda}} \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} (1 - e^{-t\lambda}) \sum_{k=1}^r |\mu_k| \int_0^{s_k} \|e^{-(s_k-s)A}\|_{H \rightarrow H} \|f\|_{C(H)} ds \\
&\leq M(\delta) \sum_{k=1}^r \mu_k \|f\|_{C(H)} \\
&\leq M(\delta) \|f\|_{C(H)}
\end{aligned}$$

olur.

Sekizinci olarak  $\|J_8(t)\|_H$  kestirimini bulalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|J_8(t)\|_H &= \left\| D^{-1} (I - e^{-tA}) \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) \varphi \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \|I - e^{-tA}\|_{H \rightarrow H} \left\| I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right\|_{H \rightarrow H} \|\varphi\|_H \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} (1 - e^{-t\lambda}) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \left( 1 - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k \lambda} \right) \|\varphi\|_H \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq M(\delta) \|\varphi\|_H
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak  $\|J_9(t)\|_H$  kestirimini oluşturalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|J_9(t)\|_H &= \left\| -D^{-1} (I - e^{-tA}) \left( I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right) \int_0^1 e^{-(1-s)A} f(s) ds \right\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \|(I - e^{-tA})\|_{H \rightarrow H} \left\| I - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k A} \right\|_{H \rightarrow H} \int_0^1 \|e^{-(1-s)A}\|_{H \rightarrow H} \max_{0 \leq \tau \leq 1} |f(\tau)| ds \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} (1 - e^{-t\lambda}) \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \left( 1 - \sum_{k=1}^r \mu_k e^{-s_k \lambda} \right) \int_0^1 \|e^{-(1-s)A}\|_{H \rightarrow H} ds \|f\|_{C(H)} \|D^{-1}\|_{H \rightarrow H} \\
&\leq M(\delta) \|f\|_{C(H)}
\end{aligned}$$

olur. Elde edilen,  $\|J_i(t)\|_H, i=1, \dots, 9$  kestirimlerini birleştirerek,

$$\begin{aligned} \|v\|_{C(H)} &\leq M(\delta)\|\psi\|_H + M(\delta)\|f\|_{C(H)} + M(\delta)\|\varphi\|_H + M(\delta)\|f\|_{C(H)} + M(\delta)\|f\|_{C(H)} \\ &\quad + M(\delta)\|\psi\|_H + M(\delta)\|f\|_{C(H)} + M(\delta)\|\varphi\|_H + M(\delta)\|f\|_{C(H)} \\ &= M(\delta)\left[\|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \|f\|_{C(H)}\right] \end{aligned}$$

sonucuna ulaşıyoruz. Bu ise (2.3.5) kestiriminin ispatıdır.

## 2.4. Uygulama

Bu bölümde, çok boyutlu parabolik denklem için karışık sınır değer probleminin incelenmesinde (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) soyut problemin uygulanmasını düşünelim.

$\Omega = (0,1)^n$ ,  $\square^n$  vektör uzayında birim küp ve sınırı ise  $S = \partial\Omega$  ve  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$  olsun. İç noktalar  $s_1, s_2, \dots, s_r$  ve  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$  katsayılar (2.2.1) eşitsizliklerini sağladığını varsayalım.  $\varphi, \psi \in W_2^2(\bar{\Omega})$  ve  $f \in C^\alpha(L_2(\bar{\Omega}))$ ,  $\alpha_i$  düzgün fonksiyonlar ve  $\alpha_r(x) \geq \alpha_0 > 0$  olmak üzere,  $[0,1] \times \Omega$  bölgesinde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n (a_i(x)v_{x_i}(t,x))_{x_i} + \sigma v(t,x) = f(t,x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < 1, \\ v(1,x) = \varphi(x), v(0,x) = \sum_{k=1}^r \mu_k v(s_k, x) + \psi, x \in \bar{\Omega} \\ v(t,x) = 0, x \in S, \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

karışık sınır değer problemini ele alalım.

$\bar{\Omega}$  üzerinde tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların kümesi olan  $C(\bar{\Omega})$  Banach uzayında, normu  $\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$  ile göstereceğiz.  $\bar{\Omega}$  üzerinde tanımlanan tüm kuadratik integrallenebilir fonksiyonların kümesi olan  $L_2(\bar{\Omega})$  Hilbert uzayında normu ise,

$$\|u\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \left( \int \dots \int_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak belirleyeceğiz. Ayrıca,

$$Au(x) = - \sum_{i=1}^n \left( a_i(x) u_{x_i}(x) \right) + \sigma u(x)$$

ile belirlenen operatörün öz-eşleniğın pozitif tanımlı olduğu açıktır.  $A$  operatörün tanım kümesi ise,

$$D(A) = \left\{ u : u \in W_2^2(\bar{\Omega}), u(x) = 0 \text{ on } S \right\}$$

formundadır. Buna göre (2.4.1) karışık sınır değer problemini  $H = L_2(\bar{\Omega})$  Hilbert uzayında (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) soyut sınır değer problemini dönüştürebiliriz. Sonra (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) problem için Teorem 2.3.1'i kullanarak karışık sınır değer probleminin çözümünün kararlılığı ile ilgili sonuçlara ulaşabiliriz.

*Teorem 2.3.1:*  $\varphi, \psi \in W_2^2(\bar{\Omega}), f \in C^\alpha(L_2(\bar{\Omega}))$  ve iç noktalar ile katsayılar için (2.2.1) koşulların sağlanması varsayalım.

O zaman (2.4.1) problemin çözümü için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|p\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M \left[ \|\varphi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{W_2^2(\bar{\Omega})} + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{C^\alpha(L_2(\bar{\Omega}))} \right] \quad (2.4.2)$$

$$\|v\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} \leq M \left[ \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|\psi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C(L_2(\bar{\Omega}))} \right]. \quad (2.4.3)$$

Bu kestirimlerde  $M$ 'nin değeri,  $\alpha, \varphi(x), \psi(x), f(t, x)$ 'lerden bağımsızdır.

### 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, lokal olmayan, çok noktalı, özdeşleştirme problemi için I. ve II. mertebeden doğruluk fark şemaları kurularak ve problemin çözümünün kararlılığı incelenecektir.

#### 3.1. Ön Hazırlık

Bir  $N$  pozitif tam sayı üzerinde  $[0,1]_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0,1,\dots,N, N\tau = 1\}$  eşit aralıklı ağ (grid) noktalar kümesini ele alalım.  $H$  Hilbert uzayındaki değerlere sahip olan,  $q^\tau = \{q_k\}_1^N$  ağ (grid) fonksiyonlardan oluşan lineer uzayını  $C([0,1]_\tau, H)$  ile gösterelim.

$\alpha$ ,  $[0,1]$  aralığında verilen herhangi bir sayı olsun.  $C_\tau(H) = C([0,1]_\tau, H)$ , Banach uzayında  $q^\tau$  ağ (grid) fonksiyonların normunu

$$\|q^\tau\|_{C_\tau(H)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|q_k\|_H$$

olarak belirleyelim.  $C_\tau^\alpha(H) = C^\alpha([0,1]_\tau, H)$  Banach uzayında ise  $q^\tau$  ağ (grid) fonksiyonların normu,

$$\|q^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|q^\tau\|_{C_\tau(H)} + \max_{1 \leq k < k+r \leq N} \frac{\|q_{k+r} - q_k\|_H}{(r\tau)^\alpha}$$

olarak tanımlanır. Öz eşlenik pozitif tanımlı  $A$  operatörü ve  $\tau > 0$  pozitif gerçektek sayı için

$$R = (I + \tau A)^{-1} \text{ ve } F = \left( I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2} \right)^{-1}$$

operatörlerini kullanalım. Bu operatörler öz eşlenik pozitif tanımlı operatörlerdir (Krein,1972).



*Önerme 3.1.1.* Aşağıdaki kestirimler doğrudur (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

$$\|R^k\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{(I + \delta\tau)^k}, \quad k \geq 1, \quad (3.1.1)$$

$$\|\tau AR^k\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{k}, \quad k \geq 1. \quad (3.1.2)$$

*Önerme 3.1.2.* Aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur (Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994).

$$\begin{aligned} \|F^m - e^{-m\tau A}\|_{H \rightarrow H} &\leq \frac{M\tau^2}{(m\tau)^2}, \quad m \geq 1, \\ \left\| (\tau A)^\alpha F\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \right\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \quad \alpha \in \{0, 1\}, \\ \left\| (I + \tau A) F\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \right\|_{H \rightarrow H} &\leq 2, \\ \left\| \left(I + \frac{\tau A}{2}\right) F\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \right\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \\ \left\| (\tau A)^\beta F^m \right\|_{H \rightarrow H} &\leq \frac{1}{m^\beta}, \quad m \geq 1, 0 \leq \beta \leq 1. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

*Önerme 3.1.3.*  $H$  Hilbert uzayında tanımlanmış olan

$$T_1 = I + \sum_{i=1}^r \mu_i (I - R^N)^{-1} (R^N - R^i)$$

operatörün tersi vardır ve

$$Q_1 = \left( I + \sum_{i=1}^r \mu_i (I - R^N)^{-1} (R^N - R^i) \right)^{-1}$$

için

$$\|Q_1\|_{H \rightarrow H} \leq M \quad (3.1.4)$$

eşitsizliği geçerlidir.

*İspat:* Operatörün normunun tanımı dikkate alındığından

$$\begin{aligned} \|Q_1\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{\left| 1 + \sum_{i=1}^r \mu_i \frac{(1+\tau\lambda)^{-N} - (1+\tau l_i \lambda)^{-N}}{1 - (1+\tau\lambda)^{-N}} \right|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^r |\mu_i| \frac{1 - (1+\tau\lambda)^{-N}}{1 - (1+\tau\lambda)^{-N}}} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^r |\mu_i|} \leq M \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

*Önerme 3.1.4.*  $H$  Hilbert uzayında tanımlanmış olan

$$T_2 = \left[ I + (I - F^N)^{-1} F^N + \sum_{i=1}^r \mu_i \left( (1 - \rho_i)(I - F^N)^{-1} F^{l_i} + \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i (I - F^N)^{-1} F^{l_i+1} \right) \right]$$

operatörün tersi vardır ve  $Q_2 = T_2^{-1}$  için

$$\|Q_2\|_{H \rightarrow H} \leq M \quad (3.1.5)$$

kestirimi doğrudur.

*İspat:* İlk olarak  $z_1(\lambda), z_2(\lambda), z_3(\lambda)$  'yı yazalım. Bu durumda

$$z_1(\lambda) = 1 + \frac{\left( 1 + \tau\lambda + \frac{(\tau\lambda)^2}{2} \right)^{-N}}{\left( 1 - \left( 1 + \tau\lambda + \frac{(\tau\lambda)^2}{2} \right)^{-N} \right)}$$

$$z_2(\lambda) = \sum_{i=1}^r \mu_i (1 - \rho_i) \frac{1 - \left(1 + \tau l_i \lambda + \frac{(\tau l_i \lambda)^2}{2}\right)^{-N}}{1 - \left(1 + \tau \lambda + \frac{(\tau \lambda)^2}{2}\right)^{-N}}$$

$$z_3(\lambda) = \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i \frac{1 - \left(1 + \tau (l_i + 1) \lambda + \frac{[\tau (l_i + 1) \lambda]^2}{2}\right)^{-N}}{1 - \left(1 + \tau \lambda + \frac{(\tau \lambda)^2}{2}\right)^{-N}}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \|Q_2\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{\delta \leq \lambda < \infty} \frac{1}{|z_1(\lambda) + z_2(\lambda) + z_3(\lambda)|} \\ &\leq \frac{1}{2 - \sum_{i=1}^r |\mu_i| (1 - \rho_i) - \sum_{i=1}^r |\mu_i| \rho_i} = \frac{1}{2 - \sum_{i=1}^r \mu_i} \leq M \end{aligned}$$

kestirimi yazılır.

### 3.2. Özdeşleştirme Problemi İçin Birinci Mertebeden Fark Şeması

$[\cdot]$  en büyük tam sayı fonksiyonunun gösterimi olmak üzere

$$l_i = \left\lceil \frac{s_i}{\tau} \right\rceil, \rho_i = \frac{s_i}{\tau} - l_i, \quad i = 1, \dots, r$$

notasyonları yapalım. (2.2.4)-(2.2.6) problemin I. mertebeden doğruluk fark şeması için,

$$\begin{cases} \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + Av_k = f_k + p, f_k = f(t_k), 1 \leq k \leq N, \\ v_N = \varphi, v_0 - \sum_{i=1}^r \mu_i v_{l_i} = \psi \end{cases} \quad (3.2.1)$$

formunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\begin{cases} \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + Av_k = f_k + p, f_k = f(t_k), 1 \leq k \leq N, \\ v_0 \text{ verilen} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

yazılır. O halde (3.2.2) probleminin çözümü vardır ve

$$v_k = R^k v_0 + \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} (f_j + p) \tau, 0 \leq k \leq N \quad (3.2.3)$$

şeklindedir. Bu çözümde,  $p$  bilinmeyendir. (3.2.3) eşitliği kullanılarak (3.2.1) lokal olmayan şartlardan

$$R^N v_0 + \sum_{j=1}^N R_j^{N-j+1} (p + f_j) \tau = \varphi,$$

$$v_0 - \sum_{i=1}^r \mu_i \left( R^i v_0 + \sum_{j=1}^{l_i} R^{i-j+1} (p + f_j) \tau \right) = \psi$$

denklemleri elde edilir. Son ifadeler için,

$$\sum_{j=1}^N R_j^{N-j+1} \tau = A^{-1} (I - R^N),$$

$$\sum_{j=1}^{l_i} R^{i-j+1} \tau = A^{-1} (I - R^{l_i}) \quad (3.2.4)$$

formülleri uygulanırsa  $v_0$  ve  $A^{-1}p$  için

$$R^N v_0 + (I - R^N) A^{-1} p = \varphi - \sum_{j=1}^N R^{N-j+1} f_j \tau,$$

$$\left( I - \sum_{i=1}^r \mu_i R^i \right) v_0 - \sum_{i=1}^r \mu_i (I - R^{l_i}) A^{-1} p = \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i \sum_{j=1}^{l_i} R^{i-j+1} f_j \tau \quad (3.2.5)$$

denklemler sistemi elde edilir. Bu denklemler sisteminin determinant operatörü

$$\begin{aligned}
D_1 &= R^N \sum_{i=1}^r \mu_i (I - R^{l_i}) - (I - R^N) \left( I - \sum_{i=1}^r \mu_i R^{l_i} \right) \\
&= -(I - R^N)^{-1} \left( I + \sum_{i=1}^r \mu_i (I - R^N)^{-1} (R^N - R^{l_i}) \right) \\
&= -(I - R^N)^{-1} T_1
\end{aligned}$$

şeklinde dir.

$T_1$  operatörü sınırlı ve  $Q_1$  'in tersi varlığına göre  $D_1$  operatörünün  $D_1^{-1} = -Q_1 (I - R^N)$  şeklinde tersi vardır ve sınırlıdır. Buna göre,

$$v_0 = D_1^{-1} \left\{ - \sum_{i=1}^r \mu_i (I - R^{l_i}) \left( \varphi - \sum_{j=1}^N R^{N-j+1} f_j \tau \right) - (I - R^N) \left( \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i \sum_{j=1}^{l_i} R^{l_i-j+1} f_j \tau \right) \right\} \quad (3.2.6)$$

$$A^{-1} p = D_1^{-1} \left\{ - \left( I - \sum_{i=1}^r \mu_i R^{l_i} \right) \left( \varphi - \sum_{j=1}^N R^{N-j+1} f_j \tau \right) + R^N \left( \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i \sum_{j=1}^{l_i} R^{l_i-j+1} f_j \tau \right) \right\} \quad (3.2.7)$$

olur. O halde,

$$\sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \tau = A^{-1} (I - R^k)$$

yazılabilir. (3.2.3), (3.2.4), (3.2.6) ve (3.2.7) den

$$\begin{aligned}
v_k &= R^k D_1^{-1} \left\{ - \sum_{i=1}^r \mu_i (I - R^{l_i}) \left( \varphi - \sum_{j=1}^N R^{N-j+1} f_j \tau \right) - (I - R^N) \left( \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i \sum_{j=1}^{l_i} R^{l_i-j+1} f_j \tau \right) \right\} \\
&+ A^{-1} (I - R^k) A D_1^{-1} \left\{ - \left( I - \sum_{i=1}^r \mu_i R^{l_i} \right) \left( \varphi - \sum_{j=1}^N R^{N-j+1} f_j \tau \right) + R^N \left( \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i \sum_{j=1}^{l_i} R^{l_i-j+1} f_j \tau \right) \right\} \\
&+ \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} f_j \tau, 1 \leq k \leq N
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

*Teorem 3.2.1.* (3.2.1) fark şemasının  $C_\tau(H) \times H$  'deki  $(\{v_k\}_{k=1}^N, p)$  çözümü için

$$\|p\|_H \leq M(\delta) \left[ \|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right], \quad (3.2.8)$$

$$\left\| \{v_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leq M(\delta) \left[ \|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right] \quad (3.2.9)$$

kestirimler geçerlidir.

*İspat.*

$$p = D_1^{-1} \left\{ - \left( I - \sum_{i=1}^r \mu_i R^i \right) \left( A\varphi - \sum_{j=1}^N R^{N-j+1} A f_j \tau \right) + R^N \left( A\psi + \sum_{i=1}^r \mu_i \sum_{j=1}^{l_i} R^{l_i-j+1} A f_j \tau \right) \right\}$$

ifadesini, Üçgen eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \|p\|_H &\leq \|D_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left[ \left( 1 + \sum_{i=1}^r |\mu_i| \|R^i\|_{H \rightarrow H} \right) \left( \|A\varphi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \|R^N\|_{H \rightarrow H} \left( \|A\psi\|_H + \sum_{i=1}^r |\mu_i| \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right) \right] \\ &\leq M(\delta) \left[ \|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right] \end{aligned}$$

kestirimi elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|v_k\|_H &\leq \|R^k\|_{H \rightarrow H} \|D_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^r |\mu_i| \left( 1 + \|R^i\|_{H \rightarrow H} \right) \left( \|\varphi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \|R^N\|_{H \rightarrow H} \left[ \|\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right] \right\} \\ &\quad + \left( 1 + \|R^k\|_{H \rightarrow H} \right) \|D_1^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^r |\mu_i| \left( 1 + \|R^i\|_{H \rightarrow H} \right) \left( \|\varphi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|R^N\|_{H \rightarrow H} \left[ \|\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right] \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \\
& \leq M(\delta) \left[ \|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri de her  $k$  için geçerlidir.

### 3.3. Özdeşleştirme Problemi İçin İkinci Mertebeden Fark Şeması

Şimdi (2.2.4),(2.2.5),(2.2.6) problem için,

$$\tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + A \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) v_k = \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) (\theta_k + p), \quad (3.3.1)$$

$$\theta_k = f \left( t_{k-\frac{1}{2}} \right), \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$v_N = \varphi, \quad (3.3.2)$$

$$v_0 - \sum_{i=1}^r \left\{ \mu_i (1 - \rho_i) v_i + \mu_i \rho_i v_{i+1} \right\} = \psi, \quad (3.3.3)$$

şeklindeki ikinci mertebeden doğruluk fark şemasını ele alalım.

*Teorem 3.3.1.* (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) fark şemasının  $C_\tau(H) \times H$  'deki  $\left( \{v_k\}_{k=1}^N, p \right)$  çözümü

için (3.2.8), (3.2.9) kestirimler geçerlidir.

*İspat:* İlk önce (3.3.1), (3.3.2) problemin çözümünü

$$v_k = F^k v_0 + \sum_{j=1}^k \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{k-j+1} (p + \theta_j) \tau, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (3.3.4)$$

şeklinde alalım. Bu ifadede  $p$  bir bilinmeyendir. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^k \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{k-j+1} \tau = A^{-1} (I - F^k) \quad (3.3.5)$$

ifadesi (3.3.2) , (3.3.3) koşulları ve (3.3.4) eşitliği kullanılarak,

$$F^N v_0 + (I - F^N) A^{-1} p = \varphi - \sum_{j=1}^N \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{N-j+1} \theta_j \tau \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ I - \sum_{i=1}^r \mu_i \left[ (1 - \rho_i) F^{l_i} + \rho_i F^{l_i+1} \right] \right\} v_0 - \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i \left[ (1 - \rho_i) (I - F^{l_i}) + \rho_i (I - F^{l_i+1}) \right] \right\} A^{-1} p \\ & = \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i (1 - \rho_i) \sum_{j=1}^{l_i} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau + \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin determinant operatörü

$$\begin{aligned} D_2 &= F^N \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i + \sum_{i=1}^r \mu_i \left[ (1 - \rho_i) F^{l_i} + \rho_i F^{l_i+1} \right] \right\} - (I - F^N) \left\{ I - \sum_{i=1}^r \mu_i \left[ (1 - \rho_i) F^{l_i} + \rho_i F^{l_i+1} \right] \right\} \\ &= -(I - F^N) \left( I - (I - F^N)^{-1} F^N \sum_{i=1}^r \mu_i \right) + \sum_{i=1}^r \mu_i \left[ (1 - \rho_i) (I - F^N)^{-1} F^{l_i} + \rho_i (I - F^N)^{-1} F^{l_i+1} \right] \end{aligned}$$

şeklindedir.  $Q_2 = T_2^{-2}$  sınırlı olduğuna göre  $D_2^{-1} = -Q_2 (I - F^N)$  vardır ve sınırlıdır. Son ifade,

$$\begin{aligned} v_0 &= D_2^{-1} \left\{ - \sum_{i=1}^r \mu_i \left\{ (1 - \rho_i) (I - F^{l_i}) + \rho_i (I - F^{l_i+1}) \right\} \left[ \varphi - \sum_{j=1}^N \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{N-j+1} \theta_j \tau \right] \right. \\ & \quad \left. - (I - F^N) \left[ \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i (1 - \rho_i) \sum_{j=1}^{l_i} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau + \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right] \right\} \\ p &= D_2^{-1} \left\{ - \left[ I - \sum_{i=1}^r \mu_i \left\{ (1 - \rho_i) F^{l_i} + \rho_i F^{l_i+1} \right\} \right] \left[ A \varphi - \sum_{j=1}^N \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{N-j+1} \theta_j \tau \right] \right. \\ & \quad + F^N \left[ A \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i (1 - \rho_i) \sum_{j=1}^{l_i} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right] \right\} \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

formuna dönüşebilir. Önerme (3.1.4) ile (3.3.4) ve (3.3.7) eşitliklerinden



$$\begin{aligned}
\|p\|_H &\leq \left\| D_2^{-1} \left[ I - \sum_{i=1}^r \mu_i \{ (1-\rho_i) F^{l_i} + \rho_i F^{l_i+1} \} \right] \left[ A\varphi - \sum_{j=1}^N \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{N-j+1} \theta_j \tau \right] \right\|_H \\
&+ \left\| D_2^{-1} F^N \left[ A\psi + \sum_{i=1}^r \mu_i (1-\rho_i) \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{l_i-j+1} \theta_j \tau + \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right] \right\|_H \\
&\leq \|D_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \left\| 1 + \sum_{i=1}^r |\mu_i| \|(1-\rho_i) F^{l_i} + \rho_i F^{l_i+1}\|_{H \rightarrow H} \right\|_{H \rightarrow H} \left[ \|A\varphi\|_H + \sum_{j=1}^N \left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{N-j+1} \theta_j \tau \right\|_{H \rightarrow H} \right] \\
&+ \|D_2^{-1}\|_{H \rightarrow H} \|F^N\|_{H \rightarrow H} \left[ \|A\psi\|_H + \sum_{i=1}^r |\mu_i| (1-\rho_i) \sum_{j=1}^{l_i+1} \left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{l_i-j+1} \theta_j \right\|_{H \rightarrow H} \tau \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^r |\mu_i| \rho_i \sum_{j=1}^{l_i+1} \left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) A F^{l_i-j+1} \theta_j \right\|_{H \rightarrow H} \tau \right] \\
&\leq M(\delta) \left[ \|A\varphi\|_H + \|A\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(H)} \right] \tag{3.3.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda her  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned}
v_k &= F^k \left\{ - \sum_{i=1}^r \mu_i \{ (1-\rho_i) (I - F^{l_i}) + \rho_i (I - F^{l_i+1}) \} \left[ \varphi - \sum_{j=1}^N \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{N-j+1} \theta_j \tau \right] \right. \\
&\quad \left. - (I - F^N) \left[ \psi + \sum_{i=1}^r \mu_i (1-\rho_i) \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau + \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right] \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{k-j+1} (p + \theta_j) \tau \tag{3.3.9}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v_k\|_H &\leq \|F^k\|_{H \rightarrow H} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^r \mu_i \{ (1-\rho_i) (I - F^{l_i}) + \rho_i (I - F^{l_i+1}) \} \right\|_{H \rightarrow H} \left[ \left\| \varphi - \sum_{j=1}^N \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{N-j+1} \theta_j \tau \right\|_{H \rightarrow H} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left\| -(I - F^N) \right\|_{H \rightarrow H} \left[ \|\psi\|_{H \rightarrow H} + \left\| \sum_{i=1}^r \mu_i (1-\rho_i) \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right\|_{H \rightarrow H} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left\| -(I - F^N) \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \sum_{i=1}^r \mu_i \rho_i \sum_{j=1}^{l_i+1} \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right\|_{H \rightarrow H} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \sum_{j=1}^k \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{k-j+1} (p + \theta_j) \tau \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \leq \|F^k\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{i=1}^r |\mu_i| \left\| \left( (1 - \rho_i)(I - F^{l_i}) + \rho_i(I - F^{l_i+1}) \right) \right\|_{H \rightarrow H} \left[ \|\varphi\|_H \sum_{j=1}^N \left\| \left( 1 + \frac{\tau A}{2} \right) F^{N-j+1} \theta_j \tau \right\|_{H \rightarrow H} \right] \right. \\
& \quad + \left\| (1 - F^N) \right\|_{H \rightarrow H} \left[ \|\psi\|_H + \sum_{i=1}^r |\mu_i| \left\| (1 - \rho_i) \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{l_i+1} \left\| \left( 1 + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \quad \left. \left. + \left\| (1 - F^N) \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{i=1}^r |\mu_i| \left\| \rho_i \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{l_i+1} \left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{l_i-j+1} \theta_j \tau \right\|_{H \rightarrow H} \right\} \\
& \quad + \sum_{j=1}^k \left\| \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) F^{k-j+1} (p + \theta_j) \tau \right\|_{H \rightarrow H} \\
& \leq M(\delta) \left[ \|\varphi\|_H + \|\psi\|_H + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k\}_{k=1}^N \right\|_{C_r^\alpha(H)} \right] \tag{3.3.10}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir.

### 3.4. Sınır Değer Probleminin Fark Şeması

Şimdi (2.4.1) karışık sınır değer probleminin fark şemasını iki adımda kuralım. İlk adımda ağ (grid) noktalar kümesini belirleyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\Omega_h & = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n); m = (m_1, \dots, m_n), m_r = 0, \dots, N_r, h_r N_r = 1, r = 1, \dots, n\}, \\
\Omega_h & = \Omega_h \cap \Omega, S_h = \Omega_h \cap S.
\end{aligned}$$

olarak alınır.  $A_h^x$  fark operatörünü

$$A_h^x v^h(x) = - \sum_{r=1}^n \left( a_r(x) v_r^{\frac{h}{x}}(x) \right)_{x_r, j_r} + \sigma v^h(x), \tag{3.4.1}$$

ağ (grid) fonksiyonlar uzayında tüm  $x \in S_h$  için  $v^h(x) = 0$  koşulunu sağlayan  $v^h(x)$  fonksiyonlar üzerinde tanımlayalım. Bu durumda,  $A_h^x$  kullanarak, bazı sonsuz diferensiyel

denklemler sistemi için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemine ulaşırız. İkinci adımda  $t$  değişkene göre yaklaşım kurduğumuzda,

$$\begin{cases} \tau^{-1} (v_k^h(x) - v_{k-1}^h(x)) + A_h^x v_k^h(x) = f^h(t_k, x) + p^h(x), \\ t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \Omega_h, \\ v_N^h(x) = \varphi^h(x), \\ v_0^h(x) = \sum_{i=1}^r \mu_i v_{l_i}^h(x) + \psi^h(x), \quad x \in \Omega_h, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

şeklindeki birinci mertebeden doğruluk fark şeması ve

$$\begin{cases} \tau^{-1} (v_k^h(x) - v_{k-1}^h(x)) + A_h^x \left( I + \frac{\tau A_h^x}{2} \right) v_k^h(x) = \left( I + \frac{\tau A_h^x}{2} \right) \left( f^h \left( t_{k-\frac{\tau}{2}}, x \right) + p^h(x) \right), \\ t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N\tau = 1, \quad x \in \Omega_h, \\ v_N^h(x) = \varphi^h(x), \\ v_0^h(x) = \sum_{i=1}^r \left\{ \mu_i (1 - \rho_i) v_{l_i}^h(x) + \mu_i \rho_i v_{l_i+1}^h(x) \right\} + \psi^h(x), \quad x \in \Omega_h, \end{cases} \quad (3.4.3)$$

şeklindeki ikinci mertebeden doğruluk fark şeması elde edilir.

$L_{2h} = L_2(\Omega_h)$  ve  $W_{2h}^2 = W_2^2(\Omega_h)$  ağ (grid) fonksiyonlar uzaylarında,  $\Omega_h$  ağ (grid) noktalar kümesi üzerinde tanımlanan  $u^h(x) = \{u(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)\}$  ağ (grid) fonksiyonların normları,

$$\|u^h\|_{L_{2h}} = \left( \sum_{x \in \Omega_h} |u^h(x)|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u^h\|_{W_{2h}^2} = \|u^h\|_{L_{2h}} + \left( \sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| (u^h)_{x_r} \right|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{x \in \Omega_h} \sum_{r=1}^n \left| (u^h(x))_{x_r, x_r, m_r} \right|^2 h_1 \dots h_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

formundadır.

$C_\tau(L_{2h}) = C([0,1]_\tau, L_{2h})$  Banach uzayında ise,  $L_{2h}$  değerli  $u^\tau = \{u_k\}_1^N$  ağ (grid) fonksiyonların normu  $\|u^\tau\|_{C_\tau(L_{2h})} = \max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_{L_{2h}}$  şeklinde alınacaktır.  $\alpha \in [0,1]$  olmak üzere  $C_\tau^\alpha(L_{2h}) = C_\tau^\alpha([0,1]_\tau, L_{2h})$  Hölder uzayı  $u^\tau = \{u_k\}_1^N$  ağ (grid) fonksiyonların Hölder ağırlıklı

$$\|u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} = \max_{1 \leq k \leq N} \|u^\tau\|_{C_\tau(H)} + \max_{1 \leq k < k+r \leq N} \frac{\|u_{k+r} - u_k\|_H}{(r\tau)^\alpha}$$

şeklindeki normları ile birlikte tanımlanmış olsun.  $\tau$  ve  $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$  sayılarının yeterince küçük pozitif sayılar olduğunu varsayalım.

*Teorem 3.4.1.*  $\varphi^h, \psi^h \in D(A_h^x), \{f_k^h\}_1^N \in C_\tau^\alpha(L_{2h})$  olsun. Bu durumda  $M(\delta)$  pozitif sayısı  $\tau, \varphi^h(x), \psi^h(x), f_k^h(x), k = 1, \dots, N-1$  değerlerden bağımsız olmak üzere (3.4.2) ve (3.4.3) fark şemalarının çözümleri için aşağıdaki kararlılık kestirimler geçerlidir:

$$\|p^h\|_{C_\tau(L_{2h})} \leq M(\delta) \left[ \|A_h^x \varphi^h\|_{L_{2h}} + \|A_h^x \psi^h\|_{L_{2h}} + \frac{1}{\alpha} \left\| \{f_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right],$$

$$\left\| \{v_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau(L_{2h})} \leq M(\delta) \left[ \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \|\psi^h\|_{L_{2h}} + \left\| \{f_k^h\}_1^N \right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})} \right].$$

Teorem 3.4.1'in ispatı, üçgen eşitsizliğine ve aşağıda verilen Teorem 3.4.2'ye bağlıdır.

*Teorem 3.4.2.* Bir pozitif  $M$ ,  $h$  ve  $w^h$ 'ye bağlı olmamak üzere

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = w^h(x), & x \in \Omega_h, \\ u^h(x) = 0, & x \in S_h \end{cases}$$

eliptik fark problemin çözümü için

$$\sum_{i=1}^n \left\| (u_i^h)_{\bar{x}_i, \bar{j}_i} \right\|_{L_{2h}} \leq M \|w^h\|_{L_{2h}}$$



olarak elde ederiz. Son aşamada ise,  $p(x)$  ifadesini (3.5.1) parabolik denkleminde yerine yazarız ve çok noktalı sınır değer problemini

$$\begin{aligned} v(0, x) &= v(\gamma, x) + \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ v(t, 0) &= 0, \quad v(t, \pi) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

koşullarını göz önüne alarak çözeriz.  $\tau$  ve  $h$  küçük parametrelere bağlı olarak grid noktalarının bir kümesi

$$[0, 1]_{\tau} \times [0, \pi]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, k = 1, \dots, N-1, N\tau = 1, x_n = nh, n = 1, \dots, M-1, Mh = \pi\}$$

ile ifade edilir. Bu durumda (3.5.1) denklemini için birinci mertebeden doğruluk fark şeması,

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{v_n^k - v_n^{k-1}}{\tau} - (2 + \cos(x_n)) \frac{v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k}{h^2} + \sin(x_n) \frac{v_{n+1}^k - v_{n-1}^k}{2h} + v_n^k \\ & = f(t_k, x_n) + p(x_n), \\ & k = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, M-1, \\ & v_n^N = \varphi_n, \quad v_n^0 - v_n^1 = \psi_n, \quad n = 0, \dots, M, \\ & v_0^k = 0, \quad v_M^k = 0, \quad k = 0, \dots, N \end{aligned} \right. \quad (3.5.3)$$

şeklinde oluşturulur.  $p(x_n)$  değerleri

$$p(x_n) = (2 + \cos(x_n)) \frac{u_{n+1}^N - 2u_n^N + u_{n-1}^N}{h^2} - \sin(x_n) \frac{u_{n+1}^N - u_{n-1}^N}{2h} - u_n^N, \quad (3.5.4)$$

ifadesinden elde edilebilir ve burada  $\{u_n^k\}$ , lokal olmayan (3.5.2) sınır değeri probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\begin{cases}
\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - (2 + \cos(x_n)) \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \sin(x_n) \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} + u_n^k \\
= f(t_k, x_n) + (2 + \cos(x_n)) \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{h^2} - \sin(x_n) \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}}{2h} - \varphi_n, \\
k = 1, \dots, N, n = 1, \dots, M-1, \\
u_n^0 - u_n^1 = \psi_n, u_0^k = 0, u_M^k = 0, k = 0, \dots, N, n = 0, \dots, M
\end{cases} \quad (3.5.5)$$

şeklindeki birinci mertebeden doğruluk fark şemasının çözümüdür. Bu durumda (3.5.5) ifadesi,

$$A_n u_{n+1} + B_n u_n + C_n u_{n-1} = R \theta_n, \quad n = 1, \dots, M-1, \quad u_0 = \vec{0}, u_M = \vec{0}. \quad (3.5.6)$$

olarak matris formunda yazılabilir. (3.5.6) ifadesindeki  $\theta_n$  sütun matrisi,  $A_n, B_n, C_n$  'ler ise kare matrislerdir. Yani bu matrisler;

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & c_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_n & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_n & d & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_n & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_n & d \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. (3.5.6) ifadesi açık olarak

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1}^0 \\ u_{n+1}^1 \\ \vdots \\ u_{n+1}^{N-2} \\ u_{n+1}^{N-1} \\ u_{n+1}^N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_n & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_n & d & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_n & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_n & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^0 \\ u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^{N-2} \\ u_n^{N-1} \\ u_n^N \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & c_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1}^0 \\ u_{n-1}^1 \\ \vdots \\ u_{n-1}^{N-2} \\ u_{n-1}^{N-1} \\ u_{n-1}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_n^1 \\ \theta_n^2 \\ \vdots \\ \theta_n^{N-2} \\ \theta_n^{N-1} \\ \theta_n^N \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan da

$$\begin{aligned}
a_n &= -(2 + \cos(x_n))h^{-2} + \frac{\sin(x_n)}{2}h^{-1}, \\
b_n &= 1 + \frac{1}{\tau} + 2(2 + \cos(x_n))h^{-2}, \\
c_n &= -(2 + \cos(x_n))h^{-2} - \frac{\sin(x_n)}{2}h^{-1}, \\
d &= -\frac{1}{\tau}
\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca,

$$\theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^0 \\ \vdots \\ \theta_n^N \end{bmatrix}, \varphi_n^0 = \psi_n, n = 1, \dots, M-1, \\
\theta_n^k = f(t_k, x_n) + (2 + \cos(x_n)) \frac{\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}}{h^2} - \sin(x_n) \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}}{2h} - \varphi_n, k = 1, \dots, N, n = 1, \dots, M-1,$$

şeklinindedir. (3.5.6) ifadesindeki  $R$  ise  $(N+1) \times (N+1)$  birim matrisidir ve



$$u_{n\pm 1} = \begin{bmatrix} u_{n\pm 1}^0 \\ \vdots \\ u_{n\pm 1}^N \end{bmatrix}, u_n = \begin{bmatrix} u_n^0 \\ \vdots \\ u_n^N \end{bmatrix}.$$

olur. O halde

$$u_n = \alpha_{n+1}u_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \dots, 1,$$

yardımla (3.5.6)'ya çözüm arayalım. Burada  $u_M = \vec{0}, \alpha_n$  ( $n = 1, \dots, M-1$ ) kare matrisler ve  $\beta_n$  ( $n = 1, \dots, M-1$ ) ise sütun matrislerdir. (3.5.6) fark denklemini çözmede

$$\alpha_n = -(B_n + C_n \alpha_{n-1})^{-1} A_n,$$

$$\beta_n = (B_n + C_n \alpha_{n-1})^{-1} (R\varphi_n - C_n \beta_{n-1}), n = 1, \dots, M-1,$$

formüllerini kullanmamız gerekmektedir. Bu formüllerde  $\alpha_1$  sıfır kare matris,  $\beta_1$  ise sıfır sütun vektörüdür.

İkinci olarak, tekrar (3.5.1) lokal olmayan karışık sınır değer problemini ele alalım. Bu durumda türevler için ikinci mertebeden doğruluk yaklaşım formüllerini dikkate alarak,

$$u^{(1)}(x_n) \approx \frac{u(x_{n+1}) - u(x_{n-1}))}{2h},$$

$$u^{(2)}(x_n) \approx \frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1}))}{h^2},$$

$$u^{(3)}(x_n) \approx \frac{u(x_{n+2}) - 2u(x_{n+1}) + 2u(x_{n-1}) - u(x_{n-2}))}{h^3},$$

$$u^{(4)}(x_n) \approx \frac{u(x_{n+2}) - 4u(x_{n+1}) + 6u(x_n) - 4u(x_{n-1}) + u(x_{n-2}))}{h^4},$$

$$u^{(2)}(0) \approx \frac{2u(0) - 5u(h) + 4u(2h) - u(3h)}{h^2},$$

$$u^{(2)}(\pi) \approx \frac{2u(\pi) - 5u(\pi - h) + 4u(\pi - 2h) - u(\pi - 3h)}{h^2},$$

ifadeleri yazılabilir. O halde (3.5.1) lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için  $t$  ve  $x$  cinsinden ikinci mertebeden doğruluk fark şemasını

$$\begin{aligned} & \frac{v_n^k - v_n^{k-1}}{\tau} + \frac{q_2(v_{n+1}^k - v_{n-1}^k)}{2h} + \frac{q_3(v_{n+1}^k - 2v_n^k + v_{n-1}^k)}{h^2} \\ & - \tau \frac{q_0(v_{n+2}^k - 3v_{n+1}^k + 3v_n^k - v_{n-1}^k)}{h^3} + \frac{\tau q_1}{2} \frac{v_{n+2}^k - 4v_{n+1}^k + 6v_n^k - 4v_{n-1}^k + v_{n-2}^k}{h^4} \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

$$= \theta_n^k + p(x_n) - \frac{\tau}{2} \frac{1}{h^2} (2 + \cos(x_n)) (p(x_{n+1}) - 2p(x_n) + p(x_{n-1}))$$

$$- \frac{\tau}{2} \frac{1}{2h} \sin(x_n) (p(x_{n+1}) - p(x_{n-1})) - \frac{\tau}{2} p(x_n),$$

$$k = 1, \dots, N,$$

$$n = 2, \dots, M - 2,$$

$$v_0^k = 0, v_M^k = 0, v_1^k = \frac{4}{5}v_2^k - \frac{1}{5}v_3^k,$$

$$v_{M-1}^k = \frac{4}{5}v_{M-2}^k - \frac{1}{5}v_{M-3}^k, k = 0, \dots, N$$

$$v_n^N - (1 - \rho)v_n^l - \rho v_n^{l+1} = \psi(x_n), n = 0, \dots, M$$

olarak alabiliriz. Bu durumda

$$q_0 = (2 + \cos(x_n)) \sin(x_n),$$

$$q_1 = (2 + \cos(x_n))^2,$$

$$q_2 = 1 + \tau q_0,$$

$$q_3 = -2 - \cos(x_n) + \frac{\tau}{2} [2 \sin^2(x_n) - (2 + 3 \cos(x_n))(2 + \cos(x_n))],$$

olur. Bu sistemi matris formunda

$$\begin{aligned}
A_n u_{n+2} + B_n u_{n+1} + C_n u_n + D_n u_{n-1} + E_n u_{n-2} &= R \theta_n, \quad n = 2, \dots, M-2, \\
u_0 = \vec{0}, u_M &= \vec{0}, \\
u_1 &= \frac{4}{5} u_2 - \frac{1}{5} u_3, \\
u_{M-1} &= \frac{4}{5} u_{M-2} - \frac{1}{5} u_{M-3},
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

olarak yeniden yazabiliriz ve burada  $\theta_n$  sütun matris,  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n$ 'ler kare matrisler ve  $R$  ise birim matrisidir. O halde bu matrisler

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ e_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & e_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e_n & 0 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ y_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & y_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & y_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1-\rho) & \rho & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ r_n & d & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_n & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & r_n & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_n & d \end{bmatrix},$$

$$D_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ z_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & z_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_n & 0 \end{bmatrix}, \quad E_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ w_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & w_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & w_n & 0 \end{bmatrix},$$

$$\theta_n = \begin{bmatrix} \theta_n^0 \\ \vdots \\ \theta_n^N \end{bmatrix},$$

şeklindedir. Bu durumda

$$\theta_n^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right) + \frac{\tau}{2} \left(-\frac{1}{h^2} (2 + \cos(x_n))\right) \left(f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n+1}\right) - 2f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right) + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n-1}\right)\right) \\ + \frac{1}{2h} \sin(x_n) \left(f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n+1}\right) - f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_{n-1}\right) + f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right)\right),$$

$$k = 1, \dots, N, n = 2, \dots, M - 2,$$

$$e_n = -\frac{\tau q_0}{h^3} - \frac{\tau q_1}{2h^4},$$

$$y_n = \frac{q_2}{2h} + \frac{1}{h^2} q_3 + \frac{2\tau q_0}{h^3} + \frac{2\tau q_1}{h^4},$$

$$r_n = 1 + \frac{1}{\tau} - \frac{2}{h^2} q_3 - \frac{2\tau q_0}{h^3} - \frac{3\tau q_1}{h^4},$$

$$z_n = -\frac{q_2}{2h} + \frac{1}{h^2} q_3 - \frac{\tau q_0}{h^3} + \frac{2\tau q_1}{h^4},$$

$$w_n = \frac{\tau q_0}{h^3} - \frac{\tau q_1}{2h^4}, n = 2, \dots, M - 2.$$

olur.  $p(x_n)$ , (3.5.4) ifadesinden elde edilebilir ve burada  $\{u_n^k\}$ , lokal olmayan (3.5.1) sınır değeri probleminin yaklaşık çözümleri için

$$\frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} + q_2 \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} + q_3 \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} \\ - \tau q_0 \frac{u_{n+2}^k - 3u_{n+1}^k + 3u_n^k - u_{n-1}^k}{h^3} + \frac{\tau}{2} q_1 \frac{u_{n+2}^k - 4u_{n+1}^k + 6u_n^k - 4u_{n-1}^k + u_{n-2}^k}{h^4} = \theta_n^k,$$

$$k = 1, \dots, N, n = 2, \dots, M - 2,$$

(3.5.10)

$$u_0^k = 0, u_M^k = 0, u_1^k = \frac{4}{5} u_2^k - \frac{1}{5} u_3^k,$$

$$u_{M-1}^k = \frac{4}{5} u_{M-2}^k - \frac{1}{5} u_{M-3}^k, k = 0, \dots, N$$

$$u_n^0 - (1 - \rho) u_n^l - \rho u_n^{l+1} = \psi(x_n), n = 0, \dots, M$$

şeklindeki ikinci mertebeden doğruluk fark şemasının çözümüdür.

Her  $n = 0, \dots, M - 1$  indisleri için  $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$  matrisler  $(N + 1)$  satırdan ve  $(N + 1)$  sütundan oluşan matrisler ve  $\gamma_{n+1}$  ise  $(N + 1)$  elemanlı bir sütundan oluşan matris olmak üzere (3.5.9) lineer denklemin çözümünü Gauss modifisirlenen yöntemi kullanarak

$$u_n = \alpha_{n+1}u_{n+1} + \beta_{n+1}u_{n+2} + \gamma_{n+1}, n = M - 2, \dots, 0$$

şeklinde arayacağız. Burada

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \vec{0}, \alpha_1 = \beta_1,$$

tüm elemanları sıfırdan oluşan matrisler,

$$\alpha_2 = -4R, \beta_2 = \frac{4}{5}R$$

$$\beta_{n+1} = -F_n^{-1}A_n,$$

$$\alpha_{n+1} = -F_n^{-1}(B_n + D_n\beta_n + E_n\alpha_{n-1}\beta_n),$$

$$\gamma_{n+1} = -F_n^{-1}(R\varphi_n - D_n\gamma_n - E_n\alpha_{n-1}\gamma_n - E_n\gamma_{n-1}),$$

$$F_n = (C_n + D_n\alpha_n + E_n\beta_{n-1} + E_n\alpha_{n-1}\alpha_n), n = 2, \dots, M - 2$$

formüllerle hesaplanır.

$u_M$  ve  $u_{M-1}$  için,

$$u_M = \vec{0},$$

$$u_{M-1} = (\beta_{M-1} + 5R - (4R - \alpha_{M-2})\alpha_{M-1})^{-1} [(4R - \alpha_{M-2})\gamma_{M-1} - \gamma_{M-1}]$$

ifadeleri geçerlidir.

Şimdi  $u, p, v$  için hata analizlerini sırasıyla Tablo 3.5.1, Tablo 3.5.2, Tablo 3.5.3'de verelim.

Tablo 3.5.1.  $u$  için hata analizi

Fark Şemaları (N,M)	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
BMDFŞ	$7.5289 \times 10^{-3}$	$3.6525 \times 10^{-3}$	$1.7985 \times 10^{-3}$	$0.89219 \times 10^{-3}$
İMDFŞ	$1.4774 \times 10^{-3}$	$0.39701 \times 10^{-3}$	$0.10286 \times 10^{-3}$	$2.6181 \times 10^{-5}$

Tablo 3.5.2.  $p$  için hata analizi

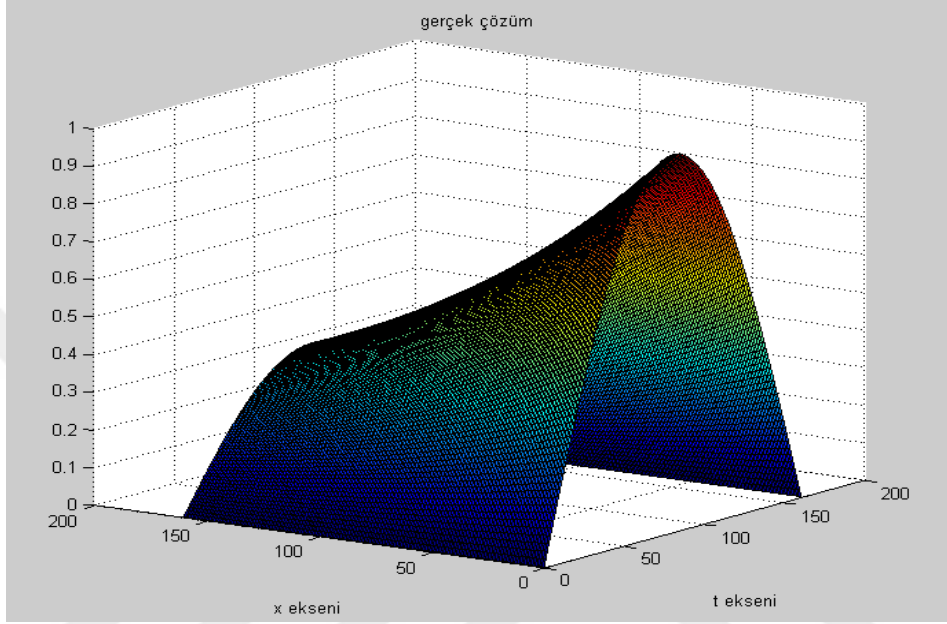
Fark Şemaları (N,M)	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
BMDFŞ	$1.9009 \times 10^{-2}$	$0.88111 \times 10^{-2}$	$0.42341 \times 10^{-2}$	$0.20745 \times 10^{-2}$
İMDFŞ	$0.57294 \times 10^{-2}$	$0.13679 \times 10^{-2}$	$0.034257 \times 10^{-2}$	$8.629 \times 10^{-5}$

Tablo 3.5.3.  $v$  için hata analizi

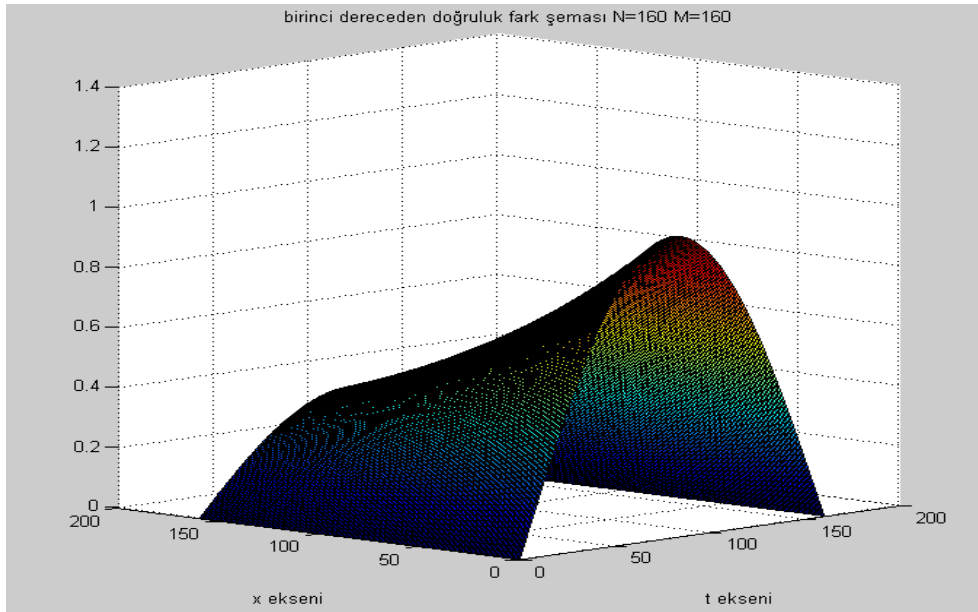
Fark Şemaları (N,M)	N=M=20	N=M=40	N=M=80	N=M=160
BMDFŞ	$0.27531 \times 10^{-2}$	$0.13185 \times 10^{-2}$	$0.064479 \times 10^{-2}$	$0.031861 \times 10^{-2}$
İMDFŞ	$0.13758 \times 10^{-2}$	$0.037788 \times 10^{-2}$	$9.7782 \times 10^{-5}$	$2.4804 \times 10^{-5}$

Tablodaki verilere bakıldığından N ve M değerleri 2 kat oranında değiştiğinde  $u, v, p$  için BMDFŞ'deki değişim yaklaşık olarak  $\frac{1}{2}$  oranında, İMDFŞ'deki değişim yaklaşık olarak  $\frac{1}{4}$  oranında değiştiği görülmektedir. Bu da örnekteki sayısal çözümün gerçek çözüme yaklaşımının doğruluk mertebesi ile aynı merteye yakınsak olduğunu gösteriyor. N ve M'nin değerlerinin 2 kat şeklinde alınmasının nedeni ise sayısal çözümün gerçek çözüme yakınsaklık mertebesini görebilmesidir.

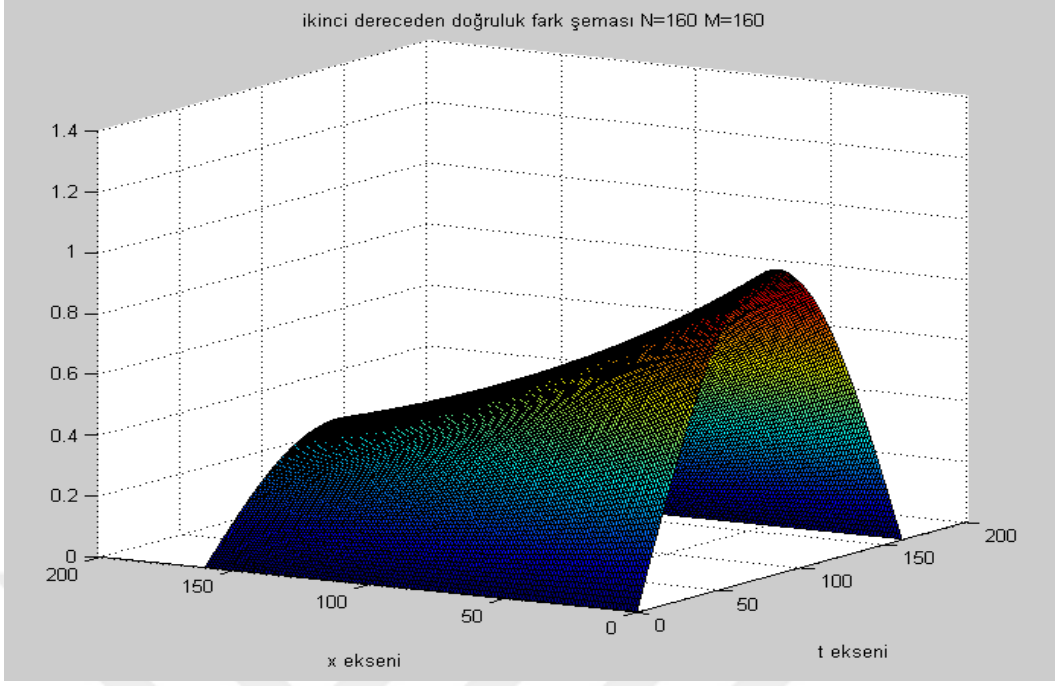
Tablodaki N ve M değerlerinden yararlanarak gerçek çözüm grafiği, birinci mertebeden doğruluk fark şeması grafiği, ikinci mertebeden doğruluk fark şeması grafiği sırasıyla Şekil 3.5.1, Şekil 3.5.2, Şekil 3.5.3’de sunulmuştur.



Şekil 3.5.1. N=160 M=160 için gerçek çözüm grafiği



Şekil 3.5.2. N=160 M=160 için birinci dereceden doğruluk fark şeması grafiği



Şekil 3.5.3.  $N=160$   $M=160$  için ikinci dereceden doğruluk fark şeması grafiği



#### 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yapılan çalışmalar neticesinde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

*Sonuç 1:*  $A$  operatörü  $H$  Hilbert uzayında bir öz eşlenik pozitif tanımlı operatör,  $s_1, \mu_1, s_2, \mu_2, \dots, s_r, \mu_r$  verilen gerçekteki sayılar için

$$\sum_{k=1}^r |\mu_k| < 1, 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_r < 1$$

koşul sağlanmış olsun. Ayrıca,  $\varphi, \psi \in H$  elemanlar ve  $f : [0,1] \rightarrow H$  fonksiyonu verilmiş olsun.  $(v, p)$  çifti için

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) + Av(t) = p + f(t), 0 \leq t \leq 1, \\ v(1) = \varphi, v(0) = \sum_{k=1}^l \mu_k v(s_k) + \psi \end{cases}$$

sınır değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

*Sonuç 2:*  $\Omega = (0,1)^n$ ,  $\square^n$  vektör uzayında birim küp ve onun sınırı  $S = \partial\Omega$  ve  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$  olsun.  $[0,1] \times \Omega$  bölgesinde, bilinmeyen  $v(t, x)$  ve  $p(x)$  fonksiyonlar için

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \sum_{i=1}^n (a_i(x) v_{x_i}(t, x))_{x_i} + \sigma v(t, x) = f(t, x) + p(x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 < t < 1, \\ v(1, x) = \varphi(x), v(0, x) = \sum_{k=1}^r \mu_k v(s_k, x) + \psi, x \in \bar{\Omega} \\ v(t, x) = 0, x \in S, \end{cases}$$

sınır değer probleminin ele alınmıştır ve onun çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

*Sonuç 3:* Parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer özdeşleştirme problemin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + Av_k = f_k + p, f_k = f(t_k), 1 \leq k \leq N, \\ v_N = \varphi, v_0 - \sum_{i=1}^r \mu_i v_{t_i} = \psi \end{array} \right.$$

formundaki BMDFŞ elde edilmiştir ve kararlılık kestirimleri oluşturulmuştur.

*Sonuç 4:* Parabolik denklemler için çok noktalı lokal olmayan sınır değer özdeşleştirme problemin yaklaşık çözümünü bulmak için

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{-1}(v_k - v_{k-1}) + A \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) v_k = \left( I + \frac{\tau A}{2} \right) \left( f \left( t_{k-\frac{1}{2}} \right) + p \right), 1 \leq k \leq N, \\ v_N = \varphi, \\ v_0 - \sum_{i=1}^r \left\{ \mu_i (1 - \rho_i) v_{t_i} + \mu_i \rho_i v_{t_i+1} \right\} = \psi \end{array} \right.$$

şeklindeki İMDFŞ elde edilmiştir ve kararlılık kestirimleri oluşturulur.

*Sonuç 5:* Dirichlet şartı ile verilen parabolik kısmi diferensiyel denklem için çok noktalı özdeşleştirme sınır değer problemin çözümünün kararlılığı incelenmiş ve BMDFŞ ile İMDFŞ oluşturulmuştur.

*Sonuç 6:* Test örneklerde çok noktalı parabolik özleştirme sınır değer probleminin çözümünü bulmak için algoritma ve MATLAB kodları verilmiştir.

Elde edilen bu sonuçlar, farklı sınır koşullarıyla parabolik kısmi diferensiyel denklemleri içeren modelleri incelemeye katkı sağlayacaktır.

## 5. KAYNAKLAR

- Ashyralyev, A., 2011. On the Problem of Determining the Parameter of a Parabolic Equation, Ukr. Math. J., 62, 9, 1397-1408.
- Ashyralyev, A. ve Erdogan, A.S., 2014. Well-Posedness off the Right-Hand Side Identification Problem for a Parabolic Equation, Ukrainian Mathematical Journal, 66, 2, 165-177.
- Ashyralyev, A. ve Erdogan, A.S., 2011. On the Numerical Solution of a Parabolic Inverse Problem with the Dirichlet Condition, International Journal of Mathematics & Computation, 11, 73-81.
- Ashyralyev, A. ve Sobolevskii, P.E., 1994. Well-posedness of Parabolic Difference Equations, (Vol.69 Operator Theory: Advances and Applications). Birkhäuser Basel, Switzerland, 355p.
- Ashyralyev, A., Erdogan A.S. ve Demirdag, O., 2012. On the Determination of the Right-hand Side in a Parabolic Equation, Appl. Numer. Math., 62, 11, 1672-1683.
- Ashyralyev, C., Dural, A. ve Sozen, Y., 2012. Finite Difference Method for the Reverse Parabolic Problem with Neumann Condition, AIP Conference Proceedings, 1470, 102-105.
- Ashyralyev, C. & Demirdag, O., 2012. The Difference Problem of Obtaining the Parameter of a Parabolic Equation, Abstr. Appl. Anal., Special Issue, 7, 1-14.
- Ashyralyev, C., 2018. Well-posedness of Boundary Value Problems for Reverse Parabolic Equation with Integral Condition, e-Journal of Analysis and Applied Mathematics , 1, 11-20.
- Ashyralyev, C., 2020. Stability of Rothe Difference Scheme for the Reverse Parabolic Problem with Integral Boundary Condition, Math Meth Appl Sci., 43, 5369-5379.
- Ashyralyev, C., Dural, A. ve Sozen, Y., 2012. Finite Difference Method for the Reverse Parabolic Problem, Abstr. Appl. Anal., Special Issue, 1-17.
- Ashyralyeva, M. ve Ashyraliyev, M., 2018. On the Numerical Solution of Identification Hyperbolic-parabolic Problems with the Neumann Boundary Condition, Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, 91, 3, 69-74.
- Azizbayov, E.I. ve Mehraliyev, Y.T., 2017. Solvability of Nonlocal Inverse Boundary Value Problem for a Second-order Parabolic Equation with Integral Conditions, Electron. J. Differ. Equ., 125, 1-14.

- Baglan, F. ve Kanca, F., 2019. Two-dimensional Inverse Quasilinear Parabolic Problem with Periodic Boundary Condition, Applicable Analysis, 98, 8, 1549-1565.
- Debnath, L.P. ve Mikusinski, P., 2005. Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Elsevier Academic Press, New York, USA, 600p.
- Dehghan, M., 2001. An Inverse Problem of Finding a Source Parameter in a Semilinear Parabolic Equation, Applied Mathematical Modelling, 25, 9, 743-754.
- Eidelman, Y.S., 1991. An Inverse Problem for an Evolution Equation, Mathematical Notes, 49, 5, 535-540.
- Guidetti, D., 2012. Determining the Source Term in An Abstract Parabolic Problem from a Time Integral of the Solution, Mediterr. J. Math., 9, 611-633.
- Ismailov, M, I. ve Kanca, F., 2011. An Inverse Coefficient Problem for a Parabolic Equation in the Case of Nonlocal Boundary and Overdetermination Conditions, Math Meth Appl Sci., 34, 6, 692-702.
- Kabanikhin, S.I., 2011. Inverse and III-posed Problems: Theory and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 459p.
- Kalmenov, T.S. ve Shaldanbaev, A.S., 2010. On a Criterion of Solvability of the Inverse Problem of Heat Conduction, J. Inverse III-Posed Probl., 18, 471-492.
- Kozhanov, A.I., 2017. Parabolic Equations with Unknown Time-dependent Coefficients, Comput. Math. Math. Phys., 57, 6, 961-972.
- Krein, S.G., 1972. Linear Differential Equations in Banach Space, American Mathematical Society, New York, USA, 390p.
- Kreyszing, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications, John WileySons Inc., New York, USA,704p.
- Maddox, I.J., 1973. Elements of Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, New York, USA, 396p.
- Mohebbi, A. ve Abbasi, M., 2015. A Fourth-order Compact Difference Scheme for the Parabolic Inverse Problem with an Overspecification at a Point, Inverse Problems in Science and Engeneering, 23, 3, 457-478.
- Musayev, B. ve Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 470s.
- Pyatkov, S.G. ve Samkov, M.L., 2017. Solvability of Some Inverse Problems for the Nonstationary Heat-and-mass-transfer System, J. Math. Anal. Appl., 446, 2, 1449-1465.

- Rashedi, K., Adibi, H. ve Dehghan, M., 2014. Determination of Space-time-dependent Heat Source in a Parabolic Inverse Problem via the Ritz-Galerkin Technique, Inverse Probl. Sci. Eng., 22, 7, 1077-1108.
- Sadybekov, M., Oralsyn, G. ve Ismailov, M., 2018. Determination of a Time-dependent Heat Source Under not Strengthened Regular Boundary and Integral Overdetermination Conditions, Filomat, 32, 3, 809-814.
- Samarskii, A.A. ve Nikolaev, E.S., 1989. Numerical Methods for Grid Equations (Vol II. Iterative Methods), Birkhäuser Basel, Switzerland.
- Sazaklioglu, A.U., Ashyralyev, A. ve Erdogan, A. S., 2017. Existence and Uniqueness Results for an Inverse Problem for Semilinear Parabolic Equations, Filomat, 31, 4, 1057-1064.
- Sazaklioglu, A.U., Ashyralyev, A. ve Erdogan, A.S., 2018. Existence and Uniqueness Results for an Inverse Problem for a Semilinear Equation with Final Overdetermination, Filomat, 32, 3, 847–858.
- Sobolevskii, P.E., 1975. Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations, Izdat. Gosud. Univ., Voronezh.

## 6. EKLER

### 6.1. Ek 1. Problemin MATLAB Program Kodları

```
function firstandsecondorder_inv_final(N,M)
if nargin < 1; end;
close;close;
% 1.mertebede
tau=1/N; h=pi/M;lam=1/2;
lbt=lam/tau;s=floor(lbt);lbtl=lbt-s;
O=zeros(N+1,N+1,M+1);o=zeros(N+1,N+1);os=zeros(N+1,1);
% V
A=O;B=O;C=O;
for n=1:M+1,
for k=1:N;
x=(n-1)*h;a=2+cos(x);b=sin(x);
A(k+1,k+1,n)=-a/h^2+b/(2*h);C(k+1,k+1,n)=-a/h^2-b/(2*h);
B(k+1,k,n)=-1/tau;B(k+1,k+1,n)=1+1/tau+2*a/(h^2);
end;
B(1,s+1,n)=-1;B(1,1,n)=1;
end
R=eye(N+1,N+1);
fii=o;
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;finp1=exactu(1,x+h);fin=exactu(1,x);finm1=exactu(1,x-h);
Afi=-(2+cos(x))*(finp1-2*fin+finm1)/(h*h)+sin(x)*(finp1-finm1)/(2*h)+fin;
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau;fii(k,n)=rsf(t,x)-Afi;
end;
fii(1,n)=rox(x);
end;
alphaf{1}=o;bethaf{1}=os;
for j=2:M;
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1});
alphaf{j}=-Q*A(:,j);
bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j)*bethaf{j-1}));
end;
V=o;
for j=M:-1:1;
V(:,j)=alphaf{j}*V(:,j+1)+bethaf{j};
end;
pf=V;
% Gercek cozum
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;x=(n-1)*h;
```

```

esv(k,n)=exactv(t,x);
end;
end;
format('shortG');
maxerror=max(max(abs(esv-pf)));
cevapv=maxerror;
%p
p(1)=exactp(0);p(M+1)=exactp(pi);
for n=2:M;
x=(n-1)*h;
p(n)=(2+cos(x))*(V(N+1,n+1)-2*V(N+1,n)+V(N+1,n-1))/(h*h)
-sin(x)*(V(N+1,n+1)-V(N+1,n-1))/(2*h)-V(N+1,n);
end;
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;esp(n)=exactp(x);
end;
maxerrorp=0;
for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n)-p(n))^2;
end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
%u
B=O;
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
for k=1:N;
B(k+1,k,n)=-1/tau;B(k+1,k+1,n)=1+1/tau+(4+2*cos(x))/h^2;
end;
B(1,s+1,n)=-1;B(1,1,n)=1;
end
R=eye(N+1,N+1);
fii=o;
for n=2:M;
x=(n-1)*h;
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau;fii(k,n)=rsf(t,x)+p(n);
end;
fii(1,n)=rox(x);
end;
for j=2:M;
Q=inv(B(:,j)+C(:,j)*alphaf{j-1});
alphaf{j}=-Q*A(:,j);
bethaf{j}=Q*(R*(fii(:,j))-(C(:,j)*bethaf{j-1}));
end;
U=zeros(N+1,M+1);
for j=M:-1:1;
U(:,j)=alphaf{j}*U(:,j+1)+bethaf{j};
end;
pf=U;

```

```

% Gercek u
for n=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;x=(n-1)*h;
esu(k,n)=exactu(t,x);
end;
end;
maxerror=max(max(abs(esu-pf)));
cevapu=maxerror;
cevap1=[cevapv,maxerrorp,cevapu];
% Grafik
str1=strcat('birinci mertebeden dogruluk: N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
figure; surf(pf); title(str1); xlabel('t axis');
ylabel('x axis'); rotate3d ;
figure; surf(esu); title('gercek cozum'); xlabel('t axis'); ylabel('x axis'); rotate3d ;
%2. mertebeden fark sema
A=O;B=O;C=O;D=O;E=O;
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
q0=(2+cos(x))*sin(x);q1=(2+cos(x))^2;q2=sin(x)+tau*q0;
q3=-2-cos(x)+tau/2*(2*sin(x)*sin(x)-(2+3*cos(x))*(2+cos(x)));
for k=1:N;
A(k+1,k+1,j)=-tau/(h^3)*q0+tau/(2*(h^4))*q1;
B(k+1,k+1,j)=1/(2*h)*q2+1/h^2*q3+2*tau/(h^3)*q0- 2*tau/(h^4)*q1;
C(k+1,k+1,j)=1+tau/2+1/tau-2/h^2*q3+3*tau/(h^4)*q1;
C(k+1,k,j)= -1/tau;
D(k+1,k+1,j)=-1/(2*h)*q2+1/h^2*q3-2*tau/(h^3)*q0-2*tau/(h^4)*q1;
E(k+1,k+1,j)=tau/(h^3)*q0+tau/(2*(h^4))*q1;
end
C(1,s+1,j)=lbtl-1;C(1,s+2,j)=-lbtl;C(1,1,j)=1;
end
fii=o;
for j=2:M ;
x=(j-1)*h;
fi0=exp(-1)*sin(x);fi1=exp(-1)*cos(x);fi2=-exp(-1)*sin(x);
fip0=exp(-1)*sin(x+h);fip1=exp(-1)*cos(x+h);fip2=-exp(-1)*sin(x+h);
fim0=exp(-1)*sin(x-h);fim1=exp(-1)*cos(x-h);fim2=-exp(-1)*sin(x-h);
finp1=exactu(1,x+h);fin=exactu(1,x);finm1=exactu(1,x-h);
Afi=-(2+cos(x))*fi2+sin(x)*fi1+fi0;
Afip1=-(2+cos(x+h))*fip2+sin(x+h)*fip1+fip0;
Afim1=-(2+cos(x-h))*fim2+sin(x-h)*fim1+fim0;
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau- tau/2;
fii(k,j)=rsf(t,x)-Afi+tau/2*(-(2+cos(x))*(rsf(t,x+h)-Afip1-2*(rsf(t,x)-Afi)+rsf(t,x-h)-
Afim1)/h^2+sin(x)*(rsf(t,x+h)-Afip1-rsf(t,x-h)+Afim1)/(2*h)+rsf(t,x)-Afi);
end;
fii(1,j)=rox(x);
end;
alpha{ 1 } = o;beta{ 1 } = o;

```



```

gamma{1}= os;
alpha{2} = (4/5)*R;
beta{2} = (-1/5)*R; gamma{2} = zeros(N+1,1);
for j = 3:M-1;
L=inv(C(:,j)+D(:,j)*alpha{j-1}+E(:,j)*beta{j-2}+E(:,j)*alpha{j-2}*alpha{j-1});
beta{j} = - L*A(:,j);
alpha{j} = - L*(B(:,j) +D(:,j)*beta{j-1}+E(:,j)*alpha{j-2}*beta{j-1});
gamma{j} = L*(R*(fii(:,j)) - D(:,j)*gamma{j-1}-E(:,j)*alpha{j-2}*gamma{j-1} -
E(:,j)*gamma{j-2} );
end;
V=o;
V(:,M)=inv( beta{M-2} + 5*R - (4*R-alpha{M-2})*alpha{M-1})*((4*R- alpha{M-
2})*gamma{M-1} - gamma{M-2});
for j = M-1:-1:1
V(:,j)=alpha{j}*V(:,j+1)+beta{j}*V(:,j+2)+gamma{j};
end;
ps=V;
maxerrors=max(max(abs(esv-ps)));
cevapvs=maxerrors;
%p
p(1)=exactp(0);p(M+1)=exactp(pi);
for n=2:M;
x=(n-1)*h;
p(n)=(2+cos(x))*(V(N+1,n+1)-2*V(N+1,n)+V(N+1,n-1))/(h*h)-sin(x)*(V(N+1,n+1)-
V(N+1,n-1))/(2*h)-V(N+1,n);
end;
for n=1:M+1;
x=(n-1)*h;
esp(n)=exactp(x);
end;
maxerrorp=0;
for n=2:M;
maxerrorp=maxerrorp+(esp(n)-p(n))^2;
end;
maxerrorp=maxerrorp^(1/2)*h^(1/2);
%u
C=O;
for j=1:M+1;
x=(j-1)*h;
q0=(2+cos(x))*sin(x);q1=(2+cos(x))^2;
q2=sin(x)+tau*q0;
q3=-2-cos(x)+tau/2*(2*sin(x)*sin(x)-(2+3*cos(x))*(2+cos(x)));
for k=1:N;
C(k+1,k+1,j)=1+tau/2+1/tau-2/h^2*q3+3*tau/(h^4)*q1;
C(k+1,k,j)= -1/tau;
end
C(1,s+1,j)=lbtl-1;C(1,s+2,j)=-lbtl;C(1,1,j)=1;
end
for j=2:M ;

```

```

x=(j-1)*h;
for k=2:N+1;
t=(k-1)*tau- tau/2;
ppp=p(j)+tau/2*(-(2+cos(x))*((p(j+1)-2*p(j)+p(j-1))/h^2)+sin(x)*(p(j+1)-p(j-1))/(2*h)+p(j));
fii(k,j)=rsf(t,x)+tau/2*(-(2+cos(x))*((rsf(t,x+h)-2*rsf(t,x)+rsf(t,x-h))/h^2)+sin(x)*(rsf(t,x+h)-rsf(t,x-h))/(2*h)+rsf(t,x))+ppp;
end;
fii(1,j)=rox(x);
end;
alpha{1} = 0;beta{1} = 0;gamma{1} = os;
alpha{2} = (4/5)*R;beta{2} = (-1/5)*R;gamma{2} = zeros(N+1,1);
for j = 3:M-1;
L=inv(C(:,j)+D(:,j)*alpha{j-1}+E(:,j)*beta{j-2}+E(:,j)*alpha{j-2}*alpha{j-1});
beta{j} = - L*A(:,j);
alpha{j} = - L*(B(:,j) +D(:,j)*beta{j-1}+E(:,j)*alpha{j-2}*beta{j-1});
gamma{j} = L*(R*(fii(:,j)) - D(:,j)*gamma{j-1}-E(:,j)*alpha{j-2}*gamma{j-1} - E(:,j)*gamma{j-2} );
end;
U=zeros(N+1,M+1);
U(:,M)=inv( beta{M-2} + 5*R - (4*R-alpha{M-2})*alpha{M-1})*((4*R- alpha{M-2})*gamma{M-1} - gamma{M-2});
for j = M-1:-1:1 ;
U(:,j)=alpha{j}*U(:,j+1)+beta{j}*U(:,j+2)+gamma{j};
end;
ps=U;
str1=strcat('ikinci mertebeden: N=',num2str(N),' M=',num2str(M));
figure; surf(ps); title(str1);xlabel('t axis');
ylabel('x axis'); rotate3d ;
maxerrors=max(max(abs(esu-ps)));
cevapus=maxerrors;
cevap2=[cevapvs,maxerrorp,cevapus];
Cevap=[cevap1,cevap2]
%fonksiyonlar
function rx=rox(x)
rx=(1-exp(-0.5))*sin(x);
function px=exactp(x)
px=exp(-1)*(3*sin(x)+sin(2*x));
function estxv=exactv(t,x)
estxv=(exp(-t)-2*exp(-1))*sin(x);
function estxu=exactu(t,x)
estxu=exp(-t)*sin(x);
function rsftx=rsf(t,x)
rsftx=exp(-t)*(2*sin(x)+sin(2*x))-exp(-1)*(3*sin(x)+sin(2*x));

```

## 6.2. Ek 2. Laplace Dönüşüm Tablosu

	Fonksiyon	Dönüşüm		Fonksiyon	Dönüşüm
1	$f(t)$	$F(s)$	25	$\delta(t - a)$	$e^{-as}$
2	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	26	$(-1) \left[ \frac{t}{a} \right]$ (Kare dalga)	$\frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2}$
3	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	27	$\left[ \left[ \frac{t}{a} \right] \right]$ (Merdiven)	$\frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$
4	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	28	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2} (s > 0)$
5	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	29	$\sin kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2} (s > 0)$
6	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	30	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2} (s >  k )$
7	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	31	$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2} (s >  k )$
8	$u(t - a)f(t - a)$	$e^{-as} F(s)$	32	$e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2} (s > a)$
9	$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	33	$e^{at} \sin kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2} (s > a)$
10	$tf(t)$	$-F'(s)$	34	$\frac{1}{2k^3} (\sin kt - kt \cos kt)$	$\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}$
11	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	35	$\frac{1}{2k} \sin kt$	$\frac{s}{(s^2 + k^2)^2}$
12	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty f(\sigma) d\sigma$	36	$\frac{1}{2k} (\sin kt + kt \cos kt)$	$\frac{s^2}{(s^2 + k^2)^2}$
13	$f(t)$ , periyot $p$	$\frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$	37	$k \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
14	1	$\frac{1}{s} (s > 0)$	38	$\frac{1}{k^2} (1 - \cos kt)$	$\frac{1}{s(s^2 + k^2)} (s > 0)$
15	$t$	$\frac{1}{s^2}$	39	$\frac{1}{k^3} (kt - \sin kt)$ ve $(k^2 \neq m^2)$	$\frac{1}{(s^2 + k^2)(s^2 + m^2)}$
16	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}} (s > 0)$	40	$\frac{\cos kt - \cos mt}{m^2 - k^2}$	$\frac{1}{s^2(s^2 + k^2)} (s > 0)$
17	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	41	$\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt$	$\frac{4k^3}{s^4 + 4k^4}$
18	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$	42	$\frac{1}{2k^2} \sin kt \sinh kt$	$\frac{s}{s^4 + 4k^4}$
19	$t^a (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a + 1)}{s^{a+1}} (s > 0)$	43	$\frac{1}{2k^3} (\sinh kt - \sin kt)$	$\frac{1}{s^4 - k^4}$
20	$e^{at}$	$\frac{1}{s - a} (s > a)$	44	$\frac{1}{2k^2} (\cosh kt - \cos kt)$	$\frac{s}{s^4 - k^4}$
21	$t^n e^{at} (n \in \mathbb{Z}^+)$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}} (s > a)$	45	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{s} e^{-\left(\frac{k}{s}\right)}$
22	$\frac{1}{k - m} (e^{kt} - e^{mt})$	$\frac{1}{(s - k)(s - m)}$	46	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cosh 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\left(\frac{k}{s}\right)}$
23	$\frac{1}{k - m} (ke^{kt} - me^{mt})$	$\frac{s}{(s - k)(s - m)}$	47	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\left(\frac{k}{s}\right)}$
24	$u(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	48	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh 2\sqrt{kt}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\left(\frac{k}{s}\right)}$

### 6.3. Ek 3. Fourier Dönüşüm Tablosu

	<b>Fonksiyon</b> $F(x) \quad 0 < x < \pi$	<b>Dönüşüm</b> $f_s(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$
1	$F(x)$	$\int_0^{\pi} F(x) \sin nx \, dx = s_n\{F\}$
2	$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin nx$	$f_s(n)$
3	$F''(x)$	$n^2 f_s(n) + n[F(0) - (-1)^n F(\pi)]$
4	$\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - r)F(r)dr - \int_0^x (x - r)F(r)dr$	$\frac{1}{n^2} f_s(n)$
5	$F(\pi - x)$	$(-1)^{n+1} f_s(n)$
6	$F_1(x + c) + F_1(x - c)$	$2f_s(n) \cos nc$
7	$\int_0^{\pi} H(y) \int_{x-y}^{x+y} F_1(r)dr \, dy$	$\frac{2}{n} f_s(n) h_s(n)$
8	$\pi - x$	$\frac{\pi}{n}$
9	$\frac{x}{\pi}$	$\frac{1}{n} (-1)^{n+1}$
10	1	$\frac{1}{n} [1 - (-1)^n]$
11	$\begin{cases} -x, & x < c \\ \pi - x, & x > c \end{cases}$	$\frac{\pi}{n} \cos nc \quad (0 < c < \pi)$
12	$\begin{cases} (n - c)x, & x \leq c \\ (\pi - x)c, & x \geq c \end{cases}$	$\frac{\pi}{n^2} \sin nc \quad (0 < c < \pi)$

## ÖZGEÇMİŞ

07.03.1985 yılında Trabzon'un Sürmene ilçesinde doğdu. İlkokula Demirci köyü ilkokulunda başladı, Yalıköy ilkokulunda tamamladı. Ortaokulu Vakfıkebir Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Liseyi Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesi'nde bitirdi. 2003 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Fen ve Matematik Eğitimi Alanları, Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2008 yılında Tezsiz Yüksek Lisans derecesiyle mezun oldu. 2008-2010 tarihleri arasında MEB'e bağlı özel bir kurumda Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. 2011 yılından beri Gümüşhane Üniversitesi'nde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.