GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TANJANT DEMET İÇERİSİNDE YAPILAR VE BUNLARA UYGULANAN LIE TÜREVLERİ

GÖKHAN KÖSEOĞLU

2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TANJANT DEMET İÇERİSİNDE YAPILAR VE BUNLARA UYGULANAN LIE TÜREVLERİ

GÖKHAN KÖSEOĞLU

HAZİRAN 2017

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün Onayı.

Prof. Dr. Başak TAŞELİ

____

Müdür

… ./…. /…….

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

____

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR

____

Danışman

<u>Jüri Üyeleri</u>

Doç. Dr.İmdat İŞCAN ______________________________

Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR (Danışman) ______________________________

Yrd. Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ ______________________________

ÖZET

TANJANT DEMET İÇERİSİNDE

YAPILAR VE BUNLARA UYGULANAN

LIE TÜREVLERİ

KÖSEOĞLU, Gökhan

Giresun Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR

HAZİRAN 2017, 25 sayfa

Diferensiyel geometrinin tanjant demet konusu üzerinde çalışmış olan çeşitli araştırmacılar vardır: Örnek olarak Yano ve Ishihara (2), A.A. Salimov (4), D.E Blair (8), V. Oproiu (10) ve başka değerli diğer bilim adamları. Bu alanda yapılan çalışmalarda M manifoldu üzerinde tanımlanmış olan farklı yapıların tanjant demet üzerine de taşındığı görülmüştür. Bu tezin amacı tanjant demet içerisindeki almost kontakt ve almost parakontakt yapılar ile bunlara uygulanan Lie türevleri üzerine yapılacak araştırmalarımıza yol göstermesidir.

Anahtar Kelimeler: Lie türevi, tanjant demet, vektör alanı, almost kontakt yapı, almost parakontakt yapı.

ABSTRACT

STRUCTURES AND

THE LIE DERIVATIVES APPLIED THEM

ON TANGENT BUNDLE

KOSEOGLU, Gökhan

University of Giresun

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor:Asst. Prof. Dr. Haşim CAYIR

JUNE 2017, 25 pages

There are several researchers who have worked on the issue of the tangent bundle in differential geometry. Examples of Yano ve Ishihara (2), A.A. Salimov (4), D.E Blair (8), V. Oproiu (10) and other valuable scientists. In studies on this subject, it has seen that different structures defined in M manifold moved on tangent bundle. The purpose of this thesis to show the way the our researches which almost contact and almost paracontact structures in tangent bundle and the Lie derivatives applied to them.

Keywords: Lie derivative, tangent bundle, vector field, almost contact structure, almost paracontact structure.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın başlangıcından bitimine kadar şekillenmesi ve sonuçlanmasında çok değerli bilgi birikimlerini benden esirgemeyen, bilimsel çalışma yöntemleri ve disiplini ile örnek olan, manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Giresun Üniversitesi Matematik Bölümü'nün değerli öğretim üyelerine sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Hayatım boyunca benden dualarını ve desteklerini esirgemeyen kıymetli anneme, babama, sevgileriyle hep yanımda olan kardeşlerim Kadir ve Barış'a teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

J	Almost Kontakt Yapı
$\tilde{J}$	Almost Parakontakt Yapı
C^k	k Sınıfından Diferensiyellenebilen Cümleler Kümesi
M	n Boyutlu Manifold
ξ	Vektör Alanı
X^V	Vektör Alanının Vertikal Lifti
X^C	Vektör Alanının Komple Lifti
$T(M)$	Tanjant Demet
$[X,Y]$	X ve Y Vektör Alanlarının Lie Parantezi
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
ω	$1-$Form
ω^V	$1-$Formun Vertikal Lifti
ω^C	$1-$Formun Komple Lifti
η	$1-$Form
φ	$(1,1)$ Tipli Tensör Alanı
F	$(1,1)$ Tipli Tensör Alanı

1. GİRİŞ

XVII. yüzyılda ortaya çıkan ve güncelliğini koruyan diferensiyel geometri, geometri bilimi içerisinde karşılaşılan problemler karşısında, diferensiyel ve integral hesap yöntemlerini uygulayarak bir çözüm elde etmeye çalışan matematiğin bir alt bilim dalıdır.

Diferensiyel geometri bilimi içersinde hatırı sayılır konulardan biri olan tensör kavramı güncel bazda ilk kez fizikçi Woldemar Veoigt tarafından 1898'de dile getirildi. 1890'li yıllarda ise kısaca Ricci olarak tanınan Gregorio Ricci-Curbastro tarafından mutlak diferensiyel hesaplamalar başlığı ile ele alındı ve Ricci bu çalışmayı 1892'de sundu. 1900 yılında ise Ricci ve Tullio Levi-Civita, mutlak diferensiyel hesaplama metotları ve uygulamaları başlığı içerisinde çalışmalarını sundular. Skaler alanın ya da n vektör alanın genelleşmiş şekli olan tensör alanı, manifold içerisinde tanımlanarak, manifoldun her bir noktası için birer tensör karşılık bulan bir dönüşümdür.

Sunulan bu tez çalışmasında 2. bölümde çalışmamızın anlaşılabilmesi için ve konunun sınırlanması bakımından materyal ve metot başlığı altında n boyutlu manifoldlar, vektör, kovektör, tensör alanları, tensör diferensiyellenmesi ve Lie türevi hakkında genel bilgiler verilmiştir. 2. bölümün sonunda tanjant demet, fonksiyonun, vektör alanının, kovektör alanının vertikal ve komple liftlerinin tanımı yapılmıştır.

Üçüncü bölümde bulgular başlığı altında almost kontakt ve almost parakontakt yapıların tanımı yapılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra ise büyük bir kısmı 'Çayır, H. Köseoğlu, G. (2016) Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to X^C and X^V on tangent bundle $T(M)$, *New Trends in Mathematical Sciences*. 4(1) 153-159.' bilimsel makale çalışmasında yer alan vertikal ve komple lift problemlerine ve hesaplamalarına yer verilmiştir. Bu yüksek lisans süreci 1 adet alan indeksli makale, 1 adet uluslararası sempozyum bildirisi ve yayına yapılan toplam 2 atıf ile tamamlanmıştır.

2. MATERYAL ve METOT

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. X Hausdorff uzayı için herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset R^n$ kümesine tanımlı

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizm dönüşümüne X de n boyutlu koordinat sistemi ya da harita adı verilir. U kümesine de φ haritasının koordinat komşuluğu ya da koordinat bölgesi adı verilir ve (U, φ) şeklinde ifade edilir. $x \in U$ olması durumunda ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in R^n$$

olur(1). $x^1, ..., x^n$ reel sayı değerlerine φ haritasında x noktasının koordinatları adı verilir.

Tanım 2.1.2. X Hausdorff uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgelerinin bu uzayı örtmesi durumunda, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \quad (A - \text{indisler kümesi})$$

olması durumunda X uzayına $n-$ boyutlu topolojik manifold yada yalnızca $n-$ boyutlu manifold adı verilir(1).

Tanım 2.1.3. X bir Hausdorff uzayı ve k değeri de $0 \le k$ şartını sağlayan bir tam sayı değeri olsun. Aşağıdaki şartlar için $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından $n-$boyutlu atlas denir (1,2).

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X ‘i örter, yani X, $n-$boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \ne \phi$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,...,n\right)$ denir. Burada u_β^i, $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4. Sayılabilir bir baza sahip olan Hausdorff uzayı M olsun. M kümesi içerisinde $n-$boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına $n-$ boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold yada düzgün manifold adı verilir ve M_n şeklinde ifade edilir (1).

2.2. Vektör Alanı

M_n diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\forall p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $X_p \in T_p$ vektörüne karşılık getiren $X : p \to X_p$ dönüşümüne M_n üzerinde vektör alanı denir. Burada T_p, $p \in M_n$ noktasındaki vektör uzayıdır. Eğer f, M_n üzerinde tanımlanan bir fonksiyon ise Xf de M_n üzerinde $(Xf)(p) = X_p f$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Eğer, her bir diferensiyellenebilen f fonksiyonu için Xf de diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise X vektör alanına diferensiyellenebilir vektör alanı denir. M_n üzerindeki (U,φ) lokal koordinat sisteminde X vektör alanını

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

biçiminde gösterebiliriz(1,2,3,4). Burada $X^i = X^i(x^i)$ ler U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarının fonksiyonlarıdır. X^i lere X vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir. X vektör alanının diferensiyellenebilmesi için gerek ve yeter koşul $X^i = X^i(x^i)$ lerin diferensiyellenebilir olmasıdır.

M_n üzerindeki (U,φ) koordinat sisteminde bir başka $Y = Y^i \partial_i$ vektör alanı ve $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonu için

$$X(f) = X^i \partial_i f, \qquad Y(f) = Y^i \partial_i f$$
$$XY(f) = X(Y^i \partial_i f) = X^i(\partial_i Y^j \delta_j f + Y^j \partial_{ji}^2 f)$$
$$YX(f) = Y(X^i \partial_i f) = Y^j(\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f)$$

bulunur. Buradan da

$$XY(f) - YX(f) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j f$$

yazılır (1). Böylece biz

$$XY - YX = [X,Y]$$

şeklinde ifade edilen yeni bir vektör alanı tanımlamış olduk. Elde edilen vektör alanını ∂_i doğal çatısı türünden gösterimi ise

$$[X,Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j \qquad (1)$$

biçiminde olur. ∂_i 'nin $[X,Y]$ katsayısına vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir(1).

Tanım 2.2.1. (1) eşitliği olarak belirtilen $[X,Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$, $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları alınırsa, (1) formülünden

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

sonucu elde edilir. (1) eşitliğinin yardımıyla Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir(1):

1. $[X,Y] = -[Y,X],$
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y],$
3. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0,$
4. $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$

$\Im_0^1(M_n)$ ile M_n üzerindeki tüm diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesini gösterelim. Bu kümede toplama ve $\Im_0^0(M_n)$' nin elemanları ile çarpma işlemlerini

1. $(X+Y)(f) = X(f) + Y(f), \ \forall X,Y \in \Im_0^1(M_n), \ \forall f \in \Im_0^0(M_n)$

2. $(gX)(f) = gX(f), \ \forall X \in \Im_0^1(M_n), \ \forall f, g \in \Im_0^0(M_n)$

biçiminde tanımlayalım(1). Bu işlemlere göre $\Im_0^1(M_n)$' nin, birimli, komutatif $\Im_0^0(M_n)$ cebiri üzerinde bir modül olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (modül anlamı R üzerinde vektör uzayı anlamının genelleşmesidir). $\Im_0^1(M_n)$' ye bir başka cebirsel yapı da dahil edebiliriz. $\Im_0^1(M_n)$' ye R reel cebiri üzerinde bir vektör uzayı gibi de bakabiliriz. Bu vektör uzayında çarpma işlemi olarak vektör alanlarının Lie parantezini alırsak, bu kümeye R üzerinde Lie cebiri gibi de bakmak mümkündür. Bu cebirin sonsuz boyutlu olduğu kolayca gösterilebilir.

Vektör alanlarının tanımına benzer olarak kovektör alanı (veya 1– form) tanımlanır.

2.3. Kovektör Alanı

Her bir $p \in M_n$ noktası için bir ve yalnız bir $\omega_p \in T_p^*$ ($T_p^*, p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzayıdır) kovektörünü karşılık getiren $\omega : p \to \omega_p$ dönüşümüne M_n üzerindeki kovektör alanı adı verilir(1).

Eğer ω kovektör alanı ise, herhangi bir U koordinat komşuluğunda $\omega = \omega_i dx^i$ yazılabilir. Burada dx^i koçatıdır. ω kovektörünün C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $\omega_i = \omega_i(x^i)$ nin C^∞ sınıfından olmasıdır. Burada x^i ler U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatlardır. Tüm kovektör alanlarının kümesi $\Im_0^0(M_n)$ üzerinde bir modüldür.

2.4. Tensör Alanı

Keyfi $p \in M_n$ noktası için bir ve yalnız bir $t_p \in T_p^q(P)$ tensörünü karşılık getiren $t : p \to t_p$ dönüşümüne M_n üzerinde (p,q) tipli tensör alanıdır. Burada $T_p^q(P), \ p \in M_n$ noktasındaki tensör uzayıdır.

x^i lokal koordinatlarının verildiği U koordinat komşuluğundaki (p,q) tipli tensör alanı

$$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Buradaki $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ lere t tensör alanının U kordinat komşuluğundaki lokal koordinat sisteminde koordinatları denir. Eğer $t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$ fonksiyonları C^{∞} sınıfından iseler t tensör alanı da C^{∞} sınıfındandır denir.

$\Im^p_q(M_n)$ ile M_n üzerindeki tüm (p,q) tipli tensör alanlarının R üzerindeki vektör uzayını gösterelim. $\Im^p_q(M_n)$'nin $\Im^0_0(M_n)$ üzerinde bir modül olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im^p_q(M_n)$$

biçiminde gösterirsek, $\Im(M_n)$' nin R üzerinde bir cebir olduğu da gösterilebilir.

Burada $\otimes$ işlemi noktasal olarak

$$t_1 \otimes t_2 = (t_1)_x \otimes (t_2)_x, \quad \forall x \in M_n, \forall t_1, t_2 \in \Im(M_n)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.4.1. Aşağıdaki şartları sağlayan $D : \Im(M_n) \to \Im(M_n)$ dönüşümüne $\Im(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellenmesi işlemi (veya sadece diferensiyellemesi) denir(1).

1. D sabit katsayılara göre lineerdir, yani
   $D(at + bs) = aDt + bDs, \quad \forall a, b \in R$
2. D tipi korur, yani $D(\Im^p_q(M_n)) \subset \Im^p_q(M_n)$ dir.
3. $D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds$
4. D işlemi tensörlerin kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir.

Tanım 2.4.2. $D = L_X$, $X \in \Im^1_0(M_n)$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa buna X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir:

1. $L_X f = Xf, \forall f \in \Im^0_0(M_n),$
2. $L_X Y = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \Im^1_0(M_n).$

Burada $[X, Y]$ Lie parantezidir. $L_X Y$ ‘nin lokal koordinatlardaki ifadesi

$$L_X Y = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

biçiminde yazılır(1). Lie diferensiyellenmesi işlemi neticesinde elde edilen sonuca ise Lie türevi adı verilir.

Şimdi sıradan bir tensör alanı için Lie türevi formülünü bulalım. Önce $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ kovektör alanını göz önünde bulunduralım $\forall Y \in \Im_0^1(M_n)$ için $\omega(Y) \in \Im_0^0(M_n)$ olduğu açıktır. L_X türevinin özelliklerine göre

$$L_X(\omega(Y)) = (L_X\omega)Y + \omega(L_X Y)$$

ve buradan da

$$(L_X\omega)Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) \tag{2}$$

yazılır.

Eğer, $Y = \delta_j$ alırsak (2) eşitliğinin U komşuluğundaki lokal koordinatlar ile ifadesi

$$L_X\omega_j = X^k\partial_k\omega_j + \omega_k\partial_j X^k \tag{3}$$

şeklinde olur.

Şimdi keyfi (p,q) tipli tensör alanını ele alalım. $t \in \Im_q^p(M_n)$ için

$$t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p) \in \Im_0^0(M_n), \forall X_1,...,X_q \in \Im_0^1(M_n) \quad \forall \omega^1,...,\omega^p \in \Im_1^0(M_n)$$

yazılabilineceği aşikardır. Buradan L_X 'in özelliklerine göre

$$\begin{aligned} L_X(t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p)) = {} & (L_X t)(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p) \\ & + \sum_{i=1}^{q} t(X_1,...,L_X X_i,...X_q,\omega^1,...,\omega^p) \\ & + \sum_{j=1}^{q} t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,L_X\omega^j,...,\omega^p) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} (L_X t)(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p) = {} & X(t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p)) \\ & - \sum_{i=1}^{q} t(X_1,...,L_X X_i,...X_q,\omega^1,...,\omega^p) \\ & - \sum_{j=1}^{q} t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,L_X\omega^j,...,\omega^p) \end{aligned} \tag{4}$$

bulunur(1). L_X in türevi $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i$ için uygulanırsa

$$0 = L_X\delta_i^j = L_X(dx^i(\partial_j)) = (L_X dx^i)\partial_j + dx^i(L_X\partial_j)$$

sonucuna varılır. Lie parantezinin özellikleri düşünüldüğünde,

$$\begin{aligned} (L_X dx^i)\partial_j &= -dx^i[X,\partial_j] = -dx^i[X^k\partial_k,\partial_j] = dx^i[\partial_j, X^k\partial_k] \\ &= dx^i\partial_j X^k\partial_k = \partial_j X^k\delta_k^i = \partial_j X^i \end{aligned}$$

ya da $(L_X dx^i) = (\partial_j X^i) dx^j$ bulunur. Bu değer ve $(L_X \partial_i) = -\partial_i X^k \partial_k$ olduğu kullanılırsa,

$$L_X t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = X^k \partial_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{q} (\partial_{j\lambda} X^k) t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots k \ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{p} (\partial_k X^{i\mu}) t^{i_1 \ldots k \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \tag{5}$$

eşitliği elde edilir. Burada $L_X t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ ile $(L_X t)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ gösterilmiştir. Özel bir durum olarak $p = 0, q = 1$ ve $p = 1, q = 0$ olduğu zaman ise (5) eşitliğinden (1) ve (3) eşitlikleri elde edilir.

2.5. Tanjant Demet

C^∞ sınıfından ve $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olsun

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

şeklinde ifade edilen $T(M)$ kümesine tanjant demeti adı verilir (1,2,3,4,5) .

$T(M)$ 'nin keyfi bir $\tilde{p} \in T_p(M)$ noktası için M üzerinde $T(M)$ tabii demet yapısını doğuran $\pi : T(M) \to \pi(\tilde{p}) = p$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(p) = \tilde{p} \in T_p(M)$ kümesine M baz uzayının p noktasındaki fibresi denir.

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M baz uzayı $\{U; x^h\}$ kordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n ise R de $n-$ boyutlu bir vektör uzayı olsun $\tilde{p} \in T_p(M)(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterildiğinden ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}(\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x^h})$ doğal bazına göre $\tilde{p}$ 'nin y^h kartezyen koordinatları olduğu için $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diffeomorfizm olacaktır. U komşuluğunda $p = \pi(\tilde{p})$ 'nin koordinatları x^h ile gösterilirse ve $(x^h, y^h) \to \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ açık kümesinde (x^h, y^h) lokal koordinatlar sistemi elde edilir ve (x^h, y^h) 'ye $(x^h)'$ dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ daki koordinatlar denir.

M manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M) \tag{6}$$

ile gösterilir. Benzer olarak $T(M)$ demetindeki uygun kümeler sırasıyla $\Im_s^r(T(M))$ ve $\Im(T(M))$ ile gösterilir.

2.6. Vertikal Liftler

2.6.1. Bir Fonksiyonun Vertikal Lifti

f, M 'de bir fonksiyon olsun. $T(M)$ tanjant demetindeki f^V fonksiyonu $f : M \to R$ ve $\pi : T(M) \to M$ olmak üzere

$$f^V = f \circ \pi \tag{7}$$

olsun. $f^V : T(M) \to R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun vertikal lifti denir(1,2,3,5,6). Burada (x^h, y^h) koordinatlı $\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ noktasında f^V fonksiyonu

$$f^V(\tilde{p}) = f^V(x,y) = f \circ \pi(\tilde{p}) = f(p) = f(x) \tag{8}$$

olup $f^V(\tilde{p})$ değeri fibre boyunca sabittir ve $f(p)$ değerine eşittir.

2.6.2. Vektör Alanının Vertikal Lifti

Kabul edelim ki $\tilde{X} \in \Im_0^1(T(M))$ öyle ki tüm $f \in \Im_0^0(M)$ için $\tilde{X}f^V = 0$ olsun. O zaman $\tilde{X}$ 'e vertikal vektör alanı denir. $\tilde{X}$ vertikal vektör alanına göre indirgenmiş koordinatlar $\begin{bmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{bmatrix}$ olmak üzere $\tilde{X}$ 'nın vertikal olması için onun $\pi^{-1}(U)$ bileşenlerinin

$$X^V = \begin{bmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

şartını sağlaması gerekir.

M içerisinde bir vektör alanı $X \in \Im_0^1(M)$ olsun. $T(M)$ içerisindeki bir X^V vektör alanı, M deki keyfi bir ω için

$$X^V(\iota\omega) = (\omega(X))^V \tag{10}$$

şeklinde tanımlanır. X^V vektör alanına X vektör alanının dikey (vertikal) lifti denir(1,2).

2.6.3. 1-Formun Vertikal Lifti

Tüm $X \in \Im_0^1(M)$ için $\tilde{\omega}(X^V)=0$ olacak şekilde $\tilde{\omega} \in \Im_1^0(T(M))$ olsun. O zaman $\tilde{\omega}$ ye $T(M)$ içerisinde vertikal $1-$ form denir. $(U;x^h)$, M içerisinde koordinat komşuluğu ve ω ise U içerisinde $\omega=\omega_i dx^i$ olmak üzere ω 1-formunun ω^V vertikal lifti her bir açık $\pi^{-1}(U)$ içinde

$$\omega^V = (\omega_i)^V (dx^i)^V \tag{11}$$

şeklinde tanımlanır(2). $T(M)$ içerisindeki indirgenmiş koordinatlara göre $\omega=\omega_i dx^i$ lokal ifadesi ile ω nin ω^V vertikal liftinin bileşenleri

$$\omega^V : (\omega^i, 0) \tag{12}$$

şeklindedir.

Burada vertikal liftler $\Im(M)$ 'nin keyfi P, Q, R elemanları için

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V, \quad (P+R)^V = P^V + R^V \tag{13}$$

şartlarıyla sabit katsayılara göre $\Im(T(M))$ tensör cebiri içerisinde $\Im(M)$ cebirinin tek izomorfizmleridir.

F_i^h lokal ifadesi ile $F \in \Im_1^1(M)$ elemanının F^V vertikal lifti

$$F^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir.

$$f \in \Im_0^0(M),\ X, Y \in \Im_0^1(M),\ \eta \in \Im_1^0(M),\ \varphi \in \Im_1^1(M),\ I = id_M$$

verilsin. Vertikal liftler için

$$\begin{gathered} (fX)^V = f^V X^V, \quad I^V X^V = 0, \quad \eta^V (X)^V = 0 \\ (f\eta)^V = f^V \eta^V, \ [X^V, Y^V] = 0, \quad \varphi^V X^V = 0 \\ X^V f^V = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

eşitlikleri sağlanır(1,2,3,5).

2.7. Komple Liftler

2.7.1. Fonksiyonun Komple Lifti

f, M manifoldundaki bir fonksiyon olmak üzere, $T(M)$ tanjant demetinde f^C fonksiyonu

$$f^C = (\imath df)$$

şeklinde tanımlanır ve f^C fonksiyonuna f fonksiyonunun komple lifti denir.

$T(M)$ demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre, bu koordinatlarda ∂f ifadesi $y^i \partial_i f$ gösterilir. f fonksiyonunun komple lifti olan f^C fonksiyonunun lokal ifadesi

$$f^C = y^i \partial_i f = \partial f \tag{16}$$

şeklindedir(1,2).

2.7.2. Vektör Alanının Komple Lifti

$X \in \Im_0^1(M)$ olsun. f, M manifoldunda keyfi bir fonksiyon olmak üzere $T(M)$ tanjant demetindeki bir X^C vektör alanını

$$X^C f^C = (Xf)^C \tag{17}$$

şeklinde tanımlanır ve X^C'ye X vektör alanının $T(M)$ tanjant demet içerisindeki komple lifti denir. $T(M)$ tanjant demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre X vektör alanının komple lifti X^C nin M manifoldundaki X^h bileşenleri

$$X^C = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} \tag{18}$$

şeklindedir(1,2).

2.7.3 1-Formların Komple Lifti

$\omega \in \Im_1^0(M)$ olsun X, M manifoldundaki keyfi bir vektör alanı olmak üzere, $T(M)$ tanjant demetindeki ω^C $1-$formu

$$\omega^C X^C = (\omega X)^C \tag{19}$$

şeklinde tanımlanır(1,2). ω^C ' ye ω $1-$formunun komple lifti denir. $T(M)$ tanjant demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre, ω $1-$ formunun komple lifti olan ω^C'nın M manifoldundaki ω_i bileşenleri

$$\omega^C : (\partial_i \omega_i, \omega_i) \tag{20}$$

şeklindedir.

Burada P,Q,R $\Im(M)$'nın keyfi elemanları olmak üzere

$$(P\otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C, \quad (P+R)^C = P^C + R^C \tag{21}$$

şartıyla sabit katsayılara göre $\Im(T(M))$ tensör cebiri içerisinde $\Im(M)$ cebirinin tek izomorfizmleridir. F_i^h lokal ifadesi ile $F \in \Im_1^1(M)$ elemanının F^C komple lifti

$$F^C : \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{22}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Ek olarak komple liftler için

$$\begin{aligned}
&(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C = (Xf)^C, \\
&X^C f^V = (Xf)^V, \quad \eta^V(X^C) = (\eta(X))^V, \\
&X^V f^C = (Xf)^V, \quad \varphi^V X^C = (\varphi X)^V, \\
&\varphi^C X^V = (\varphi X)^V, \quad (\varphi X)^C = \varphi^C X^C, \\
&\eta^V(X)^C = (\eta(X))^C, \quad \eta^C(X)^V = (\eta(X))^V, \\
&[X^V, Y^C] = [X,Y]^V, \quad I^C = I, \quad I^V X^C = X^V, [X^C, Y^C] = [X,Y]^C
\end{aligned} \tag{23}$$

eşitlikleri sağlanır(1,2,3).

M $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $D = L_X$ diferensiyel dönüşümüne

$$L_X f = Xf, \ \forall f \in \Im_0^0(M),$$

$$L_X Y = [X,Y], \ \forall X,Y \in \Im_0^1(M),$$

şartları sağlanıyorsa $X \in \Im_0^1(M)$ vektör alanına göre Lie türevi denir. X vektör alanına göre $(1,1)$ tipli bir tensör alanı F'nın Lie türevi $L_X F$

$$(L_X F)Y = [X, FY] - F[X,Y]$$

şeklinde tanımlanır(1).

3.BULGULAR

3.1.Almost Kontakt Manifold

M, $2n+1$ boyutlu manifold ve φ, $(1,1)$ tipli bir tensör alanı; ξ M manifoldu üzerinde bir vektör alanı ve η ise M üzerinde $1-$form olsun. φ, ξ ve η,

$$\eta(\xi)=1 \tag{24}$$

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (X,\ M \text{ üzerinde keyfi bir vektör alanıdır}) \tag{25}$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda M manifoldu (φ,ξ,η) almost kontakt yapısına sahiptir denir. M ise almost kontakt manifold olarak adlandırılır(1,2).

Teorem 3.1.1. (φ,ξ,η) almost kontakt yapısında aşağıdaki 3 özellik vardır(1,2)

i) $\varphi(\xi)=0$ (26)

ii) $\eta(\varphi(X))=0$ (27)

iii) $\text{rank}\varphi = 2n$ (28)

İspat.

i) (25) ifadesinde X yerine ξ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\varphi^2(\xi) &= -\xi+\eta(\xi)\xi\\ &= -\xi+1.\xi\\ &=0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\varphi^2(\xi)=0 \quad \Rightarrow \varphi(\xi)=0 \quad (\varphi^2\xi=\varphi(\varphi\xi))$$

elde edilir. Gerçekten de, $\varphi^2\xi=\varphi(\varphi\xi)=0$ eşitliğinden anlaşılıyor ki, ya $\varphi\xi=0,$ yada $\varphi\xi\neq 0,$ (bu durumda φ nin $\varphi\xi$ ye karşılık gelen özdeğeri sıfırdır). Farzedelim ki, $\varphi\xi\neq 0.$ (25) de X in yerine $\varphi\xi$ yazalım:

$$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi+\eta(\varphi\xi)\xi$$

Diğer taraftan $\varphi^2\xi=0$ olduğundan dolayı,

$$\varphi^2(\varphi\xi)=\varphi(\varphi^2\xi)=0$$

yazarız. Bu son iki denklemden,

$$\varphi\xi=\eta(\varphi\xi)\xi$$

alırız. $\varphi\xi\neq 0$ olduğundan $\eta(\varphi\xi)\neq 0$ alırız, çünkü, $\xi\neq 0.$

Diğer taraftan (25) i,

$$\varphi(\varphi X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi$$

şeklinde yazsak ve $\varphi X = \varphi\xi$ alırsak o zaman,

$$\varphi^2\xi = \varphi(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi = 0$$

olur. Bu ise $\varphi\xi \neq 0,\ \eta(\varphi\xi) \neq 0,\ \varphi \neq 0$ şartları ile çelişki oluşturur. Yani, $\varphi\xi = 0$ olmalıdır.

ii) $\eta(\varphi(X)) = 0$ ifadesini ise $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$ eşitliğinde $X \to \varphi X$ dönüşümü uygulanarak elde edilir. Gerçekten de, (25) de X yerine φX yazsak, elde edilir ki,

$$\varphi^2(\varphi X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi$$

veya $\varphi\xi = 0,\ \xi \neq 0$ şartlarını dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\varphi^2 X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,\\
&\varphi(-X + \eta(X)\xi) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,\\
&-\varphi X + \eta(X)\varphi\xi = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,\\
&\eta(\varphi X) = 0
\end{aligned}$$

buluruz.

iii) $\varphi\xi = 0$ şartından $\xi \neq 0$ olması durumunda elde edilir ki, $\mathrm{rank}\varphi \leq 2n$. Eğer başka bir X vektörü varsa ki, $\varphi X = 0$ şartını sağlasın, o zaman (25) den elde ederiz ki,

$$X = \eta(X)\xi,$$

yani X ve ξ lineer bağımlıdır. Buradan anlaşılıyor ki, $\mathrm{rank}\varphi = 2n$.

3.2. Almost Parakontakt Yapı

M manifoldunun almost parakontakt manifold olması için,

$$\eta(\xi)=1 \quad \text{ve } \varphi^2 X = X - \eta(X)\xi \quad (\varphi^2 = I - \xi \otimes \eta)$$

şartlarını sağlaması gerekir(1,2,3,5) (φ $(1,1)$ tipli bir tensör alanı, η-1-form, ξ-vektör alanı, I -özdeşlik(birim) tensördür). (φ, ξ, η) yapısına almost parakontakt yapı denir. Bir almost parakontakt yapıda,

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta(\varphi) = 0 \ \text{ ve } \ \mathrm{rank}(\varphi) = n - 1$$

şartlarıda ek olarak sağlanır. M almost parakontakt yapı ile beraber diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu manifold üzerinde pozitif tanımlı bir g Riemannian metriği vardır, öyle ki,

$$\eta(X)=g(\xi,X), \ \ \mathrm{g}(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y).$$

Burada, $X,Y\in\Im_0^1(M)$, $\Im_0^1(M)$, M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesidir.

Bu durumda M 'ye almost parakontakt Riemannian manifoldu denir.

Bir almost parakontakt yapıda $M\times R$ üzerinde tanımlanan J operatörü için,

$$J[X,f(\frac{d}{dt})]=[\varphi X+f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}]$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
J^2(X,f\frac{d}{dt}) &= J[J(X,f\frac{d}{dt})] \\
&= J[\varphi X+f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}] \\
&= J[\varphi(X+f\xi)+\eta(X)\xi,\eta(\varphi X+f\xi)\frac{d}{dt} \\
&= \{\varphi^2X+\varphi(f\xi)+\eta(X)\xi,[\eta(\varphi X+f\eta(\xi)]\frac{d}{dt}\} \\
&= \{X-\eta(X)\xi+f\varphi(\xi)+\eta(X)\xi,[\eta(\varphi X)+f\eta(\xi)]\} \\
&= (X,f\frac{d}{dt}) \\
J^2(X,f\frac{d}{dt}) &= I(X,f\frac{d}{dt}).
\end{aligned}$$

alırız. Yukarıdaki işlemde keyfi $(X,f\frac{d}{dt})$ vektörü üzerindeki izler eşit olduğuna göre,

$$J^2=I$$

elde edilir.

Önerme 3.2.1. Herhangi $X \in \Im_0^1(M_n)$, $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve X vektör alanına göre Lie türevi L_X için

i) $L_{X^V} f^V = 0,$

ii) $L_{X^V} f^C = (L_X f)^V,$

iii) $L_{X^C} f^V = (L_X f)^V,$

iv) $L_{X^C} f^C = (L_X f)^C$

elde edilir(2,6,7).

Önerme 3.2.2. Herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$, X vektör alanına göre Lie türevi L_X için

i) $L_{X^V} Y^V = 0,$

ii) $L_{X^V} Y^C = (L_X Y)^V,$

iii) $L_{X^C} Y^V = (L_X Y)^V,$

iv) $L_{X^C} Y^C = (L_X Y)^C$

elde edilir(2,6,7).

Tanım 3.2.1. $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu ile birlikte $(1,1)$ tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ, bir $1-$form η, I özdeşliği verilsin

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \qquad \varphi(\xi) = 0, \qquad \eta \circ \varphi = 0, \qquad \eta(\xi) = 1. \tag{29}$$

eşitlikleri sağlanır.

(φ, ξ, η), M manifoldunda almost kontakt bir yapı tanımlar. (29) daki eşitliklerin komple ve vertikal liftlerini alarak

$$\begin{aligned} &(\varphi^C)^2 = -I + \eta^V \otimes \xi^C + \eta^C \otimes \xi^V, \\ &\eta^C \xi^V = 0, \quad \eta^C \xi^C = 0, \quad \eta^V \circ \xi^C = 0, \\ &\eta^C \circ \varphi^C = 0, \quad \eta^V(\xi^V) = 0, \quad \eta^V(\xi^C) = 1, \\ &\eta^C(\xi^V) = 1, \quad \eta^C(\xi^C) = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

elde edilir(1,3,7).

$\Im(M)$ deki $(1,1)$ tipli bir J tensör alanı

$$J = \varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V + \xi^C \otimes \eta^C \tag{31}$$

şeklinde tanımlanır(1,2,3,6).

Artık $\Im(M)$ deki almost kontakt bir J yapısı için $J^2X^V=-X^V$ ve $J^2X^C=-X^C$ olduğunu göstermek kolaydır. Herhangi bir $X\in\Im_0^1(M)$ için (31) eşitliğinden

$$\begin{aligned}JX^V&=(\varphi X)^V+(\eta(X))^V\xi^C,\\ JX^C&=(\varphi X)^C+(\eta(X))^V\xi^V+(\eta(X))^C\xi^C\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1. L_X , X'e göre Lie türev operatörü, (31) şartını sağlayacak şekilde $J\in\Im_1^1(\Im(M))$ ve $\eta(Y)=0$ için

i) $(L_{X^V}J)Y^V=0,$

ii) $(L_{X^V}J)Y^C=((L_X\varphi)Y)^V+((L_X\eta)Y)^V\xi^C,$

iii) $(L_{X^C}J)Y^V=((L_X\varphi)Y)^V+((L_X\eta)Y)^V\xi^C,$

iv) $(L_{X^C}J)Y^C=((L_X\varphi)Y)^C-((L_X\eta)Y)^V\xi^V+((L_X\eta)Y)^C\xi^C$

elde edilir. Burada $X,Y\in\Im_0^1(M),$ $\varphi\in\Im_1^1(M)$ bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve $\eta\in\Im_1^0(M)$ bir $1-$formdur.

İspat. $J=\varphi^C-\xi^V\otimes\eta^V+\xi^C\otimes\eta^C$ ve $\eta(Y)=0$ için

i)

$$\begin{aligned}(L_{X^V}J)Y^V&=L_{X^V}(\varphi^C-\xi^V\otimes\eta^V+\xi^C\otimes\eta^C)Y^V-(\varphi^C-\xi^V\otimes\eta^V+\xi^C\otimes\eta^C)L_{X^V}Y^V\\ &=L_{X^V}(\varphi Y)^V-L_{X^V}(\eta^V(Y)^V)\xi^V+L_{X^V}(\eta(Y))^V\xi^C\\ &=0,\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(L_{X^V}J)Y^C&=L_{X^V}(\varphi^C-\xi^V\otimes\eta^V+\xi^C\otimes\eta^C)Y^C-(\varphi^C-\xi^V\otimes\eta^V+\xi^C\otimes\eta^C)L_{X^V}Y^C\\ &=L_{X^V}\varphi^CY^C-L_{X^V}(\eta Y)^V\xi^V+L_{X^V}(\eta(Y))^C\xi^C-\varphi^CL_{X^V}Y^C\\ &\quad+\eta^V(L_XY)^V\xi^V-(\eta(L_XY))^V\xi^C\\ &=(L_{X^V}\varphi^C)Y^C+\varphi^C(L_{X^V}Y^C)-\varphi^CL_{X^V}Y^C-(L_X(\eta(Y)))^V\xi^C+((L_X\eta)Y)^V\xi^C\\ &=((L_X\varphi)Y)^V+((L_X\eta)Y)^V\xi^C,\end{aligned}$$

iii)

$$(L_{X^C}J)Y^V = L_{X^C}(\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V + \xi^C \otimes \eta^C)Y^V - (\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V + \xi^C \otimes \eta^C)L_{X^C}Y^V$$
$$= L_{X^C}\varphi^C Y^V - L_{X^C}(\eta^V(Y)^V)\xi^V + L_{X^C}(\eta(Y))^V \xi^C - \varphi^C L_{X^C}Y^V$$
$$+\eta^V(L_X Y)^V \xi^V - (\eta(L_X Y))^V \xi^C$$
$$= (L_{X^C}\varphi^C)Y^V + \varphi^C(L_{X^C}Y^V) - \varphi^C L_{X^C}Y^V - (L_X(\eta(Y)))^V \xi^C + ((L_X\eta)Y)^V \xi^C$$
$$= ((L_X\varphi)Y)^V + ((L_X\eta)Y)^V \xi^C,$$

iv)

$$(L_{X^C}J)Y^C = L_{X^C}(\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V + \xi^C \otimes \eta^C)Y^C - (\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V + \xi^C \otimes \eta^C)L_{X^C}Y^C$$
$$= L_{X^C}\varphi^C Y^C - L_{X^C}((\eta(Y)^V \xi^V + L_{X^C}(\eta(Y))^C \xi^C - \varphi^C L_{X^C}Y^C$$
$$+(\eta(L_X Y))^V \xi^V - (\eta(L_X Y))^C \xi^C$$
$$= (L_{X^C}\varphi^C)Y^C + \varphi^C(L_{X^C}Y^C) - \varphi^C L_{X^C}Y^C + (L_X(\eta(Y)))^V \xi^V - ((L_X\eta)Y)^V \xi^V$$
$$-(L_X(\eta(Y)))^C \xi^C + ((L_X\eta)Y)^C \xi^C$$
$$= ((L_X\varphi)Y)^C - ((L_X\eta)Y)^V \xi^V + ((L_X\eta)Y)^C \xi^C$$

elde edilir.

Sonuç 1. Eğer Y yerine (29) şartlarını sağlayan ξ'yi kullanırsak yani $\eta(\xi)=1$ olursa o zaman

(i) $(L_{X^V}J)\xi^V = (L_X\xi)^V$,

(ii) $(L_{X^V}J)\xi^C = ((L_X\varphi)\xi)^V + (((L_X\eta)\xi)^V \xi^C$,

(iii) $(L_{X^C}J)\xi^V = ((L_X\varphi)\xi)^V + (L_X\xi)^C + ((L_X\eta)\xi)^V \xi^C$,

(iv) $(L_{X^C}J)\xi^C = ((L_X\varphi)\xi)^C - (L_X\xi)^V - ((L_X\eta)\xi)^V \xi^V + ((L_X\eta)\xi)^C \xi^C$

sonuçları elde edilir.

Tanım 3.2.2. $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu ile birlikte $(1,1)$ tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ, bir $1-$form η, I özdeşliği verilsin

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad \varphi(\xi)=0, \quad \eta \circ \varphi=0, \quad \eta(\xi)=1 \tag{32}$$

eşitlikleri sağlanır(1).

(φ, ξ, η), M manifoldun da almost parakontakt yapı tanımlar. (32) deki eşitliklerin komple ve vertikal liftleri alınarak

$$
\begin{aligned}
&(\varphi^C)^2 = I - \eta^V \otimes \xi^C - \eta^C \otimes \xi^V, \\
&\varphi^C \xi^V = 0,\ \varphi^C \xi^C = 0,\ \eta^V \circ \xi^C = 0, \\
&\eta^C \circ \xi^C = 0,\ \eta^V(\xi^V) = 0,\ \eta^V(\xi^C) = 1, \\
&\eta^C(\xi^V) = 1,\ \eta^C(\xi^C) = 0
\end{aligned} \tag{33}
$$

elde edilir(1,3,7).

$\Im(M)$ deki $(1,1)$ tipli bir tensör alanı $\tilde{J}$

$$\tilde{J} = \varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C \tag{34}$$

şeklinde tanımlanır.

Artık $\Im(M)$ deki almost parakontakt $\tilde{J}$ yapısı için $\tilde{J}^2 X^V = X^V$ ve $\tilde{J}^2 X^C = X^C$, olduğunu göstermek kolaydır. Herhangi bir $X \in \Im_0^1(M)$ için (34) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
&\tilde{J}X^V = (\varphi X)^V - (\eta(X))^V \xi^C, \\
&\tilde{J}X^C = (\varphi X)^V - (\eta(X))^V \xi^V - (\eta(X))^C \xi^C
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. L_X , X'e göre Lie türev operatörü, (34) şartını sağlayacak şekilde $\tilde{J} \in \Im_1^1(\Im(M))$ ve $\eta(Y) = 0$ için

i) $(L_{X^V} \tilde{J})Y^V = 0,$

ii) $(L_{X^V} \tilde{J})Y^C = ((L_X \varphi)Y)^V - ((L_X \eta)Y)^V \xi^C,$

iii) $(L_{X^C} \tilde{J})Y^V = ((L_X \varphi)Y)^V - ((L_X \eta)Y)^V \xi^C,$

iv) $(L_{X^C} \tilde{J})Y^C = ((L_X \varphi)Y)^C - ((L_X \eta)Y)^V \xi^V - ((L_X \eta)Y)^C \xi^C$

elde edilir. Burada $X, Y \in \Im_0^1(M)$, $\varphi \in \Im_1^1(M)$ bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve $\eta \in \Im_1^0(M)$ bir $1-$formdur.

İspat. $\tilde{J} = \varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C$ ve $\eta(Y) = 0$ için

i)

$$\begin{aligned}(L_{X^V}\tilde{J})Y^V &= L_{X^V}(\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)Y^V - (\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)L_{X^V}Y^V \\ &= L_{X^V}(\varphi Y)^V - L_{X^V}(\eta^V(Y)^V)\xi^V - L_{X^V}(\eta(Y))^V\xi^C \\ &= 0,\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(L_{X^V}\tilde{J})Y^C &= L_{X^V}(\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)Y^C - (\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)L_{X^V}Y^C \\ &= L_{X^V}\varphi^C Y^C - L_{X^V}(\eta Y)^V\xi^V - L_{X^V}(\eta(Y))^C\xi^C - \varphi^C(L_X Y)^V \\ &\quad + \eta^V(L_X Y)^V\xi^V + (\eta(L_X Y))^V\xi^C \\ &= (L_{X^V}\varphi^C)Y^C + \varphi^C(L_{X^V}Y^C) - \varphi^C(L_X Y)^V + (L_X(\eta(Y)))^V\xi^C - ((L_X\eta)Y)^V\xi^C \\ &= (L_X\varphi)Y)^V - ((L_X\eta)Y)^V\xi^C,\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}(L_{X^C}\tilde{J})Y^V &= L_{X^C}(\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)Y^V - (\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)L_{X^C}Y^V \\ &= L_{X^C}\varphi^C Y^V - L_{X^C}(\eta^V(Y)^V)\xi^V - L_{X^C}(\eta(Y))^V\xi^C - \varphi^C L_{X^C}Y^V \\ &\quad + \eta^V(L_X Y)^V\xi^V + (\eta(L_X Y))^V\xi^C \\ &= (L_{X^C}\varphi^C)Y^V + \varphi^C(L_{X^C}Y^V) - \varphi^C L_{X^C}Y^V + (L_X(\eta(Y)))^V\xi^C - (L_X\eta)Y)^V\xi^C \\ &= (L_X\varphi)Y)^V - ((L_X\eta)Y)^V\xi^C,\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}(L_{X^C}\tilde{J})Y^C &= L_{X^C}(\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)Y^C - (\varphi^C - \xi^V \otimes \eta^V - \xi^C \otimes \eta^C)L_{X^C}Y^C \\ &= L_{X^C}\varphi^C Y^C - L_{X^C}((\eta(Y)^V)\xi^V - L_{X^C}(\eta(Y))^C\xi^C - \varphi^C L_{X^C}Y^C \\ &\quad + (\eta(L_X Y))^V\xi^V + (\eta(L_X Y))^C\xi^C \\ &= (L_{X^C}\varphi^C)Y^C + \varphi^C(L_{X^C}Y^C) - \varphi^C L_{X^C}Y^C + (L_X(\eta(Y)))^V\xi^V - ((L_X\eta)Y)^V\xi^V \\ &\quad + (L_X(\eta(Y)))^C\xi^C - ((L_X\eta)Y)^C\xi^C \\ &= (L_X\varphi)Y)^C - ((L_X\eta)Y)^V\xi^V - ((L_X\eta)Y)^C\xi^C\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2. Eğer Y yerine (32) şartlarını sağlayan ξ'yi kullanırsak yani $\eta(\xi)=1$ olursa o zaman

i) $(L_{X^V}\tilde{J})\xi^V = -(L_X\xi)^V$,

ii) $(L_{X^V}\tilde{J})\xi^C = ((L_X\varphi)\xi)^V - (((L_X\eta))\xi)^V\xi^C$,

iii) $(L_{X^C}\tilde{J})\xi^V = ((L_X\varphi)\xi)^V - (L_X\xi)^C - ((L_X\eta)\xi)^V\xi^C$,

iv) $(L_{X^C}\tilde{J})\xi^C = (L_X\varphi)\xi)^C - (L_X\xi)^V - ((L_X\eta)\xi)^V\xi^V - ((L_X\eta)\xi)^C\xi^C$

sonuçları elde edilir.

4.SONUÇ

Bu çalışma içerisinde tanjant demette complete ve vertical liftlerle ifade edilen almost kontakt ve almost parakontakt yapılar ile bunlara uygulanan Lie türevleri üzerinde durulmuş ve bu doğrultuda bazı genel bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra bu genel bağıntılar için almost kontakt ve almost parakontakt yapının $\eta(\xi)=1$ özelliği kullanılarak bu bağıntıların özel halleri elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Çayır, H. 2013. Almost Parakontakt Yapılar, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, pp 108, Erzurum.

2. Yano, K. Ishihara, S. 1973. Tangent and Cotangent Bundles. *Marcel Dekker Inc*. New York.

3. Çayır, H. 2015. Some Notes on Lifts of Almost Paracontact Structures. *American Review of Mathematics and Statistics*, 3 (1): 52-60.

4. Salimov, A.A. 2013. Tensor Operators and Their applications. *Nova Science Publ*. New York.

5. Salimov, A.A. Çayır, H. 2013. Some Notes On Almost Paracontact Structures, Comptes Rendus de 1' *Acedemie Bulgare Des Sciences*, tome 66(3): 331-338

6. Omran, T. Sharffuddin, A. Husain, S.I. 1984. Lift of Structures on Manifolds, *Publications De 1'Instıtut Mathematıqe*. Nouvelle serie. 360 (50):93-97.

7. Çayır, H. Köseoğlu, G. 2016. Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to X^C and X^V on tangent bundle $T(M)$, *New Trends in Mathematical Sciences*. 4(1) : 153-159

8. Blair. D.E 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag. New York.

9. Das, Lovejoy S. 1993. Fiberings on almost r-contact manifolds. *Publicationes Mathematicae*. p.p 161-167. Debrecen, Hungary.

10. Oproui, V. 1973. Some remarkable structures and connexions, defined on the tangent bundle, *Rendiconti di Matematica* (3), 6 VI.

11. Sasaki, S. 1958. On The Differantial Geometry of Targent Boundles of Riemannian Mani-folds. *Tohoku Math. J*. no.10: 338-358.

.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Samsun ili Çarşamba ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Çarşamba ilçesinde tamamladı. 2008 yılında kazandığı Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. Tokat ve Samsun da çeşitli ilköğretim okullarında, ortaöğretim okullarında ve özel kurslarda matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2015 yılında yüksek lisans programını kazandı ve Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında ‘Tanjant Demet İçerisinde Yapılar ve Bunlara Uygulanan Lie Türevleri’ konusu üzerinde Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR danışmanlığında yüksek lisans eğitimini tamamladı.