GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOTANJANT DEMET $T^{*}(M^{n})$ İÇERİSİNDE OPERATÖRLER VE DİAGONAL LİFTLERLE İLİŞKİLİ ALMOST PARAKOMPLEKS YAPILAR

KÜBRA AKDAĞ

2017

KÜBRA AKDAĞ YÜKSEK LİSANS TEZİ GİRESUN ÜNİVERSİTESİ 2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOTANJANT DEMET $T^*(M^n)$ İÇERİSİNDE OPERATÖRLER VE DİAGONAL LİFTLERLE İLİŞKİLİ ALMOST PARAKOMPLEKS YAPILAR

KÜBRA AKDAĞ

HAZİRAN 2017

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün Onayı.

Prof. Dr. Başak TAŞELİ

____

Müdür

… ./…. /…….

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

____

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR

____

Danışman

<u>Jüri Üyeleri</u>

Doç. Dr.İmdat İŞCAN ____________________________

Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR (Danışman) ____________________________

Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK ____________________________

ÖZET

KOTANJANT DEMET $T^*(M^n)$ İÇERİSİNDE

OPERATÖRLER VE DİAGONAL LİFTLERLE İLİŞKİLİ

ALMOST PARAKOMPLEKS YAPILAR

AKDAĞ, Kübra

Giresun Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Haşim ÇAYIR

HAZİRAN 2017, 33 sayfa

Bu tezin amacı kotanjant demet içerisinde bir almost parakompleks yapıya göre vertikal, komple ve horizontal liftlere uygulanılan Operatörleri (Tachibana ve Vishnevskii) incelemek ve bu bağlamda birtakım bağıntılar elde etmektir.

Bu çalışma içerisinde ilk olarak kotanjant demet içerisinde bir almost parakompleks yapıya göre Tachibana operatörleri $1-$ form, vertikal, komple ve horizontal liftlere uygulanmıştır. Daha sonra ise yine kotanjant demet içerisinde diagonal liftlere göre Vishnevskii operatörü $1-$forma uygulanmıştır. Son olarak ise almost parakompleks yapının vertikal, komple ve horizontal liftlere göre kovaryant türevleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tachibana Operatörleri, Vishnevskii Operatörleri, Almost Parakompleks Yapı, Vertikal Lift, Horizontal Lift, Diagonal Lift

ABSTRACT

ALMOST PARACOMPLEX STRUCTURES

ASSOCIATED WITH THE DIAGONAL LIFTS AND OPERATORS

ON COTANGENT BUNDLE $T^*(M^n)$

AKDAG, Kübra

University of Giresun

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Haşim CAYIR

JUNE 2017,33 pages

The aim of this thesis is to examine Operators (Tachibana and Vishnevskii) applied vertically, complete and horizontally lifts according to an almost paracomplex structure in cotangent bundle and to obtain some relations in this context.

In this study firstly, the Tachibana operators were applied to $1-$form, vertical, complete and horizontal lifts with respect to almost paracomplex structure on cotangent bundle. Secondly, the Vishnevskii operators were applied to $1-$form according to the diagonal lift on cotangent bundle. Finally, covariant derivates of almost paracomplex structure with respect to vertical ,complete and horizontal lifts were obtained.

Key Words: Tachibana Operators, Vishnevskii Operators, Almost Paracomplex Structure,Vertical Lift, Horizontal Lift, Diagonal Lift

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren her aşamada yardımını gördüğüm hocam sayın Yrd**.** Doç. Dr. Haşim ÇAYIR'a teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarımda manevi destek gösteren aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

J	Almost Kontakt Yapı
$\tilde{J}$	Almost Parakontakt Yapı
C^k	k Sınıfından Diferensiyellenebilen Cümleler Kümesi
M	n Boyutlu Manifold
ξ	Vektör Alanı
X^V	Vektör Alanının Vertikal Lifti
X^C	Vektör Alanının Komple Lifti
$T(M)$	Tanjant demeti
$[X,Y]$	X ve Y Vektör Alanlarının Lie Parantezi
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
ω	$1-$Form
ω^V	$1-$Formun Vertikal Lifti
ω^C	$1-$Formun Komple Lifti
η	$1-$Form
φ	$(1,1)$ Tipli Tensör Alanı
F	$(1,1)$ Tipli Tensör Alanı
ϕ_φ	Tachibana Operatörü
ψ_φ	Vishnevskii Operatörü

1. GİRİŞ

XVII. yüzyılda ortaya çıkan ve güncelliğini koruyan diferensiyel geometri, geometrik problemleri, diferensiyel ve integral hesaplama tekniklerini kullanılarak çözümlemeye çalışan matematiğin bir alt disiplinidir.

Diferensiyel geometride önemli bir yere sahip olan tensör kavramı güncel anlamda ilk olarak aslında bir fizikçi olan Woldemar Voigt tarafından 1898'de kullanıldı. Tensör hesaplamaları 1890'lı yıllarda kısaca Ricci olarak alınan Gregorio Ricci-Curbastro tarafından mutlak diferensiyel hesaplamalar başlığı altında incelendi ve bu çalışmalar 1892 yılında kendisi tarafından sunuldu. Daha sonra 1900 yılında Ricci ve Tullio Levi-Civita, mutlak diferensiyel hesaplama metotları ve uygulamaları adı altında çalışmalarını yayımladılar. Uzayda her bir noktaya sırasıyla bir skaleri veya vektörü tayin eden skaler alanın veya n vektör alanın genelleşmiş hali olan tensör alanı, manifold üzerinde tanımlı olup manifoldun her bir noktasına bir tensör karşılık getiren bir dönüşümdür.

Sunulan bu tez çalışmasında ikinci bölümde çalışmamızın anlaşılabilmesi için ve konunun sınırlanması bakımından materyal ve metot başlığı adı altında n boyutlu manifoldlar, vektör, kovektör, tensör alanları ve Lie türevi hakkında genel bilgiler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde tanjant demet, kotanjant demet, fonksiyonun, vektör alanının, kovektör alanının vertikal ve komple liftleri, parakontakt ve almost parakontakt yapılar ile Tachibana ve Vishnevskii operatörlerinin tanımı yapılmıştır.

Üçüncü bölümde bulgular başlığı altında Tachibana ve Vishnevskii operatörlerinin tanımı yapılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra ise büyük bir kısmı 'Çayır, H. Akdağ, K. (2016) Some notes on almost paracomplex structures associated with the diagonal lifts and operators on cotangent bundle $T^{*}(M^{n})$, *New Trends in Mathematical Sciences.* 4(1) 42-50' bilimsel makale çalışmasında yer alan vertikal ve komple lift problemlerine ve hesaplamalarına yer verilmiştir. Bu yüksek lisans süreci 1 adet alan indeksli makale, 1 adet uluslararası sempozyum bildirisi ve yayına yapılan toplam 2 atıf ile tamamlanmıştır.

2. MATERYAL ve METOT

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. X Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset R^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in R^n$$

olur(1). Burada $x^1,...,x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2. Eğer X Hausdorff uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \quad (A - \text{indisler kümesi})$$

ise X 'e $n-$boyutlu topolojik manifold veya sadece $n-$boyutlu manifold denir (1).

Tanım 2.1.3. X Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından $n-$boyutlu atlas adı verilir (1,2).

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X ‘i örter, yani X, n-boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,\ldots,n\right)$ denir. Burada u_β^i , $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak,bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4. M , sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, M üzerinde $n-$ boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına $n-$ boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (1).

2.2.Vektör Alanı

M_n diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\forall p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $X_p \in T_p$ vektörüne karşılık getiren $X : p \to X_p$ dönüşümüne M_n üzerinde vektör alanı denir. Burada T_p, $p \in M_n$ noktasındaki vektör uzayıdır. Eğer f, M_n üzerinde tanımlanan bir fonksiyon ise Xf de M_n üzerinde $(Xf)(p) = X_p f$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Eğer, her bir diferensiyellenebilen f fonksiyonu için Xf de diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise X vektör alanına diferensiyellenebilir vektör alanı denir. M_n üzerindeki (U,φ) lokal koordinat sisteminde X vektör alanını

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

biçiminde gösterebiliriz (3,1,4,2). Burada $X^i = X^i(x^i)$ ler U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarının fonksiyonlarıdır. X^i lere X vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir. X vektör alanının diferensiyellenebilmesi için gerek ve yeter koşul $X^i = X^i(x^i)$ lerin diferensiyellenebilir olmasıdır.

M_n üzerindeki (U,φ) koordinat sisteminde bir başka $Y=Y^i\partial_i$ vektör alanı ve $f\in\Im_0^0(M_n)$ fonksiyonu için

$$X(f)=X^i\partial_i f,\quad Y(f)=Y^i\partial_i f$$
$$XY(f)=X(Y^i\partial_i f)=X^i(\partial_i Y^j\delta_j f+Y^j\partial_{ji}^2 f)$$
$$YX(f)=Y(X^i\partial_i f)=Y^j(\partial_j X^i\partial_i f+X^i\partial_{ij}^2 f)$$

bulunur. Buradan da

$$XY(f)-YX(f)=(X^i\partial_i Y^j-Y^i\partial_i X^j)\partial_j f$$

yazılır (1). Böylece biz

$$XY-YX=[X,Y]$$

biçiminde tanımlanan yeni bir vektör alanı tanımlamış olduk. Bu vektör alanını δ_i doğal çatısı cinsinden ifadesi

$$[X,Y]=XY-YX=(X^i\partial_i Y^j-Y^i\partial_i X^j)\partial_j \tag{1}$$

biçiminde olur. ∂_i nin $[X,Y]$ katsayısına vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir (1)

Tanım 2.2.1. (1) eşitliği ile tanımlanan $[X,Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i=\delta_i^k\partial_k$, $\partial_j=\delta_j^k\partial_k$ vektör alanları alınırsa, (1) formülünden

$$[\partial_i,\partial_j]=0$$

olduğu görülür. (1) formülünün yardımıyla Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir (1):

1. $[X,Y+Z]=[X,Y]+[X,Z],$
2. $[X,fY]=X(f)Y+f[X,Y],$
3. $[X,Y]=-[Y,X],$
4. $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

$\Im_0^1(M_n)$ ile M_n üzerindeki tüm diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesini gösterelim. Bu kümede toplama ve $\Im_0^0(M_n)$' nin elemanları ile çarpma işlemlerini

1. $(X+Y)(f)=X(f)+Y(f),\ \forall X,Y\in\Im_0^1(M_n),\ \forall f\in\Im_0^0(M_n)$
2. $(gX)(f)=gX(f),\ \forall X\in\Im_0^1(M_n),\ \forall f,g\in\Im_0^0(M_n)$

biçiminde tanımlayalım (1). Bu işlemlere göre $\Im_0^1(M_n)'$ nin, birimli, komutatif $\Im_0^0(M_n)$ cebiri üzerinde bir modül olduğu kolaylıkla gösterilebilir. (modül anlamı R üzerinde vektör uzayı anlamının genelleşmesidir). $\Im_0^1(M_n)'$ye bir başka cebirsel yapı da dahil edebiliriz. $\Im_0^1(M_n)'$ ye R reel cebiri üzerinde bir vektör uzayı gibi de bakabiliriz. Bu vektör uzayında çarpma işlemi olarak vektör alanlarının Lie parantezini alırsak, bu kümeye R üzerinde Lie cebiri gibi de bakmak mümkündür. Bu cebirin sonsuz boyutlu olduğu kolayca gösterilebilir.

Vektör alanlarının tanımına benzer olarak kovektör alanı (veya 1– form) tanımlanır.

2.3. Kovektör Alanı

Her $p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $\omega_p \in T_p^*$ ($T_p^*, p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzayıdır) kovektörünü karşılık getiren $\omega : p \to \omega_p$ dönüşümüne M_n üzerindeki kovektör alanı adı verilir (1).

Eğer ω kovektör alanı ise, herhangi bir U koordinat komşuluğunda $\omega = \omega_i dx^i$ yazılabilir. Burada dx^i koçatıdır. ω kovektörünün C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $\omega_i = \omega_i(x^i)$ nin C^∞ sınıfından olmasıdır. Burada x^i ler U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatlardır. Tüm kovektör alanlarının kümesi $\Im_0^0(M_n)$ üzerinde bir modüldür.

2.4. Tensör Alanı

Keyfi $p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $t_p \in T_p^q(P)$ tensörünü karşılık getiren $t : p \to t_p$ kuralına M_n üzerinde (p,q) tipli tensör alanıdır. Burada $T_p^q(P)$, $p \in M_n$ noktasındaki tensör uzayıdır.

x^i lokal koordinatlarının verildiği U koordinat komşuluğundaki (p,q) tipli tensör alanı

$$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Buradaki $t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ lere t tensör alanının U koordinat komşuluğundaki lokal koordinat sisteminde koordinatları denir. Eğer $t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x)$ fonksiyonları C^∞ sınıfından iseler t tensör alanı da C^∞ sınıfındandır denir.

$\Im^p_q(M_n)$ ile M_n üzerindeki tüm (p,q) tipli tensör alanlarının R üzerindeki vektör uzayını gösterelim. $\Im^p_q(M_n)$'nin $\Im^0_0(M_n)$ üzerinde bir modül olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im^p_q(M_n)$$

biçiminde gösterirsek, $\Im(M_n)$' nin R üzerinde bir cebir olduğu da gösterilebilir.

Burada $\otimes$ işlemi noktasal olarak

$$t_1 \otimes t_2 = (t_1)_x \otimes (t_2)_x, \quad \forall x \in M_n, \forall t_1, t_2 \in \Im(M_n)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.4.1. Aşağıdaki şartları sağlayan $D : \Im(M_n) \to \Im(M_n)$ dönüşümüne $\Im(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellenmesi işlemi (veya sadece diferensiyellemesi) denir (1).

1. D sabit katsayılara göre lineerdir, yani
   $D(at+bs) = aDt + bDs, \quad \forall a,b \in R$
2. D tipi korur, yani $D(\Im^p_q(M_n)) \subset \Im^p_q(M_n)$ dir.
3. $D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds$
4. D işlemi tensörlerin kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir.

Tanım 2.4.2. $D = L_X, \quad X \in \Im^1_0(M_n)$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa buna X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir:

1. $L_X f = Xf, \quad \forall f \in \Im^0_0(M_n),$
2. $L_X Y = [X,Y], \quad \forall X, Y \in \Im^1_0(M_n).$

Burada $[X,Y]$ Lie parantezidir. $L_X Y$ ‘nin lokal koordinatlardaki ifadesi

$$L_X Y = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

biçiminde yazılır (1,5,6,7). Lie diferensiyellenmesi işlemi sonucunda bulunan değere Lie türevi denir.

Şimdi keyfi bir tensör alanı için Lie türev formülünü bulalım. Önce $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ kovektör alanını göz önüne alalım $\forall Y \in \Im_0^1(M_n)$ için $\omega(Y) \in \Im_0^0(M_n)$ olduğu açıktır. L_X türevinin özelliklerine göre

$$L_X(\omega(Y)) = (L_X\omega)Y + \omega(L_X Y)$$

ve buradan da

$$(L_X\omega)Y = L_X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) \tag{2}$$

yazılır.

Eğer, $Y = \delta_j$ alırsak (2) eşitliğinin U komşuluğundaki lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_X\omega_j = X^k\delta_k\omega_j + \omega_k\delta_j X^k \tag{3}$$

biçiminde olur.

Şimdi keyfi (p,q) tipli tensör alanına bakalım. $t \in \Im_q^p(M_n)$ için

$$t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p) \in \Im_0^0(M_n), \forall X_1,...,X_q \in \Im_0^1(M_n) \quad \forall \omega^1,...,\omega^p \in \Im_1^0(M_n)$$

olduğu açıktır. Bu taktirde L_X 'in özelliklerine göre

$$\begin{aligned} L_X(t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p)) &= (L_X t)(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p) \\ &+ \sum_{i=1}^{q} t(X_1,...,L_X X_i,...X_q,\omega^1,...,\omega^p) \\ &+ \sum_{j=1}^{q} t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,L_X\omega^j,...,\omega^p) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} (L_X t)(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p) &= X(t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,\omega^p)) \\ &- \sum_{i=1}^{q} t(X_1,...,L_X X_i,...X_q,\omega^1,...,\omega^p) \\ &- \sum_{j=1}^{q} t(X_1,...,X_q,\omega^1,...,L_X\omega^j,...,\omega^p) \end{aligned} \tag{4}$$

bulunur (1). L_X in türevi $dx^i(\delta_j) = \delta_i^j$ için uygulanırsa

$$0 = L_X\partial_i^j = L_X(dx^i(\partial_j)) = (L_X dx^i)\partial_j + dx^i(L_X\partial_j)$$

elde edilir. Buradan Lie parantezinin özellikleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} (L_X dx^i)\partial_j &= -dx^i[X,\partial_j] = -dx^i[X^k\partial_k,\partial_j] = dx^i[\partial_j, X^k\partial_k] \\ &= dx^i\partial_j X^k\partial_k = \partial_j X^k\delta_k^i = \partial_j X^i \end{aligned}$$

ya da $(L_X dx^i) = (\partial_j X^i) dx^j$ bulunur. Bu değer ve $(L_X \partial_i) = -\partial_i X^k \partial_k$ olduğu kullanılırsa,

$$L_X t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = X^k \partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{q} (\partial_{j\lambda} X^k) t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots k \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{p} (\partial_k X^{i\mu}) t^{i_1 \dots k \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \tag{5}$$

eşitliği elde edilir. Burada $L_X t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ ile $(L_X t)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ gösterilmiştir. Özel olarak $p = 0, q = 1$ ve $p = 1, q = 0$ olduğunda (5) eşitliğinden (1) ve (3) eşitlikleri elde edilir.

2.5. Tanjant Demet

M, C^∞ sınıfından $n-$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_p(M)$ olmak üzere

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

ile tanımlanan $T(M)$ kümesine tanjant demeti denir (1,2,3,4,8).

$T(M)$ 'nin herhangi bir $\tilde{p} \in T_p(M)$ noktası için M manifoldu üzerindeki $T(M)$ tabii demet yapısını doğuran $\pi : T(M) \to M$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(p) = \tilde{p} \in T_p(M)$ kümesine M baz uzayının p noktasındaki fibresi denir (1,2).

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n ise R de $n-$boyutlu bir vektör uzayı olsun $\tilde{p} \in T_p(M)(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterildiğinden ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}(\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x^h})$ doğal bazına göre $\tilde{p}$ ‘nin y^h kartezyen koordinatları olduğu için $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diffeomorfizm olacaktır. U komşuluğunda $p = \pi(\tilde{p})$ ’nin koordinatları x^h ile gösterilirse ve $(x^h, y^h) \to \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ açık kümesinde (x^h, y^h) lokal koordinatlar sistemi elde edilir ve (x^h, y^h) ’ye $(x^h)'$ dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ daki koordinatlar denir.

M manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\Im_s^r(M) \tag{6}$$

ile gösterilir. Benzer olarak $T(M)$ demetindeki uygun kümeler sırasıyla $\Im_s^r(T(M))$ ve $\Im(T(M))$ ile gösterilir.

2.6. Vertikal Liftler

2.6.1. Bir Fonksiyonun Vertikal Lifti

f, M ’de bir fonksiyon olsun. $T(M)$ tanjant demetindeki f^V fonksiyonu $f:M\rightarrow R$ ve $\pi:T(M)\rightarrow M$ olmak üzere

$$f^V=f\circ\pi \tag{7}$$

olsun. $f^V:T(M)\rightarrow R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun vertikal lifti denir(1,3,4,9,10). Burada (x^h,y^h) koordinatlı $\tilde{p}\in\pi^{-1}(U)$ noktasında f^V fonksiyonu

$$f^V(\tilde{p})=f^V(x,y)=f\circ\pi(\tilde{p})=f(p)=f(x) \tag{8}$$

olup $f^V(\tilde{p})$ değeri fibre boyunca sabittir ve $f(p)$ değerine eşittir.

2.6.2. Vektör Alanının Vertikal Lifti

Kabul edelim ki $\tilde{X}\in\Im_0^1(T(M))$ öyle ki tüm $f\in\Im_0^0(M)$ için $\tilde{X}f^V=0$ olsun. O zaman $\tilde{X}$ 'e vertikal vektör alanı denir. $\tilde{X}$ vertikal vektör alanına göre indirgenmiş koordinatlar $\begin{bmatrix}\tilde{X}^h\\ \tilde{X}^{\bar{h}}\end{bmatrix}$ olmak üzere $\tilde{X}$ 'nın vertikal olması için onun $\pi^{-1}(U)$ bileşenlerinin

$$X^V=\begin{bmatrix}\tilde{X}^h\\ \tilde{X}^{\bar{h}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \tilde{X}^{\bar{h}}\end{bmatrix} \tag{9}$$

şartını sağlaması gerekir.

M içerisinde bir vektör alanı $X\in\Im_0^1(M)$ olsun. $T(M)$ içerisindeki bir X^V vektör alanı, M deki keyfi bir ω için

$$X^V(\iota\omega)=(\omega(X))^V \tag{10}$$

şeklinde tanımlanır. X^V vektör alanına X vektör alanının dikey (vertikal) lifti denir(1,2).

2.6.3. 1-Formun Vertikal Lifti

Tüm $X \in \Im_0^1(M)$ için $\tilde{\omega}(X^V)=0$ olacak şekilde $\tilde{\omega} \in \Im_1^0(T(M))$ olsun. O zaman $\tilde{\omega}$ ye $T(M)$ içerisinde vertikal $1-$ form denir. $(U;x^h)$, M içerisinde koordinat komşuluğu ve ω ise U içerisinde $\omega=\omega_i dx^i$ olmak üzere ω $1-$formunun ω^V vertikal lifti her bir açık $\pi^{-1}(U)$ içinde

$$\omega^V = (\omega_i)^V (dx^i)^V \tag{11}$$

şeklinde tanımlanır (1,2). $T(M)$ içerisindeki indirgenmiş koordinatlara göre $\omega=\omega_i dx^i$ lokal ifadesi ile ω nin ω^V vertikal liftinin bileşenleri

$$\omega^V : (\omega^i, 0) \tag{12}$$

şeklindedir.

Burada vertikal liftler $\Im(M)$ 'nin keyfi P,Q,R elemanları için

$$(P\otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V, \quad (P+R)^V = P^V + R^V \tag{13}$$

şartlarıyla sabit katsayılara göre $\Im(T(M))$ tensör cebiri içerisinde $\Im(M)$ cebirinin tek izomorfizmleridir.

F_i^h lokal ifadesi ile $F \in \Im_1^1(M)$ elemanının F^V vertikal lifti

$$F^V : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir.

$$f \in \Im_0^0(M),\; X,Y \in \Im_0^1(M),\; \eta \in \Im_1^0(M),\; \varphi \in \Im_1^1(M),\; I = id_M$$

verilsin. Vertikal liftler için

$$\begin{aligned} &(fX)^V = f^V X^V, \quad I^V X^V = 0, \quad \eta^V (X)^V = 0 \\ &(f\eta)^V = f^V \eta^V, \quad [X^V, Y^V] = 0, \quad \varphi^V X^V = 0 \\ &X^V f^V = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

eşitlikleri sağlanır(1,2,3,4,10).

2.7. Komple Liftler

2.7.1. Fonksiyonun Komple Lifti

f, M manifoldundaki bir fonksiyon olmak üzere, $T(M)$ tanjant demetinde f^C fonksiyonu

$$f^C = (\imath df)$$

şeklinde tanımlanır ve f^C fonksiyonuna f fonksiyonunun komple lifti denir.

$T(M)$ demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre, bu koordinatlarda ∂f ifadesi $y^i \partial_i f$ ile gösterilir. f fonksiyonunun komple lifti olan f^C fonksiyonunun lokal ifadesi

$$f^C = y^i \partial_i f = \partial f \tag{16}$$

şeklindedir (1,2).

2.7.2. Vektör Alanının Komple Lifti

$X \in \Im_0^1(M)$ olsun. f, M manifoldunda keyfi bir fonksiyon olmak üzere $T(M)$ tanjant demetindeki bir X^C vektör alanını

$$X^C f^C = (Xf)^C \tag{17}$$

şeklinde tanımlanır ve X^C'ye X vektör alanının $T(M)$ tanjant demet içerisindeki komple lifti denir. $T(M)$ tanjant demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre X vektör alanının komple lifti X^C'nın M manifoldundaki x^h bileşenleri

$$X^C = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} \tag{18}$$

şeklindedir (1,2).

2.7.3. 1-Formların Komple Lifti

$\omega \in \Im_1^0(M)$ olsun. X, M manifoldundaki keyfi bir vektör alanı olmak üzere, $T(M)$ tanjant demetindeki ω^C $1-$formu

$$\omega^C X^C = (\omega X)^C \tag{19}$$

şeklinde tanımlanır (1,2). ω^C' ye ω $1-$formunun komple lifti denir. $T(M)$ tanjant demetindeki indirgenmiş koordinatlara göre, ω $1-$ formunun komple lifti olan ω^C'nın M manifoldundaki ω_i bileşenleri

$$\omega^C : (\partial_i \omega_i, \omega_i) \tag{20}$$

şeklindedir.

Burada P, Q, R $\Im(M)$'nın keyfi elemanları olmak üzere

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C, \quad (P+R)^C = P^C + R^C \tag{21}$$

şartıyla sabit katsayılara göre $\Im(T(M))$ tensör cebiri içerisinde $\Im(M)$ cebirinin tek izomorfizmleridir. F_i^h lokal ifadesi ile $F \in \Im_1^1(M)$ elemanının F^C komple lifti

$$F^C : \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{22}$$

şeklinde bileşenlere sahiptir. Ek olarak komple liftler için

$$\begin{aligned}
&(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C = (Xf)^C, \\
&X^C f^V = (Xf)^V, \quad \eta^V(X^C) = (\eta(X))^V, \\
&X^V f^C = (Xf)^V, \quad \varphi^V X^C = (\varphi X)^V, \\
&\varphi^C X^V = (\varphi X)^V, \quad (\varphi X)^C = \varphi^C X^C, \\
&\eta^V(X)^C = (\eta(X))^C, \quad \eta^C(X)^V = (\eta(X))^V, \\
&[X^V, Y^C] = [X,Y]^V, \quad I^C = I, \quad I^V X^C = X^V, [X^C, Y^C] = [X,Y]^C
\end{aligned} \tag{23}$$

eşitlikleri sağlanır(1,2,3).

M $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $D = L_X$ diferensiyel dönüşümüne

$$L_X f = Xf, \qquad \forall f \in \Im_0^0(M),$$

$$L_X Y = [X,Y], \quad \forall X, Y \in \Im_0^1(M),$$

şartları sağlanıyorsa $X \in \Im_0^1(M)$ vektör alanına göre Lie türevi denir. X vektör alanına göre $(1,1)$ tipli bir tensör alanı F'nın Lie türevi $L_X F$

$$(L_X F)Y = [X, FY] - F[X,Y]$$

şeklinde tanımlanır (1,3,6,7).

2.8. Almost Kontakt Manifold

M, $2n+1$ boyutlu manifold ve φ, $(1,1)$ tipli bir tensör alanı; ξ M manifoldu üzerinde bir vektör alanı ve η ise M üzerinde $1-$form olsun. φ, ξ ve η,

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{24}$$

$$\eta(\xi) = 1 \quad (X,\ M \text{ üzerinde keyfi bir vektör alanıdır}) \tag{25}$$

şartlarını sağlıyorsa, bu durumda M manifoldu (φ, ξ, η) almost kontakt yapısına sahiptir denir. M ise almost kontakt manifold olarak adlandırılır(1,2).

Teorem 2.8.1. (φ,ξ,η) almost kontakt yapısında aşağıdaki 3 özellik vardır(4,14).

i) $\varphi(\xi)=0$ (26)

ii) $\eta(\varphi(X))=0$ (27)

iii) $\text{rank}\varphi=2n$ (28)

İspat.

i) (24) ifadesinde X yerine ξ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\varphi^2(\xi)&=-\xi+\eta(\xi)\xi\\&=-\xi+1.\xi\\&=0\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\varphi^2(\xi)=0 \quad \Rightarrow \varphi(\xi)=0 \quad (\varphi^2\xi=\varphi(\varphi\xi))$$

elde edilir. Gerçekten de, $\varphi^2\xi=\varphi(\varphi\xi)=0$ eşitliğinden anlaşılıyor ki, ya $\varphi\xi=0,$ yada $\varphi\xi\neq 0,$ (bu durumda φ nin $\varphi\xi$ ye karşılık gelen özdeğeri sıfırdır). Farz edelim ki, $\varphi\xi\neq 0.$ (25) de X in yerine $\varphi\xi$ yazalım:

$$\varphi^2(\varphi\xi)=-\varphi\xi+\eta(\varphi\xi)\xi$$

Diğer taraftan $\varphi^2\xi=0$ olduğundan dolayı,

$$\varphi^2(\varphi\xi)=\varphi(\varphi^2\xi)=0$$

yazarız. Bu son iki denklemden,

$$\varphi\xi=\eta(\varphi\xi)\xi$$

alırız. $\varphi\xi\neq 0$ olduğundan $\eta(\varphi\xi)\neq 0$ alırız, çünkü, $\xi\neq 0.$

Diğer taraftan (25) i,

$$\varphi(\varphi X)=-\varphi X+\eta(\varphi X)\xi$$

şeklinde yazsak ve $\varphi X=\varphi\xi$ alırsak o zaman,

$$\varphi^2\xi=\varphi(\varphi\xi)=-\varphi\xi+\eta(\varphi\xi)\xi=0$$

olur. Bu ise $\varphi\xi\neq 0,$ $\eta(\varphi\xi)\neq 0,$ $\varphi\neq 0$ şartları ile çelişki oluşturur. Yani, $\varphi\xi=0$ olmalıdır.

ii) $\eta(\varphi(X))=0$ ifadesini ise $\varphi^2X=-X+\eta(X)\xi$ eşitliğinde $X\rightarrow\varphi X$ dönüşü-mü uygulanarak elde edilir. Gerçekten de, (25) de X yerine φX yazsak, elde edilir ki,

$$\varphi^2(\varphi X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi$$

veya $\varphi\xi = 0,\ \xi \neq 0$ şartlarını dikkate alırsak,

$$\varphi(\varphi^2 X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,$$
$$\varphi(-X + \eta(X)\xi) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,$$
$$-\varphi X + \eta(X)\varphi\xi = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,$$
$$\eta(\varphi X) = 0$$

buluruz.

iii) $\varphi\xi = 0$ şartından $\xi \neq 0$ olması durumunda elde edilir ki, rank$\varphi \leq 2n$. Eğer başka bir X vektörü varsa ki, $\varphi X = 0$ şartını sağlasın, o zaman (25) den elde ederiz ki,

$$X = \eta(X)\xi,$$

yani X ve ξ lineer bağımlıdır. Buradan anlaşılıyor ki, rank$\varphi = 2n$.

2.9. Almost Parakontakt Yapı

M manifoldunun almost parakontakt manifold olması için,

$$\eta(\xi)=1 \quad \text{ve } \varphi^2 X = X - \eta(X)\xi \quad (\varphi^2 = I - \xi \otimes \eta)$$

şartlarını sağlaması gerekir(1,2,3,8) (φ (1,1) tipli bir tensör alanı, η-1-form, ξ-vektör alanı, I-özdeşlik(birim) tensördür). (φ,ξ,η) yapısına almost parakontakt yapı denir. Bir almost parakontakt yapıda,

$$\varphi(\xi) = 0, \quad \eta(\varphi) = 0 \text{ ve rank}(\varphi) = n - 1$$

şartları da ek olarak sağlanır. M almost parakontakt yapı ile beraber diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu manifold üzerinde pozitif tanımlı bir g Riemannian metriği vardır, öyle ki,

$$\eta(X) = g(\xi, X), \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Burada, $X, Y \in \Im_0^1(M)$, $\Im_0^1(M)$, M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesidir.

Bu durumda M 'ye almost parakontakt Riemannian manifoldu denir.

Bir almost parakontakt yapıda $M \times R$ üzerinde tanımlanan J operatörü için,

$$J[X, f(\frac{d}{dt})] = [\varphi X + f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}]$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J[J(X, f\frac{d}{dt})] \\
&= J[\varphi X + f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}] \\
&= J[\varphi(X + f\xi) + \eta(X)\xi, \eta(\varphi X + f\xi)\frac{d}{dt} \\
&= \{\varphi^2 X + \varphi(f\xi) + \eta(X)\xi, [\eta(\varphi X + f\eta(\xi)]\frac{d}{dt}\} \\
&= \{X - \eta(X)\xi + f\varphi(\xi) + \eta(X)\xi, [\eta(\varphi X) + f\eta(\xi)]\} \\
&= (X, f\frac{d}{dt}) \\
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= I(X, f\frac{d}{dt}).
\end{aligned}
$$

alırız. Yukarıdaki işlemde keyfi $(X, f\frac{d}{dt})$ vektörü üzerindeki izlerin eşit olduğuna göre,

$$J^2 = I$$

elde edilir.

2.10. Tachibana Operatörleri

Tanım 2.10.1. $\Im(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$, R üzerinde bir tensör cebri ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan M_n üzerindeki $\phi_\varphi\big|_{r+s\rangle 0} : \overset{*}{\Im}(M_n) \to \Im(M_n)$ dönüşümüne Tachibana operatörü veya $\phi_\varphi -$ operatörü denir(4).

a) Sabit katsayılara göre ϕ_φ lineerdir,

b) Her r, s için, $\phi_\varphi : \overset{*}{\Im}{}_s^r(M_n) \to \Im_{s+1}^r(M_n)$,

c) Her $K, L \in \overset{*}{\Im}(M_n)$ için, $\phi_\varphi(K \overset{C}{\otimes} L) = (\phi_\varphi K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} \phi_\varphi L$

d) Her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için, $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi)X$, burada L_Y, Y ' e göre Lie türevidir,

e) Her $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$(\phi_{\varphi X}\omega)Y = (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_{\varphi Y}\omega) + \omega((\iota_Y \varphi)X)$$

yazılır. Burada, $\iota_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ dir.

Teorem 2.10.1. Tanım 2.10.1' den

$$\phi_{\varphi X}Y=[\varphi X,Y]-\varphi[X,Y]$$

elde edilir.

Her $f,g\in F(M_n)$ için, $[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X$

olduğundan $\phi_{\varphi X}Y$' in, X'e göre lineer olduğu fakat, Y'ye göre lineer olmadığı görülür. Buradan,

$$\begin{aligned}\phi_{\varphi(fX)}Y&=[f\varphi X,Y]-\varphi[fX,Y]\\&=f[\varphi X,Y]-(Yf)\varphi X-\varphi(f[X,Y])+\varphi(Yf)X\\&=f([\varphi X,Y]-\varphi[X,Y])\\&=f\phi_{\varphi X}Y,\end{aligned}$$

$$\phi_{\varphi X}(gY)=g(\phi_{\varphi X}Y)+((\varphi X)g)Y-(Xg)\varphi Y$$

elde edilir. $\phi_{\varphi X}Y$ için $(\phi_{\varphi}Y)X$ yazacağız.

2.10.1. (1,1) Tipli Tensör Alanına Uygulanan ϕ_{φ} −Operatörü

$t\in\overset{*}{\Im}{}_1^1(M_n)$ için $t\circ\varphi=\varphi\circ t$ eşitliği geçerli olmak üzere keyfi $Y\in\Im_0^1(M_n)$ için $tY\in\Im_0^1(M_n)$' dir. Tanım 2.10.1' den,

$$\begin{aligned}(\phi_{\varphi}tY)X&=((\phi_{\varphi}t)X)\overset{C}{\otimes}Y+t\overset{C}{\otimes}(\phi_{\varphi}Y)X\\&=(\phi_{\varphi}t)(X,Y)+t((\phi_{\varphi}Y)X)\end{aligned}\tag{29}$$

elde edilir. (29) eşitliğini kullanarak Tanım 2.10.1'den,

$$\begin{aligned}(\phi_{\varphi}t)(X,Y)&=(\phi_{\varphi}tY)X-t((\phi_{\varphi}Y)X)\\&=(-L_{tY}\varphi+t(L_Y\varphi))X\\&=[\varphi X,tY]-\varphi[X,tY]-t[\varphi X,Y]+\varphi t[X,Y]\\&=Q_{\varphi,t}(X,Y)\end{aligned}\tag{30}$$

elde edilir. $Q_{\varphi,t}\in\Im_2^1(M)$ tensör alanı, Nijenhuis-Shirokov tensör alanı olarak adlandırılır (4). Buradan Teorem 2.10.1.1 elde edilir.

Teorem 2.10.1.1. $t \in \overset{*}{\Im}{}_1^1(M_n)$ olsun. Bu durumda, $\phi_\varphi t$ Nijenhuis- Shirokov tensör alanıdır. $t=\varphi$ için, $t \circ \varphi = \varphi \circ t$ aşikar olarak sağlandığından (30) eşitliğinden,

$$\left(\phi_\varphi \varphi\right)\left(X,Y\right) = \left(-L_{\varphi Y}\varphi + \varphi\left(L_Y \varphi\right)\right)X$$

$$= \left[\phi X, \phi Y\right] - \phi\left[X, \phi Y\right] - \phi\left[\phi X, Y\right] + \phi^2\left[X,Y\right]$$

$$= N_\varphi\left(X,Y\right)$$

elde edilir. Burada N_φ, φ'in Nijenhuis tensör alanıdır (1,4).

2.11. Vishnevskii Operatörleri

∇ , M_n üzerinde bir lineer konneksiyon ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olsun. Her $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ için, Tanım 2.10.1'den

$$d') \ \psi_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X} Y - \varphi\left(\nabla_X Y\right)$$

alalım. Bu durumda aşağıdaki gibi yeni bir operatör tanımlanır.

Tanım 2.11.1. M_n üzerindeki, $\psi_\varphi : \overset{*}{\Im}(M_n) \to \Im(M_n)$ operatörü Tanım2.10.1'in (a), (b), (c), (e) şartları ve (d') şartını sağladığında ψ_ϕ'ye Vishnevskii operatörü denir. ∇ konneksiyonunun tanımına göre, kolayca $\psi_{\varphi X} Y$' in X'e göre lineer, fakat Y 'ye göre lineer olmadığını görülür. $\psi_{\varphi X} Y$ için $\left(\psi_\varphi Y\right)X$ yazacağız.

2.11.1. (1,s), $s \geq 0$ Tipli Tensör Alanına Uygulanan ψ_φ −Operatörü

$t \in \overset{*}{\Im}{}_s^1(M_n)$ olsun. $t\left(Y_1,Y_2,...,Y_s\right) \in \Im_0^1(M_n)$ olduğundan Tanım 2.11.1'i kullanarak,

$$\left(\psi_{\varphi X} t\right)\left(Y_1,Y_2,...,Y_s\right) = \left(\psi_\varphi t\right)\left(X,Y_1,Y_2,...,Y_s\right)$$

$$= \psi_{\varphi X} t\left(Y_1,Y_2,...,Y_s\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(\psi_\varphi Y_\lambda\right)X,...,Y_s\right)$$

$$= \nabla_{\varphi X} t\left(Y_1,Y_2,...,Y_s\right) - \varphi\nabla_X\left(t\left(Y_1,Y_2,...,Y_s\right)\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(\psi_\varphi Y_\lambda\right)X,...,Y_s\right)$$

$$\left(\psi_{\varphi X} t\right)\left(Y_1,Y_2,...,Y_s\right) = \left(\nabla_{\varphi X} t\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) + \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\nabla_{\varphi X} Y_\lambda,...,Y_s\right) - \varphi\left(\nabla_X t\right)\left(Y_1,...,Y_s\right)$$

$$-\varphi\left(\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\nabla_X Y_\lambda,...,Y_s\right)\right) - \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(\psi_\varphi Y_\lambda\right)X,...,Y_s\right) \qquad (31)$$

elde edilir (1,4). t pür tensör alanı olduğunda,

$$\varphi(\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\nabla_X Y_\lambda,...,Y_s\right)) = \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\varphi\left(\nabla_X Y_\lambda\right),...,Y_s\right) \tag{32}$$

elde edilir. (31) ifadesinde (32) eşitliği yazılırsa,

$$\left(\psi_\varphi t\right)\left(X,Y_1,...,Y_s\right) = \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi\left(\nabla_X t\right)\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) + \sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\nabla_{\varphi X} Y_\lambda - \varphi\left(\nabla_X Y_\lambda\right),...,Y_s\right)$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{s} t\left(Y_1,...,\left(\psi_\varphi Y_\lambda\right)X,...,Y_s\right)$$

$$= \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi\left(\nabla_X t\right)\right)\left(Y_1,...,Y_s\right)$$

elde edilir (1,4). Buradan,

$$\left(\psi_\varphi t\right)\left(X,Y_1,...,Y_s\right) = \left(\nabla_{\varphi X} t - \varphi\left(\nabla_X t\right)\right)\left(Y_1,...,Y_s\right) \tag{33}$$

dir.

2.12. Kotanjant Demet

M, n-boyutlu diferensiyellenebilen bir manifold ve $P \in M$ noktasındaki tanjant uzayın $T_P(M)$ dual uzayı olan kotanjant uzayı $T_P^*(M)$ olsun. $P \in M$ noktasında $T_P^*(M)$ nin herhangi bir elemanı kovektör olarak adlandırılır. O zaman M manifoldu üzerindeki kotanjant demet aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$T^*(M) = \underset{P \in M}{\cup} \mathrm{T}_P^*$$

Herhangi bir $\tilde{P} \in T^*(M)$ noktası (bu nokta aynı zamanda $T_P^*(M)$' ninde bir elemanıdır) $\pi : T^*(M) \to M$ projeksiyon dönüşümü ile $\tilde{P} \to P$ durumunu alır. Burada M temel(baz) uzaydır ve $\pi^{-1}(P)$ kümesi $T_P^*(M)$ kümesini belirtir ve $P \in M$ üzerinde fibre olarak adlandırılır (2).

M üzerinde ω kovektör alanı ve X vektör alanının bir U kümesi içinde lokal ifadeleri $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ve $\omega = \omega_i dx^i$ olsun. O zaman ω'nın vertikal lifti ω^V ile X vektör alanının sırası ile horizontal lift ve komple lifti X^H, X^C indirgenmiş koordinatlara göre

$$\begin{aligned} \omega^V &= \omega_i \partial_i, \\ X^H &= X^i \partial_i + p_h \Gamma^h_{ij} X^j \partial_i \\ X^C &= X^i \partial_i - p_h \partial_i X^h \partial_i, \end{aligned} \tag{34}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ve Γ^h_{ij} ifadeleri M içerisinde bir ∇ simetrik afin konneksiyonun katsayılarıdır (1,2).

T^*M üzerinde vertikal ve horizontal vektör alanlarının Lie parantez (bracked) işlemi aşağıdaki formüller ile verilir.

$$\begin{cases} \left[X^H, Y^H\right] = \left[X, Y\right]^H + (p \circ R(X,Y))^V \\ \left[X^H, \omega^V\right] = (\nabla_X \omega)^V \\ \left[\theta^V, \omega^V\right] = 0 \end{cases} \tag{35}$$

$X, Y \in \Im^1_0(M)$ ve R eğrilik tensörü olduğunda , ∇ simetrik konneksiyonu $R(X,Y) = \left[\nabla_X, \nabla_Y\right] - \nabla_{[X,Y]}$ şeklinde tanımlanır (1,2).

3 .BULGULAR

Tanım 3.1. M^n n boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer

$$L_X f = Xf, \forall f \in \Im_0^0(M^n),$$
$$L_X Y = [X,Y], \forall X,Y \in \Im_0^1(M^n). \qquad (36)$$

şartları sağlanırsa $D = L_X$ diferensiyellenebilir dönüşümü $X \in \Im_0^1(M^n)$ vektör alanına göre Lie türevi olarak adlandırılır.

Burada $[X,Y]$ Lie parantezi(bracked) olarak isimlendirilir. X vektör alanına göre (1,1) tipli F tensör alanının Lie türevi

$$(L_X F)Y = [X,FY] - F[X,Y] \qquad (37)$$

şeklinde tanımlanır (1,2,5,6).

Tanım 3.2. M^n n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $T(M^n)$ cebrinin diferensiyellenebilir dönüşümü olan

$$D = \nabla_X : T(M^n) \to T(M^n), X \in \Im_0^1(M^n),$$

ifadesi eğer

$$\nabla_{fX+gY} t = f\nabla_X t + g\nabla_Y t$$
$$\nabla_X f = Xf, \qquad (38)$$

şartlarını sağlaması halinde kovaryant türev olarak adlandırılır. Burada $\forall f,g \in \Im_0^0(M^n), \forall X,Y \in \Im_0^1(M^n), \forall t \in \Im(M^n)$' dir.

Diğer taraftan ,

$$\nabla : \Im_0^1(M^n) \times \Im_0^1(M^n) \to \Im_0^1(M^n), \qquad (39)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir afin konneksiyon olarak adlandırılır (1,2,4).

Önerme 3.1. M den $T^*(M)$ ye bir simetrik afin konneksiyon ∇^C komple liftine göre kovaryant türevlenme işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir (14).

$$\nabla^C_{\omega^V}\theta^V = 0, \nabla^C_{\omega^V}Y^C = -\gamma(\omega \circ (\nabla Y)) = -(p(\omega \circ (\nabla Y)))^V, \nabla^C_{X^C}\theta^V = (\nabla_X \theta)^V,$$
$$\nabla^C_{X^C}Y^C = (\nabla_X Y)^C + \gamma(\nabla(\nabla_X Y + \nabla_Y X)) - \gamma(\nabla_X \nabla Y + \nabla_Y \nabla X)$$
$$= (\nabla_X Y)^C + (p((\nabla(\nabla_X Y + \nabla_Y X)) - (\nabla_X \nabla Y + \nabla_Y \nabla X)))^V$$

burada $X,Y \in \Im_0^1(M^n), \theta, \omega \in \Im_1^0(M^n)$ dir.

Önerme 3.2. M den $T^*(M)$ ye bir simetrik afin konneksiyonun ∇^H horizontal liftine göre kovaryant türevlenme aşağıdaki şartlara sahiptir (2).

$$\nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H, \nabla^H_{\theta^V} \omega^V = 0,$$
$$\nabla^H_{X^H} \omega^V = (\nabla_X \omega)^V, \nabla^H_{\theta^V} Y^H = 0,$$

burada $X, Y \in \Im^1_0(M^n), \theta, \omega \in \Im^0_1(M^n)$ dir.

3.1. Kotanjant Demet İçerisinde Bir Özel Tip Almost Parakompleks Yapı (Diagonal Lift I^D).

Bir almost parakompleks manifold bir almost product (çarpım) manifolddur. $(M^n, \varphi), \varphi^2 = I$. Burada sırasıyla +1 ve -1 iki özgün değeriyle ilişkili iki özgün demetler olan T^+M^n ve T^-M^n aynı ranka sahiptirler. Farkına varmamız gereken şey almost parakompleks manifoldun boyutunun gerekli oluşudur. φ parakompleks yapısını düşünelim M^n üzerinde elde edeceğimiz $\{I, \varphi\}$ kümesi, $R(j), j^2 = 1.$ olarak ifade edilen ve parakompleks cebir olarak adlandırılan bir izomorfik temsili cebirdir. $X_1, X_2, ..., X_q \in \Im^1_0(M^{2n})$ için $\omega \in \Im^0_q(M^{2n})$ tensör alanı eğer

$$\omega(\varphi X_1, X_2, ..., X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2, ..., X_q) = \omega(X_1, X_2, ..., \varphi X_q) \tag{40}$$

şartını sağlarsa φ parakompleks yapıya göre pürdür denir.

Biz φ ile ilişkili ϕ_φ operatörünü tanımlarız ve ω pür tensörüne uygularız:

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi \omega)(Y, X_1, X_2, ..., X_q) &= (\varphi Y)(\omega(X_1, X_2, ..., X_q)) - Y(\omega(\varphi X_1, X_2, ..., X_q)) \\ &+ \omega((L_{X_1}\varphi)Y, X_2, ..., X_q) \\ &+ ... + \omega(X_1, X_2, ..., (L_{X_q}\varphi)Y)\end{aligned} \tag{41}$$

Burada L_X ifadesi X 'e göre Lie türevi ve $\phi_\varphi \omega \in \Im^0_{q+1}(M^{2n})$ dir. Eğer $\phi_\varphi \omega = 0$ ise o zaman $R(j)$ parakompleks cebrine göre almost paraholomorfiktir denir (1,4).

Tanım 3.1.1. Bir almost parakompleks yapısıyla birlikte bir manifold içerisinde eğer bir X vektör alanı $L_X \varphi = 0$ şartını sağlarsa bu vektör alanına almost paraholomorfik vektör alanı denir.

$F \in \Im_1^1(M^n)$ olsun. Herhangi $X \in \Im_0^1(M^n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M^n)$ için T^*M^n içerisinde $(1,1)$ tipli F^D tensör alanını

$$F^D X^H = (FX)^H, F^D \omega^V = -(\omega \circ F)^V = -(\omega F)^V \tag{42}$$

şeklinde tanımlayalım. F^D yi F tensör alanının diagonal lifti olarak adlandırırız. $e_{(\alpha)}$ adapt olunmuş yapısına göre F^D nin bileşenleri

$$F^D = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ 0 & -F_i^h \end{pmatrix}$$

$(1,1)$ tipli I birim tensör alanının I^D diagonal lifti $(I^D)^2 = I$ şartı ve indirgenmiş koordinatlarına göre

$$I^D = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ 2p_a\Gamma_{ij}^a & -\delta_j^i \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. I^D almost product yapıdır (4). Eğer biz (42) denklemi içerisine ω^V, θ^V yada X^H, Y^H formlarında tüm $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanları için $F^D = I^D$ ifadesini koyarsak

$$I^D \omega^V = -\omega^V, I^D X^H = X^H \tag{43}$$

elde ederiz (2).

Teorem 3.1.1. $(T^*M^n, I^D, {}^S g)$ bir almost parakompleks Riemannian manifoldudur (4).

Kotanjant demette liftler için aşağıdaki ifadeler geçerlidir (2)

$$\begin{aligned} &\omega^V f^V = 0, X^H f^V = (Xf)^V \\ &\left[X^H, \omega^V\right] = (\nabla_X \omega)^V, \left[\omega^V, \theta^V\right] = 0 \\ &\left[X^H, Y^H\right] = \left[X, Y\right]^H + \gamma R(X,Y) = \left[X,Y\right]^H + (pR(X,Y))^V \end{aligned} \tag{44}$$

$$pR(X,Y) = (p_i(R(X,Y)_j^i)) \text{ ve } I^D(pR(X,Y))^V = -(pR(X,Y))^V.$$

Burada R, ∇' ın eğrilik tensörü, ∇ konneksiyonu üzerindeki Lie türevi $(L_X\nabla)_Y = \nabla_Y \nabla X + R(X,Y)$ şeklinde ve Y vektör alanı $\Im_0^1(M^n)$ 'nin keyfi elemanı olarak verilmiştir (2).

3.2. I^D Almost Parakompleks Yapısına Göre 1-Form, Vertikal, Komple ve Horizontal Liftlere Tachibana Operatörlerinin Uygulanması

Tanım 3.2.1. $\varphi \in \Im_1^1(M^n)$ için R üzerinde bir tensör cebiri $\Im(M^n)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\Im_s^r(M^n)$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar varsa $\phi_\varphi\big|_{r+s\rangle 0}:\overset{*}{\Im}(M^n)\to \Im(M^n)$ dönüşümü M^n'de Tachibana operatörü veya ϕ_φ operatörü olarak isimlendirilir.

a) ϕ_φ, sabit kat sayılara göre lineerdir.

b) Tüm r ve s değerleri için $\phi_\varphi:\overset{*}{\Im}(M^n)\to \Im_{s+1}^r(M^n)$.

c) Tüm $K,L\in \overset{*}{\Im}(M^n)$ için $\phi_\varphi(K\overset{C}{\otimes}L)=(\phi_\varphi K)\otimes L+K\otimes\phi_\varphi L.$

d) Tüm $X,Y\in\Im_0^1(M^n)$ için $\phi_{\varphi X}Y=-(L_Y\varphi)X$. Burada L_Y ifadesi Y'ye göre Lie türevidir.

e)

$$
\begin{aligned}
(\phi_{\varphi X}\eta)Y &= (d(\iota_Y\eta))(\varphi X)-(d(\iota_Y(\eta\circ\varphi)))X+\eta((\iota_Y\varphi)X)\\
&=\phi X(\iota_Y\eta)-X(\iota_{\varphi Y}\eta)+\eta((\iota_Y\varphi)X)
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Burada $\eta\in\Im_1^0(M^n)$, $X,Y\in\Im_0^1(M^n)$ ve $\iota_Y\eta=\eta(Y)=\eta\overset{C}{\otimes}Y$ yazılır. M^n de φ afinor alanına göre (r,s) tipli tüm pür tensör alanlarının modülü $\overset{*}{\Im}{}_s^r(M^n)$ dir (1,4,7,9).

Teorem 3.2.1. L_X için X' e göre Lie türev operatörü, (43) bağıntısı ile tanımlanan bir almost parakompleks yapı $I^D\in\Im_1^1(T^*(M^n))$ ve ϕ_{I^D} ifadesi ise M^n de Tachibana operatörü olmak üzere aşağıdaki formüller elde edilir.

i) $(\phi_{I^D}\omega)(X^H,Y^H)=2\omega(pR(Y,X))^V,$

ii) $(\phi_{I^D}\omega)(X^H,\theta^V)=2X^H(\omega(\theta^V))-2\omega(\nabla_X\theta)^V,$

iii) $(\phi_{I^D}\omega)(\theta^V,Y^H)=-2\theta^V(\omega(Y^H)),$

iv) $(\phi_{I^D}\omega)(\theta^V,\xi^V)=0.$ (46)

Burada ∇' nin eğrilik tensörü $R,$ $X,Y\in\Im_0^1(M^n)$' nin horizontal liftleri $X^H,Y^H\in\Im_0^1(T^*(M^n)),$ ve $\omega,\xi,\theta\in\Im_1^0(M^n)$' nin vertikal liftleri de $\omega^V,\xi^V,\theta^V\in\Im_0^1(T^*(M^n))$ şeklinde ifade edilir.

İspat . (43) ve (45)' den

i)

$$
\begin{aligned}
(\phi_{I^D}\omega)(X^H,Y^H) &= (\phi_{I^D X^H}\omega)Y^H \\
&= I^D X^H(\omega(Y^H) - X^H(\omega(I^D Y^H)) + \omega((L_{Y^H} I^D)X^H) \\
&= X^H(\omega Y^H) - X^H(\omega Y^H) + \omega(\left[Y^H, I^D X^H\right] - I^D\left[Y^H, X^H\right]) \\
&= \omega(\left[Y^H, X^H\right] - I^D\left[Y^H, X^H\right]) \\
&= \omega((\left[Y,X\right]^H + (pR(Y,X))^V) - I^D(\left[Y,X\right]^H + (pR(Y,X))^V)) \\
&= \omega(\left[Y,X\right]^H + (pR(Y,X))^V - \left[Y,X\right]^H - I^D(pR(Y,X))^V) \\
&= \omega((pR(Y,X))^V + (pR(Y,X))^V) = 2\omega(pR(Y,X))^V
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
(\phi_{I^D}\omega)(X^H,\theta^V) &= (\phi_{I^D X^H}\omega)\theta^V \\
&= I^D X^H(\omega(\theta^V)) - X^H(\omega(I^D\theta^V)) + \omega((L_{\theta^V} I^D)X^H) \\
&= X^H(\omega(\theta^V)) + X^H(\omega(\theta^V)) + \omega((L_{\theta^V} I^D X^H - I^D L_{\theta^V} X^H)) \\
&= 2X^H(\omega(\theta^V)) + \omega(\left[\theta^V, X^H\right] - I^D\left[\theta^V, X^H\right]) \\
&= 2X^H(\omega(\theta^V)) + \omega(-(\nabla_X\theta)^V + I^D(\nabla_X\theta)^V) \\
&= 2X^H(\omega(\theta^V)) + \omega(-(\nabla_X\theta)^V - (\nabla_X\theta)^V) \\
&= 2X^H(\omega(\theta^V)) - 2\omega(\nabla_X\theta)^V
\end{aligned}
$$

iii)

$$
\begin{aligned}
(\phi_{I^D}\omega)(\theta^V,Y^H) &= (\phi_{I^D\theta^V}\omega)Y^H \\
&= I^D\theta^V(\omega(Y^H)) - \theta^V(\omega(I^D Y^H)) + \omega((L_{Y^H} I^D)\theta^V) \\
&= -\theta^V(\omega(Y^H)) - \theta^V(\omega(Y^H)) + \omega(\left[Y^H, I^D\theta^V\right] - I^D\left[Y^H,\theta^V\right]) \\
&= -2\theta^V(\omega(Y^H)) + \omega(-\left[Y^H,\theta^V\right] - I^D\left[Y^H,\theta^V\right]) \\
&= -2\theta^V(\omega(Y^H)) + \omega(-(\nabla_Y\theta)^V - I^D(\nabla_Y\theta)^V) \\
&= -2\theta^V(\omega(Y^H)) + \omega(-(\nabla_Y\theta)^V + I^D(\nabla_Y\theta)^V) = -2\theta^V(\omega(Y^H))
\end{aligned}
$$

iv)

$$
\begin{aligned}
(\phi_{I^D}\omega)(\theta^V,\xi^V) &= (\phi_{I^D\theta^V}\omega)\xi^V \\
&= I^D\theta^V(\omega(\xi^V)) - \theta^V(\omega(I^D\xi^V) + \omega(L_{\xi^V} I^D)\theta^V \\
&= -\theta^V(\omega(\xi^V) + \theta^V(\omega(\xi^V)) + \omega(\left[\xi^V, I^D\theta^V\right] - I^D\left[\xi^V,\theta^V\right]) \\
&= \omega(\left[\xi^V, -\theta^V\right] - I^D\left[\xi^V,\theta^V\right]) = \omega(-\left[\xi^V,\theta^V\right] - I^D\left[\xi^V,\theta^V\right] = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. (43)' de tanımlanan bir almost parakompleks yapı $I^D \in \Im_1^1(T^*(M^n))$ ve M^n üzerindeki Tachibana operatörü de ϕ_{I^D} olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i) $\phi_{I^D\theta^V} X^C = 0,$

ii) $\phi_{I^D Y^H} \theta^V = 2(\nabla_Y \theta)^V,$

iii) $\phi_{I^D\theta^V} X^H = 0,$

iv) $\phi_{I^D\theta^V} \xi^V = 0,$

v) $\phi_{I^D Y^H} X^H = -2(p(R(X,Y))^V,$

vi) $\phi_{I^D Y^H} X^C = -2(p(L_X \nabla)_Y)^V,$ (47)

L_X için X'e göre Lie türev operatörü, $X \in \Im_0^1(M^n)$'nin komple ve horizontal liftleri $X^C, Y^H \in \Im_0^1(T^*(M^n))$ ve $\xi, \theta, \omega \in \Im_1^0(M^n)$' nin vertikal liftleri de $\xi^V, \theta^V, \omega^V \in \Im_0^1(T^*(M^n))$ şeklinde ifade edilir.

İspat. (37), (43), (44) ve Tanım 4' den

i)

$$\begin{aligned}\phi_{I^D\theta^V} X^C &= -(L_{X^C} I^D)\theta^V = -(L_{X^C} I^D\theta^V - I^D L_{X^C}\theta^V) = -(-L_{X^C}\theta^V - I^D L_{X^C}\theta^V)\\ &= (L_X\theta)^V + I^D(L_X\theta)^V = (L_X\theta)^V - (L_X\theta)^V = 0\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\phi_{I^D Y^H}\theta^V &= -(L_{\theta^V} I^D)Y^H = -(L_{\theta^V} I^D Y^H - I^D L_{\theta^V} Y^H) = -L_{\theta^V} Y^H + I^D L_{\theta^V} Y^H\\ &= -(-(\nabla_Y\theta)^V) + I^D(-(\nabla_Y\theta)^V) = (\nabla_Y\theta)^V - I^D(\nabla_Y\theta)^V = 2(\nabla_Y\theta)^V\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}(\phi_{I^D\theta^V} X^H) &= -(L_{X^H} I^D)\theta^V = -(L_{X^H} I^D\theta^V - I^D L_{X^H}\theta^V)\\ &= -(-L_{X^H}\theta^V - I^D(\nabla_X\theta)^V) = -(-(\nabla_X\theta)^V + (\nabla_X\theta)^V)\\ &= (\nabla_X\theta)^V - (\nabla_X\theta)^V = 0\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}(\phi_{I^D\theta^V}\xi^V) &= -(L_{\xi^V} I^D)\theta^V = -(L_{\xi^V} I^D\theta^V - I^D L_{\xi^V}\theta^V)\\ &= -(-L_{\xi^V}\theta^V - I^D L_{\xi^V}\theta^V) = L_{\xi^V}\theta^V - I^D L_{\xi^V}\theta^V = 0\end{aligned}$$

v)

$$
\begin{aligned}
\phi_{I^D Y^H} X^H &= -(L_{X^H} I^D) Y^H = -(L_{X^H} I^D Y^H - I^D L_{X^H} Y^H) = -L_{X^H} Y^H + I^D L_{X^H} Y^H \\
&= -([X,Y]^H + (pR(X,Y))^V) + I^D([X,Y]^H + (pR(X,Y))^V) \\
&= -[X,Y]^H - (pR(X,Y))^V + [X,Y]^H - (pR(X,Y))^V = -2(p(R(X,Y))^V
\end{aligned}
$$

vi)

$$
\begin{aligned}
\phi_{I^D Y^H} X^C &= -(L_{X^C} I^D) Y^H = -(L_{X^C} I^D Y^H - I^D L_{X^C} Y^H) = -(L_{X^C} Y^H - I^D L_{X^C} Y^H) \\
&= -([X,Y]^H + (p(L_X \nabla)_Y)^V - I^D([X,Y]^H + (p(L_X \nabla)_Y)^V) \\
&= -[X,Y]^H - (p(L_X \nabla)_Y)^V + I^D [X,Y]^H + I^D (p(L_X \nabla)_Y)^V \\
&= -[X,Y]^H - (p(L_X \nabla)_Y)^V + [X,Y]^H - (p(L_X \nabla)_Y)^V = -2(p(L_X \nabla)_Y)^V
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.3. Kotanjant Demet İçerisinde Diagonal Liftlere Göre Vishnevskii Operatörün $1-$Forma Uygulanışı ve Almost Parakompleks Yapının Vertikal, Komple ve Horizontal Liftlere Göre Kovaryant Türevleri.

Tanım 3.3.1. M^n üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ ve $\varphi \in \Im_1^1(M^n)$ olsun. Biz herhangi bir $X, Y \in \Im_0^1(M^n)$ için Tanım 4' deki d şartını

$$
d')\psi_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X} Y - \varphi \nabla_X Y
$$

bağıntısı ile yer değiştirebiliriz.

O zaman M^n de Vishnevskii operatörü veya ψ_φ-operatörü olarak yeni bir operatör düşünebiliriz. $\psi_\varphi : \overset{*}{\Im}(M^n) \to \Im(M^n)$ dönüşümü Tanım 4 deki a), b), c), e) şartlarını ve $d')$ şartlarını sağlayan bir dönüşümdür (1,4,9).

$\omega \in \Im_1^0(M)$ olsun. Tanım 5 den aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$
\begin{aligned}
(\psi_\varphi \omega)(X,Y) &= (\psi_{\varphi X} \omega) Y \\
&= (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_{\varphi Y} \omega) - \omega(\nabla_{\varphi X} Y - \varphi(\nabla_X Y)) \\
&= (\nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X (\omega \circ \varphi)) Y
\end{aligned} \tag{48}
$$

(48) den $\psi_{\varphi X} \omega = \nabla_{\varphi X} \omega - \nabla_X (\omega \circ \varphi)$ ifadesinin sonucu $1-$ formdur. Ayrıca $X, Y \in \Im_0^1(M)$, ve $(\omega \circ \varphi) Y = \omega(\varphi Y)$ dir.

Teorem 3.3.1. M^n de Vishnevskii operatörü ψ_{I^D} ve (43) bağıntısında tanımlanan $I^D \in \Im_1^1(T^*(M^n))$ almost parakompleks yapısı için aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
&\textbf{i)} \quad (\psi_{I^D}\omega)(X^H, Y^H) = 0,\\
&\textbf{ii)} \quad (\psi_{I^D}\omega)(X^H, \theta^V) = 2X^H(\omega(\theta^V)) - 2\omega(\nabla_X\theta)^V,\\
&\textbf{iii)} \quad (\psi_{I^D}\omega)(\theta^V, Y^H) = -2\theta^V(\omega(Y^H)),\\
&\textbf{iv)} \quad (\psi_{I^D}\omega)(\theta^V, \xi^V) = 0,
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Burada M^n den $T^*(M^n)$' ye bir afin konneksiyon ∇' nin horizontal lift ∇^H, $X \in \Im_0^1(M^n)$' nin komple ve horizontal liftleri $X^C, Y^H \in \Im_0^1(T^*(M^n))$ ve $\xi, \theta, \omega \in \Im_1^0(M^n)$' nin vertikal liftleri de $\xi^V, \theta^V, \omega^V \in \Im_0^1(T^*(M^n))$ şeklinde ifade edilir.

İspat. (48) ve Tanım 5 den,

i)

$$
\begin{aligned}
(\psi_{I^D}\omega)(X^H, Y^H) = (\psi_{I^D X^H}\omega)Y^H &= I^D X^H(\omega Y^H) - X^H(\omega(I^D Y^H))\\
&\quad - \omega(\nabla^H_{I^D X^H} Y^H - I^D(\nabla^H_{X^H} Y^H))\\
&= X^H(\omega(Y^H)) - X^H(\omega(Y^H))\\
&\quad - \omega(\nabla^H_{X^H} Y^H - I^D(\nabla_X Y^H))\\
&= -\omega((\nabla_X Y)^H - (\nabla_X Y)^H) = 0
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
(\psi_{I^D}\omega)(X^H, \theta^V) = (\psi_{I^D X^H}\omega)\theta^V &= I^D X^H(\omega(\theta^V)) - X^H(\omega(I^D\theta^V))\\
&\quad - \omega(\nabla^H_{I^D X^H}\theta^V - I^D(\nabla^H_{X^H}\theta^V))\\
&= X^H(\omega(\theta^V)) + X^H(\omega(\theta^V)) - \omega(\nabla^H_{X^H}\theta^V - I^D(\nabla_X\theta)^V)\\
&= 2X^H(\omega(\theta^V)) - \omega((\nabla_X\theta)^V + (\nabla_X\theta)^V)\\
&= 2X^H(\omega(\theta^V)) - 2\omega(\nabla_X\theta)^V
\end{aligned}
$$

iii)

$$(\psi_{I^D}\omega)(\theta^V, Y^H) = (\psi_{I^D\theta^V}\omega)Y^H$$
$$= I^D\theta^V(\omega(Y^H)) - \theta^V(\omega(I^DY^H)) - \omega(\nabla^H_{I^D\theta^V}Y^H - I^D(\nabla^H_{\theta^V}Y^H))$$
$$= -\theta^V(\omega(Y^H)) - \theta^V(\omega(Y^H)) - \omega(\nabla^H_{\theta^V}Y^H - I^D(\nabla^H_{\theta^V}Y^H))$$
$$= -2\theta^V(\omega(Y^H))$$

iv)

$$(\psi_{I^D}\omega)(\theta^V, \xi^V) = (\psi_{I^D\theta^V}\omega)\xi^V$$
$$= I^D\theta^V(\omega(\xi^V)) - \theta^V(\omega(I^D\xi^V)) - \omega(\nabla^H_{I^D\theta^V}\xi^V - I^D(\nabla^H_{\theta^V}\xi^V))$$
$$= -\theta^V(\omega(\xi^V)) + \theta^V(\omega(\xi^V)) - \omega(-\nabla^H_{\theta^V}\xi^V - I^D(\nabla^H_{\theta^V}\xi^V))$$
$$= \omega\nabla^H_{\theta^V}\xi^V + I^D(\nabla^H_{\theta^V}\xi^V) = 0$$

Teorem 3.3.2. (43) bağıntısında tanımlanan bir almost parakompleks yapı $I^D \in \Im^1_1(T^*(M^n))$ olsun. Vertikal, komple ve horizontal liftlere göre I^D nin aşağıdaki kovaryant türevleri sıfırdır.

i) $(\nabla^H_{X^H} I^D)Y^H = 0,$

ii) $(\nabla^H_{X^H} I^D)\theta^V = 0,$

iii) $(\nabla^C_{X^C} I^D)\omega^V = 0,$

iv) $(\nabla^H_{\omega^V} I^D)Y^H = 0,$

v) $(\nabla^H_{\omega^V} I^D)\theta^V = 0,$

vi) $(\nabla^C_{\omega^V} I^D)\theta^V = 0,$

M^n den $T^*(M^n)$' ye bir afin konneksiyon ∇' nin horizontal lift ∇^H, $X \in \Im^1_0(M^n)$' nin komple ve horizontal liftleri $X^C, Y^H \in \Im^1_0(T^*(M^n))$ ve $\omega, \theta \in \Im^0_1(M^n)$'nin vertikal liftleri de $\omega^V, \theta^V \in \Im^1_0(T^*(M^n))$ şeklinde ifade edilir.

İspat. (43), (44), Tanım 2, Önerme 1, Önerme 2' den

i)
$$\begin{aligned}(\nabla^H_{X^H} I^D)Y^H &= \nabla^H_{X^H} I^D Y^H - I^D(\nabla^H_{X^H} Y^H)\\ &= \nabla^H_{X^H} Y^H - I^D(\nabla_X Y)^H = (\nabla_X Y)^H - (\nabla_X Y)^H = 0\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}(\nabla^H_{X^H} I^D)\theta^V &= \nabla^H_{X^H} I^D \theta^V - I^D(\nabla^H_{X^H} \theta^V)\\ &= -\nabla^H_{X^H} \theta^V - I^D(\nabla_X \theta)^V = -(\nabla_X \theta)^V + (\nabla_X \theta)^V = 0\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}(\nabla^C_{X^C} I^D)\omega^V &= \nabla^C_{X^C} I^D \omega^V - I^D \nabla^C_{X^C} \omega^V = -\nabla^C_{X^C} \omega^V - I^D(\nabla_X \omega)^V\\ &= -(\nabla_X \omega)^V + (\nabla_X \omega)^V = 0\end{aligned}$$

iv)
$$\begin{aligned}(\nabla^H_{\omega^V} I^D)Y^H &= \nabla^H_{\omega^V} I^D Y^H - I^D \nabla^H_{\omega^V} Y^H\\ &= \nabla^H_{\omega^V} Y^H - I^D \nabla^H_{\omega^V} Y^H = 0\end{aligned}$$

v)
$$(\nabla^H_{\omega^V} I^D)\theta^V = \nabla^H_{\omega^V} I^D \theta^V - I^D \nabla^H_{\omega^V} \theta^V = -\nabla^H_{\omega^V} \theta^V - I^D \nabla^H_{\omega^V} \theta^V = 0$$

vi)
$$(\nabla^C_{\omega^V} I^D)\theta^V = \nabla^C_{\omega^V} I^D \theta^V - I^D \nabla^C_{\omega^V} \theta^V = -\nabla^C_{\omega^V} \theta^V - I^D \nabla^C_{\omega^V} \theta^V = 0$$

4.SONUÇ

Bu tez çalışması, kotanjant demet $T^*(M^n)'$ içerisinde I^D almost parakompleks yapısının (The diagonal lift I^D) kovaryant türevleri ve I^D almost parakompleks yapısına göre liftlere uygulanılan Tachibana ve Vishnevskii operatörlerini konu almıştır. İlk olarak kotanjant demet içerisinde Tachibana operatörleri, I^D almost parakompleks yapısına göre vertikal, komple, horizontal liftlere ve $1-$ forma uygulanmıştır. İkinci olarak kotanjant demet $T^*(M^n)'$ içerisinde diagonal lift I^D ye göre Vishnevskii operatörleri $1-$ forma uygulanmıştır. Son olarak da $T^*(M^n)'$ de vertikal, komple ve horizontal liftlere göre I^D nin kovaryant türevleri ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Çayır, H. 2013. Almost Parakontakt Yapılar, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, pp 108, Erzurum.

2. Yano, K. Ishihara, S. 1973. Tangent and Cotangent Bundles. *Marcel Dekker Inc*. New York.

3. Çayır, H. 2015. Some Notes on Lifts of Almost Paracontact Structures. *American Review of Mathematics and Statistics*, 3 (1): 52-60.

4. Salimov, A.A. 2013. Tensor Operators and Their applications. *Nova Science Publ*. New York.

5. Çayır, H. 2016. Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to X^H and X^V on tangent bundle $T(M)$, *Proceeding of the Institue of Mathematics and Mechanics,National Academy of Sciences of Azerbaijan*,42(1): 38-49

6. Çayır, H. Köseoğlu, G. 2016. Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to X^C and X^V on tangent bundle $T(M)$, *New Trends in Mathematical Sciences*. 4(1) : 153-159.

7. Çayır, H. 2016. Tachibana and Vishnevskii Operators Applied to *XV* and *XC* in Almost Paracontact Structure on Tangent Bundle *T*(*M*),*Ordu ¨Universitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 6 (1) : 67-82.

8. Salimov, A.A. Çayır, H. 2013. Some Notes On Almost Paracontact Structures, Comptes Rendus de 1' *Acedemie Bulgare Des Sciences*, tome 66(3): 331-338

9. Çayır, H. 2016. Tachibana and Vishnevskii Operators Applied to *XV* and *XH* in Almost Paracontact Structure on Tangent Bundle *T*(*M*),*New Trends in Mathematical Sciences,* 4 (3) : 105-115.

10. Oproui, V. 1973. Some remarkable structures and connexions, defined on the tangent bundle, *Rendiconti di Matematica* (3), 6 VI.

11. Blair. D.E 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. *Lecture Notes in Math.* Springer Verlag. New York.

12. Kruchkovich, G.I. 1972. Hypercomplex structure on a manifold, *I, Tr. Sem. Vect. Tens. Anal*. Moscow Univ. 16 : 174-201.

13. Omran, T. Sharffuddin, A. Husain, S.I. 1984. Lift of Structures on Manifolds, *Publications De 1'Instıtut Mathematıqe*. Nouvelle serie. 360 (50):93-97.

14. Sasaki, S. 1958. On The Differantial Geometry of Targent Boundles of Riemannian Mani-folds. *Tohoku Math. J*. no.10: 338-358.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Giresun'da dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Giresun'da tamamladı. 2008-2012 yılları arasında Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 2012 yılında MEB 'de öğretmenlik görevine başladı ve halen devam etmektedir. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı ve 2017 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı.Şu anda Giresun Yavuzkemal YBO'da matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.