GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ALPER AYDIN

TEMMUZ 2017

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı

...../...../......

Prof. Dr. Başak TAŞELİ

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. İmdat İŞCAN (Danışman)

Doç. Dr. Selahattin MADEN

Yrd. Doç. Dr. Sercan TURHAN

ÖZET

LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN BAZI YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

AYDIN, Alper
Giresun Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. İmdat İŞCAN
TEMMUZ 2017, 29 Sayfa

Bu tez çalışması, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için bazı yeni tip integral eşitsizliklerin elde edilmesi üzerine olup, ilk olarak çalışmamız için gerekli olan tanım ve teoremler verildi. Çalışmanın bulgular kısmında, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için farklı iki tip integral ortalaması arasındaki farklarla ilgili bazı yeni eşitsizlikler elde edildi ve elde edilen eşitsizliklerin bazı özel ortalamalara uygulamaları verildi.

Anahtar Kelimeler: İntegral eşitsizlikleri, Lipschitz fonksiyon, İntegral ortalamaları

ABSTRACT

SOME NEW INTEGRAL INEQUALITIES FOR LIPSCHITZIAN FUNCTIONS

AYDIN, Alper
University of Giresun
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İmdat İŞCAN
JULY 2017, 29 Pages

This thesis study is about obtaining some new type of integral inequalities for functions from the Lipschitz class. Firstly, definitions and theorems necessary for our study are given. In the findings of the study, some new inequalities related to the differences between the two different types of integral averages for functions from the Lipschitz class were obtained and given applications to some special means of the inequalities obtained.

Key Words: Integral Inequalities, Lipschitzian Function, Integral Means

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren her aşamada yardımını gördüğüm Hocam Sayın Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında yardımını esirgemeyen her konuda destek olan eşim Handan Aydın'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$'de bir aralık
I°	: I aralığının içi
$\subset$	: Alt küme
$\subseteq$	: Alt küme veya eşit
β	: Beta Fonksiyonu
$A = A(a, b)$	: Aritmetik Ortalama
$G = G(a, b)$	: Geometrik Ortalama
$H = H(a, b)$	: Harmonik Ortalama
$L = L(a, b)$	: Logaritmik Ortalama
$I = I(a, b)$	: İdentrik Ortalama
$L_p = L_p(a, b)$	: p −Logaritmik Ortalama
$L[a, b]$	: [a,b] aralığında integrallenebilir fonksiyonların sınıfı
${}_2F_1$	: Hipergeometrik Fonksiyon

1.GİRİŞ

1.1.Amaç ve Kapsam

Eşitsizliklerin kullanım nedeni kısıtların sembolik anlatımıdır. Hayatta birçok işi yaparken kısıtlarla karşılaşırız. Sonra bu kısıtlarla bir ürün meydana getirmeye çalışırız. Bu kısıtların bazen alt sınırı bazen de üst sınırı vardır. Bazen de aralığın içindedir. Yaşamın tam da içinde olduğu gibi...

Bu sebepledir ki eşitsizlik teorisi Matematik içerisinde önemli yer tutar. Tarih boyunca birçok bilim adamı bu teori üzerine yoğunlaşmış ve ürünler ortaya çıkarmıştır. Eşitsizlikler üzerine ilk gerçekçi çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewad ve Polya tarafından "Inequalities" adlı kitapta toplanmıştır (1).

Bu çalışmada eşitsizliklerin kullanım alanları ile ilgili ayrıntılı çalışmalar yer almaktadır.İlerleyen dönemde E.F.Beckenbach, R.Bellman, Mitrinovic, Pecaric, Fink de bu alanda çalışmalar yapmışlardır(2).

Konvekslik ile ilgili çalışmaların temeli M.Ö.3. yüzyıla kadar dayanmaktadır. İlk olarak Arşimet'in π değerini hesaplamasıyla başlar. Fakat yüzyıllar boyu elle tutulur bir gelişme olmamış ta ki Hermite'in 1881 yılında elde ettiği bir sonuçla tekrar gündeme gelmiştir. Asıl olarak konveksliği Jensen ele almaktadır. 1905 yılından sonra Jensen'in yaptığı çalışmalar bilim adamları tarafından kabul görmüştür. Konveks fonksiyonlar ile ilgili eşitsizlikler ise Beckenbach ve Bellman (1961), Mitrinovic (1970) gibi araştırmacılar kitaplarında yer vermiştir. Başlı başına konveks fonksiyonlar için eşitsizlik içeren ilk kaynağı 1987 yılında Pecaric yazmıştır (3).

20. yüzyılda konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik teorisi üzerine onlarca bilim adamı çalışmıştır. Yakın zamanda eşitsizlik teorisi Matematikçiler tarafından yakından takip edilmekte ve ilgi görmektedir.Bilinen eşitsizliklerden daha genel veya daha özel durumlar çalışılmaktadır.

Son yıllarda Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için çalışılmıştır (4,5).

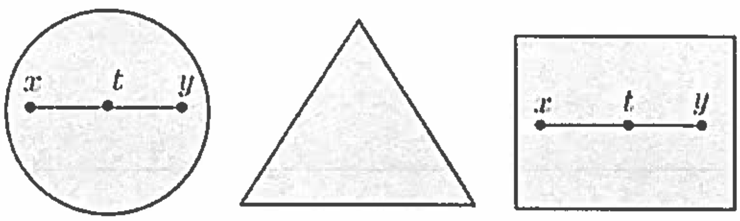
Bu çalışmada M-Lipschitz Fonksiyonları için bazı yeni tip integral eşitsizlikleri elde edildi.

1.2.Genel Kavramlar

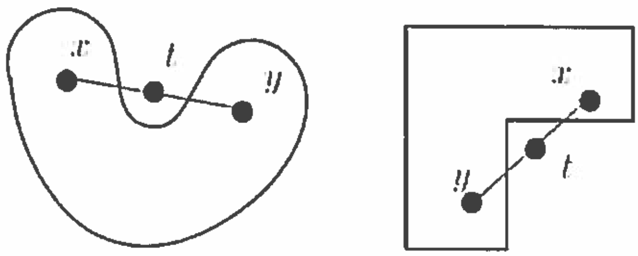
Tanım 1.2.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$$B = \{z \in L : z = tx + (1-t)y \quad ,0 \le t \le 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümedir (6).



Şekil 1.1. Konveks kümeler



Şekil 1.2. Konveks olmayan kümeler

Konveks küme tanımına göre, $\mathbb{R}$ deki her bir aralık $\mathbb{R}$ nin bir konveks alt kümesidir.

Tanım 1.2.2. (Konveks Fonksiyon): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

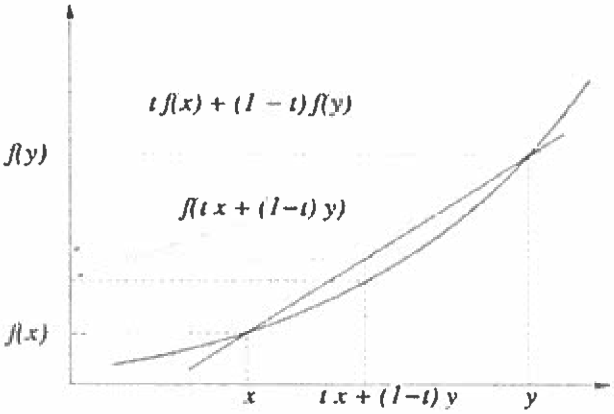
Şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir

Yukarıdaki tanımı şu şekilde de ifade edebiliriz: Eğer $B = \{(x, y): y \geq f(x), x \in I\}$ kümesi konveks ise fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Eğer $\alpha \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartındaki "$\leq$" yerine "<" gelir, yani ;

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir (7).



Şekil 1.3 Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Tanım 1.2.3.(Konveks Fonksiyonların Özellikleri):

a) Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

b)$f: I \to \mathbb{R}$ konveksfonksiyon ise I°' de $f'_{-}(x)$ ve $f'_{+}(x)$ vardır ve ayrıca artandır.

c)$f: I \to \mathbb{R}$konveks fonksiyonu I açık aralığında konvekslik sağlanıyor ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve de süreklidir.

d) k tane fonksiyon $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyon mevcut olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x), a_j > 0 ; (j = 1, 2, \ldots, k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

Teorem 1.2.1. f , fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise;

a) $f, (a, b)$ aralığında süreklidir.

b) $f, [a, b]$ aralığında sınırlıdır(9).

Tanım 1.2.4. (M-Lipschitz Şartı): $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\forall x, y \in I \text{için} |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

ise f ye I üzerinde M-Lipschitzşartını sağlıyor denir (10).

Teorem 1.2.2. $f: I \to \mathbb{R}$ konveks ise, I^0 da bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz koşulunu sağlar (8).

İspat. I, da bir $\varepsilon > 0$ alalım. $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset$ I, m ve M , f'nin bu aralıkta alt ve üst sınırları olsun. x ve y, $[a, b]$ kapalı aralığının ayrık noktaları ise

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y - x|}(y - x)$$

$$\lambda = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|}$$

O zaman

$$z \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon], \qquad y = \lambda z + (1 - \lambda)x$$

bulunur.

$$f(y) - \lambda f(z) + (1 - \lambda) f(x) = \lambda [f(z) - f(x)] + f(x)$$

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(M - m) < \frac{|y - x|}{\varepsilon}(M - m) = K|y - x|$$

Burada $K = \frac{(M-m)}{\varepsilon}$ dir.

Herhangi bir $x, y \in [a, b]$için doğru olduğundan $|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$ ifadesi istenilen sonuçtur.

Tanım 1.2.5. (Harmonik Konvekslik): $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$bir aralık olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$,

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y)+(1-t)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon, eğer eşitsizlikte "≤" yerine "≥" kullanılırsa, bu durumda f'ye harmonik konkav fonksiyon denir (11).

Teorem 1.2.3. (Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): I, $\mathbb{R}$ de bir aralık, $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f, I da tanımlı konveks fonksiyon ve $a, b \in I$ ve $a < b$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine literatürde konveks fonksiyonlar için hermite hadamard integral eşitsizliği denir (8).

İspat. f fonksiyonu konveks olduğundan $[a, b]$ aralığında sınırlı ve süreklidir. Bundan dolayı' f, $[a, b]$ de integrallenebilir.

Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı için $x = ta+(1-t)b, t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

$$\leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafı için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Elde edilen birinci integralde $x=a+\frac{t(b-a)}{2}$ değişken değişimi ve ikinci integralde $x=b-\frac{t(b-a)}{2}$ değişken değişimleri yapılırsa, buradan

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

ve

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx=-\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde yazılır. f 'nin konveksliğini kullanırsak

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq\int_0^1 f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)dt=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir.

Teorem 1.2.4. (Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği): $f: I \subset \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon $a, b \in I,\ a < b$ olsun. Eğer, $f \in L[a,b]$ ise

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{a-b}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine harmonik konveks fonksiyonlar için hermite hadamard eşitsizliği denir (12,13).

İspat. $f: I \to \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon ise her $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte keyfi $t \in [0,1]$ için

$$x = \frac{ab}{ta+(1-t)b}, \qquad y = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$$

seçersek

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizliğin her iki tarafının, t ye göre $[0,1]$ üzerinden integralini alırsak

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt + \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. İntegrallerin her biri

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$$

değerine eşit olduğundan, eşitsizlik (2.3) 'ün sol tarafını (2.4) ten elde ederiz. (2.2) eşitsizliği kullanılarak, $x = a,\ y = b$ ve t ye göre $[0,1]$ aralığında integral alınırsa ikinci eşitsizliğin ispatını yapmış oluruz.

Şimdi de $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ fonksiyonu'nu göz önüne alalım. Böylece her $x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1$$

elde edilir. Bu yüzden $(0,\infty)$ üzerinde f fonksiyonu harmonik konvekstir. Burada

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = 1, \qquad \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx = 1, \qquad \frac{f(a)+f(b)}{2} = 1$$

olduğundan(2.3) te eşitlik olduğu açıkça görülür.

Tanım 1.2.6.(Hipergeometrik Fonksiyon): ${}_2F_1\ (a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1\ (a,b;c;z) = \frac{1}{\beta(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt, c > b > 0, |z| < 1$$

şeklinde integral gösterimi ile tanımlanır (14).

Tanım 1.2.7.(Beta fonksiyonu): $m,n > 0$ için,

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

biçiminde tanımlanan iki değişkenli fonksiyona *Beta Fonksiyonu* denir.

Teorem 1.2.5.(Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için;

$$|x+y| \le |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \le |x-y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \le |x+y|,$$

ve tümevarım metodu ile

$$\left||x_1| + \cdots + |x_n|\right| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (3).

Teorem 1.2.6. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu):f, $[a, b]$aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun.Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eşitsizliği geçerlidir (3).

Tanım 1.2.8.(İki Pozitif Sayı için Ortalamalar):$a ve b$ iki pozitif reel sayı olmak üzere;

(1) Aritmetik Ortalama:

$$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

(2) Geometrik Ortalama:

$$G = G(a,b) = \sqrt{ab}$$

(3) Harmonik Ortalama:

$$H = H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

(4) Logaritmik Ortalama:

$$L = L(a,b) = \begin{cases} a & , \quad a = b \\ \dfrac{b-a}{lnb - lna}, & a \neq b \end{cases}$$

(5)Identrik Ortalama:

$$I = I(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^a}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & ,a \neq b \end{cases}$$

(6)p −Logaritmik Ortalama: $(p \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\})$

$$L_p = L_p(a,b) = \begin{cases} a, & a = b \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & ,a \neq b \end{cases},$$

ortalamaları vardır.

Bu ortalamalar arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

2. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, çalışmamızın bulgular kısmında elde edilen sonuçlarımıza çözüm tekniği ve ispat yöntemi açısından yol gösteren (4) numaralı kaynakta elde edilen bazı sonuçlar ispatları ile verilmiştir.

Teorem 2.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I üzerinde M-Lipschitz fonksiyon ve $a, b \in I,\ a < b$ için,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M}{4}(b-a) \tag{2.1}$$

ve

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M}{3}(b-a) \tag{2.2}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $t \in [0,1]$olsun. $\forall a, b \in I$ için

$$\begin{aligned} &|tf(a) + (1-t)b - f[ta + (1-t)b]| \\ &\leq t|f(a) - f(ta + (1-t)b)| + (1-t)|f(b) - f(ta + (1-t)b)| \\ &\leq tM|a - (ta + (1-t)b)| + (1-t)M|b - (ta + (1-t)b)| \\ &= 2t(1-t)M|b-a| \end{aligned} \tag{2.3}$$

Burada $t = \frac{1}{2}$ seçilirse

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{M}{2}|b-a| \tag{2.4}$$

bulunur. Sırasıyla, a, b yerine $ta + (1-t)$ ve $(1-t)a + tb$ yazılırsa

$$\left|\frac{f[ta+(1-t)b]+f[(1-t)a+tb]}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{M|2t-1|}{2}|b-a| \tag{2.5}$$

$\forall t \in [0,1]$. Eğer (2.5) eşitsizliğinin $[0,1]$ aralığında integralini alırsak

$$\left|\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f[ta+(1-t)b]dt+\int_0^1 f[(1-t)a+tb]dt\right\}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{M|b-a|}{2}\int_0^1 |2t-1|dt$$

Bu nedenle

$$\int_0^1 f[ta+(1-t)b]dt) = \int_0^1 f[(1-t)a+tb]dt$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ve

$$\int_0^1 |2t-1|dt = \frac{1}{2}$$

(2.1) eşitsizliğini elde ederiz.

Daha önce not aldığımız (2.3) eşitsizliğinde

$$|tf(a)+(1-t)b-f[ta+(1-t)b]| \leq 2t(1-t)M|b-a|$$

$\forall t \in [0,1]\,, a,b \in I \; ve \; a<b$ için $[0,1]$ aralığında integral alınırsa

$$\left|f(a)\int_0^1 tdt+f(b)\int_0^1 (1-t)dt-\int_0^1 f[ta+(1-t)b]dt\right|$$
$$\leq 2M(b-a)\int_0^1 t(1-t)dt$$

Bundan dolayı

$$\int_0^1 tdt = \int_0^1 (1-t)dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{6},$$

ile

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{M}{3}(b-a)$$

(2.2) eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.1. $f: \mathrm{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I aralığı üzerinde konveks ve türevlenebilen bir fonksiyon,$a, b \in I$ öyle ki $a < b$ ve $M = sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ olsun. Bu taktirde

$$0 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{M}{4}(b-a) \tag{2.6}$$

ve

$$0 \le \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{M}{3}(b-a) \tag{2.7}$$

dır.

İspat. Ortalama Değer Teoreminden bu ispat açıktır. Teorem 2.1. den

$$|f(x)-f(y)| = |x-y||f'(c)| \le M|x-y|,$$

yazılır.

Sonuç 2.2. (1) $p \ge 1$ *ve* $a, b \in \mathbb{R}$ *ile* $0 \le a < b$ olmak üzere

$$0 \le \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \le \frac{pb^{p-1}}{4}(b-a)$$

ve

$$0 \le \frac{a^p-b^p}{2} - \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \le \frac{pb^{p-1}}{3}(b-a)$$

eşitsizlikleri vardır.

(2) $a, b \in \mathbb{R}$ *ile* $0 < a < b$

$$0 \le \frac{lnb-lna}{b-a} - \frac{2}{a+b} \le \frac{1}{4a^2}(b-a)$$

ve

$$0 \leq \frac{a+b}{2ab} - \frac{lnb - lna}{b-a} \leq \frac{1}{3a^2}(b-a)$$

eşitsizlikleri vardır.

(3) $a, b \in \mathbb{R}\, ile\; a < b$

$$0 \leq \frac{exp(b) - exp(a)}{b-a} - exp\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{exp(b)}{4}(b-a)$$

ve

$$0 \leq \frac{exp(a) + exp(b)}{2} - \frac{exp(b) - exp(a)}{b-a} \leq \frac{exp(b)}{3}(b-a)$$

eşitsizlikleri vardır.

(4) $a, b \in \mathbb{R}\, ile\; 0 < a < b$

$$1 \leq e\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{1/(b-a)} \frac{a+b}{2} \leq exp\left(\frac{1}{4a}(b-a)\right)$$

ve

$$1 \leq \frac{\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}}{e\sqrt{ab}} \leq exp\left(\frac{1}{3a}(b-a)\right)$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat.

(1) Sonuç 2.1 de $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = x^p$ konveks dönüşümü uygulanırsa ispat tamamlanır.

(2) Sonuç 2.1 de $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = \frac{1}{x}$konveks dönüşümü uygulanırsa ispat tamamlanır.

(3) Sonuç 2.1 de açıkça görüldüğü gibi R üzerinde tanımlı $f(x) = e^x$ konveks dönüşümü uygulanırsa ispat tamamlanır.

(4) Sonuç 2.1 de $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = -lnx$ konveks dönüşümü uygulanırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 2.3. (1) $a, b \in \mathbb{R}\, ile\ a < b\ ve\ k \in \mathbb{N}$

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} - \frac{b^{2k+2} - a^{2k+2}}{(2k+2)(b-a)}\right| \leq \frac{(2k+1)max\{a^{2k}, b^{2k}\}}{4}(b-a)$$

ve

$$\left|\frac{a^{2k+1} + b^{2k+1}}{2} - \frac{b^{2k+2} - a^{2k+2}}{(2k+2)(b-a)}\right| \leq \frac{(2k+1)max\{a^{2k}, b^{2k}\}}{3}(b-a)$$

eşitsizlikleri vardır.

(2) $a, b \in \mathbb{R}\, ile\ a < b$

$$\left|\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\sin b - \sin a}{b-a}\right| \leq \frac{b-a}{4}$$

ve

$$\left|\frac{\cos a + \cos b}{2} - \frac{\sin b - \sin a}{b-a}\right| \leq \frac{b-a}{3},$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat.(1) Teorem 2.1 e $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = x^{2k+1}$ dönüşümü uygulanırsa ispat tamamlanır.

(2) Teorem 2.1 e $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = cos\, x$ dönüşümü uygulanırsa ispat tamamlanır (4,5).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için farklı tip integral ortalamaları arasındaki farklarla ilgili yeni bazı eşitsizlikler elde edilecektir.

Teorem 3.1. $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I üzerinde bir M-Lipschitz fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{6b} \; {}_2F_1(1,2;4;1-\frac{a}{b})$$

İspat. f, I üzerinde M-Lipschitz fonksiyon olduğundan $\forall x,y \in [a,b]$ için;

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

dir.

Burada $t \in [0,1]$ keyfi sayısı için,

$$x = tb + (1-ta)$$

alınırsa

$$\left| f[(\mathrm{tb} + (1-\mathrm{ta})] - f(\frac{ab}{ta+(1-t)b}) \right| \leq M \left| (\mathrm{tb} + (1-\mathrm{ta}) - \frac{ab}{ta+(1-t)b} \right|$$

$$\leq M \left| \frac{t^2ab + t(1-t)(b^2+a^2) + (1-t)^2ab - ab}{ta+(1-t)b} \right|$$

$$= \frac{Mt(1-t)(b-a)^2}{ta+(1-t)b}.$$

Sonuç olarak

$$\left| f(tb + (1-ta) - f(\frac{ab}{ta+(1-t)b}) \right| \leq \frac{M(b-a)^2(b-a)^2}{b-t(b-a)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte t ye göre [0,1] üzerinden integral alınırsa

$$\left|\int_0^1 f[tb+(1-t)a]dt - \int_0^1 f(\frac{ab}{ta+(1-t)b})dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 \left|f(tb+(1-t)a - f(\frac{ab}{ta+(1-t)b}dt\right|$$

$$\leq M(b-a)^2 \int_0^1 \frac{t(1-t)}{b\left[1-t\left(1-\frac{a}{b}\right)\right]}dt$$

$$= \frac{M(b-a)^2}{b} \; {}_2F_1\left(1{,}2;4;1-\frac{b}{a}\right)\beta(2{,}2)$$

Eşitsizliğin sol tarafındaki integrallerde sırasıyla $u = tb + (1-t)a$ ve $u = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$ değiştirmeleri yapılırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| \leq \frac{M(b-a)^2}{6b} \; {}_2F_1\left(1{,}2;4;1-\frac{a}{b}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.1. $p \in (1,\infty)\backslash\{2\}$ ve $a,b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$ olsun. Bu taktirde

$$|L_p^p - G^2 L_{p-2}^{p-2}| \leq \frac{pb^{p-2}(b-a)^2}{6} \; {}_2F_1\left(1{,}2;4;1-\frac{a}{b}\right).$$

İspat. Teorem 3.1 de eşitsizliğin sol tarafına $[a,b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = x^p$ konveks dönüşümü uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b x^p dx - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{x^p}{x^2}dx\right|$$

bulunur. Burada integral hesaplanırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b x^p dx - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{x^p}{x^2}dx\right| = \left|\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(b-a)(p+1)} - \frac{ab(b^{p-1}-a^{p-1})}{(b-a)(p-1)}\right|$$

$$= \left|L_p^p - G^2 L_{p-2}^{p-2}\right|.$$

Sonuç 2.1 de $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, konveks ve türevlenebilen bir aralık ve $a, b \in I$ öyle ki $a < b$ ise $M = sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ olduğunu belirtmiştik. Buradan,

$$\left|L_p^p - abL_{p-2}^{p-2}\right| \leq \frac{pb^{p-2}(b-a)^2}{6} \; {}_2F_1(1{,}2; 4; 1 - \frac{a}{b})$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme3.2. $p \in (1, \infty)\backslash\{2\}$ve $a, b \in \mathbb{R},\ 0 < a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left|L^{-1} - \frac{A}{G^2}\right| \leq \frac{(b-a)^2}{6ba^2} \; {}_2F_1\left(1{,}2; 4; 1 - \frac{a}{b}\right).$$

İspat. Teorem 3.1. de eşitsizliğin sol tarafına $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = \frac{1}{x}$ konveks dönüşümü uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du\right| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b u^{-1}du - \frac{ab}{b-a}\int_a^b u^{-3}du\right|$$

$$= \left|L^{-1} - \frac{A}{G^2}\right|$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı için Sonuç 2.1. den $M = sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ alınırsa $M = 1/a^2$ olup,

$$\left|L^{-1} - \frac{A}{G^2}\right| \leq \frac{(b-a)^2}{6ba^2} \; {}_2F_1(1{,}2; 4; 1 - \frac{a}{b})$$

yazılır.

Teorem 3.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I üzerinde bir M-Lipschitz fonksiyon $a, b, x, y \in I$

$a \leq x < y$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| \leq \frac{M}{2}[|b-y| + x - a]$$

.

İspat. f, I üzerinde M-Lipschitz fonksiyon olduğundan $\forall v, w \in I$ için;

$$|f(v) - f(w)| \leq M|v - w|$$

dir. Burada $t \in [0,1]$ keyfi sayısı için,

$$v = tb + (1-t)a \text{ ve } w = ty + (1-t)x$$

alınırsa

$$\begin{aligned}|f[tb + (1-t)a] - f[ty + (1-t)x]| &\leq M|t(b-y) + (1-t)(a-x)| \\ &\leq M[t|b-y| + (1-t)|a-x|]\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte $[0,1]$ üzerinden t'ye göre integral alınırsa

$$\left|\int_0^1 f[tb + (1-t)a]dt - \int_0^1 f[ty + (1-t)x]dt\right|$$

$$\leq M\int_0^1 [t|b-y| + (1-t)(x-a)]dt$$

soldaki integrallerde sırasıyla $u = tb + (1-t)a$ ve $u = ty + (1-t)x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| \leq \frac{M}{2}[|b-y| + x - a]$$

elde edilir.

Önerme 3.3. $p > 1$ ve $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq x < y$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$|L_p(a,b) - L_p(x,y)| \leq \frac{pb^{p-1}}{2}[|b-y| + x - a].$$

İspat. Teorem 3.2. de eşitsizliğin sol tarafına $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = x^p$ konveks dönüşümü uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b u^p du - \frac{1}{y-x}\int_x^y u^p du\right|$$

$$= \left|\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(b-a)(p+1)} - \frac{y^{p+1}-x^{p+1}}{(y-x)(p+1)}\right|$$

$$= \left|L_p(a,b) - L_p(x,y)\right|$$

$$\leq \frac{pb^{p-1}}{2}[|b-y| + x - a]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $M = pb^{p-1}$ dir.

.**Önerme 3.4.** $a, b, x, y \in \mathbb{R},\ 0 < a \leq x < y$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left|\frac{1}{L(a,b)} - \frac{1}{L(x,y)}\right| \leq \frac{1}{2a^2}[|b-y| + x - a].$$

İspat. Teorem3.2. de eşitsizliğin sol tarafına $[a,b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = \frac{1}{x}$ konveks dönüşümü uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}dx - \frac{1}{y-x}\int_x^y \frac{1}{x}dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{b-a}ln\frac{b}{a} - \frac{1}{y-x}ln\frac{y}{x}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{L(a,b)} - \frac{1}{L(x,y)}\right|$$

elde edilir. Sonuç 2.1 in ispatına göre $M = \frac{1}{a^2}$ olup

$$\left|\frac{1}{L(a,b)} - \frac{1}{L(x,y)}\right| \leq \frac{1}{2a^2}[|b-y| + x - a]$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme 3.5. $a, b, x, y \in \mathbb{R},\ 0 < a \leq x < y$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\left|\frac{e^b - e^a}{b - a} - \frac{e^y - e^x}{y - x}\right| \leq \frac{e^b}{2}[|b - y| + x - a].$$

İspat. Teorem 3.2 de eşitsizliğin sol tarafına $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = e^x$ konveks dönüşümü uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b e^u du - \frac{1}{y-x}\int_x^y e^u du\right|$$

$$= \left|\frac{e^b - e^a}{b - a} - \frac{e^y - e^x}{y - x}\right|$$

$$\leq \frac{e^b}{2}[|b - y| + x - a]$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme 3.6. $a, b, x, y \in \mathbb{R},\ 0 < a \leq x < y$ ve $a < b$ olsun. Bu taktirde

$$|lnI(x, y) - lnI(a, b)| \leq \frac{1}{2a}[|b - y| + x - a].$$

İspat. Teorem 3.2. de eşitsizliğin sol tarafına $[a, b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = -lnx$ konveks dönüşümü uygulanırsa,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du\right| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b -lnudu - \frac{1}{y-x}\int_x^y -lnudu\right|$$

$$= \left|1 - \frac{lnb^b - lna^a}{b - a} - \left(1 - \frac{lny^y - lnx^x}{y - x}\right)\right|$$

$$= \left|-\left[ln\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right] + \left[ln\frac{1}{e}\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}\right]\right|$$

$$= |lnI(x, y) - lnI(a, b)|$$

bulunur. Sonuç 2.1. den $M = \frac{1}{a}$ olup

$$|lnI(x,y) - lnI(a,b)| \leq \frac{1}{2a}[|b-y| + x - a]$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.3. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, I üzerinde bir M-Lipschitz fonksiyon $a, b, x, y \in I$ $a \leq x < y$ ve $a < b$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du - \frac{xy}{y-x}\int_x^y \frac{f(u)}{u^2}du\right|$$
$$\leq \frac{M}{b-a}\{ax|b-y|[bL^{-1}(ay,bx) - L^{-1}(x,y)]$$
$$+ by|a-x|[L^{-1}(x,y) - aL^{-1}(ay,bx)]\}$$

İspat. f, I üzerinde M-Lipschitz fonksiyon olduğundan $\forall v, w \in$I için

$$|f(v) - f(w)| \leq M|v-w|$$

dir. Burada $t \in [0,1]$ keyfi sayısı için

$$v = \frac{ab}{ta + (1-t)b}$$

$$w = \frac{xy}{tx + (1-t)y}$$

alınırsa

$$\left|f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) - f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\right|$$

$$\leq M\left|\frac{ab}{ta+(1-t)b} - \frac{xy}{tx+(1-t)y}\right|$$

$$\leq M\left|\frac{tax|b-y| + (1-t)by|a-x|}{[ta+(1-t)b][tx+(1-t)y]}\right|$$

t ye göre integral alınırsa

$$\left|\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du - \frac{xy}{y-x}\int_x^y \frac{f(u)}{u^2}du\right|$$

$$\leq M\left\{ax|b-y|\int_0^1 \frac{t}{[ta+(1-t)b][tx+(1-t)y]}dt\right.$$

$$\left.+\, by|a-x|\int_0^1 \frac{1-t}{[ta+(1-t)b][tx+(1-t)y]}dt\right\}$$

$$= M\left\{ax|b-y|\int_0^1 \frac{t}{[b+t(a-b)][y+t(x-y)]}dt\right.$$

$$\left.+\, by|a-x|\int_0^1 \frac{t}{[a+t(b-a)][x+t(y-x)]}dt\right\}$$

$$\leq M\left\{\frac{ax|b-y|}{(b-a)(y-x)}\int_0^1 \frac{t}{\left[t+\frac{b}{a-b}\right]\left[t+\frac{y}{x-y}\right]}dt\right.$$

$$\left.+\frac{by|a-x|}{(b-a)(y-x)}\int_0^1 \frac{t}{\left[t+\frac{a}{b-a}\right]\left[t+\frac{x}{y-x}\right]}dt\right\}$$

Yukarıdaki integrallerde basit kesirlere ayırma metodu uygulanırsa

$$\int_0^1 \frac{t}{\left[t+\frac{b}{a-b}\right]\left[t+\frac{y}{x-y}\right]}dt = \frac{1}{(b-a)(y-x)}\left[ln\frac{x}{y}+\frac{b(y-x)}{ay-bx}ln\frac{ay}{bx}\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}[bL^{-1}(ay,bx) - L^{-1}(x,y)],$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\left[t+\frac{a}{b-a}\right]\left[t+\frac{x}{y-x}\right]}dt = \frac{1}{b-a}[L^{-1}(x,y) - aL^{-1}(ay,bx)]$$

elde ederiz. Bu değerler, yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 3.7. $p \in [1,\infty)\backslash\{2,3\}$ve $a,b \in \mathbb{R},\ 0 < a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}&\left|G^2(a,b)L_{p-2}^{p-2}(a,b) - G^2(x,y)L_{p-2}^{p-2}(x,y)\right| \\ &\leq \frac{pb^{p-1}}{b-a}\{ax|b-y|[bL^{-1}(ay,bx) - L^{-1}(x,y)] \\ &+ by|a-x|[L^{-1}(x,y) - aL^{-1}(ay,bx)]\}.\end{aligned}$$

İspat. Teorem 3.3 de eşitsizliğin sol tarafına $[a,b]$ üzerinde tanımlı $f(x) = x^p$ konveks dönüşümü uygulanırsa

$$\left|\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du - \frac{xy}{y-x}\int_x^y \frac{f(u)}{u^2}du\right| = \left|\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{x^p}{x^2}dx - \frac{xy}{y-x}\int_x^y \frac{x^p}{x^2}dx\right|$$

elde edilir. Burada integral alınırsa

$$= \left|\frac{ab(b^{p-3} - a^{p-3})}{(b-a)(p-3)} - \frac{xy(x^{p-3} - y^{p-3})}{(y-x)(p-3)}\right|$$

elde edilir. Sonuç 2.1. den $M = pb^{p-1}$ olup,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{ab(b^{p-3} - a^{p-3})}{(b-a)(p-3)} - \frac{xy(x^{p-3} - y^{p-3})}{(y-x)(p-3)}\right| \\ &= \left|G^2(a,b)L_{p-2}^{p-2}(a,b) - G^2(x,y)L_{p-2}^{p-2}(x,y)\right| \\ &\leq \frac{pb^{p-1}}{b-a}\{ax|b-y|[bL^{-1}(ay,bx) - L^{-1}(x,y)] \\ &+ by|a-x|[L^{-1}(x,y) - aL^{-1}(ay,bx)]\}\end{aligned}$$

yazılır.

Önerme 3.8. $p \geq 1$ ve $a,b \in \mathbb{R},\ 0 < a < b$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}&|H^{-1}(a,b) - H^{-1}(x,y)| \\ &\leq \frac{1}{a^2(b-a)}\{ax|b-y|[bL^{-1}(ay,bx) - L^{-1}(x,y)] \\ &+ by|a-x|[L^{-1}(x,y) - aL^{-1}(ay,bx)]\}.\end{aligned}$$

İspat. Teorem 3.3. de eşitsizliğin sol tarafına $[a,b]$ üzerinde tanımlı $f(x)=\frac{1}{x}$ konveks dönüşümü uygulanırsa,

$$\left|\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}du-\frac{xy}{y-x}\int_x^y \frac{f(u)}{u^2}du\right|=\left|\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\frac{1}{x}}{x^2}dx-\frac{xy}{y-x}\int_x^y \frac{\frac{1}{x}}{x^2}dx\right|$$

elde edilir. Burada integral alınırsa,

$$\frac{b+a}{2ab}-\frac{y+x}{2yx}=\left(\frac{1}{H(a,b)}-\frac{1}{H(x,y)}\right)$$

buradan,

$$\begin{aligned}&|H^{-1}(a,b)-H^{-1}(x,y)|\\&\qquad\le\frac{1}{a^2(b-a)}\{ax|b-y|[bL^{-1}(ay,bx)-L^{-1}(x,y)]\\&\qquad+by|a-x|[L^{-1}(x,y)-aL^{-1}(ay,bx)]\}\end{aligned}$$

bulunur.

4.TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen sonuçlar orijinal olup, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için farklı tip integral ortalamaları arasındaki farklarla ilgili yeni bazı eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerin önemli bir sonucu olarak, ortalamalarla ilgili yeni eşitsizlikler literatüre kazandırılmıştır. Bu çalışmadan yola çıkarak Kesirli integraller için de bazı yeni eşitsizlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Hardy,G. , Littlewood, J.E. and Polya, G. 1952. *Inequalities*. 2nd Ed.,Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
2. Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
3. Mitrinovic, D. S.,Pecaric, J., & Fink, A.M. 1993. *Classical and new inequalities in analysis* (Vol. 61). Springer Science & Business Media.Dordrecht/Boston/London.
4. S. S. Dragomir, Y. J. Cho, and S.S. Kim, "Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings and their applications," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 245, no. 2, pp. 489-501, 2000.
5. S.-R. Hwang, K.-C. Hsu, and K.-L. Tseng, "Hadamard-type inequalities for Lipschitzian functions in one and two variables with applications," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 405, no. 2, 546-554, 2013.
6. Bayraktar, M., 2000. *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi, Ankara.
7. Pečarić, J.,Proschan, F. and Tong, Y.L. 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press, Inc. , 469 pp, Boston.
8. Roberts, A.W. and Varberg, D.E. 1973. *Convex Functions*. Academic Press, 300pp,New York.
9. Azpeitia, A.G., 1994. Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana.
10. Bayraktar, M. , 2010. *Analiz*, Nobel, Ankara.
11. İşcan, İ.,2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Volume 43 (6) (2014), 935 – 942.
12. İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.
13. Zhang, K.S. and Wan, J.P. 2007. P-convex functions and their properties, *Pure Appl. Math.* 23(1), 130-133.

14. A.A. Kilbas, H.M.Srivastava and J. Trujillo, Theori and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Giresun'da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Giresun'da tamamladı. 1994 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden 1998yılında mezun oldu. Aynı yıl Giresun ilinin Keşap/Yolağzı köyünde öğretmenliğe başladı.2002 yılında GiresunLisesi'ne ardından 2012 yılında Giresun Fatih Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'ne atandı. HalenGiresun Fatih Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. 2015 yılında girdiği Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programında öğrenim görmeye devam etmektedir.