GİRESUN ÜNİVERSİTESİ FEN
BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

p −KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SIMPSON TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

NİHAN KALYONCU KONUK

HAZİRAN 2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ FEN
BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

p −KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SIMPSON TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

NİHAN KALYONCU KONUK

HAZİRAN 2017

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

(Unvan - İsim)

…./…./……

____

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans / Doktora tezi olarak ………………….. Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

(Unvan - İsim)

____

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans / Doktora tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

(Unvan -İsim)	(Unvan -İsim)
____________________	____________________
Ortak Danışman	Danışman

<u>Jüri Üyeleri</u>

………………………….	____________________
………………………….	____________________
………………………….	____________________
………………………….	____________________
………………………….	____________________

ÖZET

p-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN SIMPSON TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

KALYONCU KONUK, Nihan
Giresun Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı,
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. İmdat İŞCAN
HAZİRAN 2017, 43 sayfa

Bu tez çalışması p-konveks fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizliklerle ilgilidir. Bu tezde, öncelikle konveks, harmonik konveks ve p-konveks fonksiyonlarla ilgili bazı temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra, p-konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özel durumları olan konveks ve harmonik konveks fonksiyonlar için literatürde daha önce elde edilmiş bazı Simpson tipli eşitsizlikler verildikten sonra, tezin araştırma bulguları kısmında türevlenebilir fonksiyonlar için yeni bir özdeşlik kullanılarak, p-konveks fonksiyon sınıfı için bazı yeni Simpson tipli eşitsizlikler elde edildi.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, $\mathrm{p}-$Konveks Fonksiyon, Simpson Tipli Eşitsizlikler

ABSTRACT

SIMPSON TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR p-CONVEX FUNCTIONS

KALYONCU KONUK, Nihan

Giresun University

Graduate School of Natural and Applied Mathematics

Department of Math, M.Sc. Thesis

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. İmdat İŞCAN

JUNE 2017, 43 Pages

This thesis is concerned with Simpson type inequalities for p-convex functions. In this thesis, firstly some basic definitions and theorems about convex, harmonic convex and p-convex functions are given. Then, after giving some Simpson type inequalities previously obtained in the literature for convex and harmonic convex functions, which are p-convex functions and special cases of these functions, a new identity for the derivatiable functions is used in the thesis research findings, a basis for the p-convex function class new Simpson type inequalities were achieved.

Key Words: Convex function, p-Convex function, Simpson Type Inequalities.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı çok değerli tez danışmanım Sn. Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a ve değerli görüşleri ile katkı sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Mahir KADAKAL' a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı çok değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
I	: $\mathbb{R}$ de bir aralık
I°	: I nın içi
$\forall$	: Her
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$L[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan bilinen basit bir kavramdır. Bununla birlikte matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun yayınlanması ile ortaya çıkmıştır.

Eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan, daha az önemli sonuçlar vardır. Ama maalesef Hermite' in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-konveks fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-konveks ve p-konveks fonksiyonlar, r -konveks fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p-logaritmik ortalamalar, identrik ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır. Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmalar son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağlandığı açıkça ortadadır. Örneğin; Hadamard, Cebysev, Ostrowski, Grüss, Jensen ve Yamuk eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde önemli bir yere sahiptir.

Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından 1934'te yazılan "Inequalities" adlı kitap eşitsizlik teorisini konu alan ilk temel çalışmadır(1). Bu kitapta konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikler, problemler ve ispat yöntemleri bulunabilir. İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır. Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise “Convex Functions: Inequalities” başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların ek olarak “Inequalities

Involving Functions and Their Integrals and Derivatives”(2), “Classical and New Inequalities in Analysis” (3), “Mathematical Inequalities” (4) ve “Convex Functions and Their Applications” (5) literatürde var olan diğer kaynaklardır.

Aslında biz konveksliği sürekli olarak ve birçok yolla yaşamaktayız. Ayakta duruş pozisyonumuz, ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içine ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi korumaktadır. Aynı zamanda konveksliğin günlük yaşantımız üzerinde de büyük etkisi vardır. Bu kavram fizik, endüstri, tıp, mühendislik, veri analizi, bankacılık, sanat gibi bilim dallarının nümerik uygulamalarında da kullanılmaktadır. Öyle ki bu tür fonksiyonlar kaynakların dağılımının optimumlaştırılması problemlerinin çözümü ve şans oyunlarının dengesinin sağlanmasında dahi kullanılmaktadır.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler? "sorusu için 1978 yılında Richard Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: “Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir.

Estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

$p-$konveksliğin daha geneli olan (p, h) konvekslik ile ilgili integral eşitsizlikleri ilk kez Z.B. Fang ve R. Shi tarafından (6) da yapılmış olup daha sonra Muhammed Aslan Noor ve arkadaşları tarafından çalışmalar sürdürülmüştür(7,8).

Bu çalışmanın önemli bir yanı daha önce yapılan çalışmaların genellemesi olup özel durumlarda literatürde konveks fonksiyonlarla ilgili daha önce elde edilen çalışmalara inmektedir. Bir diğer önemi de özel durumlarda p-konveks fonksiyonlar için yeni sonuçlar elde edilir.

Bu çalışmada kullanılan özdeşlik veya elde edilecek yeni tip özdeşlikler yardımıyla $p-$konvekslik, $p-$quasi konvekslik, $(p, s)-$konvekslik, $(p, h)-$konvekslik gibi çeşitli konvekslik fonksiyon sınıfları içinde yeni çalışmalar yapılabilir.

p −konveksliğin tanımının farklı bir versiyonu İ. İşcan tarafından verilmiş olup bu tanım ile ilgili Ostrowski, Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler İ.İşcan ve arkadaşları tarafından çalışılmıştır$(9-12)$.

Biz de bu çalışmamızda, (10) da İ.İşcan tarafından verilen p −konvekslik tanımını ele aldık ve bu sınıftan olan fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizlikleri elde ettik.

2. MATERYAL VE METOD

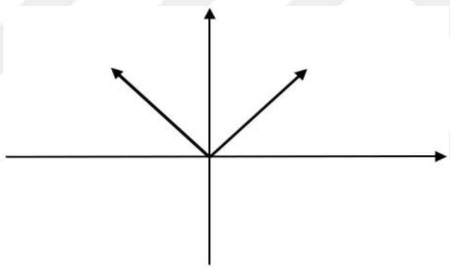
2.1.Temel Kavramlar

Bir $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

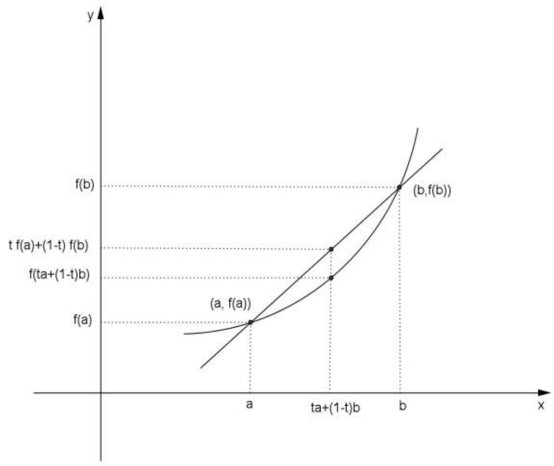
eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu konvekstir. Bu eşitsizliğin tersi alınırsa, f fonksiyonu $I \neq \emptyset$ için konkav olduğu söylenir. Bu tanım literatürde iyi bilinmektedir.

Örnek 2.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.2. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak; f' nin $ta+(1-t)b$ noktasında almış olduğu değer, $(a,f(a))$ ve $(b,f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının aynı noktada almış olduğu değerden her zaman daha küçüktür. Yani bu iki noktayı birleştiren kiriş her zaman eğrinin $[a,b]$ aralığında kalan kısmının üzerindedir. Şekil 2.2 den de görüldüğü gibi $t\in[0,1]$ olduğundan $tf(a)\leq f(a)$ dır. Benzer şekilde $(1-t)f(b)\leq f(b)$ dir. Dolayısıyla $tf(a)+(1-t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş eğrinin $[a,b]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir f konveks fonksiyonu için

$$(2.1)\qquad (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\int_a^b f(x)dx\leq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},\qquad a,b\in\mathbb{R}$$

eşitsizliği tüm $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonları için literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlik ilk olarak 1881'de Hermite tarafından bulunmuştur. Fakat bu sonuçtan matematik literatüründe hiçbir yerde bahsedilmemiştir ve Hermite'in sonucu olarak bilinmemiştir. Konveks fonksiyonların tarihi ve teorisi üzerine uzman Beckenbach, bu eşitsizliğin 1893'te Hadamard tarafından ispatlandığını yazmıştır. Böylece (2.1) eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinmektedir.

Simpson integral eşitsizliği olarak adlandırılan aşağıdaki integral eşitsizliği, literatürdeki en iyi bilinen sonuçlardan biridir.

Teorem 2.2. (Simpson İntegral eşitsizliği). $f:I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty<\infty$ olmak üzere, f fonksiyonu I° üzerinde 4. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyon olsun. Bu taktirde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{1}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty(b-a)^4.$$

Simpson tipli integral eşitsizlikleriyle ilgili referanslar için (13-15) ve bu makalelerin kaynaklarına bakılabilir.

İ.İşcan (16) da, harmonik konveks ve konkav fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

Tanım 2.1. $I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ reel bir aralık olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizliğin karşıtı sağlanıyorsa f' nin harmonik konkav olduğu söylenir.

Örnek 2.2. $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ve $g: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ olsun. f fonksiyonu harmonik konveks fonksiyon ve g harmonik konkav fonksiyondur.

Aşağıdaki önerme örnekten açıkça görülür.

Önerme 2.1. $f: I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu taktirde;

i. $I \subseteq (0, \infty)$, f konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f harmonik konvekstir.
ii. $I \subseteq (0, \infty)$, f harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f konvekstir.
iii. $I \subseteq (-\infty, 0)$, f harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f konvekstir.
iv. $I \subseteq (-\infty, 0)$, f konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f harmonik konvekstir.
v. Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi verebiliriz:

Teorem 2.1. $I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $f \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır(7,10,17,18):

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3}$$

Yukarıdaki eşitsizlik kesindir.

İspat: $f: I \to \mathbb{R}$ ye harmonik konveks fonksiyon ise her $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte keyfi $t \in [0,1]$ için,

$$x = \frac{ab}{ta+(1-t)b}, \qquad y = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$$

seçersek

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizliğin her iki tarafının, t ye göre $[0,1]$ üzerinden integralini alırsak,

(2.4) $$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt + \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. İntegrallerin her biri

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$$

değerine eşit olduğundan, eşitsizlik (2.3) 'ün sol tarafını (2.4)' ten elde ederiz. (2.2) eşitsizliği kullanılarak, $x = a,\ y = b$ ve t ye göre $[0,1]$ aralığında integral alınırsa ikinci eşitsizliğin ispatını yapmış oluruz.

Şimdi de $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylelikle her $x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1$$

elde edilir. Bu yüzden $(0,\infty)$ üzerinde f fonksiyonu harmonik konvekstir. Böylelikle

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)=1,\qquad \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx=1,\qquad \frac{f(a)+f(b)}{2}=1$$

olduğundan (2.3) te eşitlik olduğu açıkça görülür.

Zhang ve Wan tarafından $p-$konveks fonksiyon tanımı (17) de aşağıdaki gibi verilmiştir :

Tanım 2.2. I aralığı $p-$konveks küme ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left([tx^p+(1-t)y^p]^{\frac{1}{p}}\right) \le tf(x)+(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa "f ye $p-$konveks fonksiyon ya da $PC(I)$ sınıfına ait" denir.

Uyarı 2.1. $p=2k+1$, $p=\frac{n}{m}$, $n=2r+1$, $m=2t+1$ ve $k,r,t \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $[tx^p+(1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \in I$ ise I aralığına $p-$konveks küme denir (17).

Uyarı 2.2. $I \subseteq (0,\infty)$ reel aralığı ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ise her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$[tx^p+(1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \in I$$

olur.

Yukarıdaki uyarı dikkate alındığında, İ.İşcan tarafından (9) da $p-$konveks fonksiyon için aşağıdaki gibi bir tanım verilmiştir:

Tanım 2.3. $I \subseteq (0,\infty)$ bir reel aralık ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\left[tx^p+(1-t)y^p\right]^{\frac{1}{p}}\right) \le tf(x)+(1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye p −konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.3'de $I \subset (0,\infty)$, $p=1$ ve $p=-1$ alınırsa, p-konvekslik sırasıyla konvekslik ve harmonik konveksliğe indirgendiği kolayca görülebilir.

Birçok matematikçi, son yıllarda (örneğin (7-10, 17, 19, 20, 21) ve kaynakları) harmonik konveks ve p-konveks fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler konusunda bir takım çalışmalar yapmışlardır.

Örnek 2.3. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^p$, $p\neq 0$ ve $g:(0,\infty)\to R$, $g(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f ve g hem p −konveks hem de p −konkav fonksiyondur. $I\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(t)=t$ ve $p\in\mathbb{R}/\{0\}$ alırsak aşağıdaki teoremi elde ederiz(6).

Teorem 2.2. $p\in\mathbb{R}/\{0\}$, $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere, $f: I\ (0,\infty)\to\mathbb{R}$ ye p −konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde, $f\in L[a,b]$ için,

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \le \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.5}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Uyarı 2.3. (2.5) deki eşitsizliğin kesin olduğu açıktır. Gerçekten $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Böylelikle her $x,y\in(0,\infty)$ ve $t\in[0,1]$ için

$$1=f\left(\left[ta^p+(1-t)b^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)=tf(y)+(1-t)f(x)=1$$

elde edilir. Bundan dolayı f fonksiyonu (0,∞) üzerinde p −konvekstir. Ayrıca

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)=1, \qquad \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx=1\,, \qquad \frac{f(a)+f(b)}{2}=1$$

değerleri (2.5) eşitsizliğinde eşitlik olduğunu açık bir şekilde gösterir.

Önerme 2.2. $I \subseteq (0, \infty)$ bir reel aralık, $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Buna göre aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

(1) $p \leq 1$ için f, konveks ve azalmayan fonksiyon ise f, p −konvekstir.

(2) $p \geq 1$ için f, p −konveks ve azalmayan fonksiyon ise f, konvekstir.

(3) $p \leq 1$ için f, p −konkav ve azalmayan fonksiyon ise f, konkavdır.

(4) $p \geq 1$ için f, konkav ve azalmayan fonksiyon ise f, p −konkavdır.

(5) $p \geq 1$ için f, konveks ve artmayan fonksiyon ise f, p −konvekstir.

(6) $p \leq 1$ için f, $p-$ konveks ve artmayan fonksiyon ise f, konvekstir.

(7) $p \geq 1$ için f, p −konkav ve artmayan fonksiyon ise f, konkavdır.

(8) $p \leq 1$ için f, konkav ve artmayan fonksiyon ise f, p −konkavdır.

İspat: $(0, \infty)$ aralığında tanımlı $g(x) = x^p$ fonksiyonu, $p \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ için bir konveks fonksiyon ve $g(x) = x^p$, $p \in (0, 1]$ için bir konkav fonksiyondur. Gerçekten; her $x, y \in (0, \infty)$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliklerden bu durum kolayca elde edilir.

$$[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \geq tx + (1-t)y, \quad p \geq 1,$$

ve

$$[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \leq tx + (1-t)y, \quad p \leq 1.$$

Yukarıdaki önermeye göre p −konveks ve p −konkav fonksiyonlar için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.4. $f: I \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ olsun. f fonksiyonu $p \leq 1$ için p −konveks fonksiyon ve $p \geq 1$ için p −konkav fonksiyon olur.

Örnek 2.5. $f: I \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-p}$, $p \geq 1$ için f fonksiyonu p −konkav fonksiyon olur.

Örnek 2.6. $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$ ve $p \geq 1$ için f fonksiyonu p −konveks fonksiyon olur.

Örnek 2.7. $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ve $p \geq 1$ için f fonksiyonu p −konkav fonksiyon olur.

Aşağıdaki önermelerde açık bir şekilde görülür.

Önerme 2.3. $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $g: [a^p, b^p] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ için $g(t) = f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ şeklinde tanımlanırsa; f, $[a,b]$ üzerinde p −konvekstir ancak ve ancak $p > 0$ için g fonksiyonu $[a^p, b^p]$ üzerinde konvekstir ya da $p < 0$ için g fonksiyonu $[b^p, a^p]$ üzerinde konvekstir.

Uyarı 2.4. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde p −konveks ise $g(x) = f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ konveks bir fonksiyon olup, bu fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğini $[a^p, b^p]$ üzerinde aşağıdaki gibi yazarız:

$$g\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right) \leq \frac{1}{b^p - a^p} \int_{a^p}^{b^p} g(t)dt \leq \frac{g(a^p) + g(b^p)}{2}$$

Bu ise

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{1}{b^p - a^p} \int_{a^p}^{b^p} f\left(t^{\frac{1}{p}}\right) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2.6}$$

eşitsizliğine eşdeğerdir. Burada $x = t^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirmesi kullanılarak,

$$\int_{a^p}^{b^p} f\left(t^{\frac{1}{p}}\right) dt = p \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx$$

ve (2.6) eşitsizliği ile birlikte (2.5) eşitsizliğini elde ederiz.

2.2. p- Konvekslikle İlgili Literatürde Bulunan Bazı Sonuçlar

Lemma 2.1. $f: I = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ye p −konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir (8).

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{3a^p+b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f\left(\left[\frac{a^p+3b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]$$
$$\leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right]$$
$$\leq \frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

Lemma 2.2. $f: I = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ye $I°$(I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f(b)\right] - \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$
$$= \frac{b^p-a^p}{4p}\int_0^1 \frac{\mu(t)}{[(1-t)a^p+tb^p]^{1-\frac{1}{p}}} f'\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt$$

Burada

$$\mu(t) = \begin{cases} t-\frac{1}{6}, t \in \left[0,\frac{1}{2}\right), \\ t-\frac{5}{6}, t \in \left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

kümesi kullanılmıştır.

M. A. Noor, K. I. Noor ve S. Iftıkhar (8) de yukarıdaki lemmaları kullanarak, p −konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

Teorem 2.3. $f: I = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ye I°(I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$, p −konveks fonksiyon ise I üzerinde $q \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f(b)\right] - \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{(b^p - a^p)}{p}\left\{\left(C_1(p,a,b)\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[C_2(p,a,b)|f'(a)|^q + C_3(p,a,b)|f'(b)|^q\right]\right.$$

$$\left. + \left[\left(C_1(p,b,a)\right)^{1-\frac{1}{q}} C_3(p,b,a)|f'(a)|^q + C_2(p,b,a)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\},$$

Kısalık olsun diye burada aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır:

$$C_1(p,a,b) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left|t - \frac{1}{6}\right|}{\left[(1-t)a^p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt$$

$$C_1(p,b,a) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\left|t - \frac{5}{6}\right|}{\left[(1-t)a^p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt$$

$$C_2(p,a,b) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left|t - \frac{1}{6}\right|(1-t)}{\left[(1-t)a^p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt$$

$$C_2(p,b,a) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\left|t - \frac{5}{6}\right|t}{\left[(1-t)a^p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt$$

$$C_3(p,a,b) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left|t - \frac{1}{6}\right|t}{\left[(1-t)a^p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt$$

$$C_3(p,b,a) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\left|t - \frac{5}{6}\right|(1-t)}{\left[(1-t)a^p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt.$$

Teorem 2.4. $f: I = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ye $I°(I$ nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$ $p-$konveks fonksiyon ise I üzerinde $q \geq 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f(b)\right] - \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{(b^p - a^p)}{p}\left[\left(C_4(r,p;a,b)\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(C_4(r,p;b,a)\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\left|f'\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Burada aşağıdaki notasyonları kullanılmıştır:

$$C_4(r,p;a,b) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left|t - \frac{1}{6}\right|^r}{[(1-t)a^p + tb^p]^{r-\frac{r}{p}}}dt$$

$$C_4(r,p;b,a) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\left|t - \frac{5}{6}\right|^r}{[(1-t)a^p + tb^p]^{r-\frac{r}{p}}}dt.$$

Uyarı 2.5. $f: I = [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ye $I°(I$ nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$ fonksiyonu konveks fonksiyon ise I üzerinde $q > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1+2^{r+1}}{6^{r+1}(r+1)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Teorem 2.5. $f: I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ye I°(I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ve $|f'|^q$, p −konveks fonksiyon ise I üzerinde $r,q>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (8):

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq\frac{(b^p-a^p)}{p}\left(\frac{1+2^{r+1}}{6^{r+1}(r+1)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left[\left(C_5(q,p;a,b)|f'(a)|^q+C_6(q,p;a,b)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(C_6(q,p;b,a)|f'(a)|^q+C_5(q,p;b,a)|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right],$$

Burada aşağıdaki notasyonları kullanılmıştır:

$$C_5(q,p;a,b)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-t)}{[(1-t)a^p+tb^p]^{q-\frac{q}{p}}}dt$$

$$C_5(q,p;b,a)=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{t}{[(1-t)a^p+tb^p]^{q-\frac{q}{p}}}dt$$

$$C_6(q,p;a,b)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t}{[(1-t)a^p+tb^p]^{q-\frac{q}{p}}}dt$$

$$C_6(q,p;b,a)=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-t)}{[(1-t)a^p+tb^p]^{q-\frac{q}{p}}}dt$$

2.3. Konvekslikle İlgili Literatürde Bulunan Bazı Sonuçlar

M. Z. Sarikaya, E. Set ve M. E. Özdemir (22) de s −konveks fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki teorem ve sonuçları elde etmişlerdir:

Teorem 2.6. $f' \in L[a,b]$; $a,b \in I^{\circ}$ ve $a<b$ olmak üzere $f: I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ için $|f'|$, s −konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a)\frac{(s-4)6^{s+1}+2\times 5^{s+2}-2\times 3^{s+2}+2}{6^{s+2}(s+1)(s+2)}[|f'(a)|+|f'(b)|]$$

Uyarı 2.6. $f' \in L[a,b]$; $a,b \in I^{\circ}$ ve $a<b$ olmak üzere $f: I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ üzerinde $|f'|$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{5(b-a)}{72}[|f'(a)|+|f'(b)|].$$

Uyarı 2.7. Uyarı 2.6 ya göre, $f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{5(b-a)}{72}[|f'(a)|+|f'(b)|].$$

Uyarı 2.6, Sarıkaya ve arkadaşları tarafından (23) te kanıtlanmıştır.

Teorem 2.7. $f' \in L[a,b]$; $a,b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$, $s-$konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{|f'(b)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Uyarı 2.8. $f' \in L[a,b]$; $a,b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{|f'(b)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Uyarı 2.9. Uyarı 2.8 de $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{6}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{2^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{|f'(b)| + |f'(a)|}{2}\right).$$

Uyarı 2.10. Uyarı 2.9 da $f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b)$ ve $p = q = 2$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)}{6\sqrt{2}}\left(\frac{|f'(b)|+|f'(a)|}{2}\right).$$

Uyarı 2.11. Teorem 2.7 de $f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Simpson tipli eşitsizliğin $s-$konveks fonksiyonları için bir başka versiyonunu aşağıdaki gibi vereceğiz.

Teorem 2.8. $f'\in L[a,b]$; $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olmak üzere $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $s\in(0,1]$, $q>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ $s-$konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{(2^{s+1}-1)|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2^{s+1}-1)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Teorem 2.9. $f'\in L[a,b]$; $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olmak üzere $f: I\subseteq[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $s\in(0,1]$ ve $q\geq 1$ için $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ $s-$konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{2\times 5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times 6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(b)|^q\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times 6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times 6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(b)|^q\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\times 5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times 6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Uyarı 2.12. Teorem 2.9 da $f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır(23):

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{72}(5)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{2\times 5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times 6^{s-1}(s+1)(s+2)}|f'(b)|^q\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times 6^{s-1}(s+1)(s+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times 6^{s-1}(s+1)(s+2)}|f'(b)|^q\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\times 5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times 6^{s-1}(s+1)(s+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

İ.İşcan (24) de, aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

Teorem 2.10. $f' \in L[a,b]$; $a,b \in I^\circ$, $a < b$ ve $\theta, \lambda \in [0,1]$ olmak üzere $f: I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ye I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ ve $q \geq 1$ için $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ s −konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|(1-\theta)\big(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big) + \theta f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a){A_1}^{1-\frac{1}{q}}(\theta)\Big\{\lambda^2[|f'(a)|^q A_2(\theta,s) + |f'(C)|^q A_3(\theta,s)]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ (1-\lambda)^2[|f'(b)|^q A_2(\theta,s) + |f'(C)|^q A_3(\theta,s)]^{\frac{1}{q}}\Big\}.$$

Burada kısalık olsun diye aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır:

$$A_1(\theta) = \theta^2 - \theta + \frac{1}{2},$$

$$A_2(\theta,s) = \frac{2\theta^{s+2}}{(s+1)(s+2)} - \frac{\theta}{s+1} + \frac{1}{s+2},$$

$$A_3(\theta,s) = \frac{2(1-\theta)^{s+2}}{(s+1)(s+2)} - \frac{1-\theta}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$C = (1-\lambda) + \lambda b.$$

Sonuç 2.1. Teorem 2.10 da $q = 1$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|(1-\theta)\big(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big) + \theta f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq (b-a)\{A_2(\theta,s)(\lambda^2|f'(a)| + (1-\lambda)^2|f'(b)|)$$

$$+ A_3(\theta,s)(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)|f'(C)|\}$$

Sonuç 2.2. Teorem 2.10 da s = 1 ve $C = (1-\lambda)a + \lambda$b için aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\left|(1-\theta)\big(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big) + \theta f(C) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \quad (b-a)A_1^{1-\frac{1}{q}}(\theta)\Big\{\lambda^2[|f'(a)|^q A_2(\theta,1)+|f'(C)|^q A_3(\theta,1)]^{\frac{1}{q}}$$

$$+(1-\lambda)^2[|f'(b)|^q A_2(\theta,1)+|f'(C)|^q A_3(\theta,1)]^{\frac{1}{q}}\Big\}$$

Burada aşağıdaki notasyonları kullanılmıştır:

$$A_1(\theta)=\theta^2-\theta+\frac{1}{2}$$

$$A_2(\theta,1)=\frac{1+\theta^3}{3}-\frac{\theta}{2},$$

$$A_3(\theta,1)=\frac{1+(1-\theta)^3}{3}-\frac{1-\theta}{2}$$

Sonuç 2.3. Teorem 2.10 da θ = 1 ve $C=(1-\lambda)a+\lambda b$ olduğu varsayımları altında, genelleştirilmiş midpoint tipli eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

$$\left|f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\Big\{\lambda^2(|f'(a)|^q+(s+1)|f'(C)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\ (1-\lambda)^2(|f'(b)|^q+(s+1)|f'(C)|^q)^{\frac{1}{q}}\Big\}.$$

Sonuç 2.4. Her $x\in[a,b]$ için $|f'(x)|\leq M$ ise Teorem 2.10 da θ = 1 alırsak aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq M\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right]$$

Sonuç 2.5. Teorem 2.10 da $\theta=0$ ve $C=(1-\lambda)a+\lambda b$ için aşağıdaki genelleştirilmiş Trapezoid (yamuk) tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\lambda^2\left((s+1)|f'(a)|^q+|f'(C)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\ (1-\lambda)^2\left((s+1)|f'(b)|^q+|f'(C)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

Sonuç 2.6. Teorem 2.10 da $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{2}{3}$ için aşağıdaki Simpson tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(A_2\left(\frac{2}{3},s\right)|f'(a)|^q+A_3\left(\frac{2}{3},s\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(A_2\left(\frac{2}{3},s\right)|f'(a)|^q+A_3\left(\frac{2}{3},s\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Burada aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır:

$$A_2\left(\frac{2}{3},s\right)=\frac{2^{s+3}+3^{s+1}(s-1)}{3^{s+2}(s+1)(s+2)},$$

$$A_3\left(\frac{2}{3},s\right)=\frac{2+3^{s+1}(2s+1)}{3^{s+2}(s+1)(s+2)}.$$

Sonuç 2.7. Teorem 2.10 da $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = 1$ için aşağıdaki midpoint tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8}\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left(|f'(a)|^q+(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(|f'(b)|^q+(s+1)\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Sonuç 2.8. Teorem 2.10 da $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = 0$ için aşağıdaki trapezoid(yamuk) tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{8}\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left((s+1)|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left. + \left((s+1)|f'(b)|^q + \left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

Teorem 2.11. $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $\theta, \lambda \in [0,1]$ olmak üzere $f: I \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $s \in (0, 1]$, $q > 1$, $C = (1-\lambda)a + \lambda b$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde s −konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|(1-\theta)\big(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big) + \theta f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right|$$
$$\leq (b-a)(\theta^{p+1} + (1-\theta)^{p+1})^{\frac{1}{p}}\left[\lambda^2\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(C)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left. + (1-\lambda)^2\left(\frac{|f'(b)|^q + |f'(C)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Sonuç 2.9. Teorem 2.11 de $s = 1$, $C = \big(1-\lambda\big)a + \lambda b$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|(1-\theta)\left(\lambda f(a) + \big(1-\lambda\big)f(b)\right) + \theta f\left(\big(1-\lambda\big)a + \lambda \mathrm{b}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{\theta^{p+1}+(1-\theta)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\Big[\lambda^2(|f'(a)|^q+|f'(C)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$+(1-\lambda)^2(|f'(b)|^q+|f'(C)|^q)^{\frac{1}{q}}\Big].$$

Sonuç 2.10. Teorem 2.11 de θ = 1, $C=(1-\lambda)a+\lambda b$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için aşağıdaki midpoint tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\lambda^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(C)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\big(1-\lambda\big)^2\left(\frac{|f'(b)|^q+|f'(C)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

Sonuç 2.11. Teorem 2.11 de θ = 0, $C=(1-\lambda)a+\lambda b$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için aşağıdaki genelleştirilmiş trapezoid tipi eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\lambda f(a)+\big(1-\lambda\big)\mathrm{f}(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\lambda^2\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(C)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\big(1-\lambda\big)^2\left(\frac{|f'(b)|^q+|f'(C)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Sonuç 2.13. Her $x\in[a,b]$, $|f'(x)|\leq M$ ise Teorem 2.11 de θ = 1 için aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq \frac{M}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{2}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right]$$

Sonuç 2.14. Teorem 2.11 de $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = \frac{2}{3}$ için aşağıdaki Simpson tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Sonuç 2.15. Teorem 2.11 de $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = 1$ için aşağıdaki midpoint tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Sonuç 2.16. Teorem 2.11 de $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = 1$ için aşağıdaki trapezoid(yamuk) tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Teorem 2.12. $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $\theta, \lambda \in [0,1]$ olmak üzere $f: I \subseteq [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $s \in (0, 1]$, $q > 1$, $C = (1-\lambda)a + \lambda b$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde s −konkav ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|(1-\theta)\big(\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\big)+\theta f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-s}{q}}\left(\frac{\theta^{p+1}+(1-\theta)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\lambda^2\left|f'\left(\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right)\right|\right.$$

$$\left.+(1-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{(1-\lambda)a+(1+\lambda)b}{2}\right)\right|\right\}.$$

Sonuç 2.17. Teorem 2.12 de s = 1 için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|(1-\theta)\left(\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\right)+\theta f\left((1-\lambda)a+\lambda \mathrm{b}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{\theta^{p+1}+(1-\theta)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{x}\left\{\lambda^2\left|f'\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right|\right.$$

$$\left.+(1-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{(1-\lambda)a+(1+\lambda)\mathrm{b}}{2}\right)\right|\right\}.$$

Sonuç 2.18. Teorem 2.12 de $\theta = 0$ için aşağıdaki trapezoid(yamuk) tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\lambda f(a)+(1-\lambda)\mathrm{f}(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-s}{p}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\lambda^2\left|f'\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right|\right.$$

$$\left.+(1-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{(1-\lambda)a+(1+\lambda)\mathrm{b}}{2}\right)\right|\right\}.$$

Sonuç 2.19. Teorem 2.12 de $\theta = 1$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-s}{q}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\lambda^2\left|f'\frac{(2-\lambda)a+\lambda b}{2}\right|\right.$$

$$\left.+(1-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{(1-\lambda)a+(1+\lambda)\mathrm{b}}{2}\right)\right|\right\}$$

Sonuç 2.20. Teorem 2.12 de $\theta = 1$ ve her $x \in [a,b]$ için aşağıdaki Ostrowski tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{2^{\frac{s-1}{q}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)}\left[(x-a)^2\left|f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|\right]$$

Sonuç 2.21. Teorem 2.12 de $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = 0$ için aşağıdaki trapezoid tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-s}{q}}\left[\left|f'\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right]$$

Sonuç 2.22. Teorem 2.12 de $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = 1$ için aşağıdaki midpoint tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1-s}{q}}\left[\left|f'\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right]$$

Sonuç 2.23. Teorem 2.12 de $\lambda = \frac{1}{2}$ and $\theta = \frac{2}{3}$ için aşağıdaki Simpson tipli eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}2^{\frac{s-1}{q}}\left[\left|f'\left(\frac{3b+a}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right]$$

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde $0 < a < b,\ p \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ t \in [0,1]$ ve $u, v \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki gösterimleri kullanacağız.

$$A_p = A_p(a,b) = \frac{a^p + b^p}{2}, A_1 = A = A(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

$$M_p = M_p(a,b) = A_p^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$I_t(x, A_p; u, v) = \frac{\left|t - \frac{1}{3}\right|^u}{\left[(1-t)x^p + tA_p\right]^{v - \frac{v}{p}}},$$

$$J_t(x, A_p; u, v) = \frac{\left|t - \frac{1}{3}\right|^u (1-t)}{\left[(1-t)x^p + tA_p\right]^{v - \frac{v}{p}}},$$

$$K_t(x, A_p; u, v) = \frac{\left|t - \frac{1}{3}\right|^u t}{\left[(1-t)x^p + tA_p\right]^{v - \frac{v}{p}}}.$$

Tezimizin bu bölümünde kullanılan başta Hölder ve Power-mean integral eşitsizlikleri olmak üzere bazı eşitsizliklerin bilindiği kabul edilmektedir

Ana sonuçları elde etmek için aşağıdaki Lemma'yı kullanacağız:

Lemma 3.1. $f: I \subseteq (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ye I°(I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f(M_p) + f(b)\right] - \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$
$$= \frac{b^p - a^p}{4p}\left[\int_0^1 \frac{t - \frac{1}{3}}{\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}} f'\left(\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt\right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{t - \frac{2}{3}}{\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}} f'\left(\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt\right].$$

İspat: Öncelikle, aşağıdaki integrali hesaplayalım:

$$\frac{b^p - a^p}{4p}\left[\int_0^1 \frac{t-\frac{1}{3}}{\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}} f'\left(\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{t-\frac{2}{3}}{\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}} f'\left(\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt \right]$$

Kısalık için, aşağıdaki notasyonları kullanacağız:

$$I_1 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right) df\left(\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right),$$
$$I_2 = \int_0^1 \left(t - \frac{2}{3}\right) df\left(\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right).$$

Kısmi integrasyon ve değişken değiştirme metodlarını sırasıyla I_1ve I_2 integralleri için kullanırsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$I_1 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right) df\left(\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$u = t - \frac{1}{3}, \qquad dv = df\left(\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$I_1 = \left(t - \frac{1}{3}\right) f\left(\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 f\left(\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)dt$$
$$x = \left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}} \implies dx = \frac{1}{p}\left[(1-t)a^p + tA_p\right]^{\frac{1}{p}-1}\left(A_p - a^p\right)dt$$
$$dt = \frac{p}{x^{1-p}(A_p - a^p)}dx$$
$$I_1 = \frac{2}{3}f\left(M_p\right) + \frac{1}{3}f(a) - \frac{p}{A_p - a^p}\int_a^{A_p} \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

(3.1) $$I_1 = \frac{2}{3}f\left(A_p\right) + \frac{1}{3}f(a) - \frac{2p}{b^p - a^p}\int_a^{A_p} \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(t - \frac{2}{3}\right) df\left(\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \left(t - \frac{2}{3}\right) f\left(\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 f\left(\left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right) dt$$

$$x = \left[(1-t)A_p + tb^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{p} x^{1-p}\left(b^p - A_p\right)dt$$

$$I_2 = \frac{1}{3} f(b) + \frac{2}{3} f\left(M_p\right) - \frac{2p}{b^p - a^p} \int_{A_p}^{b} \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx. \tag{3.2}$$

(3.1) ve (3.2) yi yan yana toplayarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{3}[f(a) + f(b)] + \frac{4}{3} f\left(M_p\right) - \frac{2p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx$$

$$\frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(M_p\right) + f(b)\right] - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx.$$

Teorem 3.1. $f: I \subseteq (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ye I°(I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|^q$, $q \geq 1$ için I üzerinde p-konveks ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(M_p\right) + f(b)\right] - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx\right|$$
$$\leq \frac{b^p - a^p}{4p}\left[C_p(a,b)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|^q D_p(a,b) + \left|f'\left(M_p\right)\right|^q E_p(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$+ \frac{b^p - a^p}{4p}\left[F_p(a,b)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\left|f'\left(M_p\right)\right|^q G_p(a,b) + |f'(b)|^q H_p(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$

Burada kısalık için aşağıdaki notasyonları kullanacağız:

$$C_p(a,b)=\int_0^1 I_t\big(a,A_p;1,1\big)\,dt\,,\qquad D_p(a,b)=\int_0^1 J_t\big(a,A_p;1,1\big)\,dt\,,$$

$$E_p(a,b)=\int_0^1 K_t\big(a,A_p;1,1\big)\,dt\,,\qquad F_p(a,b)=\int_0^1 I_{1-t}\big(b,A_p;1,1\big)\,dt\,,$$

$$G_p(a,b)=\int_0^1 K_{1-t}\big(b,A_p;1,1\big)\,dt\,,\quad H_p(a,b)=\int_0^1 J_{1-t}\big(b,A_p;1,1\big)\,dt\,.$$

İspat: Lemma 3.1 ve Power mean eşitsizliği kullanırsa,

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\big(M_p\big)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int\limits_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{1}{3}\right|}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\left|f'\left(\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|dt\right]$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{2}{3}\right|}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\left|f'\left(\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{1}{3}\right|}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{1}{3}\right|}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\left|f'\left(\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{2}{3}\right|}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{2}{3}\right|}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\left|f'\left(\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{1}{3}\right|}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^1\frac{\left|t-\frac{1}{3}\right|\left[(1-t)|f'(a)|^q+t\left|f'\big(M_p\big)\right|^q\right]}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1 \frac{\left|t-\frac{2}{3}\right|}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{\left|t-\frac{2}{3}\right|\left[(1-t)\left|f'\left(M_p\right)\right|^q+t|f'(b)|^q\right]}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\int_0^1 I_t\left(a,A_p;1,1\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|^q\int_0^1 J_t\left(a,A_p;1,1\right)dt\right.$$

$$\left.+\left|f'\left(M_p\right)\right|^q\int_0^1 K_t\left(a,A_p;1,1\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\int_0^1 I_{1-t}\left(b,A_p;1,1\right)dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\left|f'\left(M_p\right)\right|^q\int_0^1 K_{1-t}\left(b,A_p;1,1\right)dt\right.$$

$$\left.+|f'(b)|^q\int_0^1 J_{1-t}\left(b,A_p;1,1\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{b^p-a^p}{4p}\left[C_p(a,b)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|^qD_p(a,b)+\left|f'\left(M_p\right)\right|^qE_p(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left[F_p(a,b)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\left|f'\left(M_p\right)\right|^qG_p(a,b)+|f'(b)|^qH_p(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 3.1. Teorem 3.1 koşulları altında,

i. $p=1$ alırsak konveks fonksiyon için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{8}{81}|f'(a)|^q+\frac{29}{162}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b-a}{4}\left(\frac{5}{18}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{29}{162}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{8}{81}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Bu ise $s=1$ için 2. Bölümde Sonuç 2.6 ile çakışır.

ii. $p=-1$ alırsak harmonik konveks fonksiyon için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2ab}\right)+f(b)\right]-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4ab}\left[C_{-1}(a,b)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|^q D_{-1}(a,b)+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q E_{-1}(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b-a}{4ab}\left[F_{-1}(a,b)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\left|f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|^q G_{-1}(a,b)+|f'(b)|^q H_{-1}(a,b)\right]^{\frac{1}{q}}$$

Teorem 3.2. $a,b\in I^{\circ}$,$a<b$ ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere $f:I\subseteq(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, I° (Inın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $q>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ için I üzerinde $|f'|^q$, p-konveks ve $f'\in L[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\left[M_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{b^p-a^p}{4p}\left[N_p^{\frac{1}{r}}(a,b)A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q,\left|f'\left(M_p\right)\right|^q\right)+O_p^{\frac{1}{r}}(a,b)A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(M_p\right)\right|^q,|f'(b)|^q\right)\right]$$

Burada aşağıdaki notasyonları kullanacağız:

$$N_{p,r}(a,b)=\int_0^1 I_t\left(a,A_p;r,r\right)dt,$$

$$O_{p,r}(a,b)=\int_0^1 I_{1-t}\left(b,A_p;r,r\right)dt.$$

İspat : Lemma 3.1, Hölder integral eşitsizliği ve $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ nun p-konveksliği kullanılarak aşağıdaki gibi teoremin ispatı tamamlanır.

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(M_p\right)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{b^p - a^p}{4p} N_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) \left(\int_0^1 \left| f'\left((1-t)a^p + tA_p \right)^{\frac{1}{p}} \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{b^p - a^p}{4p} O_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) \left(\int_0^1 \left| f'\left((1-t)A_p + tb^p \right)^{\frac{1}{p}} \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{b^p - a^p}{4p} \left[N_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) \left(\int_0^1 \left| \left((1-t)|f'(a)|^q + t\left|f'(M_p)\right|^q \right) \right| dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + O_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) \left(\int_0^1 \left| \left((1-t)\left|f'(M_p)\right|^q + t|f'(b^p)|^q \right) \right| dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$= \frac{b^p - a^p}{4p} \left[N_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) \left(\frac{|f'(a)|^q + \left|f'(M_p)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} + O_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) \left(\frac{\left|f'(M_p)\right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$= \frac{b^p - a^p}{4p} \left[N_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q, \left|f'(M_p)\right|^q \right) + O_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b) A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'(M_p)\right|^q, |f'(b)|^q \right) \right].$$

Uyarı 3.2. Teorem 3.2 nin şartları altında;

i. $p = 1$ alırsak konveks fonksiyon için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left| \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12} \left[\frac{1 + 2^{r+1}}{3(r+1)} \right]^{\frac{1}{r}} \left[A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q, \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q \right) + A^{\frac{1}{q}}\left(\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q, |f'(b)|^q \right) \right]$$

Bu eşitsizlik ise $s = 1$ için 2. Bölümde Teorem 2.7 ile çakışır.

ii. $p = -1$ alırsak, harmonik konveks fonksiyon için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+f(b)\right]-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4ab}\left[N_{-1}^{\frac{1}{r}}(a,b)A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q,\left|f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|^q\right)+O_{-1}^{\frac{1}{r}}(a,b)A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|^q,|f'(b)|^q\right)\right]$$

Teorem 3.3. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere $f:I\subseteq(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, I° (I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $q>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ için I üzerinde $f'\in L[a,b]$ ve $|f'|^q$ p-konveks ise aşağıdaki teorem elde edilir.

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f(M_p)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{b^p-a^p}{12p}\left[\frac{1+2^{r+1}}{3(r+1)}\right]^{\frac{1}{r}}\left[Q_{p,q}(a,b)|f'(a)|^q+R_{p,q}(a,b)\left|f'(M_p)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{12p}\left[\frac{1+2^{r+1}}{3(r+1)}\right]^{\frac{1}{r}}\left[Q_{p,q}(a,b)|f'(a)|^q+R_{p,q}(a,b)\left|f'(M_p)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[S_{p,q}(a,b)\left|f'(M_p)\right|^q+T_{p,q}(a,b)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Burada aşağıdaki notasyonları kullanacağız:

$$Q_{p,q}(a,b)=\int_0^1 J_t(a,A_p;0,q)dt,\qquad S_{p,q}(a,b)=\int_0^1 K_{1-t}(b,A_p;0,q)dt$$

$$R_{p,q}(a,b)=\int_0^1 K_t(a,A_p;0,q)dt,\qquad T_{p,q}(a,b)=\int_0^1 J_{1-t}(b,A_p;0,q)dt.$$

İspat: Lemma 3.1, Hölder integral eşitsizliği ve $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ nun p-konveksliğinden aşağıdakileri elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left([M_p]^{\frac{1}{p}}\right)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{b^p-a^p}{4p}\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|\left|\frac{1}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}}f'\left(\left((1-t)a^p+tA_p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right|dt$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\int_0^1\left|t-\frac{2}{3}\right|\left|\frac{1}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}f'\left((1-t)A_p+tb^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|dt$$

$$\leq\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left|\frac{1}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{1-\frac{1}{p}}}f'\left((1-t)a^p+tA_p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{2}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\left|\frac{1}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}f'\left((1-t)A_p+tb^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{1}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{q-\frac{q}{p}}}\left|f'\left((1-t)a^p+tA_p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{2}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{1}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{q-\frac{q}{p}}}\left|f'\left((1-t)A_p+tb^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{1}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{q-\frac{q}{p}}}\left[f'(1-t)|f'(a)|^q+t\left|f'(A_p)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{2}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{1}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{q-\frac{q}{p}}}\left[f'(1-t)\left|f'(A_p)\right|^q+t|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{(1-t)}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{q-\frac{q}{p}}}|f'(a)|^q dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\frac{t}{\left[(1-t)a^p+tA_p\right]^{q-\frac{q}{p}}}\left|f'(A_p)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{2}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^1\frac{(1-t)}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{q-\frac{q}{p}}}\left|f'(A_p)\right|^q dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\frac{t}{\left[(1-t)A_p+tb^p\right]^{q-\frac{q}{p}}}|f'(b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1\left|t-\frac{1}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\left[Q_p(a,b)|f'(a)|^q+R_p(a,b)\left|f'(A_p)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}\left(\int_0^1 \left|t-\frac{2}{3}\right|^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \left[S_p(a,b)\left|f'\left(A_p\right)\right|^q + T_p(a,b)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Böylece teoremin ispatını tamamlanır.

Uyarı 3.3. Teorem 3.3' ün koşulları altında,

i. $p=1$ alırsak konveks fonksiyon için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12}\left[\frac{1+2^{r+1}}{3(r+1)}\right]^{\frac{1}{r}}\left[A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q,\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)+A^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,|f'(b)|^q\right)\right]$$

ii. $p=-1$, alırsak harmonik olarak konveks fonksiyon için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+f(b)\right]-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12ab}\left[\frac{1+2^{r+1}}{3(r+1)}\right]^{\frac{1}{r}}\left[C_3(r,-1;a,b)|f'(a)|^q + C_4(r,-1;a,b)\left|f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b-a}{12ab}\left[\frac{1+2^{r+1}}{3(r+1)}\right]^{\frac{1}{r}}\left[C_5(r,-1;a,b)\left|f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right|^q + C_6(r,-1;a,b)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 3.4. $a,b\in I^\circ$, $a<b$ ve $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ olmak üzere $f: I\subseteq(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, I° (I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $q>1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$ için I üzerinde $f'\in L[a,b]$ ve $|f'|^q$ p-konkav ise aşağıdaki teorem elde edilir:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(M_p\right)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{b^p-a^p}{4p}\left[N_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b)\left|f'\left(\left[\frac{3a^p+b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|\right]+O_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b)\left|f'\left(\left[\frac{a^p+3b^p}{4}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

İspat: Lemma 3.1, Hölder'in integral eşitsizliğini ve $[a,b]$ üzerinde $|f'|^q$ nun p-konkav olduğu kullanılarak ispatı aşağıdaki gibi yaparız.

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f(M_p)+f(b)\right]-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{b^p-a^p}{4p}N_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b)\left(\int_0^1\left|f'\left(\left((1-t)a^p+tA_p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b^p-a^p}{4p}O_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b)\left(\int_0^1\left|f'\left(\left((1-t)A_p+tb^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{b^p-a^p}{4p}\left[N_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b)\left|f'\left(\left[\frac{3a^p+b^p}{4}\right]^{1/p}\right)\right|+O_{p,r}^{\frac{1}{r}}(a,b)\left|f'\left(\left[\frac{a^p+3b^p}{4}\right]^{1/p}\right)\right|\right]$$

Uyarı 3.4. Teorem 3.4'ün şartları altında

i. $p=1$ alırsak konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12}\left[\frac{1+2^{r+1}}{3(r+1)}\right]^{\frac{1}{r}}\left[\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right]$$

Bu ise $s=1$ için 2. Bölümde Sonuç 2.23 ile çakışır.

ii. $p=-1$ alırsak harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\frac{1}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+f(b)\right]-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{12ab}\left[\frac{1+2^{r+1}}{3(r+1)}\right]^{\frac{1}{r}}\left[\left|f'\left(\frac{4ab}{a+3b}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{4ab}{3a+b}\right)\right|\right]$$

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma p-konveks fonksiyonlar için Simpson tipi eşitsizliklerle ilgilidir. Bu tezde öncelikle, p-konveks fonksiyon kavramının verip, p-konveks fonksiyonların bazı yeni özelliklerini inceledik. Daha sonra, yeni bir özdeşlik kullanarak, p-konveks ve p-konkav fonksiyon sınıfları için bazı yeni Simpson tipli eşitsizlikler elde ettik. p-konveks fonksiyonlar, konveks ve harmonik konveks fonksiyonların bir genellemesi olduğundan elde edilen sonuçlar, özel durumlarda konveks, konkav, harmonik konveks ve harmonik konkav fonksiyonlar için Simpson tipli eşitsizliklere indirgenmekte olup, bu sonuçların bazıları literatürde yeni, bazıları ise literatürde daha önce elde edilmiş sonuçlara indirgenmektedir. Bu çalışmada kullanılan özdeşlik veya elde edilecek yeni tip özdeşlikler yardımıyla $p-$konvekslik, $p-$quasi konvekslik, $(p,s)-$konvekslik, $(p,h)-$konvekslik gibi çeşitli konvekslik fonksiyon sınıfları içinde yeni çalışmalar yapılabilir. Özellikle belirtmek isteriz ki, tezimizin araştırma bulgular kısmında elde ettiğimiz sonuçlar orijinal olup makale olarak yayınlanmak üzere alan indeksli dergiye gönderilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G. 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

2. Mitrinovic, D.S., J.E. Pečarić and A.M. Fink. 1991. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic, Dordrecht.

3. Mitrinović, D., Pečarić, J. and Fink, A. 1993. *Classical and new inequalities in analysis*. Kluwer Academic, Dordrecht.

4. Pachpatte, B. 2005. *Mathematical Inequalities*. 591 pp, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands.

5. Niculescu, C., Persson, L. 2006. *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach*, 253 pp, Springer Science Business Media.

6. Fang, Z. B. and Shi, R. 2014. *On the (p;h)-convex function and some integral inequalities*, 16 pp , J. Inequal. Appl., 2014(45).

7. Noor, M. A., Noor, K. I., Mihai, M. V. and Awan, M. U. 2016. Hermite-Hadamard inequalities for differentiable p-convex functions using hyper geometric functions. *Publıcatıons De L'Instıtut Mathématıque,* Nouvelle série, tome 100(114) , 251–257.

8. Noor, M. A., Noor, K. I., & Iftikhar, S. (2015). Nonconvex functions and integral inequalities. *Journal of Mathematics (ISSN 1016-2526)*, *47*(2), 19-27. Vol.

9. İşcan, İ. 2016. Ostrowski type inequalities for p-convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, NTMSCI 4, No. 3, 140-150.

10. İşcan, İ. 2016. Hermite-Hadamard Type Inequalities for p-Convex Functıons, *International Journal of Analysis and Applications*. Volume 11, Number 2, 137-145.

11. Kunt M., İşcan İ. 2017. "Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex functions via fractional integrals". *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, vol.3, no.1, pp.22-35.

12. Kunt M., İşcan İ. 2017. "Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically (alpha, m)-convex functions by using fractional integrals". *Konuralp journal of mathematics*, vol.5, no.1, pp.201-213.

13. İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard and Simpson-like type inequalities for differentiable harmonically convex functions. *Journal of Mathematics*, Volume 2014, Article ID 346305, 10 pages.

14. İşcan, İ., Bekar, K. and Numan, S. 2014. Numan, Hermite-Hadamard and Simpson type inequalities for differentiable quasi-geometrically convex functions. T*urkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 2, no. 2, 42-46.

15. İşcan, İ., Numan, S. and Bekar, K. 2014. Hermite-Hadamard and Simpson type inequalities for differentiable harmonically p-functions. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 4(14), 1908-1920.

16. İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.

17. Zhang, K.S. and Wan, J.P. 2007. P-convex functions and their properties, *Pure Appl. Math.* 23(1), 130-133.

18. İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(6), 935-942.

19. Baloch, I. A. and İşcan, İ. 2015. Some Ostrowski Type Inequalities for Harmonically (s,m)- convex functions in Second Sense,*International Journal of Analysis*, vol. 2015, Article ID 672675, 9 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2015/672675.

20. İşcan, İ., Kunt, M. 2015. Hermite-Hadamard-Fejer Type Inequalities for Harmonically s-convex Functions via Fractional Integrals. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12(1) ,Article 10, 1-16.

21. İşcan, İ., M. Aydın, S. Dikmenoğlu, New integral inequalities via harmonically convex functions, *Mathematics and Statistics*, 3(5): 134-140, 2015. DOI: 10.13189/ms.2015.030504.

22. Sarıkaya, M.Z., Set, E. and Özdemir, M.E. 2010. On new inequalities of Simpson's type for s-convex functions. *Computers and Mathematics with Applications* 60, 2191-2199.

23. Sarıkaya, M.Z., Set, E. and Özdemir, M.E. 2010. On new inequalities of Simpson's type for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll. 13 (2) (2010) Article2.

24. İşcan, İ. 2013. New estimates on generalization of some integral inequalities for s-convex functions and their applications. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 86(4), 727-746.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Trabzon’da doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Trabzon’da tamamladı. 2009 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünden Temmuz 2014’de mezun oldu. Aynı yıl Trabzon’un Şalpazarı ilçesinde Şalpazarı Çok Programlı Anadolu Lisesi’nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı.