Tekin TOPLU Yüksek Lisans Tezi Giresun Üniversitesi 2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ELDE EDİLEN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİNİN LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN ELDE EDİLMESİ

TEKİN TOPLU

HAZİRAN 2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ELDE EDİLEN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİNİN LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN ELDE EDİLMESİ

TEKİN TOPLU

HAZİRAN 2017

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Prof. Dr. Başak TAŞELİ

…./…./2017

____

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

____

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans / Doktora tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Doç. Dr.İmdat İŞCAN

____

Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. İmdat İŞCAN (Danışman) __________________________

Yrd. Doç. Dr. Mehmet KUNT __________________________

Yrd. Doç. Dr. Sercan TURHAN __________________________

ÖZET

HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ELDE EDİLEN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİNİN LIPSCHITZ FONKSİYONLARI İÇİN ELDE EDİLMESİ

TOPLU, Tekin

Giresun Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Doç. Dr. İmdat İŞCAN

HAZİRAN 2017, 59 sayfa

Bu tez çalışmasında Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar için Riemann-Liouville Kesirli İntegrali aracılığıyla, Hermite-Hadamard ve Bullen tipli genel eşitsizlikler elde edildi. Bu eşitsizliklerin bazılarında özel değerler alınmasıyla literatürde bulunan Ostrowski ve Simpson tipli, yeni eşitsizliklere ulaşıldı. Tezin birinci bölümünde genel kavram ve tanımlara yer verildi. İkinci bölümde tez çalışmasında gerekli olan teoremler ve Riemann-Liouville Kesirli İntegralinin elde ediliş yöntemi gösterildi. Üçüncü bölümde Hermite-Hadamard ve Bullen tipli eşitsizlikler kullanıldı.

Anahtar Kelimeler : Hermite-Hadamard, Bullen, Riemann-Liouville Kesirli İntegrali, Konvekslik, Harmonik Konvekslik.

ABSTRACT

OBTAINING FOR THE LIPSCHITZIAN FUNCTIONS OF FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES OBTAINED FOR HARMONICALLY CONVEX FUNCTIONS

TOPLU, Tekin

Giresun University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master of Science Thesis

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. İmdat İŞCAN

JUNE 2017, 59 pages

In this thesis study, some New General Hermite-Hadamard and Bullen Type Inequalities for Lipschitzian Functions via Riemann-Liouville Fractional Integral are obtained In these inequalities by taking some special values, some new Ostrowski and Simpson type inequalities which are in literature are reached. In the first chapter, general concepts and definitions are given. In the second chapter, theorems which are necessary for thesis and how to obtain Riemann-Louville Fractional Integral, are shown. In the third section, Hermite-Hadamard and Bullen type inequalities are used.

Keywords: Hermite-Hadamard, Bullen, Riemann-Liouville Fractional Integral, Convexity, Harmonically Convexity

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tez çalışmasının hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. İmdat İŞCAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim. Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

SİMGELER DİZİNİ

J_a^α	: α. Dereceden Kesirli İntegral
Γ	: Gamma Fonksiyonu
β	: Beta Fonksiyonu
ℕ	: Doğal Sayılar Kümesi
ℝ	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid Uzayı
I	: ℝ'de bir aralık
I°	: I aralığının içi
⊂	: Alt küme
⊆	: Alt küme veya eşit
$L[a,b]$	: [a,b] aralığında integrallenebilir fonksiyon

1.GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Eşitsizlikler, matematikte önemli bir rolü olmakla birlikte, iki değerin birbirine göre durumlarını ifade eden ilişkidir. Eşitsizlikler ile ilgili 18. ve 19. yüzyıllarda K.F. Gauss, P.L. Chebyshev ve A.L. Cauchy gibi ünlü matematikçiler tarafından çalışmalar yapmış olsa da 1934 yılında Hardy , Littlewood ve Polya (1) tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitap, matematiğin gelişmekte olan bu alanında verilen ilk eserdir.Bu çalışmayı ikinci eser olarak E. F. Beckenbach ve R. Belmann'ın (2) yine aynı isimli "Inequalities" adlı eseri izler. Bu eserler birçok matematikçiyi etkilemiş ve daha sonraki dönemlerde bu alanda birçok çalışmalar yapılmış ve kitaplar yazılmıştır. Bu kitaplardan bazıları "Differential Inequalities"(3), "Analitic Inequalities"(4), "Inequalities Involving Functions and Their Derivates" (5) ,"Classical and New Inequalities in Analysis"'dir (6). Son yıllarda ise birçok araştırmacının çalışmaları ve kitapları literatürde mevcuttur.

Eşitsizlikler alanının gelişmesinde önemli bir yeri olan kavramlardan birisi de konveks fonksiyonlar kavramıdır. Konvekslik kavramının geçmişi Archimedes'in ünlü π (pi) sayısı hesabına kadar gitmesine rağmen ilk kez Charles Hermite'in 1881 yılında Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta şu şekilde rastlanır.

"Sur deux limites d'une intégrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$; á$x = b$; On aura les relation

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abcisses."

İlerleyen yıllarda Fejer (1880-1959) Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmiş halini sunmuştur.

Eşitsizlikler ile ilgili diğer önemli bir çalışma alanı ise ise kesirli integral ve kesirli türevdir. İlk defa Liouville tarafından ortaya konulan bu kavramlar, kesirli analizin temelini oluşturmaktadırlar. Liouville'den sonra birçok önemli matematikçi bu alanda çalışmalar yapmışlardır. İlk kitap ise A.A. Kilbas, O.I. Marichev ve S.G. Samko 'nun "Fractional Integrals and Derivatives" adlı eseridir (7).

Bu çalışmanın amacı Lipschitz Fonksiyonlar için Riemann-Liouville integrallerini aracılığıyla elde edilen Hermite-Hadamard ve Bullen eşitsizliklerini okuyucuya sunmaktır.

1.2. Genel Kavramlar

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar, teoremler ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

Tanım 1.2.1. (Lineer Uzay): M boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: M\times M \to M$ ve $\cdot : F\times M \to M$ işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa M' ye F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) M, + işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G1. $\forall\, a,b\in M \; için \; a+b\in M \; dir$.

G2. $\forall\, a,b,c\in M \; için \; a+(b+c)=(a+b)+c \;\; dir$.

G3. $\forall\, a\in M \; için \; a+\theta=\theta+a \; olacak \; şekilde \; bir \;\; \theta\in M \; vardır.$

G4. $\forall\, a\in M \; için \; a+(-a)=(-a)+a=\theta \;\; şeklinde \; bir -a\in M \; vardır$

G.5. $\forall\, a,b\in M \; için \; a+b=b+a \; dir$

B) $a,b\in L \; ve \; \alpha,\beta\in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha.a\in M$

L2. $\alpha.(a+b)=\alpha.a+\alpha.b$

L3. $(\alpha+\beta).a=\alpha.a+\beta.b$

L4. $1.a=a$ (Burada 1 F'nin birim elemanıdır)

$F=\mathbb{R}$ ise M' ye reel lineer uzay, $F=\mathbb{C}$ ise M' ye kompleks lineer uzay adı verilir (8).

Tanım 1.2.2. F bir cisim ve A ve B, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $a,b\in V \; ve \; \alpha\in F$ olmak üzere $T: A\to B$ dönüşümü

1. $T(a+b)=T(a)+T(b)$

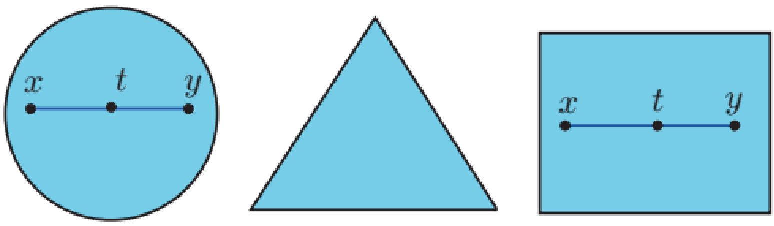
2. $T(\alpha a)=\alpha T(a)$

Şartlarını sağlıyorsa T'ye A üzerinde lineer dönüşüm denir. Eğer $A=B$ ise $T: A\to B$ lineer dönüşümüne bir lineer operatör denir (8).

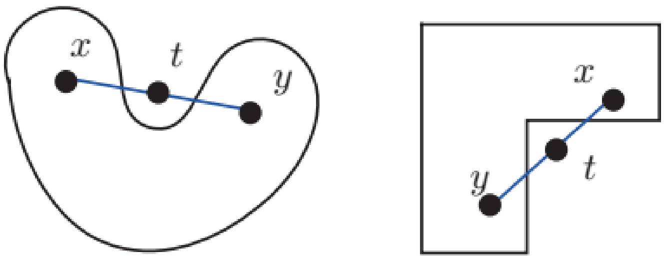
Tanım 1.2.3. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$$B = \{ z \in L : z = tx + (1-t)y \quad ,0 \le t \le 1 \} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ eşitliğindeki x ve y katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümedir (9).



Şekil 1.1. Konveks kümeler



Şekil 1.2. Konveks olmayan kümeler

Tanım 1.2.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$de bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

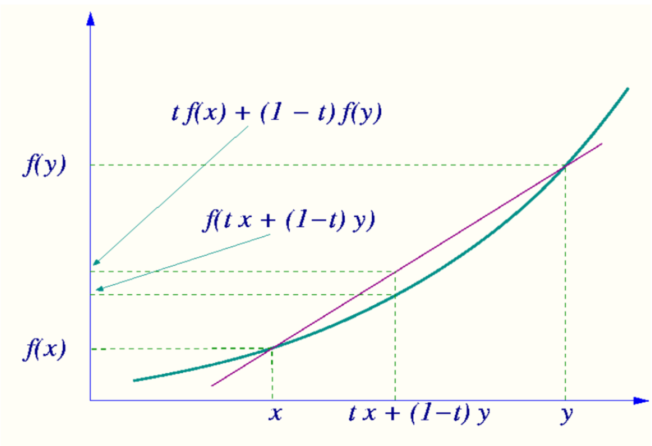
Şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizliği $x\neq y$ ve $\alpha\in(0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (10).

Yukarıdaki tanımı şu şekilde de ifade edebiliriz: Eğer $B=\{(x,y): y\geq f(x), x\in I\}$ kümesi konveks ise fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Eğer $\alpha\in[0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartındaki "$\leq$" yerine "$<$" gelir, yani ;

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)< \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir.



Şekil 1.3 Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Konvekslik ile ilgili bazı gerekçeler aşağıda verilmiştir.

G1. f fonksiyonunun I aralığı üzerinde konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul seçilen herhangi bir $c\in I$ noktası için $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 'nin I aralığında artan bir fonksiyon olmasıdır.

G2. $f:(a,b)\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $c,x\in$ (a,b) için,

$$f(x)-f(c)=\int_{c}^{x} g(t)\,dt$$

olacak şekilde $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ artan fonksiyon olmasıdır.

G3. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere , f 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

G4. f'' ,(a,b) aralığında mevcut olsun. Bu durumda f 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $f''(x)\geq 0$ olmasıdır.

G5. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $x_0\in(a,b)$ için f fonksiyonun en az bir yardımcı doğruya sahip olmasıdır. Yani

$$f(x)\geq f(x_0)+\lambda(x-x_0) \qquad \forall x\in(a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0' a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda=f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda\in[f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.

G6. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $P, Q\, ve\, R$ noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğim PQ \leq eğim PR \leq eğim QR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (10).

Konveks Fonksiyonların Özellikleri

a) Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

b) $f:I\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I° ' de $f'_-(x)$ ve $f'_+(x)$ vardır ve artandır.

c) $f:I\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

d) k tane fonksiyon $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$f(x)=\sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x), a_j>0 \; ; (j=1,2,\ldots,k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

e) $g: R \to R$ azalmayan ve konveks bir fonksiyon, ayrıca $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konveks fonsiyon olsun. Bu durumda $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(g\circ h)(x)$ olarak f tanımlanan bileşke fonksiyonu da konvekstir (11).

f) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konves ve *h,* $h(x)=Ax+B$ formunda $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ konveks olmak üzere ,

$$f(x)=g(h(x))$$

fonksiyonu konveks bir fonksiyondur. Burada A ve B sabitlerdir(10).

Tanım 1.2.5.(Süreklilik): $f: S\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in S$ ve $\varepsilon>0$ verilmiş olsun.

$$x\epsilon S \text{ ve } |x-x_0|<\delta \text{ için } |f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa f, S 'de süreklidir denir (12).

Tanım 1.2.5 (Düzgün Süreklilik): $f: S\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon>0$ sayısı verilmiş olsun.

$$|x_1-x_2|<\delta \text{ şartını sağlayan } \forall x_1,x_2\in S \text{ için } |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı varsa f, S 'de düzgün süreklidir denir (12).

Tanım 1.2.7. (Mutlak Süreklilik): $[a,b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının $\{(a_i,b_i)\}_1^n$ ailesi için

$$\sum_1^n (b_i-a_i)<\delta$$

olduğunda,

$$\sum_{1}^{n} \left| f(b_i) - f(a_i) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna $[a,b]$ kapalı aralığında mutlak süreklidir denir (13).

Tanım 1.2.8. (Lipschitz Şartı): $[a,b]$ kapalı aralığındaki her x ve y noktaları için

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq K \left| x - y \right|$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa f, $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlıyor denir (12).

Teorem 1.2.1. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$|x+y| \leq |x| + |y| \ ,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \ ,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \ ,$$

tümevarım yoluyla

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (6).

Teorem 1.2.2. (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği): $f, [a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda ,

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) \right| dx \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (6).

Teorem 1.2.3. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise , I° 'deki kapalı herhangi bir kapalı $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlar (11).

İspat. $a-\varepsilon$ ve $b+\varepsilon$, I kümesinin içinde olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. m ve M sırasıyla f 'nin $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ aralığında alt ve üst sınırları olsun. Bu durumda eğer x ve y , $[a,b]$ aralığının ayrık iki noktası olup,

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y-x|}(y-x), \qquad \lambda = \frac{|y-x|}{\varepsilon + |y-x|}$$

olarak seçilirse $z \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, $y = \lambda z + (1-\lambda)x$ olur. Buradan

$$f(y) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(x) = \lambda[f(z) - f(x)] + f(x)$$

$K = (M-m)/\varepsilon$ olarak alınırsa

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(M-m) < \frac{|y-x|}{\varepsilon}(M-m) = K|y-x|$$

olur. Çünkü istenildiği gibi $|f(y) - f(x)| \leq K|y-x|$ herhangi $x, y \in [a,b]$ sağlanır.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki ifade söylenebilir;

$f: I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I°'de herhangi bir [a,b] kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu [a,b] aralığında da mutlak sürekli ve I°' de süreklidir (10).

Tanım 1.2.9. (Harmonik Konvekslik): $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reel sayılarda bir aralık olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için ,

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t) f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlikte "$\leq$" yerine "$\geq$" kullanılırsa, bu durumda f 'ye harmonik konkav denir (14).

Teorem 1.2.4. (Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Eğer eşitsizlikte f fonksiyonu konkav ise eşitsizlik tersine döner (10).

İspat. f fonksiyonu konveks olduğundan $[a,b]$ aralığında sürekli ve sınırlıdır. Bundan dolayı f, $[a,b]$' de integrallenebilir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı için konveksliğin geometrik yorumunu kullanarak $x = ta + (1-t)b, t \in [0,1]$ alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_0^1 f\big(ta+(1-t)b\big)\,dt \\ &\leq f(a)\int_0^1 t\,dt + f(b)\int_0^1 (1-t)\,dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

olup eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir. Şimdi eşitsizliğin sol tarafını ispatlayalım. Bunun için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right]$$

biçiminde yazalım. Elde edilen birinci integralde $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$ değişken değişimi ve ikinci integralde $x = b - \frac{t(b-a)}{2}$ değişken değişimleri yapılırsa, buradan,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

ve

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx = -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde yazılırlar. Elde edilen integral toplamında f ' nin konveksliğini kullanırsak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Teorem 2.1.1. $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

Üçüncü eşitsizlik literatürde Bullen Eşitsizliği olarak bilinmektedir (15).

Teorem 2.1.2. $f:I\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0\}\rightarrow\mathbb{R}$, $a,b\in I$ ve $a<b$ olacak şekilde bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L[a,b]$ ise , bu durumda

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (14).

İspat. $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ harmonik konveks olduğundan dolayı $\forall\, x,\in I$ için ve $t=\frac{1}{2}$ için,

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\leq\frac{f(y)+f(x)}{2}$$

olur. Eğer eşitsizlikte $x=\dfrac{ab}{ta+(1-t)b}$, $y=\dfrac{ab}{tb+(1-t)a}$ olarak alırsak

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)}\right)}{2}$$

Daha sonra eşitsizliği t değişkenine göre [0,1] aralığında integralini alırsak,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt+\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)}\right)dt\right]$$

Köşeli parantezin içindeki her bir integral $\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx$ ifadesine eşit olduğundan, eşitsizliğin sol tarafı ispatlanır.

Eşitsizliğin sağ tarafı için $x=a$, $y=b$ alıp , t değişkenine göre her iki tarafın $[0,1]$ aralığı üzerinde integralini alalım.

Şimdi $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=1$ olarak alınsın. Böylelikle her $x,y\in(0,\infty)$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$\begin{aligned}1&=f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\\&=tf(y)+(1-t)f(x)=1\end{aligned}$$

olur. f $(0,\infty)$ aralığında harmonik konveks olduğundan,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)=1,\ \frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx=1 \text{ ve } \quad \frac{f(a)+f(b)}{2}=1$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.3. $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir Lipschitz fonksiyon ve $a,b\in I$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (16).

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\frac{M(b-a)}{4}$$

İspat. $t\in[0,1]$ olsun.Buradan her $a,b\in I$ için

$$\left|tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b\right|$$

$$=\left|t\big(f(a)-f(ta+(1-t)b)\big)+(1-t)\big(f(b)-f(ta+(1-t)b)\big)\right|$$

$$\le t\left|f(a)-f(ta+(1-t)b)\right|+(1-t)\left|f(b)-f(ta+(1-t)b)\right|$$

$$\le tM\left|a-(ta+(1-t)b)\right|+(1-t)M\left|b-(ta+(1-t)b)\right|$$

$$=2t(1-t)M\left|b-a\right|$$

Eğer $t=\frac{1}{2}$ seçersek,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{M\left|b-a\right|}{2}$$

elde edilir.Son eşitsizlikte sırasıyla a yerine $ta+(1-t)b$ ve b yerine de $(1-t)a+tb$ koyarsak,

$$\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{M\left|2t-1\right|}{2}\left|b-a\right|$$

elde ederiz. Eşitsizliğin t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integralini alırsak,

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt+\int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{M\left|b-a\right|}{2}\int_0^1\left|2t-1\right|dt$$

olur böylelikle,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt=\int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ve

$$\int_0^1 |2t-1|\,dt = \frac{1}{2}$$

olup eşitsizlikte yerlerine konulursa ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.4. (Ostrowski Eşitsizliği) $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biçiminde I°'de differansiyenebilen bir fonksiyon ve $a \le b$ olacak şekilde $a,b \in I^{\circ}$ olsun. Eğer $\forall x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \le M$ ise aşağıdaki eşitsizlik $\forall x \in [a,b]$ için sağlanır (17).

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \le \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right].$$

Teorem 2.1.5. (Simpson Eşitsizliği) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonun dördüncü türevi $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = sup_{x\in(a,b)} \left| f^{(4)} \right| < \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (18).

$$\left| \frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \le \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4 .$$

Teorem 2.1.6. $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir Lipschitz fonksiyon olsun. $\alpha \in [0,1]$ ve $a \le A \le B \le b$ olmak üzere, $V = (1-\alpha)a + \alpha b$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \alpha f(A) + (1-\alpha) f(B) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{L V_{\alpha}(A,B)}{2(b-a)}$$

Burada V_{α} aşağıdaki aralıklara göre tanımlanır.

1. Eğer $a \le V \le A \le B \le b$ ise

$$V_\alpha(A,B)=(A-a)^2-(A-V)^2+(B-V)^2+(b-B)^2$$

2. Eğer $a\le A\le V\le B\le b$ ise

$$V_\alpha(A,B)=(A-a)^2+(V-A)^2+(B-V)^2+(b-B)^2$$

3. Eğer $a\le A\le B\le V\le b$ ise

$$V_\alpha(A,B)=(A-a)^2+(V-A)^2+(b-B)^2+(V-B)^2$$

olur (19).

İspat. f 'nin tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^V\left[f(A)-f(x)\right]dx+\int_V^b\left[f(B)-f(x)\,dx\right]\right| \\
&\le\frac{1}{b-a}\left[\int_a^V\left|f(A)-f(x)\right|dx+\int_V^b\left|f(B)-f(x)\right|dx\right] \\
&\le\frac{L}{b-a}\left[\int_a^V|A-x|\,dx+\int_V^b|B-x|\,dx\right]
\end{aligned}$$

Şimdi verilen aralıklarda $\int_a^V|A-x|\,dx$ ve $\int_V^b|B-x|\,dx$ integrallerini çözersek,

$$\left|\alpha f(A)+(1-\alpha)f(B)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\frac{LV_\alpha(A,B)}{2(b-a)}$$

eşitsizliği elde edilip, ispat tamamlanmış olur. Eşitsizlikteki değerler değiştirilerek yeni sonuçlar elde edilebilir.

2.2. Bullen Tipli Eşitsizlikler

Teorem 2.2.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir Lipschitz fonksiyon olsun. $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ olacak şekilde $\alpha+\beta+\gamma=1$ olsun. $a \le A \le B \le C \le b$ ve, $V_1 = (1-\alpha)a + \alpha b$, $V_2 = \gamma a + (\alpha+\beta)b$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (19),

$$\left|\alpha f(A) + \beta f(B) + \gamma f(C) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{L V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)}{2(b-a)}$$

Burada $V_{\alpha,\beta,\gamma}$ aşağıdaki eşitsizliklere göre tanımlanır.

1. Eğer $a \le V_1 \le V_2 \le A \le B \le C \le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C) = (A-a)^2 - (A-V_1)^2 + (B-V_1)^2 - (B-V_2)^2 + (C-V_2)^2 + (b-C)^2$$

2. Eğer $a \le V_1 \le A \le V_2 \le B \le C \le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C) = (A-a)^2 - (A-V_1)^2 + (B-V_1)^2 - (B-V_2)^2 + (C-V_2)^2 + (b-C)^2$$

3. Eğer $a \le V_1 \le A \le B \le V_2 \le C \le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C) = (A-a)^2 - (A-V_1)^2 + (B-V_1)^2 + (V_2-B)^2 + (C-V_2)^2 + (b-C)^2$$

4. Eğer $a \le V_1 \le A \le B \le C \le V_2 \le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)=(A-a)^2-(A-V_1)^2+(B-V_1)^2+(V_2-B)^2-(V_2-C)^2+(b-C)^2$$

5. Eğer $a\le A\le V_1\le V_2\le B\le C\le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)=(A-a)^2+(V_1-A)^2+(B-V_1)^2-(B-V_2)^2+(C-V_2)^2+(b-C)^2$$

6. Eğer a $\le A\le V_1\le B\le V_2\le C\le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)=(A-a)^2+(V_1-A)^2+(B-V_1)^2+(V_2-B)^2+(C-V_2)^2+(b-C)^2$$

7. Eğer a $\le A\le V_1\le B\le C\le V_2\le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)=(A-a)^2+(V_1-A)^2+(B-V_1)^2+(V_2-B)^2-(V_2-C)^2+(b-C)^2$$

8. Eğer a $\le A\le B\le V_1\le V_2\le C\le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)=(A-a)^2+(V_1-A)^2-(V_1-B)^2+(V_2-B)^2+(C-V_2)^2+(b-C)^2$$

9. Eğer a $\le A\le B\le V_1\le C\le V_2\le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)=(A-a)^2+(V_1-A)^2-(V_1-B)^2+(V_2-B)^2-(V_2-C)^2+(b-C)^2$$

10. Eğer a $\le A\le B\le C\le V_1\le V_2\le b$ ise

$$V_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)=(A-a)^2+(V_1-A)^2-(V_1-B)^2+(V_2-B)^2-(V_2-C)^2+(b-C)^2$$

İspat. f'nin tanımını kullanarak,

$$\left|\alpha f(A)+\beta f(B)+\gamma f(C)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$=\frac{1}{b-a}\left|\int_a^{V_1}\left[f(A)-f(x)\right]dx+\int_{V_1}^{V_2}\left[f(B)-f(x)dx\right]+\int_{V_2}^{b}\left[f(C)-f(x)dx\right]\right|$$

$$\leq\frac{1}{b-a}\left[\int_a^{V_1}\left|f(A)-f(x)\right|dx+\int_{V_1}^{V_2}\left|f(B)-f(x)\right|dx+\int_{V_2}^{b}\left|f(C)-f(x)\right|dx\right]$$

$$\leq\frac{L}{b-a}\left[\int_a^{V_1}\left|A-x\right|dx+\int_{V_1}^{V_2}\left|B-x\right|dx+\int_{V_2}^{b}\left|C-x\right|dx\right]$$

Şimdi verilen aralıklarda , $\int_a^{V_1}\left|A-x\right|dx$, $\int_{V_1}^{V_2}\left|B-x\right|dx$ ve $\int_{V_2}^{b}\left|C-x\right|dx$ integrallerini çözülmesi ile,

$$\left|\alpha f(A)+\beta f(B)+\gamma f(C)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{LV_{\alpha,\beta,\gamma}(A,B,C)}{2(b-a)}$$

eşitsizliği elde edilip ispat tamamlanır. Eşitsizlikteki değerler farklı alınarak yeni sonuçlar türetilebilir. Örneğin $\alpha=\gamma=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $A=a$, $B=\frac{a+b}{2}$ ve $C=b$ alınırsa Bullen tipli eşitsizik elde ederiz.

2.3 Kesirli İntegrallerin Elde Ediliş Yöntemleri

2.3.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

Riemann-Liouville Kesirli integral operatörünü elde etmek için ilk olarak n-katlı

$$\int_a^x\int_a^{\sigma_1}\int_a^{\sigma_2}\dots\int_a^{\sigma_{n-1}}f(\sigma_n)\,d\sigma_{n-1}\dots d\sigma_2 d\sigma_1$$

integralini ele alalım. Bu integrallerin integral alma sırasını ve bunlara bağlı sınırlarını değiştirelim. Bu durumda,

$$
\begin{array}{ll}
a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\
a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\
,\dots, & ,\dots, \\
a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\
a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x
\end{array}
$$

sınır değişimlerini uyguladığımızda,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \dots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \dots \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n$$

ifadesi elde edilir. Eğer eşitliğin sağ tarafındaki terimler tek tek hesaplanırsa,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} \mathrm{d}\sigma_{n-1}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ oluşu kullanılarak,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} \mathrm{d}\sigma_{n-1}$$

biçiminde yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n-sayısı pozitif bir tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tam olmayan durumlarda da ifade edilebilir. Dolayısıyla eşitliğin sağ tarafında n'nin tamsayı olmadığı durumlar için Riemann-Liouville kesirli integral tanımı verilebilir.

Tanım 2.3.1. (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) : $f(x) \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda,

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > a$$

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt, \qquad x < b\ .$$

integrallerine sırasıyla $\alpha > 0$ için α. mertebeden sağ ve sol kesirli integraller denir. Bu integral literatürde Riemann-Liouville kesirli integrali olarak bilinmektedir. Burada $J_{a^+}^{0} f = J_{b^-}^{0} f = f(x)$ şeklindedir.

Tanım 2.3.2. (Gamma Fonksiyonu) : Gamma fonksiyonu $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_n^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

biçiminde tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri aşağıdaki gibidir (20).

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},\ 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2n).$

Tanım 2.3.3. (Beta Fonksiyonu) : $m, n > 0$ için

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

biçiminde tanımlanan iki değişkenli fonksiyona *Beta Fonksiyonu* denir.

2.4. Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Teorem 2.4.1. $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. $a<$b olacak şekilde $a,b \in I$ verilsin. Bu durumda $\alpha > 0$ olmak üzere, eğer f $[a,b]$ aralığında harmonik konveks bir fonksiyon ise, aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır (21),

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{J^{\alpha}_{1/a-}(f\circ g)(1/b)+J^{\alpha}_{1/b+}(f\circ g)(1/a)\right\} \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

İspat. f , $[a,b]$ aralığında harmonik konveks olduğundan her $x,y \in [a,b]$ için (harmonik konvekslik tanımında $t = 1/2$ olarak alırsak,

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

olup, $x = \dfrac{ab}{tb+(1-t)a}$, $y = \dfrac{ab}{ta+(1-t)b}$ olarak seçilirse,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \le \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)}\right)}{2}$$

Eşitsizliğin her iki tarafını da $t^{\alpha-1}$ ile çarpıp, daha sonra t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integralini alırsak,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \le \frac{\alpha}{2}\left\{\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)}\right)dt\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{\int_{1/b}^{1/a}\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{1}{x}\right)dt + \int_{1/b}^{1/a}\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{1}{x}\right)dt\right\}$$

$$\leq \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{J^{\alpha}_{1/a-}(f\circ g)(1/b)+J^{\alpha}_{1/b+}(f\circ g)(1/a)\right\}$$

$$\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{J^{\alpha}_{1/a-}(f\circ g)(1/b)+J^{\alpha}_{1/b+}(f\circ g)(1/a)\right\}.$$

$g(x)=1/x$ olup, eşitsizliğin sağ tarafı kanıtlanır.

Eşitsizliğin sol tarafı için, $t\in[0,1]$ için f 'nin harmonik konveksliğini kullanırsak,

$$f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

ve

$$f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)a}\right)\leq tf(b)+(1-t)f(a)$$

daha sonra bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)a}\right)\leq f(a)+f(b)$$

Eşitsizliğin her iki tarafını da $t^{\alpha-1}$ ile çarpıp, daha sonra t değişkenine göre $[0,1]$ aralığında integralini alırsak,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt+\int_0^1 t^{\alpha-1}f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)}\right)dt\leq\left[f(a)+f(b)\right]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$$

Benzer şekilde

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{J^{\alpha}_{1/a-}(f\circ g)(1/b)+J^{\alpha}_{1/b+}(f\circ g)(1/a)\right\}\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.4.2. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı Lipschitz fonksiyon ve $a \le x \le y \le b$ aralığı I 'nın içinde bir aralık olsun. $\lambda \in [0,1]$ ve olmak üzere, $V = \lambda a + (1-\lambda) b$ biçiminde tanımlansın.Bu durumda kesirli integraller için,

$$\left| \lambda^{\alpha} f(x) + (1-\lambda)^{\alpha} f(y) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J_{V-}^{\alpha} f(a) + J_{V+}^{\alpha} f(b) \right] \right| \le \frac{\alpha M V_{\alpha,\lambda}(x,y)}{(b-a)^{\alpha}}$$

eşitsizliği sağlanır (22).

2.5. Kesirli İntegraller İçin Bullen Tipli Eşitsizlikler

Teorem 2.5.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı Lipschitz fonksiyon ve $a \le x \le y \le z \le b$ aralığı I 'nın içinde bir aralık olsun. $\lambda, \beta, \theta \in [0,1]$ ve $\lambda + \beta + \theta = 1$ olmak üzere, $V_1 = (1-\lambda) a + \lambda b$, $V_2 = \theta a + (\lambda + \beta) b$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda kesirli integraller için ,

$$\left| \lambda^{\alpha} f(x) + \beta^{\alpha} f(y) + \theta^{\alpha} f(z) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha}} \left[J_{V_1-}^{\alpha} f(a) + J_{V_1+}^{\alpha} f(V_2) + J_{V_2+}^{\alpha} f(b) \right] \right|$$
$$\le \frac{\alpha M \alpha, \lambda, \beta, \theta(x,y,z)}{(b-a)^{\alpha}}$$

eşitsizliği sağlanır (22).

2.6. Lipschitz Fonksiyonlar İçin Kesirli İntegraller Aracılığıyla İntegral Eşitsizlikler

Teorem 2.6.1. $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < b$ ve $a,b \in I$ olmak üzere I 'da bir M-Lipschitz fonksiyon olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Riemann-Liouville kesirli integrali için

$$\left|I_f(x,\lambda,\alpha,a,b)\right| \le M\left\{\left[(1-\lambda)x+\lambda a\right]+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\right.$$

$$+\alpha(2\lambda-1)\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt+\left[\lambda b-(1-\lambda)x\right]$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}+(1-2\lambda)\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right\}$$

eşitsizliği sağlanır (23).

Sonuç 2.6.1. Eğer Teorem 2.6.1 eşitsizliğinde $\lambda = 0$ olarak alınırsa,

$$\cdot\left|\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\times\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{x}+}(f\circ g)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{x}-}(f\circ g)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$\le\frac{M}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{x\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right]+\alpha\left[\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right]\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 2.6.1 eşitsizliğinde,

1. $\alpha=1$ alınırsa,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\le M\,\frac{a.b}{b-a}\left[\ln\left(\frac{ab}{x^2}\right)+\frac{x(a+b)}{ab}-2\right] \qquad (2.6.1)$$

eşitsizliği,

2. $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ alınırsa,

$$\left|f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{M}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right)$$

eşitsizliği,

3. $\alpha=1$ ve $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ alınırsa,

$$\left|f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq M\,\frac{a.b}{b-a}\ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right) \qquad (2.6.2)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 2.6.2. Eğer Teorem 2.6.1 eşitsizliğinde $\lambda=1$ alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+f(b)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\times\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{x}+}(f\circ g)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{x}-}(f\circ g)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{M}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left\{\left[b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}-a\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\right]+\alpha\left[\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right]\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 2.6.2. eşitsizliğinde ,

1. $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\le \frac{M\alpha}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[(b-a)\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}+\alpha\left(\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right)\right]$$

eşitsizliği

2. $\alpha=1$ ve $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{a.b}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\le M\,\frac{a.b}{b-a}\left[\ln\left(\frac{4ab}{(a+b)^2}\right)+\frac{(b-a)^2}{2ab}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 2.6.3. Eğer Teorem 2.6.1 eşitsizliğinde,

1. $\lambda=\dfrac{1}{3}$ ve $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ alınırsa,

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right]-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}.\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\times\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$\le \frac{M}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left\{\frac{b-a}{3}\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}+\frac{\alpha}{3}\left[\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right]\right\}$$

olup, bu eşitsizlikte özel olarak $\alpha=1$ seçilirse,

$$\left|\frac{1}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+2f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right]-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\le M\,\frac{ab}{b-a}\left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right)+\frac{(b-a)^2}{6ab}\right]$$

eşitsizliği

2. $\lambda=\dfrac{1}{2}$ ve $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ alınırsa,

$$\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right]-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|\leq M\,\frac{b-a}{4}$$

olup, bu eşitsizlikte özel olarak $\alpha=1$ seçimi yapılırsa,

$$\left|\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right]-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq M\,\frac{b-a}{4}$$

eşitsizliği bulunur.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde kesirli integraller aracılığıyla Lipschitz Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Bullen tipli eşitsizlikler oluşturulmuştur.Bu bölüm boyunca $g(x) = 1/x$

$A_t = \left(\frac{1}{a} - t\right)^{\alpha-1} . \frac{1}{t}$ ve $B_t = \left(t - \frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} . \frac{1}{t}$ ve $C_t = \left(t - \frac{1}{V_2}\right)^{\alpha} \frac{1}{t}$,olarak alınacaktır.

3.1. Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı Lipschitz fonksiyon ve $a \le x \le y \le b$ aralığı I 'nın içinde bir aralık olsun. $\lambda \in [0,1]$ ve olmak üzere, $V = \dfrac{ab}{\lambda a + (1-\lambda) b}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \lambda^{\alpha} f(x) + (1-\lambda)^{\alpha} f(y) - \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha} \left[J^{\alpha}_{\frac{1}{v}-} (fog)\left(\frac{1}{b}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{v}+} (fog)\left(\frac{1}{a}\right) \right] \right|$$

$$\le M\alpha \left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha} \left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} - t\right)^{\alpha-1} \left| x - \frac{1}{t} \right| dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}} \left(t - \frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} \left| y - \frac{1}{t} \right| dt \right]$$

İspat. f 'nin tanımını kullanarak,

$$\left| \lambda^{\alpha} f(x) + (1-\lambda)^{\alpha} f(y) - \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha} \left[J^{\alpha}_{\frac{1}{v}-} (fog)\left(\frac{1}{b}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{v}+} (fog)\left(\frac{1}{a}\right) \right] \right|$$

$$= \alpha \left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha} \left| \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} - t\right)^{\alpha-1} \left(f(x) - f\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}} \left(t - \frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} \left(f(y) - f\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt \right|$$

$$\le \alpha\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{1}{a}}\left|\frac{1}{a}-t\right|^{\alpha-1}\left|f(x)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left|t-\frac{1}{b}\right|^{\alpha-1}\left|f(y)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right|dt\right]$$

$$\le \mathrm{M}\alpha\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|y-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup,

$$\mathrm{K}_{x,y,}(a,b;\lambda,\alpha)=M\alpha\left(\frac{ab}{b-a}\right)\left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|y-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$ olarak

alırsak, aşağıdaki aralıklar için,

1. $a\le V\le x\le y\le b$, durumunda,

$$\mathrm{K}_{x,y,}(a,b;\lambda,\alpha)=M\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{y}}B_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{V}}B_t dt-\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\left(x\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+y\left(\left(\frac{(1-\lambda)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

2. $a\le x\le V\le y\le b$, durumunda,

$$\mathrm{K}_{x,y,}(a,b;\lambda,\alpha)=M\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{y}}B_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{V}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\left(x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)+y\left(\left(\frac{(1-\lambda)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

3. $a\le x\le y\le V\le b$, durumunda,

$$\mathrm{K}_{,x,y,}\left(a,b;\lambda,\alpha\right)=M\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\left(x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)-y\left(\left(\frac{(1-\lambda)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.1. Eğer teoremde $\alpha=1$ olarak alınırsa, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\left|\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq \mathrm{M}\frac{ab}{b-a}\left[\int_{\frac{1}{v}}^{\frac{1}{a}}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{v}}\left|y-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup aşağıdaki aralıklar için,

1. $a\leq V\leq x\leq y\leq b$, durumunda,

$$\mathrm{K}_{x,y,}\left(a,b;\lambda,1\right)=M\frac{ab}{b-a}\left[ln\left(\frac{ab}{y^2}\right)+\frac{\left(\lambda x(b-a)+y\left((1+\lambda)a+(1-\lambda)b\right)\right)}{ab}-2\right]$$

2. $a\leq x\leq V\leq y\leq b$, durumunda

$$\mathrm{K}_{x,y}\left(a,b;\lambda,1\right)=M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{(ab)^3}{\left(xy\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right)^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{x\left(\lambda a+(2-\lambda)b\right)+y\left((1+\lambda)a+(1-\lambda)b\right)}{ab}-4\right]$$

3. $a\leq x\leq y\leq V\leq b$, durumunda

$$\mathrm{K}_{x,y,}\left(a,b;\lambda,1\right)=M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{ab}{x^2}\right)+\frac{x\left(\lambda a+(2-\lambda)b\right)-y(1-\lambda)(b-a)}{ab}-2\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç 3.1.2. Eğer teoremde $\lambda=1$ olarak alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|f(x)-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq \mathrm{M}\alpha\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)+\left(x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

Uyarı 3.1.1. Eğer Sonuç 3.1.2.' de özel olarak $\alpha=1$ seçimi yapılırsa,

$$\left|f(x)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq M\frac{ab}{b-a}\left[\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$=M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{ab}{x^2}\right)+\frac{x(a+b)}{ab}-2\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (2.6.1) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 3.1.3. Eğer teroremde $\lambda=\frac{1}{2}$ olarak alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir,

$$\left|\frac{(f(x)+f(y))}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{\mathrm{M}\alpha}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|y-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup aşağıdaki aralıklar için,

1. $\frac{2ab}{a+b}\leq x\leq y$, durumunda,

$$\mathrm{K}_{x,y}\left(a,b;\frac{1}{2},\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{y}}B_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{a+b}{2ab}}B_t dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\left(x\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}+y\left(\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

2. $x\leq\frac{2ab}{a+b}\leq y$, durumunda,

$$\mathrm{K}_{x,y}\left(a,b;\frac{1}{2},\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{y}}B_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{a+b}{2ab}}B_t dt+\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\left(x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}\right)-y\left(\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

3. $x\leq y\leq\frac{2ab}{a+b}$, durumunda,

$$\mathrm{K}_{x,y}\left(a,b;\frac{1}{2},\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}B_t dt+\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\left(x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}\right)-y\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 3.1.2. Eğer Sonuç 3.1.3 eşitsizliğinde özel olarak $\alpha=1$ seçimi yapılırsa,

$$\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq M\,\frac{ab}{b-a}\left[\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left|y-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup aşağıdaki aralıklar için,

1. $\frac{2ab}{a+b} \leq x \leq y$, durumunda,

$$K_{x,y}\left(a,b;\frac{1}{2},1\right) = M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{ab}{y^2}\right)+x\left(\frac{b-a}{2ab}\right)+y\left(\frac{3a+b}{2ab}\right)-2\right]$$

2. $x \leq \frac{2ab}{a+b} \leq y$, durumunda,

$$K_{x,y}\left(a,b;\frac{1}{2},1\right) = M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{4(ab)^3}{\left(xy(a+b)\right)^2}\right)+x\left(\frac{a+3b}{2ab}\right)+y\left(\frac{3a+b}{2ab}\right)-4\right]$$

3. $x \leq y \leq \frac{2ab}{a+b}$, durumunda,

$$K_{x,y}\left(a,b;\frac{1}{2},1\right) = M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{ab}{x^2}\right)+x\left(\frac{a+3b}{2ab}\right)-y\left(\frac{b-a}{2ab}\right)-2\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç. 3.1.4. Eğer teorem 3.1.1' de $x = y = V$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir

$$\left|\left(\lambda^\alpha+(1-\lambda)^\alpha\right)f(x)-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^\alpha\left[J^\alpha_{\frac{1}{x}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^\alpha_{\frac{1}{x}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{ab}{b-a}\right)^\alpha\left[\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$\leq M\left(\frac{ab}{b-a}\right)^\alpha\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}B_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)+x\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^\alpha-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^\alpha\right)\right]$$

Eğer burada $\lambda=1$ seçimi yapılırsa Sonuç 3.1.2 eşitsizliği elde edilir

Uyarı 3.1.3 Eğer Sonuç 3.1.4. eşitsizliğinde $\lambda=1/2$ seçimi yapılırsa,

$$\left|f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J_{\frac{1}{x}-}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J_{\frac{1}{x}+}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{M}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}B_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)+x\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\alpha=1$ seçimi ile eşitsizlik Uyarı 3.1.1 eşitsizliğine indirgenir. Benzer şekilde son eşitsizlikte özel olarak $x=\dfrac{2ab}{a+b}$ seçimi yapılırsa,

$$\left|f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J_{\frac{a+b}{2ab}-}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J_{\frac{a+b}{2ab}+}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{M}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}B_t dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 3.1.5. Eğer teoremde $\delta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ olmak üzere $x=\dfrac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}$ ve $y=\dfrac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\lambda^{\alpha}f\left(\frac{ab}{(1-\delta)-\delta b}\right)+(1-\lambda)^{\alpha}f\left(\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\right)\right.$$

$$\left.-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J_{\frac{1}{v}-}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J_{\frac{1}{v}+}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup, burada

$$C_{a,b}(\alpha,\lambda,\delta)=M\alpha\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}-\frac{1}{t}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olarak alırsak aşağıdaki aralıklar için,

1. $\lambda\leq 1-\delta$, durumunda,

$$C_{a,b}(\alpha,\lambda,\delta)=M\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}B_t dt-\int_{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}^{\frac{1}{V}}B_t dt-\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{(1-\lambda)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

2. $1-\delta\leq\lambda\leq\delta$, durumunda,

$$C_{a,b}(\alpha,\lambda,\delta)=M\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}B_t dt-\int_{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}^{\frac{1}{V}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}A_t dt-\int_{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$+\left(\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{(1-\lambda)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

3. $\delta \leq \lambda$, durumunda,

$$C_{a,b}(\alpha,\lambda,\delta)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}A_t dt-\int_{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$+\left(\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right)$$

$$\left.+\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{(1-\lambda)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right)\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 3.1.4. Eğer Sonuç 3.1.5. eşitsizliğinde $\alpha=1$ seçimi yapılırsa,

$$\left|\lambda f\left(\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\right)+(1-\lambda)f\left(\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\right)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|$$

$$\leq \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)\left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}\left|\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left|\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup aşağıdaki aralıklar için,

1. $\lambda \leq 1-\delta$, durumunda,

$$C_{a,b}(1,\lambda,\delta)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)\left[\ln\left(\frac{(\delta a+(1-\delta)b)^2}{ab}\right)+\frac{\lambda(b-a)}{(1-\delta)a+\delta b}-\frac{(1+\lambda-2\delta)(b-a)}{\delta a+(1-\delta)b}\right]$$

2. $1-\delta \leq \lambda \leq \delta$, durumunda,

$$C_{a,b}(1,\lambda,\delta)= \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)\left[\ln\left(\frac{\left[\left((1-\delta)a+\delta b\right)\left(\delta a+(1-\delta)b\right).\right]^2}{\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)^2 ab}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{(2-\lambda-2\delta)(b-a)}{(1-\delta)a+\delta b}+\frac{(2\delta-\lambda-1)(b-a)}{\delta a+(1-\delta)b}\right]$$

3. $\delta\leq\lambda$, durumunda,

$$C_{a,b}(1,\lambda,\delta)= \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)\left[\ln\left(\frac{\left((1-\delta)a+\delta b\right)^2}{ab}\right)+\frac{(2-\lambda-2\delta)(b-a)}{(1-\delta)a+\delta b}-\frac{(1-\lambda)(b-a)}{\delta a+(1-\delta)b}\right]$$

Uyarı 3.1.5. Eğer Sonuç 3.1.5. eşitsizliğinde $\delta=1$ seçimi yapılırsa,

$$\left|\lambda^\alpha f(a)+(1-\lambda)^\alpha f(b)-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^\alpha\left[J^\alpha_{\frac{1}{v}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^\alpha_{\frac{1}{v}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{a.b}{a+b}\right)^\alpha\left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|a-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$=\mathrm{M}\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^\alpha\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}A_t dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}B_t dt\right)+\left(\frac{(b-a)}{ab}\right)^\alpha\left((1-\lambda)^\alpha b-\lambda^\alpha a\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.6. Eğer Sonuç 3.1.5 eşitsizliğinde $\delta=1$ ve $\lambda=1/2$ seçimleri yapılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^\alpha\left[J^\alpha_{\frac{a+b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^\alpha_{\frac{a+b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{\mathrm{M}\alpha}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^\alpha\left[\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|a-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$\leq \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}} B_t dt\right)+(b-a)\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\alpha}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.7. Eğer Sonuç 3.1.5 eşitsizliğinde $\delta=1$ ve $\alpha=1$ seçimleri yapılırsa,

$$\left|\lambda f(a)+(1-\lambda) f(b)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq M\frac{ab}{b-a}\left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}\left|a-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$=M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{ab}{\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)^2}\right)+(b-a)\left(\frac{(1-\lambda)b-\lambda a}{ab}\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.Özel olarak bu eşitsizlikte $\lambda=1/2$ seçimi yapılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{4ab}{(a+b)^2}\right)+\frac{(b-a)^2}{2ab}\right]$$

eşitsizliği bulunup, benzer şekilde $\lambda=1/4$ olarak alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+3f(b)}{4}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(t)}{t^2}dt\right|\leq M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{16ab}{(a+3b)^2}\right)+\frac{(b-a)(3b-a)}{4ab}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.8. Eğer Sonuç 3.1.5. eşitsizliğinde $\delta=1/2$ seçimi yapılırsa,

$$\left|\left(\lambda^{\alpha}+(1-\lambda)^{\alpha}\right)f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{v}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{v}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup aşağıdaki aralıklar için

1. $\lambda \leq 1/2$ durumunda ,

$$C_{a,b}\left(\alpha,\lambda,\frac{1}{2}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}B_t dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{V}}B_t dt-\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{(b-a)(1-\lambda)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

2. $1/2 \leq \lambda$ durumunda,

$$C_{a,b}\left(\alpha,\lambda,\frac{1}{2}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V}}^{\frac{a+b}{2ab}}A_t dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}A_t dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V}}B_t dt\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2ab}{a+b}\left(2\left(\frac{b-a}{2ab}\right)^{\alpha}-\left(\frac{(1-\lambda)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eğer burada özel olarak $\lambda=\frac{1}{2}$, olarak seçilirse Sonuç 2.6.2 eşitsizliğindeki ,

$$\left|f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]\right|$$

$$\leq\frac{M}{2^{1-\alpha}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.1.9. Eğer Sonuç 3.1.5 eşitsizliğinde özel olarak $\delta = 1/2$ ve $\alpha = 1$ seçimleri yapılırsa,

$$\left| f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(t)}{t^2}dt \right| \le M\,\frac{ab}{b-a}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \left| \frac{2ab}{a+b} - \frac{1}{t} \right| dt$$

$$= M\,\frac{ab}{b-a}\ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik (2.6.2) eşitsizliğine indirgenir.

3.2. Bullen Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1 $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı Lipschitz fonksiyon ve $a \le x \le y \le z \le b$, aralığı I 'nın içinde bir aralık olsun. $\lambda, \beta, \theta \in [0,1]$ ve $\lambda + \beta + \theta = 1$ olmak üzere $V_1 = \dfrac{ab}{\lambda a + (1-\lambda)b}$ ve $V_2 = \dfrac{ab}{(\lambda+\beta)a + \theta b}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \lambda^{\alpha} f(x) + \beta^{\alpha} f(y) + \theta^{\alpha} f(z) - \Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha} \right.$$

$$\left. \times \left[J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}-}(fog)\left(\frac{1}{V_2}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{V_2}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right) \right] \right|$$

$$\le M\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha} \left[\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} - t\right)^{\alpha-1} \left| x - \frac{1}{t} \right| dt \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}} \left(t - \frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1} \left| y - \frac{1}{t} \right| dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}} \left(t - \frac{1}{b}\right)^{\alpha-1} \left| z - \frac{1}{t} \right| dt \right]$$

İspat. f'nin tanımını kullanılarak,

$$\left|\lambda^{\alpha} f(x)+\beta^{\alpha} f(y)+\theta^{\alpha} f(z)-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}-}(fog)\left(\frac{1}{V_2}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{V_2}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$=\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left|\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left(f(x)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}\left(t-\frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\left(f(y)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left(f(z)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt\right|$$

$$\leq\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}\left|\frac{1}{a}-t\right|^{\alpha-1}\left|f(x)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}\left|t-\frac{1}{V_2}\right|^{\alpha-1}\left|f(y)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}\left|t-\frac{1}{b}\right|^{\alpha-1}\left|f(z)-f\left(\frac{1}{t}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}\left(t-\frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\left|y-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|z-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup,

$$D_{x,y,z}(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha)=M\alpha\left(\frac{a.b}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}\left(t-\frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\left|y-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|z-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olarak alırsak, aşağıdaki aralıklar için,

1. $V_1 \le V_2 \le x \le y \le z$, durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{z}}B_t dt-\int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt-\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt-\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+x\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+y\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+z\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

2. $V_1 \le x \le y \le V_2 \le z$, durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{z}}B_t dt-\int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{y}}C_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt-\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$+x\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)+z\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)^{\alpha}$$

$$+y\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{(\lambda+\beta)a+\theta b}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

3. $V_1 \le x \le y \le z \le V_2$ durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{y}}C_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt-\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\left.+x\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+y\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{(\lambda+\beta)a+\theta b}{ab}\right)^{\alpha}\right)-z\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right]$$

4. $x \le V_1 \le V_2 \le y \le z$ durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{z}}B_t dt-\int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt-\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt\right)\right.$$

$$\left.+x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)+y\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+z\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

5. $x \le V_1 \le y \le V_2 \le z$ durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{z}}B_t dt\right.\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{y}}C_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt\right)+x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$\left.+y\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{(\lambda+\beta)a+\theta b}{ab}\right)^{\alpha}\right)+z\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

6. $x \le V_1 \le y \le z \le V_2$ durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{x}}A_t dt-\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}A_t dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt\right.\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{y}}C_t dt-\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt\right)+x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$\left.+y\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{1}{y}-\frac{(\lambda+\beta)a+\theta b}{ab}\right)^{\alpha}\right)-z\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right]$$

7. $x \le y \le V_1 \le V_2 \le z$ durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right) = \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{x}} A_t dt - \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}} A_t dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{z}} B_t dt - \int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{V_2}} B_t dt + \int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}} C_t dt\right)\right.$$

$$\left. + x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right) - y\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} + z\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - 2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

8. $x \le y \le V_1 \le z \le V_2$ durumunda,

$$D_{x,y,z}\left(a,b;\lambda,\beta,\theta;\alpha\right) = \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{x}} A_t dt - \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}} A_t dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}} B_t dt + \int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}} C_t dt\right)\right.$$

$$\left. + x\left(2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right) - y\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - z\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right]$$

eşitsizlikleri elde edilip ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. Eğer Teorem 3.2.1 eşitsizliğinde $x = y = z = V_1 = V_2$ olarak alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\left(\lambda^{\alpha} + \beta^{\alpha} + \theta^{\alpha}\right) f(x) - \Gamma(\alpha+1).\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{x}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{x}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$\le \mathrm{M}\alpha\left(\frac{a.b}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right| dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|x-\frac{1}{t}\right| dt\right]$$

$$\le \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}} B_t dt - \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}} A_t dt\right) + x\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^{\alpha} - \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

Uyarı 3.2.1. Eğer Sonuç 3.2.1 eşitsizliğinde $\lambda = \beta = \theta = 1/3$ olarak seçilirse,

$$\left| f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{3^{1-\alpha}} \left(\frac{ab}{b-a} \right)^{\alpha} \left[J^{\alpha}_{\frac{1}{x}+} (fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{x}-} (fog)\left(\frac{1}{b}\right) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\mathrm{M}}{3^{1-\alpha}} \left(\frac{ab}{b-a} \right)^{\alpha} \left[\alpha \left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}} B_t dt - \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}} A_t dt \right) + x \left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right)^{\alpha} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b} \right)^{\alpha} \right) \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.2.2. Eğer Sonuç 3.2.1 eşitsizliğinde $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ olarak seçilirse,

$$\left| \left(\lambda^{\alpha} + \beta^{\alpha} + \theta^{\alpha} \right) f\left(\frac{2ab}{a+b} \right) - \Gamma(\alpha+1) \left(\frac{ab}{b-a} \right)^{\alpha} \left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+} (fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-} (fog)\left(\frac{1}{b}\right) \right] \right|$$

$$\leq \mathrm{M}\alpha \left(\frac{ab}{b-a} \right)^{\alpha} \left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}} B_t dt - \int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt \right)$$

eşitsizsizliği elde edilir. Burada yine $\lambda = \beta = \theta = 1/3$ olarak alınırsa,

$$\left| f\left(\frac{2ab}{a+b} \right) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{3^{1-\alpha}} \left(\frac{ab}{b-a} \right)^{\alpha} \left[J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}+} (fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{a+b}{2ab}-} (fog)\left(\frac{1}{b}\right) \right] \right|$$

$$\leq \frac{\mathrm{M}}{3^{1-\alpha}} \alpha \left(\frac{ab}{b-a} \right)^{\alpha} \left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a+b}{2ab}} B_t dt - \int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt \right)$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\alpha = 1$ seçimi ile eşitsizlik Uyarı 3.1.9 eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 3.2.2. Eğer Teorem 3.2.1. eşitsizliğinde $\delta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ olmak üzere

$x = \dfrac{ab}{(1-\delta)a + \delta b}$ $\quad y = \dfrac{2ab}{a+b}$ ve $z = \dfrac{ab}{\delta a + (1-\delta) b}$ seçimleri yapılırsa,

$$\left|\lambda^{\alpha} f\left(\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\right)+\beta^{\alpha} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+\theta^{\alpha} f\left(\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\right)-\Gamma(\alpha+1)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}-}(fog)\left(\frac{1}{V_2}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{V_2}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}-\frac{1}{t}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}\left(t-\frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup,

$$T_{M,a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta)=M\alpha\left(\frac{a.b}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}-\frac{1}{t}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}\left(t-\frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olarak alırsak, aşağıdaki aralıklar için,

1. $\lambda\leq\lambda+\beta\leq 1-\delta\leq {}^{1}\!/_{2}\leq\delta$ durumunda

$$T_{a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}B_t dt-\int_{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt-\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt-\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\frac{2ab}{a+b}\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}$$

$$+\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

2. $\lambda\le 1-\delta\le 1/2\le\lambda+\beta\le\delta$ durumunda,

$$T_{a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}B_t dt-\int_{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{a+b}{2ab}}C_t dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt-\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$+\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-2\theta)(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$\left.+\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\right]$$

3. $\lambda\le 1-\delta\le 1/2\le\delta\le\lambda+\beta$ durumunda,

$$T_{a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{a+b}{2ab}}C_t dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt-\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt\right)\right.$$

$$+\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-2\theta)(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$\left.-\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right]$$

4. $1-\delta\le\lambda\le\lambda+\beta\le 1/2\le\delta$ durumunda,

$$T_{M,a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}A_t dt-\int_{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}^{\frac{1}{a}}A_t dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}B_t dt-\int_{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt\right.\right.$$

$$-\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}} C_t dt\Bigg) + \frac{2ab}{a+b}\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} + \frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$+\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - 2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\Bigg]$$

5. $1-\delta \le \lambda \le \frac{1}{2} \le \lambda+\beta \le \delta$ durumunda,

$$T_{M,a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta) = \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\Bigg[\alpha\Bigg(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}} A_t dt - \int_{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}} B_t dt - \int_{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}^{\frac{1}{V_2}} B_t dt$$

$$+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{a+b}{2ab}} C_t dt - \int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{V_1}} C_t dt\Bigg) + \frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - 2\left(\frac{(1-2\theta)(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}\right).$$

$$+\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - 2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\Bigg]$$

6. $1-\delta \le \lambda \le \frac{1}{2} \le \delta \le \lambda+\beta$ durumunda,

$$T_{M,a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta) = \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\Bigg[\alpha\Bigg(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}} A_t dt - \int_{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}} B_t dt$$

$$+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{a+b}{2ab}} C_t dt - \int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{V_1}} C_t dt \Bigg) + \frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$+\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$+\frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - 2\left(\frac{(1-2\theta)(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}\right) - \frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}$$

7. $1-\delta \le \lambda \le \frac{1}{2} \le \delta \le \lambda+\beta$ durumunda,

$$T_{a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta) = \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\Bigg[\alpha\Bigg(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}} A_t dt - \int_{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}} B_t dt - \int_{\frac{\delta a+(1-\delta)b}{ab}}^{\frac{1}{V_2}} B_t dt$$

$$+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}} C_t dt\Bigg) + \frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$-\frac{2ab}{a+b}\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} + \frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - 2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)\Bigg]$$

8. $1-\delta \le \frac{1}{2} \le \lambda \le \delta \le \lambda+\beta$ durumunda,

$$T_{M,a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;\delta) = \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\Bigg[\alpha\Bigg(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}} A_t dt - \int_{\frac{(1-\delta)a+\delta b}{ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}} B_t dt + \int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}} C_t dt\Bigg)$$

$$+\frac{ab}{(1-\delta)a+\delta b}\left(2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha} - \left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right)$$

$$-\frac{2ab}{a+b}\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-\frac{ab}{\delta a+(1-\delta)b}\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\Bigg]$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Uyarı 3.2.3. Eğer Sonuç 3.2.2. eşitsizliğinde $\delta=1$ olarak alınırsa,

$$\Bigg|\lambda^{\alpha} f(a)+\beta^{\alpha} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+\theta^{\alpha} f(b)-\Gamma(\alpha+1).\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}$$

$$\times\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{V_1}-}(fog)\left(\frac{1}{V_2}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{V_2}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\Bigg|$$

$$\leq M.\alpha.\left(\frac{a.b}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}.\left|a-\frac{1}{t}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}\left(t-\frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

olup aşağıdaki aralıklar için,

1. $\lambda\leq\lambda+\beta\leq 1/2$ durumunda

$$T_{M,a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;1)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt-\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt\right)\right.$$

$$\left.-a\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\frac{2ab}{a+b}\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\mathrm{b}\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\right]$$

2. $\lambda\leq 1/2\leq\lambda+\beta$ durumunda

$$-a\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\mathrm{b}\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-2\theta)(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}\right)\Bigg]$$

$$T_{a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;1)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{a+b}{2ab}}C_t dt-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt\right)\right.$$

3. $\frac{1}{2}\leq\lambda\leq\lambda+\beta$ durumunda

$$T_{a,b}(\alpha;\lambda,\beta,\theta;1)=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{1}{V_1}}^{\frac{1}{a}}A_t dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{V_2}}B_t dt+\int_{\frac{1}{V_2}}^{\frac{1}{V_1}}C_t dt\right)\right.$$

$$-a\left(\frac{\lambda(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-\frac{2ab}{a+b}\left(\frac{\beta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}+\mathrm{b}\left(\frac{\theta(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}\Bigg]$$

eşitsilikleri elde edilir.

Uyarı 3.2.4. Uyarı 3.2.3. eşitsizliğinde $\lambda=\theta=\frac{1}{4}$ ve $\beta=\frac{1}{2}$ seçimleri yapılırsa

$$\Bigg|\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(f(a)+f(b)\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\Gamma(\alpha+1).\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}$$

$$\times\left[J^{\alpha}_{\frac{a+3b}{4ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+3b}{4ab}-}(fog)\left(\frac{4ab}{3a+b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{3a+b}{4ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\Bigg|.$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{a+3b}{4ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|a-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{3a+b}{4ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{3a+b}{4ab}}^{\frac{a+3b}{4ab}}\left(t-\frac{3a+b}{4ab}\right)^{\alpha-1}.\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$
= \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{a+3b}{4ab}}^{\frac{1}{a}} A_t\,dt - \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{3a+b}{4ab}} B_t\,dt + \int_{\frac{3a+b}{4ab}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(\frac{3a+b}{4ab}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}\,dt\right.\right.
$$

$$
\left.-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{a+3b}{4ab}}\left(t-\frac{3a+b}{4ab}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}\,dt\right) - a\left(\frac{b-a}{4ab}\right)^{\alpha}
$$

$$
\left.+\frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha} - 2\left(\frac{(b-a)}{4ab}\right)^{\alpha}\right) + \mathrm{b}\left(\frac{b-a}{4ab}\right)^{\alpha}\right]
$$

eşitsizliği elde edilir. Özel olarak bu eşitsizlikte $\alpha = 1$ seçimi yapılırsa

$$
\left|\frac{1}{2}\left[\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right]-\frac{a.b}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}\,dt\right|
$$

$$
\leq M\,\frac{ab}{b-a}\left[2\ln\left(\frac{8(a+b)}{(a+3b)(3a+b)}\right)+\ln(ab)+\frac{(b-a)^2}{4ab}\right]
$$

eşitsizliği bulunur.

Uyarı 3.2.5. Uyarı 3.2.3. eşitsizliğinde $\lambda = \theta = {}^{1}\!/_{6}$ ve $\beta = {}^{2}\!/_{3}$ seçimleri yapılırsa

$$
\left|\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha}\left(f(a)+f(b)\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\right.
$$

$$
\left.\times\left[J^{\alpha}_{\frac{a+5b}{6ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{a+5b}{6ab}-}(fog)\left(\frac{6ab}{5a+b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{5a+b}{6ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|
$$

$$
\leq M\alpha\left(\frac{ab}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\int_{\frac{a+5b}{6ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|a-\frac{1}{t}\right|dt\right.
$$

$$
\left.+\int_{\frac{5a+b}{6ab}}^{\frac{a+5b}{6ab}}\left(t-\frac{1}{V_2}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{5a+b}{6ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt\right]
$$

$$= \mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{a+5b}{6ab}}^{\frac{1}{a}} A_t dt - \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{5a+b}{6ab}} B_t dt + \int_{\frac{5a+b}{6ab}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{5a+b}{6ab}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right.\right.$$

$$\left. - \int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{a+5b}{6ab}}\left(t-\frac{5a+b}{6ab}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right) - a\left(\frac{b-a}{6ab}\right)^{\alpha}$$

$$\left. + \frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{(b-a)}{3ab}\right)^{\alpha} - \left(\frac{(b-a)}{6ab}\right)^{\alpha}\right) + \mathrm{b}\left(\frac{b-a}{6ab}\right)^{\alpha}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Özel olarak burada $\alpha = 1$ seçimi yapılırsa

$$\left|\frac{1}{3}\left[\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)+2f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\right]-\frac{a.b}{b-a}\int_a^b \frac{f(t)}{t^2}dt\right|$$

$$\leq M\,\frac{ab}{b-a}\left[2\ln\left(\frac{18(a+b)}{(a+5b)(5a+b)}\right)+\ln(ab)+\frac{(b-a)^2}{6ab}\right]$$

Sonuç 3.2.4. Eğer Sonuç 3.2.2. eşitsizliğinde $\lambda = \theta = \frac{\gamma}{2}$ ve $\beta = 1-\gamma$ seçimleri yapılırsa

$$\left|\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\alpha}\left(f(a)+f(b)\right)+(1-\gamma)^{\alpha} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\right.$$

$$\left.\times\left[J^{\alpha}_{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{2ab}{(2-\gamma)a+\gamma b}\right)+J^{\alpha}_{\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$\leq M\alpha\left(\frac{a.b}{a+b}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}-t\right)^{\alpha-1}\left|a-\frac{1}{t}\right|dt\right.\right.$$

$$+\int_{\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}}^{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}}\left(t-\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}\right)^{\alpha-1}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}}\left(t-\frac{1}{b}\right)^{\alpha-1}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt$$

$$=\mathrm{M}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[\alpha\left(\int_{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}A_t dt-\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}}B_t dt+\int_{\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}}^{\frac{a+b}{2ab}}\left(t-\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right.\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{a+b}{2ab}}^{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}}\left(t-\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t}dt\right)-a\left(\frac{\gamma(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}$$

$$\left.+\frac{2ab}{a+b}\left(\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{ab}\right)^{\alpha}-2\left(\frac{(1-\delta)(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}\right)+\mathrm{b}\left(\frac{\gamma(b-a)}{2ab}\right)^{\alpha}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 3.2.6. Eğer Sonuç 3.2.3. eşitsizliğinde olarak alınırsa

$$\left|\frac{\gamma}{2}\left(f(a)+f(b)\right)+(1-\gamma)f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt\right|$$

$$\leq M\frac{ab}{a+b}\left[\int_{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}}^{\frac{1}{a}}\left|a-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}}^{\frac{\gamma a+(2-\gamma)b}{2ab}}\left|\frac{2ab}{a+b}-\frac{1}{t}\right|dt+\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{(2-\gamma)a+\gamma b}{2ab}}\left|b-\frac{1}{t}\right|dt\right]$$

$$=M\frac{ab}{b-a}\left[\ln\left(\frac{(a+b)^2 4ab}{(\gamma a+(2-\gamma)b)^2\left((2-\gamma)a+\gamma b\right)^2}\right)+\frac{\gamma(b-a)^2}{2ab}\right]$$

eşitsizliği elde edilir

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Lipschitz Fonksiyonlar için Riemann-Liouville Kesirli integralli aracılığıyla Hadamard ve Bullen tipli yeni eşitsizlik türleri bulmak amaçlanmıştır. Çalışmada Teoremlerdeki değişkenlerin değerleri farklı alınarak, yeni eşitsizlikler ve genel eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu şekilde elde edilen eşitsizliklerin literatürde bulunan eşitszilikle uyumlu olduğu görülmüştür.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar 3. bölümdeki Bullen tipli eşitsizliklerde alınacak farklı değerler için farklı türden integral eşitsizliklere elde edebilirler.

KAYNAKLAR

1. Hardy, G. , Littlewood, J.E. and Polya, G. 1952. *Inequalities*. 2nd Ed. , Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
2. Beckenbach, E.F. and Bellman, R. , 1961. *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
3. Szarski, J. 1965. *Differentiall Inequalities*. Instytut Matematyczny Polskieej Akademi, Warszawa
4. Mitrinović, D.S. 1970. *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
5. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, 587pp, Dordrecht/Boston/London.
6. Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A.M. 1993. *Classical and new inequalities in analysis* (Vol. 61). Springer Science & Business Media. Dordrecht/Boston/London
7. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev,O.I. 1993. *Fractional Integrals and Derivative Theory and Applications*. Gordon and Breach, Longhorne, PA.
8. Anton, H. , 1994. *Elementary Linear Algebra*. Jhon Wiley & Sons, Inc
9. Bayraktar, M. , 2000. *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi, Ankara
10. Pečarić, J. , Proschan, F. and Tong, Y.L. 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press, Inc. , 469 pp, Boston
11. Roberts, A.W. and Varberg, D.E. 1973. *Convex Functions*. Academic Press, 300pp, New York.
12. Bayraktar, M. , 2010. *Analiz*, Nobel, Ankara.
13. Dönmez A. , 2001. *Reel Analiz*. Seçkin Yayıncılık, Ankara.
14. İşcan, İ. , 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Volume 43 (6) (2014), 935 – 942.
15. Tseng K.L. , Hwang S.R., Dragomir,S.S. 2010. Fejér-type Inequalities. *J. Inequal. Appl. 7,* Article ID 531976.

16. Dragomir S.S. , Cho Y.J. , Kim,S.S. 2000. Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings and their applications. *J. Math. Anal. Appl. 245*, 489–501
17. Ostrowski, A. , 1938. Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert. Comment. Math. Hel, 10, 226-227
18. Dragomir, S. S. , Agarwal, R. P. , & Cerone, P. ,1999. On Simpson's inequality and applications. RGMIA research report collection, 2(3).
19. Tseng K.L. , Hwang,S.R.,2012. Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions and their applications. *Computers and Mathematics with Applications 64 (4)*, 651-660
20. Abramowitz, M. , & Stegun, I. A. (1964). *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables* (Vol. 55). Courier Corporation, New York
21. İşcan,İ., Wu,S. 2014. Hermite-Hadamard Type Inequalities for Harmonically Convex Functions via Fractional Integrals. *Applied Mathematics and Computation 238*, 237-244
22. Iscan, I. (2013). Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions via fractional integrals, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 4 (1), 77-87.
23. Iscan, I. , Kunt, M., Gozutok, N. Y., & Koroglu, T. (2016). New General Integral Inequalities For Lipschitzian Functıons Via Riemann-Liouville Fractional Integrals and Applications. *Journal Of Inequalities and Special Functions*, *7*(4), 1-12.

ÖZGEÇMİŞ

1987 Yılında Ankara’da doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Giresun’da tamamladı. 2005 yılında girdiği Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2011’de mezun oldu. Farklı eğitim kurumlarında 2 yıl çalıştıktan sonra 2013 yılında Milli Eğitim Bakanlığında Matematik Öğretmeni olarak çalışmaya başladı ve halen görevdedir.