GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYONELLER YARDIMIYLA GA-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YASEMİN KÜLEKÇİ

HAZİRAN 2017

YASEMİN KÜLEKÇİ YÜKSEK LİSANS TEZİ GİRESUN ÜNİVERSİTESİ 2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYONELLER YARDIMIYLA GA-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YASEMİN KÜLEKÇİ

HAZİRAN 2017

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı

...../…../……

Prof. Dr. Başak TAŞELİ

____

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

____

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

____

Danışman

<u>Jüri Üyeleri</u>

Prof. Dr. Mahir KADAKAL __________________________

Doç. Dr. Selahattin MADEN __________________________

Doç. Dr. İmdat İŞCAN (Danışman) __________________________

ÖZET

FONKSİYONELLER YARDIMIYLA GA-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

KÜLEKÇİ, Yasemin

Giresun Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. İmdat İŞCAN

HAZİRAN 2017, 34 sayfa

Bu tez çalışması, GA konveks fonksiyonlar için elde edilen kesirli integral eşitsizliklerinin fonksiyoneller yardımıyla elde edilmesi hakkında olup, ilk olarak çalışmamız için gerekli olan tanım ve teoremler verildi. Çalışmanın bulgular kısmında, GA-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri kullanılarak elde edilmiş olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı fonksiyoneller aracılığıyla elde edildi. Son olarak da GA-konveks fonksiyonlar için Hadamard kesirli integralleri kullanılarak verilen Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin sol tarafı elde edildi.

Anahtar Kelimeler: İntegral Eşitsizlikleri, GA-Konveks Fonksiyonlar, Fonksiyoneller, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizliği

ABSTRACT

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR
GA-CONVEX FUNCTIONS VIA FUNCTIONALS

KÜLEKÇİ, Yasemin
Giresun Universiy
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics Gr. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İmdat İŞCAN
JUNE 2017, 34 pages

This thesis study is about obtaining the fractional integral inequalities obtained for GA convex functions by using functions. Firstly, definitions and theorems necessary for our work are given. In the findings of the study, the left hand side of the Hermite-Hadamard inequality obtained by using Hadamard fractional integrals for GA-convex functions was obtained via functionals. Finally, the left-hand side of the Hermite-Hadamard-Fejer inequality given using Hadamard fractional integrals for GA-convex functions is obtained.

Key Words: Integral Inequalities, GA-Convex Functions, Functionals, Hermite-Hadamard Inequality, Hermite-Hadamard-Fejér Inequality

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tüm aşamalarında her türlü bilimsel desteği sağlayan, bilgi birikimleri ve değerli görüşleriyle katkı sağlayan hocam Doç. Dr. İmdat İŞCAN’ a teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmam sırasında maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$' de bir aralık
I^o	: I nın içi
$\forall$	: Her
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f'_-	: f fonksiyonunun sol türevi
f'_+	: f fonksiyonunun sağ türevi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
α	: α Fonksiyonu
β	: β Fonksiyonu
${}_{R}J^{\alpha}_{a+}$	: Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}_{H}J^{\alpha}_{a+}$	: Sağ Taraflı Hadamard Kesirli İntegrali
${}_{R}J^{\alpha}_{b-}$	: Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
${}_{H}J^{\alpha}_{b-}$	: Sol Taraflı Hermite-Hadamard Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes' in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan kolay ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak, Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı bir dergide yayınlanmasıyla ortaya atılmıştır. Hadamard' ın 1893 yılındaki bir çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında Jensen ile başlar.

Konvekslik kavramı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Mitrinović, Hardy, Pachpatte, Littlewood, Beckenbach, Pólya, Pečarić, Bellman ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Pólya ve Littlewood tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (1). İkinci çalışma ise R. Bellman ve E.F. Beckenbach tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren yine "Inequalities" adı verilen kitaptır (2). Bunu da yer Mitrinović' in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara yer verdiği "Analytic Inequalities" adlı kitabı izler (3). Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla Pečarić tarafından 1987 yılında yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra "Mathematical Inequalities" (4) ,"Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" (5), "Convex Functions and Their Applications" (6) ve "Classical and New Inequalities in Analysis" (7) literatürde var olan diğer kaynaklardır. Son zamanlarda GA konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler ile ilgili birçok yazarlar tarafından çalışmalar yapılmıştır.(8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)

Eşitsizlik teorisinin gelişmesine son yıllarda hız kazandıran kavramlardan biride kesirli türev ve kesirli integral kavramıdır. Kesirli türev ve integral kavramı ilk olarak Liouville tarafından tanıtıldı ve literatürde Riemann-Liouville kesirli türev ve kesirli integrali olarak bilinmektedir.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için var mıdır sorusundan yola ¸çıkılarak ortaya çıktı. Euler kesirli türev ile ilgili çalışmalar yaptı.17. yüzyıldan itibaren Euler, Leibniz, Lagrange, Liouville ve Abel, diğer birçok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

Bu çalışmamız; kesirli integraller yardımıyla GA konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard Fejer tipli eşitsizliklerin elde edilmesi hakkında olup, bu eşitsizliklerin farklı bir bakış açısıyla çözümüne dayalıdır.

2. MATERYAL VE METOT

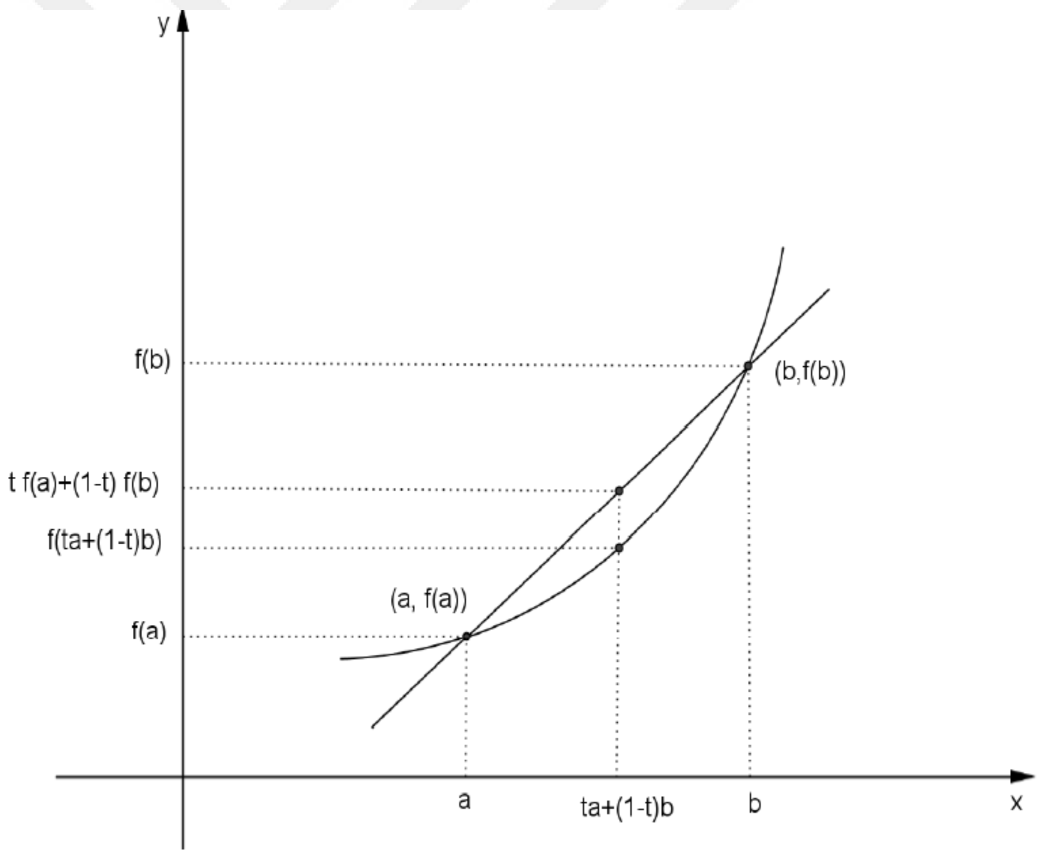
2.1. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1.1 (15)**:** $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I üzerinde bir konveks fonksiyon denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Geometrik olarak, $ta + (1-t)b$ noktasında; f nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren doğru parçası her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.

Şekilden de görüldüğü gibi $t \in [0,1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dır. Benzer şekilde $(1-t)f(b) \leq f(b)$dir. Dolayısıyla $tf(a) + (1-t)f(b), f(a)$ ile $f(b)$ arasındadır. Konkav fonksiyon için doğru parçası f nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Konveks fonksiyonun bazı özellikleri:

i. Kapalı bir aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

ii. $f: I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^o de kalan herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I^o süreklidir.

iii. $f: I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I^o de f'_- ve f'_+ türevleri mevcut olup, bu türevler artandır.

iv. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise bu aralıkta sayılabilir bir E kümesi hariç f' mevcut ve süreklidir.

v. $f_j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1,2,3 \ldots. k,$ k tane konveks fonksiyonlar olsun. Bu taktirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k), \quad a_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3 \ldots. k)$$

fonksiyonu da konvekstir.

vi. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = (goh)(x)$ bileşke fonksiyonu da konvekstir.

Tanım 2.1.2 (16)**:** (Hermite - Hadamard Eşitsizliği) $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a < b$ koşulunu sağlayan $\forall a, b \in I$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hermite - Hadamard eşitsizliği denir.

Tanım 2.1.3 (17)**:** $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna GA (geometrik-aritmetik) konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.1.4 (18)**:** $f \in L[a,b]$, $\alpha > 0$ ve $b > a \geq 0$ için ${}_HJ^{\alpha}_{a+}f(x)$ ve ${}_HJ^{\alpha}_{b-}f(x)$ sırasıyla sağ taraf ve sol taraf Hadamard kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$${}_HJ^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \, , \qquad x > a$$

ve

$${}_HJ^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(ln \frac{t}{x} \right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} \, , \qquad x < b$$

dir. Burada $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.5 (19)**:** $f \in L[a,b]$, $\alpha > 0$ ve $b > a \geq 0$ için ${}_RJ^{\alpha}_{a+}f(x)$ve ${}_RJ^{\alpha}_{b-}f(x)$ sırasıyla sağ taraf ve sol taraf Riemann-Liouville kesirli integralleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$${}_RJ^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \ , x > a$$

ve

$$ {}_{R}J_{b-}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt\ ,x<b. $$

M. Z. Sarıkaya ve arkadaşları, Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri aşağıdaki gibi ispatlamıştır (20):

Teorem 2.1.1: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir pozitif fonksiyon $f\in L[a,b]$ ve $a<b$ olsun. Eğer f , $[a,b]$ de konveks fonksiyon ise $\alpha>0$ olmak üzere kesirli integraller için eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

$$ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[{}_{R}J_{a+}^{\alpha}f(b)+{}_{R}J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\le\frac{f(a)+f(b)}{2} $$

GA-konveks fonksiyonları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genelleştirilmesi aşağıdaki gibidir (21):

Teorem 2.1.2: $f:I\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir GA-konveks fonksiyon ve $a,b\in I$ elemanları $a<b$ olacak şekilde olsun. $g:[a,b]\to[0,\infty)$ sürekli ve $\sqrt{ab}$ ye göre geometrik olarak simetrik bir fonksiyon ise;

$$ f(\sqrt{ab})\int_a^b\frac{g(x)}{x}dx\ \le\int_a^b\frac{f(x)g(x)}{x}dx\ \le\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b\frac{g(x)}{x}dx $$

dir.

GA-konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite - Hadamard eşitsizlikleri aşağıdaki gibi verilebilir (22):

Teorem 2.1.3: Kabul edelim ki $I\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyon $a,b\in I$ ve $a<b$ olduğunda $f\in[a,b]$ olsun. Eğer f , $[a,b]$ de GA konveks fonksiyon ise $\alpha>0$ iken kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik şu şekildedir.

$$f(\sqrt{ab}) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\left[{}_{H}J_{a+}^{\alpha}f(b) + {}_{H}J_{b-}^{\alpha}f(a)\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1.1}$$

İspat : f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Geometrik Aritmetik konveks fonksiyon olsun. O halde $\forall x,y \in [a,b]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğinde $t = \frac{1}{2}$ yazarsak

$$f(\sqrt{xy}) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

elde edilir. Daha sonra $x = a^t b^{1-t}$, $y = b^t a^{1-t}$ seçersek

$$f(\sqrt{ab}) \le \frac{f(a^t b^{1-t}) + f(b^t a^{1-t})}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.1.1) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, eşitsizliğin t ye göre [0,1] üzerinde integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) &\le \frac{\alpha}{2}\left\{\int_0^1 f(a^t b^{1-t})dt + \int_0^1 f(b^t a^{1-t})dt\right\} \\ &= \frac{\alpha}{2}\left\{\int_a^b \left(\frac{lnb-lnu}{lnb-lna}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{uln\frac{b}{a}} + \int_a^b \left(\frac{lnu-lna}{lnb-lna}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{uln\frac{b}{a}}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2.1.1) eşitsizliğinin sol tarafı kolayca elde edilir.

(2.1.1) eşitsizliğinin ikinci kısmının ispatı için, ilk olarak f fonksiyonu GA-konveks fonksiyon olduğundan, $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq t f(a) + (1-t) f(b)$$

ve

$$f(b^t a^{1-t}) \leq t f(b) + (1-t) f(a)$$

dır. Eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$f(a^t b^{1-t}) + f(b^t a^{1-t}) \leq f(a) + f(b)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte taraflar $t^{\alpha-1}$ ile çarpılarak t ye göre $[0,1]$ üzerinde eşitsizliğin integrali alınırsa,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t})\, t^{\alpha-1} dt + \int_0^1 f(b^t a^{1-t})\, t^{\alpha-1} dt \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} dt$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yazarlar, Geometrik Aritmetik konveks fonksiyonlar için kesirli integral şeklindeki yeni Hermite-Hadamard eşitsizliğini ve GA konveks fonksiyonlar için kesirli integral şeklindeki yeni Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğini aşağıdaki gibi elde etmişlerdir (23).

Teorem 2.1.4: $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir GA konveks fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. O halde $\alpha > 0$ iken kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}} \left[{}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}-} f(a) + {}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}+} f(b) \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Teorem 2.1.5: $f: [a, b] \to \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir GA konveks fonksiyon $f \in L[a, b]$ ve $a < b$ olsun. Eğer $g: [a, b] \to \mathbb{R}$, negatif olmayan, integrallenebilir ve $\sqrt{ab}$ ye göre geometrik simetrik ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f(\sqrt{ab}) \leq \left[{}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}-}g(a) + {}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}+}g(b)\right] \leq {}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}-}(fg)(a) + {}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}+}(fg)(b)$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\left[{}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}-}g(a) + {}_{H}J^{\alpha}_{\sqrt{ab}+}g(b)\right]$$

Yazarların GA-s-konveks fonksiyonlar için vermiş olduğu teoremi, $s = 1$ olması durumunda GA-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki gibi verebiliriz (24):

Teorem 2.1.6: $f: I \subseteq \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $f(x)$ fonksiyonu I da geometrik aritmetik konvekstir ancak ve ancak $f(e^x)$ fonksiyonu $ln0 = -\infty$ kabul edildiğinde $lnI = \{lnx \mid x \in I\}$ aralığında konvekstir.

ii. Eğer f fonksiyonu I da azalan ve geometrik aritmetik konveks ise f fonksiyonu I da konvekstir.

iii. Eğer f fonksiyonu I da artan ve konveks ise f fonksiyonu I da geometrik aritmetik konvekstir.

İspat: i. $f(x)$ fonksiyonu I aralığında geometrik aritmetik konveks ise

$$f\left(e^{tlnx+(1-t)lny}\right) = f(x^t y^{1-t})$$
$$\leq tf(x) + (1-t)f(y) = tf(e^{lnx}) + (1-t)f(e^{lny})$$

dir. Bu yüzden $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında konvekstir. Diğer taraftan, tersine olarak $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında konveks olduğunda

$$f(x^t y^{1-t}) = f\left(e^{tlnx+(1-t)lny}\right)$$
$$\leq tf(e^{lnx}) + (1-t)f(e^{lny}) = tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur ki bu $f(x)$ fonksiyonun I da geometrik aritmetik konveks olduğunu gösterir.

ii. Eğer f fonksiyonu I da azalan ve geometrik aritmetik konveks ise

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

dir. Bunun anlamı f fonksiyonu I da konvekstir.

iii. Eğer f fonksiyonu I da artan ve konveks ise

$$f(x^t y^{1-t}) \leq f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

dir. Buna göre f fonksiyonu I da geometrik aritmetik konvekstir.

Lemma 2.1.2 (25)**:** $I \subseteq (0,\infty)$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu I da iki kez türevlenebilir ise; f , I da GA konveks (konkav) fonksiyondur ancak ve ancak $\forall x \in I$ için

$$f'(x) + xf''(x) \geq (\leq) 0$$

İspat: Lemma , konveks (konkav) fonksiyonların temel özelliklerinden ve "f fonksiyonu GA-konveks (konkav) fonksiyondur ancak ve ancak $g(x) = f(e^x)$ $J = \{logx: x \in I\}$ üzerinde konveks (konkav) dır" önermesinden kolaylıkla çıkar.

2.2. KONVEKS FONKSİYONLAR İLE İLGİLİ ELDE EDİLEN BAZI SONUÇLAR

Teorem 2.2.1 (26)**:** $f, [a,b]$ üzerinde konveks olsun. O halde H fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde artan konvekstir ve $\forall t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0) \le H(t) \le H(1) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir. Burada

$$H(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.2.2 (27): $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, 0$< \alpha < 1$, 0$< \beta < 1$

$$A = \alpha a + (1-\alpha)b\ , \quad u_0 = (b-a)min\left\{\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{1-\alpha}{\beta}\right\}$$

ve h fonksiyonu

$$h(t) = (1-\beta)f(A-\beta t) + \beta f(A + (1-\beta)t) \quad t \in [0, u_0]$$

ile tanımlı olsun. Bu taktirde h, $[0, u_0]$ üzerinde artan, konveks ve $\forall t \in [0, u_0]$ için

$$f\left(a^{\alpha} b^{1-\beta}\right) \le h(t) \le \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)$$

dir.

Lemma 2.2.1 (26): f: [a, b] → ℝ konveks fonksiyon ve h fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlı olsun.

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{t}{2}\right) + f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{t}{2}\right)\right]$$

Bu taktirde; h fonksiyonu $[0, b-a]$ üzerinde artan, konveks ve $\forall t \in [0, b-a]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h(t) \leq \frac{f(a)+(b)}{2}$$

dir.

Teorem 2.2.3 (26) : $a < b$ olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f , $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$WH(t) = \frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) \left((b-x)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-1}\right) dx$$

ile tanımlı WH fonksiyonu, $[0,1]$ üzerinde konveks ve monoton artandır.

Ayrıca $\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = WH(0) \leq WH(t) \leq WH(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[{}_R J_{a+}^{\alpha} f(b) + {}_R J_{b-}^{\alpha} f(a) \right]$$

dir.

İspat: Öncelikle $t_1, t_2, \beta \in [0,1]$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} &WH[(1-\beta)t_1 + \beta t_2] \\ &\quad = \frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^b f\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)[(1-\beta)t_1 + \beta t_2] + \frac{a+b}{2}\right)\left((b-a)^{\alpha-1} \right. \\ &\qquad\qquad \left. + (x-a)^{\alpha-1}\right) dx \\ &\quad = \frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^b f\left\{(1-\beta)\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)t_1 + \frac{a+b}{2}\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \beta\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)t_2 + \frac{a+b}{2}\right]\right\} \left((b-a)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-1}\right) dx \end{aligned}$$

f konveks olduğundan,

$$f\left\{(1-\beta)\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)t_1+\frac{a+b}{2}\right]+\beta\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)t_2+\frac{a+b}{2}\right]\right\}$$
$$\leq f\left\{(1-\beta)\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)t_1+\frac{a+b}{2}\right]+\beta\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)t_2+\frac{a+b}{2}\right]\right\}$$

olur. Bu yüzden,

$$WH[(1-\beta)t_1+\beta t_2]$$
$$\leq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}(1-\beta)\int_a^b f\left(\left(x-\frac{a+b}{2}\right)t_1+\frac{a+b}{2}\right)((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1})dx$$
$$+\frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}\beta\int_a^b f\left(\left(x-\frac{a+b}{2}\right)t_1+\frac{a+b}{2}\right)((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1})dx$$
$$=(1-\beta)WH(t_1)+\beta WH(t_2)$$

elde edilir ki bu bize WH nın $[0,1]$ üzerinde konveks olduğunu gösterir. Daha sonra basit bir hesaplamayla

$$WH(t)=\frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1})dx$$
$$=\frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1})dx$$
$$+\frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1})dx$$

integrali hesaplanabilir. Bunun için

$$I_1=\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(tx-(1-t)\frac{a+b}{2}\right)((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1})dx$$

integralinde $A=\frac{a+b}{2}$ olmak üzere, $u=2(A-x)$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$u_1=b-a, \qquad u_2=0 \qquad\qquad dx=-\frac{du}{2} \qquad x=A-\frac{u}{2}$$

olup, buradan I_1 integrali

$$I_1=\int_0^{b-a} f\left(t\left(A-\frac{u}{2}\right)+(1-t)A\right)\left(\left(b-\left(A-\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)+\left(\left(A-\frac{u}{2}\right)-a\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$

$$=\int_0^{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{tu}{2}\right)\left(\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)-\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$

şeklinde bulunmuş olur. Benzer şekilde

$$I_2=\int_A^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\left((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right)dx$$

integralinde $u=2(x-A)$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$u_1=0, \qquad u_2=b-a \qquad dx=\frac{du}{2} \qquad\qquad x=A+\frac{u}{2}$$

olacağından, buradan I_2 integrali

$$I_2=\int_0^{b-a} f\left(t\left(A+\frac{u}{2}\right)+(1-t)A\right)\left(\left(b-\left(A+\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)+\left(\left(A+\frac{u}{2}\right)-a\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$

$$=\int_0^{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{tu}{2}\right)\left(\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)-\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$

olarak bulunur. Böylece

$$WH(t)=\frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}}\int_0^{b-a}\left[f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{tx}{2}\right)\right.$$
$$\left.+f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{tx}{2}\right)\right]\left(\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}\right.$$
$$\left.+\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)-\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}\right)dx$$

elde edilir. Lemma 2.2.1' den

$$h(x)=\frac{1}{2}\left[f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{x}{2}\right)+f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{x}{2}\right)\right]$$

fonksiyonu $[0,b-a]$ üzerinde artandır. Dolayısıyla $\forall t\in[0,1]$ için

$$h(x)=\frac{1}{2}\left[f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{tx}{2}\right)+f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{tx}{2}\right)\right]$$

fonksiyonu $[0,b-a]$ üzerinde artandır. $\left(\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)-\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}\right)$ negatif olmadığından $WH(t)$, $[0,1]$ de artandır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}WH(0)&=\frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left((b-x)^{\alpha-1}+(x-a)^{\alpha-1}\right)dx\\&=\frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}dx+\int_a^b(x-a)^{\alpha-1}dx\right]\\&=\frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha}+\frac{(b-a)^{\alpha}}{\alpha}\right]\end{aligned}$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$WH(1) = \frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}} \int_a^b f(x)\,((b-x)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-1})dx$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(x)\,((b-x)^{\alpha-1}dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b f(x)((x-a)^{\alpha-1}\,dx\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}} \left[\,{}_{R}J_{a+}^{\alpha} f(b) + \,{}_{R}J_{b-}^{\alpha} f(a)\right]$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.2.1: Yukarıdaki teoremde $\alpha = 1$ alınırsa

$$WH(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx = H(t)$$

olup, Teorem 2.2.1 deki $H(t)$ tanımını elde ederiz.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Teorem 3.1: $f:[a,b] \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir Geometrik Aritmetik konveks fonksiyon, $0< \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$

$$A = ln(a^{\alpha} b^{1-\alpha}), \qquad u_0 = (lnb - lna)min\left\{\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{1-\alpha}{\beta}\right\}$$

ve

$$h(t) = (1-\beta) f\left(a^{\alpha} b^{1-\alpha} e^{-\beta t}\right) + \beta f\left(a^{\alpha} b^{1-\alpha} e^{(1-\beta)t}\right), \quad t \in [0, u_0]$$

olsun. Bu taktirde; h , $[0, u_0]$ üzerinde artan ve konveks olup

$$f(a^{\alpha} b^{1-\alpha}) \leq h(t) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$$

İspat: $f:[a,b] \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Geometrik Aritmetik konveks olduğundan Teorem 2.1.6 ya göre $g = (foexp)$, $[lna, lnb]$ üzerinde konvekstir. Dolasıyla Teorem 2.2.2 ye göre $0< \alpha < 1$, $0< \beta < 1$

$$A = ln(a^{\alpha} b^{1-\alpha}) \text{ ve } u_0 = (lnb - lna)min\left\{\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{1-\alpha}{\beta}\right\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} h(t) &= (1-\beta) g(A - \beta t) + \beta g(A + (1-\beta)t) \\ &= (1-\beta) f\left(e^{A} e^{-\beta t}\right) + \beta f(e^{A} e^{(1-\beta)t}) \end{aligned}$$

$$= (1-\beta)f\left(a^{\alpha}b^{1-\beta}e^{-\beta t}\right) + \beta f\left(a^{\alpha}b^{1-\alpha}e^{(1-\beta)t}\right), t \in [0, u_0]$$

fonksiyonu $[0, u_0]$ üzerinde konveks ve artan olup $\forall t \in [0, u_0]$ için

$$g(\alpha lna + (1-\alpha)lnb) \ \leq h(t) \ \leq \ \alpha g(lna) + (1-\alpha)g(lnb)$$

dir. Yani,

$$f(a^{\alpha}b^{1-\alpha}) \ \leq h(t) \ \leq \ \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b)$$

dir.

Lemma 3.1: $f: [a, b] \subset (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu GA konveks ve h fonksiyonu

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}e^{-t/2}\right) + f\left(\sqrt{ab}e^{t/2}\right)\right]$$

ile tanımlansın. Bu taktirde h fonksiyonu $[0, ln\frac{b}{a}]$ üzerinde konveks ve artan olup $\forall t \in [0, ln\frac{b}{a}]$ için

$$f\left(\sqrt{ab}\right) \ \leq h(t) \ \leq \ \frac{f(a) + (b)}{2}$$

dir.

İspat: $f: [a, b] \subset (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu GA konveks ise Teorem 2.1.6 ya göre $g = foexp$ fonksiyonu $[lna, lnb]$ üzerinde konvekstir. O halde

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[g\left(\left(\frac{lna + lnb}{2}\right) - \frac{t}{2}\right) + g\left(\left(\frac{lna + lnb}{2}\right) + \frac{t}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}e^{-t/2}\right) + f\left(\sqrt{ab}e^{t/2}\right)\right]$$

ile tanımlı h fonksiyonu $\left[0, ln\frac{b}{a}\right]$ üzerinde konveks ve artan olup $\forall t \in [0, ln\frac{b}{a}]$ için

$$g\left(\frac{lna + lnb}{2}\right) \leq h(t) \leq \frac{g(lna) + g(lnb)}{2}$$

dir. Yani, $g = foexp$ yazılırsa

$$f(\sqrt{ab}) \leq h(t) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilir.

Teorem 3.2: $f: [a, b] \subset (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in L[a, b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde GA-konveks ise $G = \sqrt{ab}$ olmak üzere

$$H_\alpha(t) = \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{x}\right)^\alpha} \int_a^b f(x^t G^{1-t}) \left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx$$

ile tanımlı H_α fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks ve monoton artandır. Ayrıca $\alpha > 0$ için

$$f(\sqrt{ab}) = H_\alpha(0) \leq H_\alpha(t) \leq H_\alpha(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln\frac{b}{x}\right)^\alpha}\left[{}_H J_{a+}^\alpha f(b) + {}_H J_{b-}^\alpha f(a)\right]$$

dir.

İspat : ***i***) H_α fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde konvekstir. $\beta \in [0,1]$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$

keyfi alınsın. Göstermemiz gereken

$$H_\alpha\big((1-\beta)t_1+\beta t_2\big)\le\ (1-\beta)H_\alpha(t_1)+\beta H_\alpha(t_2)$$

olduğudur. H_α nın tanımından yararlanarak

$$\begin{aligned}&H_\alpha\big((1-\beta)t_1+\beta t_2\big)\\&\quad=\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b f\big(x^{(1-\beta)t_1+\beta t_2}\,G^{1-(1-\beta)t_1-\beta t_2}\big)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx\end{aligned}$$

yazabiliriz. f fonksiyonu GA konveks olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}f\big(x^{(1-\beta)t_1+\beta t_2}\,G^{(1-\beta)(1-t_1)+\beta(1-t_2)}\big)&=f\big[(x^{t_1}G^{1-t_1})^{1-\beta}\,(x^{t_2}G^{1-t_2})^{\beta}\big]\\&\le\ (1-\beta)f(x^{t_1}G^{1-t_1})+\beta f(x^{t_2}G^{1-t_2})\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlik yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&H_\alpha\big((1-\beta)t_1+\beta t_2\big)\\&\qquad\le\ (1-\beta)\left[\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b f(x^{t_1}G^{1-t_1})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx\right]\\&\qquad+\beta\left[\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b f(x^{t_2}G^{1-t_2})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx\right]\\&\qquad=(1-\beta)H_\alpha(t_1)+\beta\,H_\alpha(t_2)\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) H_α fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde monoton artandır.

$$H_\alpha(t)=\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b f(x^tG^{1-t})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\left[\int_a^{\sqrt{ab}} f(x^t G^{1-t})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx\right.$$
$$\left. + \int_{\sqrt{ab}}^{b} f(x^t G^{1-t})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx\right]$$

ifadesini hesaplayalım. Bunun için

$$I_1 = \int_a^{\sqrt{ab}} f(x^t G^{1-t})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx$$

alalım. Bu integralde, $u = 2ln\frac{G}{X}$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$u_1 = lnb - lna, \quad u_2 = 0 \qquad dx = -\frac{x}{2}du, \qquad x = \frac{G}{e^{u/2}}$$

olacağından

$$I_1 = \int_0^{lnb-lna} f\left(\left(\frac{G}{e^{u/2}}\right)^t G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{be^{u/2}}{G}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{Ge^{-u/2}}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}x\frac{du}{2}$$
$$= \int_0^{lnb-lna} f\left(Ge^{-tu/2}\right)\left(\left(ln\frac{b}{G} + \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{G}{a} - \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$
$$= \int_0^{lnb-lna} f\left(Ge^{-tu/2}\right)\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2} + \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2} - \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_{\sqrt{ab}}^{b} f(x^t G^{1-t})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx$$

alalım. Bu integralde de $u = 2ln\frac{x}{G}$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$u_1 = 0, \quad u_2 = lnb - lna \qquad dx = \frac{x}{2}du, \qquad x = Ge^{u/2}$$

olacağından

$$I_2 = \int_0^{lnb-lna} f\left(\left(Ge^{u/2}\right)^t G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{b}{Ge^{u/2}}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{Ge^{u/2}}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}x\frac{du}{2}$$

$$= \int_0^{lnb-lna} f\left(Ge^{tu/2}\right)\left(\left(ln\frac{b}{G} - \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{G}{a} + \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$

$$= \int_0^{lnb-lna} f\left(Ge^{tu/2}\right)\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2} - \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2} + \frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{du}{2}$$

bulmuş oluruz. Böylece

$$H_\alpha(t) = \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\frac{1}{2}\int_0^{lnb-lna}\left[f\left(Ge^{tx/2}\right) + f\left(Ge^{-tx/2}\right)\right]$$

$$\times\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2} - \frac{x}{2}\right)^{\alpha-1} + \left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2} + \frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}\right)dx$$

elde edilir. Lemma 3.1 den

$$h(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}e^{-tx/2}\right) + f\left(\sqrt{ab}e^{tx/2}\right)\right]$$

fonksiyonu $\forall t \in [0,1]$ için $[0, lnb - lna]$ aralığı üzerinde artandır.

$$\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}+\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}-\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}\right)$$

negatif olmadığından $H_\alpha(t)$ fonksiyonu [0,1] aralığında artandır. Sonuç olarak;

$$f(\sqrt{ab})=H_\alpha(0)$$

dır. Gerçekten;

$$H_\alpha(0)=\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\int_a^b f(G)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx$$

ifadesi için

$$\int_a^b\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{x}dx=\int_0^{lnb-lna}v^{\alpha-1}dv=\frac{v^\alpha}{\alpha}=\frac{\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}{\alpha}$$

$$v=ln\frac{b}{x}\quad\Rightarrow\quad dv=-\frac{1}{x}dx\qquad v_1=ln\frac{b}{a}\quad,\qquad v_2=0$$

$$\int_a^b\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{x}dx=\int_0^{lnb-lna}v^{\alpha-1}dv=\frac{v^\alpha}{\alpha}=\frac{\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}{\alpha}$$

$$v=ln\frac{x}{a}\quad\Rightarrow dv=\frac{1}{x}dx\qquad v_1=0,\qquad v_2=lnb-lna$$

olacağından

$$H_\alpha(0)=\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}f(G)\frac{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}{\alpha}$$

$$f(\sqrt{ab})=H_\alpha(0)$$

elde edilmiş olur.

$$H_\alpha(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\left[{}_HJ_{a+}^\alpha f(b) + {}_HJ_{b-}^\alpha f(a)\right]$$

dir. Gerçekten;

$$H_\alpha(1) = \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b f(x)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx$$

$${}_HJ_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} dx$$

$${}_HJ_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{f(x)}{x}\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} dx$$

olduğundan istenilen kolayca görülür. Bu taktirde

$$f\left(\sqrt{ab}\right) = H_\alpha(0) \le H_\alpha(t) \le H_\alpha(1)$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\left[{}_HJ_{a+}^\alpha f(b) + {}_HJ_{b-}^\alpha f(a)\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 3.1: Yukarıda ki teoremde $\alpha = 1$ alınırsa,

$$H_1(t) = \frac{1}{ln\frac{b}{a}}\int_a^b f(x^t G^{1-t})\frac{1}{x}dt$$

olup aşağıdaki sonuca varabiliriz.

f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde GA-konveks fonksiyon olsun. H_1 fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve artan olup her $t \in [0,1]$ için

$$f(\sqrt{ab}) = H_1(0) \leq H_1(t) \leq H_1(1) = \frac{1}{ln\frac{b}{a}} \int_a^b f(x) \frac{1}{x} dx$$

dir.

Uyarı 3.1: Teorem 3.2 de elde edilen eşitsizlik bize Teorem 2.1.3 de elde edilmiş olan eşitsizliğin sol tarafını vermektedir.

Bir sonraki teorem Teorem 3.2 nin bir genellemesidir:

Teorem 3.3: $f: [a,b] \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde GA konveks ve g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir, negatif olmayan ve $\sqrt{ab}$ ye göre simetrik yani $\forall x \in [a,b]$ için,

$$g\left(\frac{ab}{x}\right) = g(x)$$

ise $G = \sqrt{ab}$ olmak üzere

$${}_gH_\alpha(t) = \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha} \int_a^b f(x^t G^{1-t}) \left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right) \frac{g(x)}{x} dx$$

ile tanımlı ${}_gH_\alpha(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks ve monoton artan olup $\alpha > 0$ için

$$f\left(\sqrt{ab}\right) = {}_gH_\alpha(0) \leq {}_gH_\alpha(t) \leq {}_gH_\alpha(1)$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\left[J_{a+}^\alpha (fg)(b) + J_{b-}^\alpha (fg)(a)\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: i) Öncelikle ${}_gH_\alpha(t)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı üzerinde konveks olduğunu gösterelim. $\beta \in [0,1]$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ keyfi alınsın. Göstermemiz gereken

$${}_gH_\alpha\left((1-\beta)t_1 + \beta t_2\right) \leq (1-\beta)\, {}_gH_\alpha(t_1) + \beta\, {}_gH_\alpha(t_2)$$

olduğudur. ${}_gH_\alpha$ nın tanımından yararlanarak

$${}_gH_\alpha\left((1-\beta)t_1 + \beta t_2\right)$$
$$= \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b f\left(x^{(1-\beta)t_1+\beta t_2}\, G^{1-(1-\beta)t_1-\beta t_2}\right)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx$$

yazabiliriz. f fonksiyonu GA konveks olduğundan dolayı

$$f\left(x^{(1-\beta)t_1+\beta t_2}\, G^{(1-\beta)(1-t_2)+\beta(1-t_2)}\right) = f\left[(x^{t_1}G^{1-t_1})^{1-\beta}\, (x^{t_2}G^{1-t_2})^\beta\right]$$
$$\leq (1-\beta)f(x^{t_1}G^{1-t_1}) + \beta f(x^{t_2}G^{1-t_2})$$

olur. Son eşitsizliği yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$${}_gH_\alpha\left((1-\beta)t_1 + \beta t_2\right)$$
$$\leq (1-\beta)\left[\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b f(x^{t_1}G^{1-t_1})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx\right]$$

$$+\beta\left[\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\int_a^b f\left(x^{t_2}G^{1-t_2}\right)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx\right]$$

$$=(1-\beta)\ {}_gH_\alpha(t_1)+\beta\ {}_gH_\alpha(t_2)$$

elde ederiz.

ii) ${}_gH_\alpha(t)$, $[0,1]$ üzerinde monoton artan olduğunu gösterelim.

$${}_gH_\alpha(t)=\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\int_a^b f\left(x^{t}G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx$$

$$=\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\left[\int_a^{\sqrt{ab}} f\left(x^{t}G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx\right.$$

$$\left.+\int_{\sqrt{ab}}^b f\left(x^{t}G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx\right]$$

ifadesindeki

$$I_1=\int_a^{\sqrt{ab}} f\left(x^{t}G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx$$

integralinde $u=2ln\frac{G}{X}$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$u_1=lnb-lna,\quad u_2=0\qquad dx=-\frac{x}{2}du,\qquad x=\frac{G}{e^{u/2}}$$

olup, buradan I_1 integrali için

$$I_1=\int_0^{lnb-lna} f\left(\left(\frac{G}{e^{u/2}}\right)^{t}G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{be^{u/2}}{G}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{Ge^{-u/2}}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(Ge^{-u/2})}{2}du$$

$$= \int_0^{lnb-lna} f\left(Ge^{-tu}/_2\right)\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}+\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}-\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(Ge^{-u}/_2)}{2}du.$$

yazabiliriz. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_{\sqrt{ab}}^{b} f(x^t G^{1-t}) \left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(x)}{x}dx$$

integralinde $u = 2ln\frac{x}{G}$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$u_1 = 0, \quad u_2 = lnb - lna \qquad dx = \frac{x}{2}du, \qquad x = Ge^{u}/_2$$

olacağından I_2 integrali için

$$I_2 = \int_0^{lnb-lna} f\left(\left(Ge^{u}/_2\right)^t G^{1-t}\right)\left(\left(ln\frac{b}{Ge^{u}/_2}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{Ge^{u}/_2}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(Ge^{u}/_2)}{2}du$$

$$= \int_0^{lnb-lna} f\left(Ge^{tu}/_2\right)\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}-\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}+\frac{u}{2}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{g(Ge^{u}/_2)}{2}du.$$

elde edilir. Ayrıca g fonksiyonu $\sqrt{ab}$ ye göre simetrik olduğundan

$$g\left(Ge^{-u}/_2\right) = g\left(\frac{ab}{Ge^{-u}/_2}\right) = g\left(Ge^{u}/_2\right)$$

yazabiliriz. Buradan

$${}_gH_\alpha(t) = \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\frac{1}{2}\int_0^{lnb-lna}\left[f\left(Ge^{tx}/_2\right)+f\left(Ge^{-tx}/_2\right)\right]$$

$$\times g\left(Ge^{x/2}\right)\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}-\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}+\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}\right)dx$$

elde edilir. Lemma 3.1 e göre

$$h(x)=\frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}e^{-tx/2}\right)+f\left(\sqrt{ab}e^{tx/2}\right)\right]$$

fonksiyonu $[0, lnb - lna]$ üzerinde artandır. Ayrıca

$$g\left(Ge^{x/2}\right)\left(\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}+\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}+\left(\frac{ln\frac{b}{a}}{2}-\frac{x}{2}\right)^{\alpha-1}\right)$$

negatif olmadığından ${}_gH_\alpha(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artandır.

Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{ab}\right) &= {}_gH_\alpha(0) \leq {}_gH_\alpha(t) \leq {}_gH_\alpha(1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha (fg)(b) + J_{b^-}^\alpha (fg)(a)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada kolay bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} {}_gH_\alpha(0) &= f(G)\frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\int_a^b \left[\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}+\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{g(x)}{x}dx \\ &= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\left[{}_HJ_{a+}^\alpha\, g(b) + {}_HJ_{b-}^\alpha\, g(a)\right] \end{aligned}$$

ve

$$
{}_{g}H_{\alpha}(1) = \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\left[\int_{a}^{b}\frac{f(x)g(x)}{2}\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1}dx + \int_{a}^{b}\frac{f(x)g(x)}{2}\left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}dx\right]
$$

$$
= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\left[J_{a^{+}}^{\alpha}(fg)(b) + J_{b^{-}}^{\alpha}(fg)(a)\right]
$$

olduğu kolayca görülür.

Uyarı: Eğer $g(x) = 1$ alınırsa Teorem 3.2 den

$$
H_{\alpha}(t) = \frac{\alpha}{2\left(ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\int_{a}^{b} f(x^{t}G^{1-t})\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^{\alpha-1} + \left(ln\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\frac{1}{x}dx
$$

elde edilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen sonuçların bazıları, daha önce literatürde elde edilmiş olup, burada farklı bir çözüm tekniği kullanılmıştır. Bunun için öncelikle birer fonksiyonel tanımlanıp bu fonksiyonellerin bir takım özellikleri sağladığı gösterilmiştir. Bu özelliklerin bir sonucu olarak ta GA konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilmiş Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliklerinin sol tarafları fonksiyonellerin sağladığı özelliklerin bir sonucu olarak elde edilmiştir. Bu tezde Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliklerinin sadece sol tarafları çalışılmıştır. Ancak özellikle belirtmek isteriz ki bu çalışma bu eşitsizliklerin sağ taraflarına da uygulanabileceği gibi farklı türden konvekslik çeşitleri için de yapılabilir. Elde edilen araştırma bulguları orijinal olup, yayınlanmak üzere alan indeksli dergiye makale olarak gönderilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., CambridgeUniversity Press, 324, United Kingdom.
2. Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
3. Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, 400, Berlin.
4. Pachpatte, B.G., 2005b. Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, the Netherlands.
5. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
6. Niculescu C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.
7. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.
8. Niculescu C.P., Convexity according to the geometric mean, Math. Inequal Appl. 3 (2) (2000), 155-167.
9. Niculescu C.P., Convexity according to means, Math. Inequal. Appl. 6 (4) (2003), 571-579.
10. Kunt M., . İşcan İ, On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for GA-convex functions via fractional integrals, RGMIA Research Report Collection, 18(2015), Article 108, 12 pp.
11. Zhang X.M. , Chu Y. M., Zhang X. H., The Hermite-Hadamard type inequality of GA-Convex functions and its application, J. Inequal. Appl. 2010 (2010), Article ID 507560, 11 pages. doi:10.1155/2010/507560.
12. Zhang T.Y. , Ji A.P. , Qi F., Some inequalities of Hermite-Hadamard type for GA-convex functions with applications to means, Le Matematiche 68 (1) (2013), 229–239. doi:10.4418/2013.68.1.17
13. Shuang Y. , Yin H.P, Qi F. Hermite-Hadamard type integral inequalities for geometric-arithmetically s-convex functions Analysis 33,1001-1010 (2013)
14. Hua J. , Xi B.Y. , Qi F. Hermite-Hadamard type inequalities for geometric-aritmetically s-convex functions 2010 Mathematics Subject Classification Primary 26D15 Secondary 26A51,41A55

15. Dragomir S.S and Pearce C.E.M., Selected Topics on Hermite–Hadamard Type 181 Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University, 2000

16. Pecaric J.E., Proschan F. and Tong Y.L. (1992). Comvex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications

17. Niculescu C. P., Convexity according to the geometric mean, Math. Inequal. Appl. 3 (2) (2000), 155-167.

18. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam 2006.

19. Sarikaya M.Z. et al, Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Math. Comput. Model. , **57** (2013), 2403-2407

20. Sarıkaya M.Z et al Hermite-Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, Math. Comput. Model., 57 (2013) , 2403-2407

21. Latif M.A., Dragomir S.S. and Momaniat E., Some Fejer type integral inequalities for geometrically-arithmetically-convex functions with applications, RGMIA Research Report Collection, 18(2015), Article 25, 18 pp

22. İşcan İ. New general integral inequalities for quasi-geometrically convex functions via fractional integrals Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:491

23. Kunt M, İşcan İ., On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for GA- convex functions via fractional integrals, RGMIA Research Report Collection, 18(2015), Article 108, 12 pp.

24. Hua J., Yan Xi B., Qi F. Hermite-Hadamard Type Inequalities For Geometric-Arithmetically s-Convex Functions, Commun. Korean Math. Soc. 29 (2014), No. 1, pp. 51–63

25. Zhang X-M., Chu Y-M., Zhang X-H. The Hermite-Hadamard Type Inequality of GA-Convex Functions and Its Application , Journal of Inequalities and Applications Volume 2010 , Article ID 507560 , 11 pages

26. Xiang R., Refinements of Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions via fractional integrals, J. Appl. Math. and Informatics, vol. 33 (2015) No. 1-2, 119-125

27. Yang G.S. and Tseng K.L., On certain integral inequalities related to Hermite-Hadamard inequalities, J. Math. Anal. Appl., 239 (1999), 180-187.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Giresun'da doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Giresun'da tamamlayarak, 2009 yılında Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2013 yılında bu bölümü bitirdi. 2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans programına başladı ve Haziran 2017 de Yüksek Lisans eğitimini tamamladı.