MERVE KIRÖMEROĞLU YÜKSEK LİSANS TEZİ GİRESUN ÜNİVERSİTESİ 2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYONELLER YARDIMIYLA P-KONVEKS FONSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MERVE KIRÖMEROĞLU

TEMMUZ 2017

GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYONELLER YARDIMIYLA P-KONVEKS FONSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MERVE KIRÖMEROĞLU

TEMMUZ 2017

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı

...../……./……

Prof. Dr. Başak TAŞELİ

____

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

____

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN

____

Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Erhan SET __________________________

Yrd. Doç. Dr. Sercan TURHAN __________________________

Doç. Dr. İmdat İŞCAN (Danışman) __________________________

ÖZET

FONKSİYONELLER YARDIMIYLA P-KONVEKS FONSİYONLAR İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

KIRÖMEROĞLU, Merve

Giresun Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. İmdat İŞCAN

TEMMUZ 2017, 42 sayfa

Bu tez çalışması, p-konveks fonksiyonlar için elde edilen kesirli integral eşitsizliklerinin fonksiyoneller yardımıyla elde edilmesi hakkında olup, ilk olarak çalışmamız için gerekli olan tanım ve teoremler verildi. Çalışmanın bulgular kısmında, p-konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak elde edilmiş olan Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliklerinin sol tarafları fonksiyoneller aracılığıyla elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizliği, İntegral Eşitsizlikleri, *p*-Konveks Fonksiyonlar, Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

ABSTRACT

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR P-CONVEX FUNCTIONS VIA FUNCTIONALS

KIRÖMEROĞLU, Merve
Giresun University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics Gr. Thesis
Supervisor: Assoc. Doç. Dr. İmdat İŞCAN
JULY 2017, 42 pages

This thesis study is about obtaining with the help of functionals the fractional integral inequalities obtained for p-convex functions. Firstly, definitions and theorems necessary for our study are given. In the findings of the work, the left sides of the Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejér inequalities obtained using Riemann-Liouville fractional integrals for p-convex functions were obtained through functionals.

KeyWords: Functionals, Hermite-Hadamard Inequality, Hermite-Hadamard-Fejér Inequality, Integral Inequalities, *p*-Convex Functions, Riemann-Liouville Fractional Integral

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tüm aşamalarında her türlü bilimsel desteği sağlayan, bilgi birikimleri, hayata dair fikirleri, tecrübeleri ve değerli görüşleri ile katkı sağlayan hocam Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmam sırasında maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme teşekkür ederim. Manevi olarak varlığını üzerimden eksik etmeyen, beni her daim motive eden sevgili kardeşim Merve BÜYÜKAYDIN' a teşekkür ederim. Çalışmalarım esnasında teknik desteğini esirgemeyen, tez yazım aşamasında her türlü yardımı yapan ve tabi ki en büyük manevi desteğim Baran SEVEN' e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$' de bir aralık
I^o	: I nın içi
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
f^{-1}	: f Fonksiyonunun Tersi
Γ	: Gamma Fonksiyonu
PC	: P-Konveks Kümeye Ait Olma
J_{a+}^{α}	:Sağ Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
J_{b-}^{α}	:Sol Taraflı Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

1. GİRİŞ

Konveks fonksiyonların tarihi pi sayısına kadar dayanmakta olup başlangıcı 19. yüzyılın sonlarını işaret etmektedir. Buna rağmen “konvekslik” kavramı ilk olarak Hermite tarafından dile getirilmiştir. Daha sonra Hadamard tarafından çalışılmış olsa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması J.L.W.V. Jensen ile başlamıştır.

Konvekslik kavramı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Matematikte “eşitsizlik“ kelimesi iki farklı miktar arasında farklılığı ifade eder ve bu iki miktar arasında oran kurmak için kullanılır. Başta mühendislik olmak üzere birçok bilimsel alanda eşitsizlik kullanılmıştır. Bunun üzerine araştırmacıların dikkatini çekmiş ve diğer bilim dallarıyla ilişkili olarak günümüze kadar gelmiştir. Eşitsizlik üzerine üretilen en önemli eserlerin başında ise 1934 yılında Hardy, Littlewod ve Polya tarafından yazılan “Inequalities“ adlı kitap gelmektedir (1). İkinci çalışma ise 1934-1960 yılları arasında çalışmalar sonucunda elde edilen eşitsizliklerin yer aldığı “Inequalities” adı verilen kitaptır. Bu kitabı Mitrinović’in 1970 yılında yayınladığı “Analytic Inequalities” adlı kitap takip eder. Pečarić tarafından yazılan “Convex Functions: Inequalities” adlı kitap ise özellikle konveks fonksiyonlar üzerine eşitsizlikler içermektedir. Bu temel kaynakların yanı sıra “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” (2), “Classical and New Inequalities in Analysis” (3), “Mathematical Inequalities” (4) ve “Convex Functions and Their Applications” (5) isimli kitaplar literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır. Son zamanlarda, konvekslik kavramının soyutlaştırılması üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar neticesinde elde edilen konvekslik sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu doğrultuda pek çok sayıda araştırmalar yapılmıştır. Örneğin, Godnova-Levin tipli fonksiyonlar (6), r-konveks fonksiyonlar (7), p-fonksiyonlar (8), p-konveks fonksiyonlar (9), harmonik konveks fonsiyonlar (10) .

Kesirli integral ve kesirli türev konuları ilk Liouville tarafından dile getirildi ve literatürde Riemann-Liouville kesirli türev ve kesirli integrali olarak bilinmektedir.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tam sayılar icin var mıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıkmış, 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler,Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin kesirli mertebe için diferensiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır.

Sarıkaya M.Z ve arkadaşları tarafından kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir (11). İşcan İ. tarafından kesirli integraller yoluyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği (12), İşcan İ. ve Kunt M. tarafından kesirli integraller yoluyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği (13) ve kesirli integraller yardımıyla p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği sunulmuştur (14).

Bu çalışmamız; kesirli integraller yardımıyla p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizliklerin elde edilmesi hakkında olup, bu eşitsizliklerin farklı bir bakış açısıyla çözümüne dayalıdır.

2.MATERYAL VE METOT

2.1. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1.1 (15) **:** $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu konveks fonksiyondur ancak ve ancak

$\forall\ x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y). \qquad (2.1.1)$$

Yukarıdaki formüle eş değer olarak her $x, y, z \epsilon I$ için

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

determinantını verebiliriz.

Tanım 2.1.2: K , V vektör uzayının konveks bir alt kümesi olsun. $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki bilgiler mevcuttur.

i) Eğer her $x, y \epsilon K$ ve $\theta \in [0,1]$ için (2.1.1) eşitsizliği sağlanıyorsa f konvekstir,

ii) Eğer (2.1.1) deki eşitsizlik tersine dönerse bu durumda f konkavdır,

iii) f konveks ve konkav ise afindir,

iv) $x \neq y$ ve $\theta \in (0,1)$ olduğunda (2.1.1) deki eşitsizlik kesin ise f kesin konvekstir.

Böylece konkavlığın anlamı

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \geq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

şeklinde olur. Afinliğin anlamı ise

$$f(\theta x + (1-\theta)y) = \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

şeklindedir.

Özellik 2.1.1: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f konvekstir ancak ve ancak her $x, y \epsilon I$ için

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \qquad (2.1.2)$$

dir.

Uyarı 2.1.1: (2.1.2) eşitsizliği orta nokta konveksliği adını alır.

Teorem 2.1.1: I bir açık aralık, $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ ve ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu taktirde f konvekstir ancak ve ancak her $x\epsilon I$ için

$$f''(x) \geq 0 \qquad (2.1.3)$$

dır.

Örnek 2.1.1: $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı ve $f(x) = e^x$ olsun. Bu taktirde $f''(x) = e^x > 0$ olur. Böylece f konvekstir.

Orta nokta konveksliği ile

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)} \leq \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^x$$

elde edilir. Eğer a ve b, $(0, \infty)$ da keyfi iki sayı olmak üzere $a = e^x$ ve $b = e^y$ olarak seçilirse

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$$

aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği elde edilir. Böylece bu eşitsizlik, e^x fonksiyonunun konveksliğini genelleştirir.

Örnek 2.1.2 : $x\epsilon\ (0, \infty)$ için $g(x) = lnx$ fonksiyonunu ele alalım. Burada

$g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ olur ki bu da g fonksiyonun konkav olduğunu gösterir. Tanım 2.1.2' ye göre f kesin konveks, g kesin konkavdır.

Yukarıdaki verilenlere göre e^x ‘ in tersi lnx fonksiyonunun konkav olması tesadüf değildir. Eğer f kesin monoton artan ve konveks ise f^{-1} , fonksiyonun tersi , konkavdır.

Bu durumu göstermek amacıyla , x ve y, f nin değer kümesinden alınan keyfi iki nokta ise

$x = f(a)$ ve $y = f(b)$ olacak şekilde a,b vardır.

Bu taktirde, f nin konveksliğinden

$$\theta f(a) + (1-\theta)f(b) \geq f\big((1-\theta)a + \theta b\big) \qquad (2.1.4)$$

olur. f monoton artan olduğundan, f^{-1} fonksiyonu da monoton artandır. O halde (2.1.4) eşitsizliğine f^{-1} uygulanırsa

$$f^{-1}(\theta x + (1-\theta)y) \geq (1-\theta)a + \theta b = (1-\theta)f^{-1}(x) + \theta f^{-1}(y)$$

elde edilir ki bu da bize f^{-1} fonksiyonun konkav olduğunu gösterir.

Şimdi konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ile devam edelim.

Tanım 2.1.3 (16, 17) **:** $a, b \epsilon I$ öyle ki $a < b$ olmak üzere I reel aralığı üzerinde tanımlı $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.1.5)$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

Aşağıda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genellemesi olan Fejér eşitsizliği verilmiştir.

Teorem 2.1.2 (18) **:**$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde

$w: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$‘ ye göre simetrik olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \leq \int_a^b f(x)w(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx \quad (2.1.6)$$

Tanım 2.1.4 (10) **:** $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ reel bir aralık olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{tx}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \qquad (2.1.7)$$

ise $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna harmonik konvekstir denir. Eğer (2.1.7) eşitsizliği tersine dönerse f fonksiyonuna harmonik konkavdır denir.

Örnek 2.1.3 : $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = x$, ve $g: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ olsun. Bu taktirde *f*, harmonik konveks fonksiyon ve g, harmonik konkav fonksiyon olur.

Bu örneğe aşağıdaki özellik ile devam edelim:

Özellik 2.1.2: $I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ reel bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

i) Eğer $I \subseteq (0, \infty)$, f konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f harmonik konvekstir.
ii) Eğer $I \subseteq (0, \infty)$, f harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f konvekstir.
iii) Eğer $I \subseteq (-\infty, 0)$, f harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f konvekstir.

iv) Eğer $I \subseteq (-\infty, 0)$, f konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f harmonik konvekstir.

Şimdi harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ile devam edelim.

Teorem 2.1.3 : $a, b \epsilon I$ öyle ki $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \epsilon\, L[a, b]$ ise bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (2.1.8)$$

Chan ve Wu tarafından harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği sunulmuştur (19).

Teorem 2.1.4 : $a, b\epsilon I$ öyle ki $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\epsilon\, L[a, b]$ ve $w: [a, b] \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik ise

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx \qquad (2.1.9)$$

dır.

Zhang ve Wan tarafından p-konveks fonksiyon tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir. (9).

Tanım 2.1.5 : I , p-konveks küme olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left([\alpha x^p + (1-\alpha)y^p]^{1/p}\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \qquad (2.1.10)$$

ise $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna p-konveks fonksiyon ya da $PC(I)$ sınıfına aittir denir.

Uyarı 2.1.2 : $k, r, t \in \mathbb{N}$ için $p = 2k+1, p = n/m,\ n = 2r+1$ ya da $m = 2t+1$ olduğunda, her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $[\alpha x^p + (1-\alpha)y^p]^{1/p} \in I$ ise *I* aralığına p-konveks küme denir.

Uyarı 2.1.3: (1) Eğer $I \subseteq (0, \infty)$ bir reel aralık ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ise bu taktirde *I*, p-konveks kümedir.

(2) Eğer (2.1.10) eşitsizliği tersine dönerse bu taktirde *f*, p-konkavdır denir.

(3) Eğer (2.1.10) da $p = 1$ ve $p = -1$ alınırsa $I \subseteq (0, \infty)$ da sırasıyla bildiğimiz anlamda konveks fonksiyon ve harmonik konveks fonksiyon elde edilir.

Örnek 2.1.4 : $f: (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^p$, $p \neq 0$, ve g: $(0, \infty) \to \mathbb{R}, g\ (x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu taktirde f ve g, p-konveks ve p-konkav fonksiyonlardır.

$I \subseteq (0,\infty)$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $h(t) = t$ alınarak aşağıdaki teorem elde edilmiştir. (9, Teorem 5).

Teorem 2.1.5 : $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ p-konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a, b \epsilon I$ öyle ki a $< b$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \qquad (2.1.11)$$

dır.

Uyarı 2.1.4: (2.1.11) deki eşitsizlikler kesindir. Gerçekten, $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece her $x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}\right)$$

$$= tf(y) + (1-t)f(x) = 1.$$

Böylece *f*, $(0,\infty)$ da *p*-konvekstir. Buradan

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) = 1$$

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx = 1$$

ve

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = 1$$

elde edilir ve böylece (2.1.11) eşitsizliğinin kesin olduğunu göstermiş oluruz.

Özellik 2.1.3 (20) **:** $I \subseteq (0,\infty)$ reel bir aralık, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

(1) Eğer $p \leq 1$ ve f konveks ve azalmayan fonksiyon ise bu durumda *f*, *p*-konvekstir.

(2) Eğer $p \geq 1$ ve f p-konveks ve azalmayan fonksiyon ise bu durumda f konvekstir.

(3) Eğer $p \leq 1$ ve f p-konkav ve azalmayan fonksiyon ise bu durumda f konkavdır.

(4) Eğer $p \geq 1$ ve f konkav ve azalmayan fonksiyon ise bu durumda f p-konkavdır.

(5) Eğer $p \geq 1$ ve f konveks ve azalmayan fonksiyon ise bu durumda f p-konvekstir.

(6) Eğer $p \leq 1$ ve f p- konveks ve artmayan fonksiyon ise bu durumda f konvekstir.

(7) Eğer $p \geq 1$ ve f p- konkav ve artmayan fonksiyon ise bu durumda f konkavdır.

(8) Eğer $p \leq 1$ ve f konkav ve artmayan fonksiyon ise bu durumda f p-konkavdır.

İspat : $g(x) = x^p$ için $p \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ olduğunda g, $(0, \infty)$ da konveks bir fonksiyon ve $g(x) = x^p$ için $p \in (0,1]$ olduğunda g, $(0,1)$ da konkav bir fonksiyondur. İspat powermean eşitsizliği kullanılarak kolayca yapılır.

$\forall x, y \in (0, \infty)vet \in [0,1]$ için

$$[tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \geq tx + (1-t)y, \;\; p \geq 1$$

ve

$$[tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \leq tx + (1-t)y, \;\; p \leq 1$$

Özellik 2.1.3' e göre p-konveks ve p-konkav fonksiyonlar için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.1.5 : $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ olsun, bu durumda $p \leq 1$ için *f*, *p*- konveks fonksiyon ve $p \geq 1$ için *f*, *p*-konkav fonksiyondur.

Örnek 2.1.6: $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-p}$, $p \geq 1$olsun, bu durumda *f*, *p*-konveks fonksiyondur.

Örnek 2.1.7 : $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -lnx$, $p \geq 1$ olsun, bu durumda *f*, *p*-konveks fonksiyondur.

Örnek 2.1.8 : $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=lnx$, $p\geq 1$olsun, bu durumda *f*, *p*-konkav fonksiyondur.

Şimdi vereceğimiz özellik açıktır.

Özellik 2.1.4 : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ise ve $p>0$ için $g:[a^p,b^p]\to\mathbb{R}$ ($p<0$ için $g:[b^p,a^p]\to\mathbb{R}$), $g(t)=f\left(t^{1/p}\right)$ ile tanımlı fonksiyonu gözönüne alırsak, bu durumda *f*, $[a,b]$ de *p*-konvekstir ancak ve ancak *g*, $[a^p,b^p]$ de ($p<0$ için $[b^p,a^p]$ de) konvekstir.

Uyarı 2.1.5 : Özellik 2.1.4' e göre , g, $[a^p,b^p]$ aralığında herhangi bir konveks fonksiyon olduğunda *p*-konveks fonksiyonların örneği olarak $f(t)=g(t^p)$, $p\neq 0$, olarak alabiliriz. Böylece (2.1.11) eşitsizliğini farklı bir şekilde elde edebiliriz.

Eğer *f*, $[a,b]$ üzerinde konveks ise, bu durumda $p>0$ için $[a^p,b^p]$ kapalı aralığı üzerinde ($p<0$ için $[b^p,a^p]$ de) $g(t)=f(t^{1/p})$ konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$g\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\leq\frac{1}{b^p-a^p}\int_{a^p}^{b^p}g(t)\,dt\leq\frac{g(a^p)+g(b^p)}{2},$$

veya buna eşdeğer olarak

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\leq\frac{1}{b^p-a^p}\int_{a^p}^{b^p}f\left(t^{1/p}\right)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\qquad(2.1.12)$$

yazılır.

$x=t^{1/p}$değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_{a^p}^{b^p}f(t^{1/p})=p\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

olup, (2.1.12) den (2.1.11) de verilen *p*-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdai gibi elde edilir.

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\leq\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\quad.$$

Tanım 2.1.6 (21) **:** $f\epsilon\, L[a,b]$ olsun. $b > a \geq 0$ ile $\alpha > 0$ için $J_{a+}^{\alpha}f$ ve $J_{b-}^{\alpha}f$ sırasıyla sağ taraflı ve sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri

$$J_{a+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, x < b.$$

şeklindedir. Burada $\Gamma(\alpha)$, Gamma fonksiyonudur ve $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ olarak tanımlıdır.

Teorem 2.1.6 (11) **:** $0 \leq a < b, f:[a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f\epsilon\, L[a,b]$ olsun. Eğer f , $[a,b]$ aralığında konveks ise $\alpha > 0$ olduğunda kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}f(b) + J_{b-}^{\alpha}f(a)] \leq \frac{fa) + f(b)}{2}. \qquad (2.1.13)$$

Teorem 2.1.7 (12) **:** $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $f\epsilon\, L[a,b]$olsun. Bu taktirde w negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$‘ ye göre simetrik ise yani her $x \in [a,b]$ için

$$w(x) = w(a+b-x)$$

ise $\alpha > 0$ olduğunda kesirli integraller için eşitsizlik aşağıdaki gibidir.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)[J_{a+}^{\alpha}w(b) + J_{b-}^{\alpha}w(a)] \leq [J_{a+}^{\alpha}(fw)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fw)(a)]$$

$$\leq \frac{fa) + f(b)}{2}[J_{a+}^{\alpha}w(b) + J_{b-}^{\alpha}w(a)]. \qquad (2.1.14)$$

Teorem 2.1.8 (22) **:** $a, b\epsilon\, I$ öyle ki $a < b$, $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f\epsilon\, L[a,b]$ olsun. Eğer f ,[a,b] aralığında harmonik konveks bir fonksiyon ise, $\alpha > 0$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$, $x\epsilon\left[\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right]$ için kesirli integral eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{\alpha}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right)\right]$$
$$\leq \frac{fa) + f(b)}{2}. \qquad (2.1.15)$$

Teorem 2.1.9 (13) **:** $a < b$ ve $f \epsilon\ L[a,b]$olmak üzere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer ve $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{2ab}{a+b}$' ye göre harmonik simetrik ise yani her $x \in [a,b]$ için

$$w(x) = w(a^{-1} + b^{-1} - x^{-1})$$

ise $\alpha > 0$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \epsilon \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ olduğunda kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik verilir:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(wog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(wog)\left(\frac{1}{b}\right)\right] \leq \left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(fwog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(fwog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$
$$\leq \frac{fa) + f(b)}{2}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(wog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(wog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]. \qquad (2.1.16)$$

2.2. *p*-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER EŞİTSİZLİKLERİ

İşcan ve Kunt tarafından kesirli integraller yardımıyla p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği ile ilgili yapılan çalışmalar bu bölümde verilmiştir (14).

Bu bölümde, $w: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu için $\|w\|_\infty = sup_{t\epsilon[a,b]}|w(t)|$ olarak alınmıştır.

Tanım 2.2.1 : $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. Eğer aşağıdaki eşitlik her $x\epsilon[a,b]$ için sağlanıyorsa $w: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$' ye göre p-simetriktir denir.

$$w(x) = \left([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}}\right).$$

Lemma 2.2.1 : $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha > 0$ ve $w: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrallenebilir, $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$' ye göre $p -$ simetrik olsun. Bu taktirde

i) $p > 0$ ise , $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x\epsilon[a^p, b^p]$ için

$$\begin{aligned} J^\alpha_{a^p+}(wog)(b^p) &= J^\alpha_{b^p-}(wog)(a^p) \\ &= \frac{1}{2}[J^\alpha_{a^p+}(wog)(b^p) + J^\alpha_{b^p-}(wog)(a^p)], \qquad (2.2.1) \end{aligned}$$

ii) $p < 0$ ise, $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x\epsilon[b,^p a^p]$ için

$$\begin{aligned} J^\alpha_{b^p+}(wog)(a^p) &= J^\alpha_{a^p-}(wog)(b^p) \\ &= \frac{1}{2}[J^\alpha_{b^p+}(wog)(a^p) + J^\alpha_{a^p-}(wog)(b^p)] \qquad (2.2.2) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.1 : $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ p-konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$\alpha > 0$ ve $a, b\epsilon I$ öyle ki $a < b$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise ve $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$' ye göre $p-$simetrik ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i) $p > 0$ ise , $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[a^p, b^p]$ için

$$\begin{aligned} f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)&[J^{\alpha}_{a^p+}(wog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(wog)(a^p)] \\ &\leq [J^{\alpha}_{a^p+}(fwog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(fwog)(a^p)] \\ &\leq \frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{a^p+}(wog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(wog)(a^p)], \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

ii) $p < 0$ ise, $g(x) = x^{\frac{1}{p}}, x\,\epsilon[b,^p a^p]$ için

$$\begin{aligned} f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)&[J^{\alpha}_{b^p+}(wog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(wog)(b^p)] \\ &\leq [J^{\alpha}_{b^p+}(fwog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(fwog)(b^p)] \\ &\leq \frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{b^p+}(wog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(wog)(b^p)]. \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

Uyarı 2.2.1 : Teorem 2.2.1' den, aşağıdaki eşitsizliklere ulaşabiliriz.

(1) Eğer $p = 1$ alınırsa, (2.1.14) eşitsizliği,

(2) Eğer $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa, (2.1.13) eşitsizliği,

(3) Eğer $p = 1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, (2.1.6) eşitsizliği,

(4) Eğer $p = 1$, $\alpha = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa (2.1.5) eşitsizliği,

(5) Eğer $p = -1$ alınırsa, (2.1.16) eşitsizliği,

(6) Eğer $p = -1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa, (2.1.15) eşitsizliği,

(7) Eğer $p = -1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa (2.1.9) eşitsizliği,

(8) Eğer $p = -1$, $\alpha = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa (2.1.8) eşitsizliği,

(9) Eğer $\alpha = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa (2.1.11) eşitsizliği,

elde edilir.

Sonuç 2.2.1 : Teorem 2.2.1' de $w(x) = 1$ alınırsa

i) $p > 0$ ise , $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[a^p, b^p]$ için

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right)[J^{\alpha}_{a^p+}g(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}g(a^p)] \leq [J^{\alpha}_{a^p+}(fog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(fog)(a^p)]$$

$$\leq \frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{a^p+}g(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}g(a^p)], \qquad (2.2.5)$$

ii) $p < 0$ ise, $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[b,^p a^p]$ için

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right)[J^{\alpha}_{b^p+}g(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}g(b^p)] \leq [J^{\alpha}_{b^p+}(fog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(fog)(b^p)]$$

$$\leq \frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{b^p+}g(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}g(b^p)] \qquad (2.2.6)$$

elde edilir.

Lemma 2.2.2 : $f: I \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, I^{o} 'de diferansiyellenebilen bir fonksiyon $a, b\epsilon I^{o}$ ve $a < b$ olmak üzere, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\alpha > 0$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ve $w: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ' ye göre $p-$ simetrik ise bu taktirde kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

i) $p > 0$ ise , $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[a^p, b^p]$ için

$$\frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{a^p+}(wog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(wog)(a^p)]$$
$$- [J^{\alpha}_{a^p+}(fwog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(fwog)(a^p)]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a^p}^{b^p}\left[\int_{a^p}^{t}(b^p - s)^{\alpha-1}(wog)(s)ds\right.$$
$$\left. - \int_{t}^{b^p}(s - a^p)^{\alpha-1}(wog)(s)ds\right](fog)'(t)dt\ ,$$

ii) $p < 0$ ise, $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[b,^p a^p]$ için

$$\frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{b^p+}(wog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(wog)(b^p)] - [J^{\alpha}_{b^p+}(fwog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(fwog)(b^p)]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{b^p}^{a^p}\left[\int_{b^p}^{t}(a^p - s)^{\alpha-1}(wog)(s)ds - \int_{t}^{a^p}(s - b^p)^{\alpha-1}(wog)(s)ds\right](fog)'(t)dt$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2 : $a, b\epsilon\, I$ öyle ki $a < b$, $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $I^{o'}$ de diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha > 0$ ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. Eğer $f' \in L[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında p-konveks fonksiyon ise, $w: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}'}$ ye göre $p-$simetrik olduğunda kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i) $p > 0$ ise $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[a^p, b^p]$ için

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{a^p+}(wog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(wog)(a^p)] - [J^{\alpha}_{a^p+}(fwog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(fwog)(a^p)]\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{\infty}(b^p - a^p)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}[C_1(\alpha,p)|f'(a)| + C_2(\alpha,p)|f'(b)|]$$

dir. Burada

$$C_1(\alpha,p) = \int_0^1 \frac{|(1-u)^{\alpha} - u^{\alpha}|}{p[ua^p + (1-u)b^p]^{1-(1/p)}}udu$$

ve

$$C_2(\alpha,p) = \int_0^1 \frac{|(1-u)^{\alpha} - u^{\alpha}|}{p[ua^p + (1-u)b^p]^{1-(1/p)}}(1-u)du$$

dir.

ii) $p < 0$ ise, $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[b,^p a^p]$ için

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\left[J^{\alpha}_{b^p+}(wog)(a^p)+J^{\alpha}_{a^p-}(wog)(b^p)\right]\right.$$
$$\left.-\left[J^{\alpha}_{b^p+}(fwog)(a^p)+J^{\alpha}_{a^p-}(fwog)(b^p)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{\infty}(a^p-b^p)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[C_3(\alpha,p)|f'(a)|+C_4(\alpha,p)|f'(b)|\right]$$

dir. Burada

$$C_3(\alpha,p)=\int_0^1 \frac{-|(1-u)^{\alpha}-u^{\alpha}|}{p[ua^p+(1-u)b^p]^{1-(1/p)}}udu$$

ve

$$C_4(\alpha,p)=\int_0^1 \frac{-|(1-u)^{\alpha}-u^{\alpha}|}{p[ua^p+(1-u)b^p]^{1-(1/p)}}(1-u)du$$

dır.

Sonuç 2.2.2 : Teorem 2.2.2 ‘ den , aşağıdaki sonuçları görebiliriz.

(1) Eğer $p=1$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa, konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{1}{b-a}\frac{fa)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\|w\|_{\infty}(b-a)}{2}\left[C_1(1,1)|f'(a)|+C_2(1,1)|f'(b)|\right],$$

(2) Eğer $p=-1$ olarak alınırsa, kesirli integraller yoluyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{fa)+f(b)}{2}\left[J^{\alpha}_{1/b+}(wog)(1/a)+J^{\alpha}_{1/a-}(wog)(1/b)\right]\right.$$
$$\left.-\left[J^{\alpha}_{1/b+}(fwog)(1/a)+J^{\alpha}_{1/a-}(fwog)(1/b)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{\infty}ab(b-a)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\alpha}\left[C_3(\alpha,-1)|f'(a)|+C_4(\alpha,-1)|f'(b)|\right],$$

(3) Eğer $p = -1$, $\alpha = 1$ ve $w(x) = 1$ olarak alınırsa harmonik konveks fonsiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$
$$\leq \left(\frac{b-a}{ab}\right)[C_3(1,-1)|f'(a)| + C_4(1,-1)|f'(b)|],$$

(4) Eğer $p = -1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2}dx\right|$$
$$\leq \frac{\|w\|_\infty (b-a)^2}{2}[C_3(1,-1)|f'(a)| + C_4(1,-1)|f'(b)|],$$

(5) Eğer $p = -1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa, kesirli integraller yoluyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^\alpha}\left[J_{\frac{1}{b}+}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J_{\frac{1}{a}-}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$
$$\leq \left(\frac{b-a}{ab}\right)[C_3(\alpha,-1)|f'(a)| + C_4(\alpha,-1)|f'(b)|].$$

Teorem 2.2.3 : $a, b \epsilon I$ öyle ki $a < b$, $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $I^{o\prime}$ de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 1$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\alpha > 0$ için $[a,b]$ aralığında p-konveks fonksiyon, $w: [\mathrm{a,b}] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ′ ye göre $p-$simetrik ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i) $p > 0$ ise $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[a^p, b^p]$ için

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{a^p+}(wog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(wog)(a^p)] - [J^{\alpha}_{a^p+}(fwog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(fwog)(a^p)]\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_\infty (b^p - a^p)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} C_5^{1-\frac{1}{q}}(\alpha,p)[C_1(\alpha,p)|f'(a)|^q + C_2(\alpha,p)|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada ,

$C_1(\alpha,p)$ ve $C_2(\alpha,p)$ Teorem 2.2.2' deki gibidir.

$$C_5(\alpha,p) = \int_0^1 \frac{|(1-u)^\alpha - u^\alpha|}{p[ua^p + (1-u)b^p]^{1-(1/p)}} du$$

dır.

ii) $p < 0$ ise, $g(x) = x^{\frac{1}{p}},\ x\epsilon[b,^p a^p]$ için

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2}[J^{\alpha}_{b^p+}(wog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(wog)(b^p)] - [J^{\alpha}_{b^p+}(fwog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(fwog)(b^p)]\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_\infty (b^p - a^p)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} C_6^{1-\frac{1}{q}}(\alpha,p)[C_3(\alpha,p)|f'(a)|^q + C_4(\alpha,p)|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada,

$C_3(\alpha,p)$ ve $C_4(\alpha,p)$ Teorem 2.2.2' deki gibidir.

$$C_6(\alpha,p) = \int_0^1 \frac{-|(1-u)^\alpha - u^\alpha|}{p[ua^p + (1-u)b^p]^{1-(1/p)}} du$$

dir.

Sonuç 2.2.3 : Teorem 2.2.3'den aşağıdakileri görebiliriz.

(1) Eğer $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa, kesirli integraller üzerinden konveks fonsiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) - J_{b-}^{\alpha} f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2} C_5^{1-\frac{1}{q}}(\alpha, 1)\left[C_1(\alpha, 1)|f'(a)|^q + C_2(\alpha, 1)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

(2) Eğer $p = 1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{1}{b-a}\frac{fa) + f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{\|w\|_\infty (b-a)}{2} C_5^{1-\frac{1}{q}}(1,1)\left[C_1(1,1)|f'(a)|^q\right.$$
$$\left. + C_2(1,1)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

(3) Eğer $p = -1$ alınırsa, kesirli integraller yoluyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2}\left[J_{1/b+}^{\alpha}(wog)(1/a) + J_{1/a-}^{\alpha}(wog)(1/b)\right]\right.$$
$$\left. - \left[J_{1/b+}^{\alpha}(fwog)(1/a) + J_{1/a-}^{\alpha}(fwog)(1/b)\right]\right|$$
$$\leq \frac{\|w\|_\infty ab(b-a)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^\alpha C_6^{1-\frac{1}{q}}(\alpha, -1)\left[C_3(\alpha, -1)|f'(a)|^q\right.$$
$$\left. + C_4(\alpha, -1)|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

(4) Eğer $p = -1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2}dx\right|$$
$$\leq \frac{\|w\|_\infty (b-a)^2}{2} C_6^{1-\frac{1}{q}}(1, -1)\left[C_3(1, -1)|f'(a)|\right.$$
$$\left. + C_4(1, -1)|f'(b)|\right].$$

Teorem 2.2.4 : $a, b \epsilon I$ öyle ki $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $I^{o'}$ de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q > 1$, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $\alpha > 0$ için $[a,b]$ aralığında p-konveks fonksiyon,

$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, $w: [\text{a}, \text{b}] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ′ye göre $p -$ simetrik ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

i) $p > 0$ ise , $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x\epsilon[a^p, b^p]$ için

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2}\left[J_{a^p+}^{\alpha}(wog)(b^p) + J_{b^p-}^{\alpha}(wog)(a^p)\right] - \left[J_{a^p+}^{\alpha}(fwog)(b^p) + J_{b^p-}^{\alpha}(fwog)(a^p)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{\infty}(b^p - a^p)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} C_7^{\frac{1}{r}}(\alpha, p, r)\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada

$$C_7(\alpha, p, r) = \int_0^1 \left(\frac{|(1-u)^{\alpha} - u^{\alpha}|}{p[ua^p + (1-u)b^p]^{1-(1/p)}}\right)^r du$$

dir.

ii) $p < 0$ ise, $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x\epsilon[b,^p a^p]$ için

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2}\left[J_{b^p+}^{\alpha}(wog)(a^p) + J_{a^p-}^{\alpha}(wog)(b^p)\right] - \left[J_{b^p+}^{\alpha}(fwog)(a^p) + J_{a^p-}^{\alpha}(fwog)(b^p)\right]\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_{\infty}(b^p - a^p)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} C_8^{\frac{1}{r}}(\alpha, p, r)\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada

$$C_8(\alpha, p, r) = \int_0^1 \left(\frac{-|(1-u)^{\alpha} - u^{\alpha}|}{p[ua^p + (1-u)b^p]^{1-(1/p)}}\right)^r du$$

dir.

Sonuç 2.2.4 : Teorem 2.2.5' ten, aşağıdakileri görebiliriz.

(1) Eğer $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa, kesirli integraller üzerinden konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b) - J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}C_{7}^{\frac{1}{r}}(\alpha,1,r)\left(\frac{|f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

(2) Eğer $p = -1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa, kesirli integraller yoluyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^{\alpha}}\left[J_{\frac{1}{b}+}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J_{\frac{1}{a}-}^{\alpha}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]\right|$$

$$\leq \left(\frac{b-a}{ab}\right)C_{8}^{\frac{1}{r}}(\alpha,-1,r)\left(\frac{|f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

(3) Eğer $p = -1$, $\alpha = 1$ ve $w(x) = 1$, harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_{a}^{b}\frac{f(x)}{x^{2}}dx\right|$$

$$\leq \left(\frac{b-a}{ab}\right)C_{8}^{\frac{1}{r}}(1,-1,r)\left(\frac{|f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

(4) Eğer $p = -1$ alınırsa, kesirli integraller yoluyla harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{fa) + f(b)}{2}\left[J_{1/b+}^{\alpha}(wog)(1/a) + J_{1/a-}^{\alpha}(wog)(1/b)\right]\right.$$
$$\left. - \left[J_{1/b+}^{\alpha}(fwog)(1/a) + J_{1/a-}^{\alpha}(fwog)(1/b)\right]\right|$$
$$\leq \frac{\|w\|_{\infty}ab(b-a)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\alpha}C_{8}^{\frac{1}{r}}(\alpha,-1,r)\left(\frac{|f'(a)|^{q} + |f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

(5) Eğer $p = -1$ ve $\alpha = 1$ alınırsa, harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{f a) + f(b)}{2}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{\|w\|_\infty (b^p - a^p)^2}{2} C_8^{\frac{1}{r}}(1,-1,r)\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

(6) Eğer $\alpha = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir tarafı elde edilir.

$$\left|\frac{f a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}\right|$$

$$\leq \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \begin{cases} \dfrac{(b^p - a^p)}{2} C_7^{\frac{1}{r}}(1,p,r), p > 0 \\ \dfrac{(a^p - b^p)}{2} C_8^{\frac{1}{r}}(1,p,r), p < 0 \end{cases}$$

2.3. KONVEKS FONKSİYONLAR İLE İLGİLİ ELDE EDİLEN BAZI SONUÇLAR

Teorem 2.3.1 (23) **:** f, $[a,b]$ üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. O halde H fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde artan konvekstir ve her $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0) \leq H(t) \leq H(1) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dir. Burada $H(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$ şeklinde tanımlıdır.

Lemma 2.3.1 (23) **:** $f\colon [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve h fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlı olsun.

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{t}{2}\right) + f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{t}{2}\right)\right]$$

Bu taktirde, h fonksiyonu$[0, b-a]$ üzerinde artan, konveks ve her $t \in [0, b-a]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq h(t) \leq \frac{f(a) + (b)}{2}$$

dir.

Teorem 2.3.2 (23) **:** $a < b$ olmak üzere$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon ve

$f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f , $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise

$$WH(t) = \frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha}}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)((b-x)^{\alpha-1} + (x-a)^{\alpha-1})dx$$

ile tanımlı *WH* fonksiyonu, $[0,1]$ üzerinde konveks ve monoton artandır.

Ayrıca $\alpha > 0$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = WH(0) \leq WH(t) \leq WH(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b) + J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]$$

dir.

Sonuç 2.3.1 (23) **:** Yukarıdaki teoremde $\alpha = 1$alınırsa

$$WH(t) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx = H(t)$$

olup, Teorem 2.3.1' deki $H(t)$ tanımını elde ederiz.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

Lemma 3.1 : $p > 0$ olsun. $f: [a, b] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, p- konveks fonksiyon ise

$g: [a^p, b^p] \to \mathbb{R}$, $(p < 0\ için\ g: [b^p, a^p] \to \mathbb{R})$, $g(t) = f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ fonksiyonu konvekstir.

Lemma 3.2 : $p > 0$ ve $f: [a, b] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, p-konveks fonksiyon

$h: [0, b^p - a^p] \to \mathbb{R}$, $(p < 0\ için\ h: [0, a^p - b^p] \to \mathbb{R})$

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[f\left[\left(\frac{a^p + b^p}{2} - \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right] + f\left[\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right) + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right]$$

ile tanımlı h fonksiyonu $[0, b^p - a^p]$ üzerinde konveks ve artandır. Ayrıca her $t \in [0, b^p - a^p]$ için

$$f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \le h(t) \le \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : Lemma 2.3.1' e göre $p > 0$ için $g: [a^p, b^p] \to \mathbb{R}$,

$g(t) = f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ fonksiyonu konveks olup bu fonksiyona Lemma 2.3.1' i uygularsak

$$h(t) = \frac{1}{2}\left[g\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right) - \frac{t}{2}\right) + g\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2} + \frac{t}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left[\left(\frac{a^p + b^p}{2} - \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right] + f\left[\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right) + \frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\right]$$

ile tanımlı h fonksiyonu $[0, b^p - a^p]$ üzerinde konveks ve artan olup her $t \in [0, b^p - a^p]$ için (3.1) eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1 : $f:[a,b]\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f\in L[a,b]$ ve f p- konveks fonksiyon ise $W_p:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$W_p(t)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\propto}{2(b^p-a^p)^{\propto}}\displaystyle\int_{a^p}^{b^p} f\left[\left(\left(tx+(1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right][(b^p-x)^{\propto-1}+(x-a^p)^{\propto-1}]\,dx\,,p>0\\ \dfrac{\propto}{2(a^p-b^p)^{\propto}}\displaystyle\int_{a^p}^{b^p} f\left[\left(\left(tx+(1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right][(x-b^p)^{\propto-1}+(a^p-x)^{\propto-1}]\,dx\;\,,p<0\end{cases}$$

fonksiyonu [0,1] üzerinde konveks ve monoton artan olup,

$g(x)=x^{1/p}$ve $\propto>0$ için

$$f\left(\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=W_p(0)\le W_p(t)\le W_p(1)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b^p-a^p)^{\alpha}}[J_{a^p+}^{\alpha}(fog)(b^p)+J_{b^p-}^{\alpha}(fog)(a^p)], & p>0.\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2(a^p-b^p)^{\alpha}}[J_{b^p+}^{\alpha}(fog)(a^p)+J_{a^p-}^{\alpha}(fog)(b^p)], & p<0.\end{cases}$$

İspat: Öncelikle $p>0$ için $W_p(t)$ nin [0,1] üzerinde konveks olduğunu gösterelim.

$\beta,t_1,t_2\in[0,1]$ keyfi olsun.Bu taktirde;

$$W_p\big((1-\beta)t_1+\beta t_2\big)$$
$$=\frac{\propto}{2(b^p-a^p)^{\propto}}\int_{a^p}^{b^p} f\Bigg\{\Big[\big((1-\beta)t_1$$
$$+\beta t_2\big)x+[(1-\beta)(1-t_1)\;+\;\beta(1-t_2)]\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\Big]^{\frac{1}{p}}\Bigg\}$$
$$\times((b^p-x)^{\propto-1}+(x-a^p)^{\propto-1})dx$$

$$= \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} f \left\{ \left[(1-\beta)\left[t_1 x + (1-t_1)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right] \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta\left[t_2 x + (1-t_2)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right]\right]^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$\times((b^p - x)^{\propto - 1} + (x - a^p)^{\propto - 1})dx$$

yazılır. $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun p- konveksliği kullanılırsa

$$W_p\big((1-\beta)t_1 + \beta t_2\big) \leq \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{a^p}^{b^p} [(b^p - x^p)^{\propto - 1} + (x^p - a^p)^{\propto - 1}]$$

$$\times \left\{ (1-\beta) f\left(\left(t_1 x + (1-t_1)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \right) \right.$$

$$\left. + \beta f\left(\left(t_2 x + (1-t_2)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \right) \right\} dx$$

$$=(1-\beta) W_p(t_1) + \beta W_P(t_2)$$

olur.

Bu ise bize W_p ‘ nin $[0,1]$ üzerinde konveks olduğunu gösterir. $p < 0$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

Şimdi ispatın devamı için;

$$W_P(t) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{a^p}^{b^p} f\left[\left(tx + (1-t)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \right]$$
$$\times[(b^p - x)^{\propto - 1} + (x - a^p)^{\propto - 1}]dx$$

$$= \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{a^p}^{\frac{a^p + b^p}{2}} f\left[\left(tx + (1-t)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \right] [(b^p - x)^{\propto - 1} + (x - a^p)^{\propto - 1}]\, dx$$

$$+ \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{\frac{a^p + b^p}{2}}^{b^p} f\left[\left(tx + (1-t)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \right]$$
$$\times[(b^p - x)^{\propto - 1} + (x - a^p)^{\propto - 1}]dx$$

Birinci integral için $u = 2\left(\frac{a^p+b^p}{2} - x\right)$, ikinci integral için de benzer şekilde $u = 2\left(x - \frac{a^p+b^p}{2}\right)$ değişken değiştirmesi yapılır ve integrallerde yerine yazılırsa,

$$W_P(t) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto}\int_0^{b^p-a^p} f\left(\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{tu}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{b^p-a^p}{2} + \frac{u}{2}\right)^{\propto-1}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b^p-a^p}{2} - \frac{u}{2}\right)^{\propto-1}\right]\frac{du}{2} + \frac{\propto p}{2(b^p-a^p)^\propto}\int_0^{b^p-a^p} f\left(\frac{a^p+b^p}{2} + \frac{tu}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{b^p-a^p}{2} - \frac{u}{2}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{b^p-a^p}{2} + \frac{u}{2}\right)^{\propto-1}\right]\frac{du}{2}$$

$$= \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto}\int_0^{b^p-a^p}\frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{tu}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} + \frac{tu}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]$$

$$\times\left[\left(\frac{b^p-a^p}{2} - \frac{u}{2}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{b^p-a^p}{2} + \frac{u}{2}\right)^{\propto-1}\right]du$$

olarak yazılır. Sonuç olarak,

$$W_P(t) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto}\int_0^{b^p-a^p}\frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} + \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]\left[\left(\frac{b^p-a^p}{2} - \frac{x}{2}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{b^p-a^p}{2} + \frac{x}{2}\right)^{\propto-1}\right]dx$$

yazılır. Lemma 2.3.1'e göre $h(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} + \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]$, $[0, b^p - a^p]$ aralığında artandır. $\left[\left(\frac{b^p-a^p}{2} - \frac{x}{2}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{b^p-a^p}{2} + \frac{x}{2}\right)^{\propto-1}\right]$ negatif değil dolayısıyla $W_P(t)$, $[0,1]$ aralığında artandır. $W_P(t)$ nin artanlığını da kullanarak teoremin son eşitsizliğini gösterelim.

$$W_P(0) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}} \int_{a^p}^{b^p} f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} [(b^p - x)^{\propto - 1} + (x - a^p)^{\propto - 1}] dx$$

$$= \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}} f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \int_{a^p}^{b^p} [(b^p - x)^{\propto - 1} + (x - a^p)^{\propto - 1}] dx$$

yazılır.

Burada ilk olarak $\int_{a^p}^{b^p} (b^p - x)^{\propto - 1} dx$ integralini hesaplamak için $u = b^p - x$ değişken değiştirmesi yapılırsa; $du = -dx$, alt sınır $b^p - a^p$ ve üst sınır 0 olur. Böylece

$$\int_{a^p}^{b^p} (b^p - x)^{\propto - 1} dx = \int_{b^p - a^p}^{0} u^{\alpha - 1} (-du) = \int_{0}^{b^p - a^p} u^{\alpha - 1} du = \frac{1}{\propto} (b^p - a^p)^{\propto}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\int_{a^p}^{b^p} (x - a^p)^{\propto - 1} dx$ integralini hesaplamak için $u = x - a^p$ değişken değiştirmesi yapılırsa; $du = dx$, alt sınır 0 ve üst sınır $b^p - a^p$ olur.

Böylece

$$\int_{a^p}^{b^p} (x - a^p)^{\propto - 1} dx = \int_{0}^{b^p - a^p} u^{\alpha - 1} du = \frac{1}{\propto} (b^p - a^p)^{\propto}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$W_p(0) = f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

elde edilir. Son olarak

$$W_P(1) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}} \int_{a^p}^{b^p} f\left(x^{\frac{1}{p}}\right) \left[(b^p - x)^{\propto - 1} + (x - a^p)^{\propto - 1}\right] dx$$

$$= \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}} \left[\int_{a^p}^{b^p} (b^p - x)^{\propto - 1} (fog)(x) dx + \int_{a^p}^{b^p} (x - a^p)^{\propto - 1} (fog)(x) dx\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b^p - a^p)^{\alpha}} [J_{a^p +}^{\alpha} (fog)(b^p) + J_{b^p -}^{\alpha} (fog)(a^p)].$$

Böylece $W_P{}'$ nin artanlığı da kullanılırsa teoremin son eşitsizliği elde edilir ve ispat $p > 0$ için tamamlanır. $p < 0$ için de benzer ispat metodu kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.1'de, $p = 1$ alınırsa konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1 : $f: [a, b] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in L[a, b]$ ve f konveks fonksiyon ise

$$W_1(t) = \frac{\propto}{2(b-a)^{\propto}} \int_a^b f\left[\left(tx + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right]\left[(b-x)^{\propto-1} + (x-a)^{\propto-1}\right] dx.$$

Ayrıca

$$f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = W_1(0) \le W_1(t) \le W_1(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right].$$

Uyarı 3.1: Sonuç 3.1' deki

$$f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right]$$

ifadesi Teorem 2.1.6' daki eşitsizliğin sol tarafı ile aynıdır.

Teorem 3.1'de $p = -1$ alınırsa harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2 : $f: [a, b] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in L[a, b]$ ve f konveks fonksiyon ise

$$W_{-1}(t) = \frac{\propto}{2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{\propto}} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \left[f\left(tx + (1-t)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)\right)^{-1}\right] \times \left[\left(x - \frac{1}{b}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{1}{a} - x\right)^{\propto-1}\right]$$

$$W_{-1}(t) = \frac{\propto}{2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{\propto}} \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \left[f\left(tx + (1-t)\left(\frac{a+b}{2ab}\right)\right)^{-1}\right]\left[\left(x - \frac{1}{b}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{1}{a} - x\right)^{\propto-1}\right] dx.$$

elde edilir.

Ayrıca

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = W_{-1}(0) \le W_{-1}(t) \le W_{-1}(1)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\propto}}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$

elde edilir. Burada $g(x) = \frac{1}{x}$ dir.

Uyarı 3.2: Sonuç 3.2' deki

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\propto}}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(fog)\left(\frac{1}{a}\right) + J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(fog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$

ifadesi Teorem 2.1.8' deki eşitsizliğin sol tarafı ile aynıdır.

Teorem 3.2 : $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in L[a,b]$ ve $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$' ye göre *p*- simetrik olsun. Eğer f *p*- konveks fonksiyon ise

$W_{p,w}(t)$

$$= \begin{cases} \dfrac{\propto}{2(b^p-a^p)^{\propto}}\displaystyle\int_{a^p}^{b^p}\left[f\left[\left(tx+(1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right](b^p-x)^{\propto-1}+(x-a^p)^{\propto-1}\right]w(x^{\frac{1}{p}})\,dx\,, p>0 \\ \dfrac{\propto}{2(a^p-b^p)^{\propto}}\displaystyle\int_{a^p}^{b^p} f\left[\left(tx+(1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right][(x-b^p)^{\propto-1}+(a^p-x)^{\propto-1}]w(x^{\frac{1}{p}})\,dx\,\;, p<0 \end{cases}$$

ile tanımlı $W_{p,w}: [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde konveks ve monoton artan olup,

i) $g(x) = x^{1/p}$,$\propto > 0$ için eğer $p > 0$ ise

$$f\left(\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)[J^{\alpha}_{a^p+}(wog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(wog)(a^p)] = W_{p,w}(0) \le W_{p,w}(t)$$

$$\le W_{p,w}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b^p-a^p)^{\alpha}}[J^{\alpha}_{a^p+}(fwog)(b^p) + J^{\alpha}_{b^p-}(fwog)(a^p)]$$

ii) $g(x) = x^{1/p}$, $\propto > 0$ için eğer $p < 0$ ise

$$f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)[J^{\alpha}_{b^p+}(wog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(wog)(b^p)] = W_{p,w}(0) \leq W_{p,w}(t)$$

$$\leq W_{p,w}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(a^p - b^p)^{\alpha}}[J^{\alpha}_{b^p+}(fwog)(a^p) + J^{\alpha}_{a^p-}(fwog)(b^p)]$$

dir.

İspat: İspat tamamen bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde yürütülmekte olup, öncelikle $p > 0$ için $W_{p,w}(t)$ nin [0,1] üzerinde konveks olduğunu gösterelim.

$\beta, t_1, t_2 \in [0,1]$ keyfi olsun.

Bu taktirde;

$$W_{p,w}(t)\big((1-\beta)t_1 + \beta t_2\big) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}}\int_{a^p}^{b^p} f\Big(\Big[\big((1-\beta)t_1 + \beta t_2\big)x$$

$$+[(1-\beta)(1-t_1) + \beta(1-t_2)]\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\Big]^{\frac{1}{p}}\Big)((b^p - x)^{\propto-1}$$

$$+ (x - a^p)^{\propto-1})w(x^{\frac{1}{p}})dx$$

$$= \frac{\propto p}{2(b^p - a^p)^{\propto}}\int_{a^p}^{b^p}[(b^p - x)^{\propto-1} + (x - a^p)^{\propto-1}]f\left([(1-\beta)\left[t_1 x + (1-t_1)\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\beta[t_2 x + (1-t_2)]\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\Bigg)w(x^{\frac{1}{p}})dx$$

yazılır.

$f: [a, b] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$ p- konveksliği kullanılırsa

$$W_{p,w}(t)\big((1-\beta)t_1+\beta t_2\big) \leq \frac{\propto}{2(b^p-a^p)^{\propto}}\int_{a^p}^{b^p}[(b^p-x^p)^{\propto-1}+(x^p-a^p)^{\propto-1}]$$

$$\times\left\{(1-\beta)f\left(\left(t_1x+(1-t_1)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right.$$

$$\left.+\beta f\left(\left(t_2x+(1-t_2)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right\}w(x^{\frac{1}{p}})dx$$

$$=(1-\beta)W_{p,w}(t_1)+\beta W_{P,w}(t_2)$$

olur.

Bu ise bize $W_{p,w}{}'$ nin $[0,1]$ üzerinde konveks olduğunu gösterir. $p<0$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

Şimdi ispatın devamı için;

$$W_{P,w}(t)=\frac{\propto}{2(b^p-a^p)^{\propto}}\int_{a^p}^{b^p} f\left[\left(tx+(1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\times[(b^p-x)^{\propto-1}+(x-a^p)^{\propto-1}]w(x^{\frac{1}{p}})dx$$

$$=\frac{\propto}{2(b^p-a^p)^{\propto}}\int_{a^p}^{\frac{a^p+b^p}{2}} f\left[\left(tx+(1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right][(b^p-x)^{\propto-1}$$

$$+(x-a^p)^{\propto-1}]\,w(x^{\frac{1}{p}})dx$$

$$+\frac{\propto}{2(b^p-a^p)^{\propto}}\int_{\frac{a^p+b^p}{2}}^{b^p} f\left[\left(tx+(1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\times[(b^p-x)^{\propto-1}+(x-a^p)^{\propto-1}]w(x^{\frac{1}{p}})dx.$$

Birinci integral için $u = 2\left(\frac{a^p+b^p}{2} - x\right)$ değişken değiştirmesi yapılırsa $dx = -\frac{du}{2}$ olup $x = \frac{a^p+b^p-u}{2}$ elde edilir. Benzer şekilde ikinci integral için

$u = 2\left(x - \frac{a^p+b^p}{2}\right)$ değişken değiştirmesi yapılırsa $dx = \frac{du}{2}$ olup $x = \frac{a^p+b^p+u}{2}$ elde edilir. Bu bilgiler yerine yazıldığı taktirde

$$W_{P,w}(t) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}} \int_0^{b^p-a^p} f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{tu}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left[\left(\frac{b^p - a^p + u}{2}\right)^{\propto-1}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{b^p - a^p - u}{2}\right)^{\propto-1}\right] w\left(\frac{a^p + b^p - u}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{du}{2}$$

$$+ \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}} \int_0^{b^p-a^p} f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} + \frac{tu}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\times \left[\left(\frac{b^p - a^p - u}{2}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{b^p - a^p + u}{2}\right)^{\propto-1}\right] w\left(\left(\frac{a^p + b^p + u}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\frac{du}{2}$$

Sonuç olarak, *w'* nın *p*-simetrik olması kullanıldığında

$$w\left(\left(\frac{a^p + b^p - u}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) = w\left(\left(\frac{a^p + b^p + u}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$W_{P,w}(t) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^{\propto}} \int_0^{b^p-a^p} \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right.$$

$$\left. +f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} + \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]\left[\left(\frac{b^p - a^p - x}{2}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{b^p - a^p + x}{2}\right)^{\propto-1}\right]$$

$$\times w\left(\left(\frac{a^p + b^p + x}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)dx$$

elde edilir.

Lemma 2.3.1' e göre $h(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2} + \frac{tx}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right]$ fonksiyonu $[0, b^p - a^p]$ aralığında artandır. $\left[\left(\frac{b^p-a^p-x}{2}\right)^{\propto-1} + \left(\frac{b^p-a^p+x}{2}\right)^{\propto-1}\right] w\left(\left(\frac{a^p+b^p+x}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ negatif değil dolayısıyla $W_{P,w}(t)$, $[0,1]$ aralığında artandır. $W_{P,w}(t)$ nin artanlığını da kullanarak teoremin son eşitsizliğini gösterelim.

$$W_{P,w}(0) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{a^p}^{b^p} f\left[\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right] [(b^p - x)^{\propto-1} + (x - a^p)^{\propto-1}] w(x^{\frac{1}{p}})\, dx$$

$$W_{P,w}(0) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} f\left[\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\int_{a^p}^{b^p} (b^p - x)^{\propto-1}(wog)(x)dx + \int_{a^p}^{b^p} (x - a^p)^{\propto-1}(wog)(x)dx\right]$$

Burada sağ ve sol kesirli integral tanımları kullanılırsa

$$W_{P,w}(0) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b^p - a^p)^\propto} f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) [J_{a^p+}^{\alpha}(wog)(b^p) + J_{b^p-}^{\alpha}(wog)(a^p)]$$

elde edilir. Daha sonra, $p > 0$ için

$$W_{P,w}(1) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{a^p}^{b^p} f\left(x^{\frac{1}{p}}\right) [(b^p - x)^{\propto-1} + (x - a^p)^{\propto-1}]\, w\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$W_{P,w}(1) = \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{a^p}^{b^p} [(b^p - x)^{\propto-1}] f\left(x^{\frac{1}{p}}\right) w\left(x^{\frac{1}{p}}\right) + \frac{\propto}{2(b^p - a^p)^\propto} \int_{a^p}^{b^p} [(x - a^p)^{\propto-1}] f\left(x^{\frac{1}{p}}\right) w\left(x^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$W_{P,w}(1) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(b^p - a^p)^\alpha} [J_{a^p+}^{\alpha}(fwog)(b^p) + J_{b^p-}^{\alpha}(fwog)(a^p)]$$

olur.

Böylece $W_{P,w}$ nin artanlığı da kullanılırsa teoremin son eşitsizliği elde edilir ve ispat $p > 0$ için tamamlanır. $p < 0$ için de benzer ispat metodu kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.2' de $p = 1$ alınırsa konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3 : $f: [a, b] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in L[a, b]$ ve $w: [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik olsun. Eğer f konveks fonksiyon ise

$$W_{1,w}(t) = \frac{\propto}{2(b-a)^{\propto}} \int_a^b f\left[\left(tx + (1-t)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\right][(b-x)^{\propto-1} + (x-a)^{\propto-1}]w(x)\,dx$$

ile tanımlı $W_{1,w}: [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde konveks ve monoton artan olup,

$g(x) = x$ ve $\propto > 0$ için

$$f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)[J_{a+}^{\alpha} w(b) + J_{b-}^{\alpha} w(a)] = W_{1,w}(0) \leq W_{1,w}(t) \leq W_{1,w}(1)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}(fw)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fw)(a)]$$

Uyarı 3.3 : Sonuç 3.3' deki

$$f\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)[J_{a+}^{\alpha} w(b) + J_{b-}^{\alpha} w(a)] \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}[J_{a+}^{\alpha}(fw)(b) + J_{b-}^{\alpha}(fw)(a)]$$

ifadesi Teorem 2.1.7' nin sol tarafı ile örtüşmektedir.

Teorem 3.2' de $p = -1$ alınırsa harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.4 : $f: [a, b] \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in L[a, b]$ ve $w: [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$' ye göre simetrik olsun. Eğer f konveks fonksiyon ise

$$W_{-1,w}(t)=\frac{\propto}{2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}}\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} f\left[\left(tx+(1-t)\left(\frac{a+b}{2ab}\right)\right)^{-1}\right]\left[\left(x-\frac{1}{b}\right)^{\propto-1}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{a}-x\right)^{\propto-1}\right]w(x^{-1})\,dx$$

ile tanımlı $W_{-1,w}\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde konveks ve monoton artan olup,

$g(x)=x^{-1}$ ve $\propto>0$ için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(wog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(wog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]=W_{-1,w}(0)\le W_{-1,w}(t)\le W_{-1,w}(1)$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(fwog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(fwog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$

Uyarı 3.4 : Sonuç 3.4' teki

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(wog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(wog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$
$$\le\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\frac{1}{b}+}(fwog)\left(\frac{1}{a}\right)+J^{\alpha}_{\frac{1}{a}-}(fwog)\left(\frac{1}{b}\right)\right]$$

ifadesi Teorem 2.1.9' daki eşitsizliğin sol tarafı ile örtüşmektedir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen sonuçların bazıları, daha önce literatürde elde edilmiş olup, burada farklı bir çözüm tekniği kullanılmıştır. Bunun için öncelikle birer fonksiyonel tanımlanıp bu fonksiyonellerin bir takım özellikleri sağladığı gösterilmiştir. Bu özelliklerin bir sonucu olarak ta p-konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilmiş Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliklerinin sol tarafları fonksiyonellerin sağladığı özelliklerin bir sonucu olarak elde edilmiştir. Bu tezde Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliklerinin sadece sol tarafları çalışılmıştır. Ancak özellikle belirtmek isteriz ki bu çalışma bu eşitsizliklerin sağ taraflarına da uygulanabileceği gibi farklı türden konvekslik çeşitleri için de yapılabilir. Elde edilen araştırma bulguları orijinal olup, yayınlanmak üzere alan indeksli dergiye makale olarak gönderilecektir.

KAYNAKLAR

1. Hardy, G., Littlewood, J.E. ve Polya, G. 1952. *Inequalities*. 2 nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
2. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. ve Fink, A.M. 1991. *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives ,* Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
3. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. ve Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 740 pp, Dordrecht/Boston/London.
4. Pachpatte, B.G. 2005. *Mathematical Inequalities*. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
5. Niculescu, C.P. ve Persson, L.E. 2006. *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, Springer Science+Business Media, Inc.
6. Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. ve Presson, L.E. 1995 . "Some Inequalities of Hadamard Type", *Soochow J. Of Math*., 21, 335-341.
7. Gill, P.M., Pearce, C.E.M. ve Pecaric, J.E. 1997. "Hadamard's Inequalities for r-convex Functions", *J. Math. Anal. Appl.*, 215, 461-470.
8. Pearce, C.E.M. ve Rubinov, A.M. 1999. "P-functions, quasiconvex functions and Hadamard-type inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 240, 92-104.
9. Zhang, K.S. ve Wan, S. 2007. p-convex functions and their properties, *Pure Appl. Math. 23 (1)* ,130-133.
10. İşcan, İ. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex funtions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*,Volume 43 (6), 935-942.
11. Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H. ve Başak, N. 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals an related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, 57 (9) , 2403-2407.

12. İşcan, İ. 2015. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, vol 60, no 3, 355-366.
13. İşcan, İ., Kunt, M. 2015. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, *RGMIA*, 18 .Article 107, 16 pp.
14. Kunt, M., İşcan, İ. 2016. Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for p-convex funtions via fractional integrals, *Communication in Mathematical Modelingand Applications*, CMMA 2, No . , 1-15.
15. Barry Simon. 2011. *Convexity : An Analytic Viewpoint* , pp. 1,2,5,6 , Published in the United States of Americaby Cambridge University Press New York.
16. Hadamard, J.1893. Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en paticular d' une fonction consideree par Riemann, *J. math. Pures Appl.*, 171-215.
17. Hermite, Ch. 1883. Sur deux limites d' une integrale, *Mathesis*, 3, 82-83.
18. Fejér, L. 1906. Uber die Fourierreihen, 2, *Math. Natuwise. Anz Ungar .Akad.,* Wiss, 24, 369-390.
19. Chen, F. ve Wu, S. 2014. Fejér and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex funtions, *Journal of applied Mathematics*, volume (2014) , Article ID: 386806.
20. İşcan, İ,. 2016. Ostrowski type inequalities for p-convex funtions , *New Trends in Mathematical Sciens.*
21. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. ve Trujillo, J.J. 2006. *Theory and applications of fractional differential equations.* Elsevier, Amsterdam .
22. İşcan, İ., Wu S. 2014. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions via fractional integrals, *Appl. Math. Comput*, 237-244.
23. Xianf, Ruiyin. 2015. Refinements of Hermite-Hadamard Type İnequalities for Convex Functions Via Fractional Integrals, *J. Appl. Math. Informatics.* Vol. 33 , No. 1-2, pp.119-125.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Giresun'da doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Giresun'da tamamlayarak, 2009 yılında Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2013 yılında bu bölümü bitirdi. 2014 yılında Atatürk Üniversitesi'nde Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans programına başladı.