GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIPSCHITZ FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Cuma ALTUNSOY
20152110005

Ocak 2018

GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIPSCHITZ FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CUMA ALTUNSOY

Enstitü Anabilim Dalı : FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu tez 22/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.Erhan SET	**Prof. Dr. Mahir KADAKAL**	**Doç. Dr. İmdat İŞCAN**
....	....	....
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

Doç. Dr. Bahadır KOZ
....
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversitede veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Cuma ALTUNSOY
22.01.2018

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana karşılaştığım her zorluğun üstesinden gelmemde yardımcı ve sabırla her zaman yol gösterici olan çok değerli tez danışman hocam sayın Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a samimi duygularımla teşekkür ederim.

Ayrıca daima yanımda olan ve benden hiçbir fedakârlığı esirgemeyen her fırsatta destek olan değerli eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
I	: $\mathbb{R}$ de bir aralık
I°	: I nın içi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$L[a,b]$	: $[a,b]$aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
β	: Beta Fonksiyonu
Γ	: Gamma Fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

LIPSCHITZ FONKSİYONLAR İÇİN HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

ÖZET

Bu tez çalışması p-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan bazı eşitsizliklerin Lipschitz fonksiyonları için elde edilmesi ile ilgilidir. Bu tezde, öncelikle Lipschitz şartı, konveks, p-konveks, p-konkav, harmonik konkav, harmonik konveks fonksiyonlarla ilgili bazı temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra, p-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş bazı eşitsizlikler ve Hadamard eşitsizliğinin Lipschitz eşlemeleri için eşitsizlikleri ve uygulamaları verildikten sonra, tezin araştırma bulguları kısmında p-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş eşitsizliklerden, türevlenebilir Lipschitz fonksiyonları için yeni eşitsizlikler elde edildi.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, p-Konveks Fonksiyon, Lipschitz Fonksiyonu

HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR LIPSCHITZIAN FUNCTIONS

ABSTRACT

This thesis is about getting some inequalities for lipschitz functions that are obtained for p-convex functions inequalities. At first, some basic definitions and theorems of the condition of Lipschitz, convex, p-convex, p-concave, concave-harmonic, harmonic convex functions are given. Then, some inequalities for p-convex functions and Hadamard's inequalities for lipschitz mappings and applications are given. Finally, we have new inequalities for differentiable lipschitz functions by means of inequalities which are used for p-convex functions.

Key Words: Convex function, p-Convex function, Lipschitzian function

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematikte 'eşitsizlik' kelimesi iki farklı miktar arasında farklılığı ifade eder ve bu iki miktar arasında oran kurmak için kullanılır. Modern matematikte eşitsizlik her alanda önemli bir rol oynamaktadır.

Eşitsizlikler alanında Hermite' in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Analitik eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve birçok uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Eşitsizlikler ile ilgili çalışmaların son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanındaki uygulamalara nasıl büyük bir katkı sağladığı açıkça ortadadır. Örneğin; Hadamard, Chebyshev, Ostrowski, Grüss, Jensen ve Trapezoidal eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde önemli bir yere sahiptir.

Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından 1934'te yazılan "Inequalities" adlı kitap eşitsizlik teorisini konu alan ilk temel çalışmadır [1]. Bu kitapta konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikler, problemler ve ispat yöntemleri bulunabilir. İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır [2]. Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder [3]. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır [4]. Bu temel kaynaklara ek olarak "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" [5], "Classicaland New Inequalities in Analysis" [6], "Mathematical Inequalities" [7] ve "Convex Functions and Their Applications" [8] literatürde var olan diğer kaynaklardır.

Eşitsizlikler alanının gelişmesinde önemli bir yeri olan kavramlardan bir tanesi de konveks fonksiyonlardır. Konvekslik kavramının geçmişi Archimedes'in ünlü π (pi) sayısı hesabına kadar gitmesine rağmen ilk kez Charles Hermite'in 1881 yılında Mathesis 3 (1883, s.82) dergisine gönderdiği mektupta şu şekilde rastlanır.

Sur deux d'une integrale définie. Soit f(x) une fonction qui varie toujours dans le meme sens de x= a; áx=b; On aura les relation

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)\,dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivantque la courbe $y = f(x)$ *tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abcisses.'*

İlerleyen yıllarda Fejér (1880-1959) Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmiş halini sunmuştur.

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan bilinen basit bir kavramdır. Bununla birlikte matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun yayınlanması ile ortaya çıkmıştır.

Aslında biz konveksliği sürekli olarak ve birçok yolla yaşamaktayız. Ayakta duruş pozisyonumuz, ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içinde ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi korumaktadır. Bu kavram fizik, endüstri, tıp, mühendislik, veri analizi, bankacılık, sanat gibi bilim dallarının nümerik uygulamalarında da kullanılmaktadır. Öyle ki bu tür fonksiyonlar kaynakların dağılımının optimumlaştırılması problemlerinin çözümü ve şans oyunlarının dengesinin sağlanmasında dahi kullanılmaktadır.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler? "sorusu için 1978 yılında Richard Bellman tarafından şöyle bir cevap verilmiştir: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir.

Estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Son yıllarda konveks fonksiyonların birçok farklı versiyonları tanımlanmıştır. Bunlardan bir tanesi de p-konveksliğin genelleştirmesi olan (p, h)-konvekslik kavramı olup, bu konvekslik yardımıyla Literatürde yeni integral eşitsizlikleri Fang, Shi, Noor ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir. [9,10, 11].

p-konveksliğin tanımının farklı bir versiyonu İşcan tarafından verilmiş olup bu tanım ile ilgili Ostrowski, Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler İşcan ve Kunt tarafından çalışılmıştır [12], [13].

Tezimizin ana fikri olan aşağıdaki Lipschitz şartını kullandık.

$f: S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu S'de Lipschitz şartını sağlıyor denir. [14]. Bu tezin amacı [15] de İşcan tarafından verilen p-konveks fonksiyonlar için elde edilen sonuçların yeni versiyonlarını Lipschitz fonksiyonlarını [14] kullanarak elde etmektir.

Bu çalışmanın önemli bir yanı daha önce yapılan çalışmaların genellemesi olup özel durumlarda literatürde konveks fonksiyonlarla ilgili daha önce elde edilen çalışmalara inmektedir. Bir diğer önemi de özel durumlarda p-konveks fonksiyonlar için yeni sonuçlar elde edilir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Konveks ve Konkav Fonksiyon

Tanım 2.1.1. I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall$ x,y $\in I$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir . Eğer eşitsizliği $x \neq y$ ve $t \in [0,1]$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [16].

Eğer $t \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartında " $\le$ " yerine " $<$ " gelir, yani;

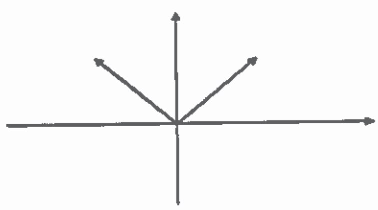
$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks denir.

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

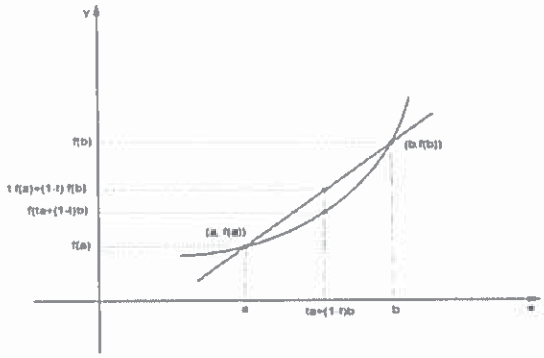
eşitsizliğinin tersi alınırsa, f fonksiyonuna $I \neq \emptyset$ için konkavdır, denir. Bu tanım literatürde iyi bilinmektedir.

Örnek 2.1.1. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.1.1. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Konveks fonksiyonun geometrik yorumu aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.1.2. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak; f fonksiyonunun $ta + (1 - t)b$ noktasında almış olduğu değer, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının aynı noktada almış olduğu değerden her zaman daha küçüktür. Yani bu iki noktayı birleştiren kiriş her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerindedir. Konkav fonksiyon için kiriş eğrinin$[a, b]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir f konveks fonksiyonu için

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}, a, b \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

eşitsizliği tüm $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonları için literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlik ilk olarak 1881'de Hermite tarafından bulunmuştur. Fakat bu sonuçtan matematik literatüründe hiçbir yerde bahsedilmemiştir ve Hermite'in sonucu olarak bilinmemiştir. Konveks fonksiyonların tarihi ve teorisi üzerine uzman Beckenbach, bu eşitsizliğin 1893'te Hadamard tarafından ispatlandığını yazmıştır. Böylece (2.1) eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinmektedir.

2.2. Harmonik Konveks ve Harmonik Konkav Fonksiyon

[17] de İşcan, harmonik konveks ve konkav fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

Tanım 2.2.1. $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ reel bir aralık olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizliğin karşıtı sağlanıyorsa f nin harmonik konkav olduğu söylenir.

Örnek 2.2.1. $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ve $g: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ olsun. f fonksiyonu harmonik konveks fonksiyon ve g harmonik konkav fonksiyondur.

Önerme 2.2.1. $f: I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu taktirde;

i. $I \subset (0,\infty)$, f fonksiyonu konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f harmonik konvekstir.

ii. $I \subset (0,\infty)$, f fonksiyonu harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f konvekstir.

iii. $I \subset (-\infty, 0)$, f fonksiyonu harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise f konvekstir.

iv. $I \subset (-\infty, 0)$, f fonksiyonu konveks ve artmayan bir fonksiyon ise f harmonik konvekstir.

Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini aşağıdaki gibi verebiliriz:

Teorem 2.2.1. $f: I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $f \in L[a,b]$ ise

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3}$$

eşitsizliği geçerlidir [17].

İspat: $f: I \to \mathbb{R}$ ye harmonik konveks fonksiyon ise her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte keyfi $t \in [0,1]$ için,

$$x = \frac{ab}{ta + (1-t)b}, \qquad y = \frac{ab}{tb + (1-t)a}$$

seçersek

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son eşitsizliğin her iki tarafının, t ye göre $[0,1]$üzerinden integralini alırsak,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt + \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt\right] \quad (2.4)$$

eşitsizliğini elde edilir . İntegrallerin her biri

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$$

değerine eşit olduğundan, eşitsizlik (2.3)'ün sol tarafını (2.4)' ten elde ederiz. (2.2) eşitsizliği kullanılarak, $x = a,\ y = b$ ve t ye göre $[0,1]$ aralığında integral alınırsa ikinci eşitsizliğin ispatını yapmış oluruz.

Şimdi de $f\colon(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylelikle her $x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1$$

elde edilir. Bu yüzden $(0,\infty)$ üzerinde f fonksiyonu harmonik konvekstir. Böylelikle

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = 1, \qquad \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx = 1, \qquad \frac{f(a)+f(b)}{2} = 1$$

olduğundan (2.3) te eşitlik olduğu açıkça görülür.

2.3. p-konveks Fonksiyonlar

Zhang ve Wan tarafından p-konveks fonksiyon tanımı [18] de aşağıdaki gibi verilmiştir:

Tanım 2.3.1. I aralığı p −konveks küme ve $f\colon I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}}\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa "f ye p −konveks fonksiyon ya da $PC(I)$ sınıfına ait" denir.

Uyarı 2.3.1. $p = 2k + 1$, $p = \frac{n}{m}$, $n = 2r + 1$, $m = 2t + 1$ ve $k, r, t \in N$ olmak üzere, $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \in I$ ise I aralığına p −konveks küme denir [18].

Uyarı 2.3.2. $I \subset (0, \infty)$ reel aralığı ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ise her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \in I$$

olur.

Yukarıdaki uyarı dikkate alındığında, İşcan tarafından [12] de p −konveks fonksiyon için aşağıdaki gibi bir tanım verilmiştir:

Tanım 2.3.2. $I \subset (0, \infty)$ bir reel aralık ve $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}}\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f ye p −konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.3.1.'de $I \subset (0, \infty)$, $p = 1$ ve $p = -1$ alınırsa, p-konveksliğin sırasıyla konvekslik ve harmonik konveksliğe indirgendiği kolayca görülebilir.

Birçok matematikçi, son yıllarda (örneğin bakınız [10],[15],[18],[20],[21],[22] ve kaynakları) harmonik konveks ve p-konveks fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikler konusunda bir takım çalışmalar yapmışlardır.

Örnek 2.3.1. $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, $p \neq 0$ ve $g: (0, \infty) \to R$, $g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f ve g hem p −konveks hem de p −konkav fonksiyondur.

[9] da $I \subset (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(t) = t$ ve $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ alınırsa aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.3.1. $p \in \mathbb{R}/\{0\}$, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, $f: I\ (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ye p −konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde, $f \in L[a, b]$ için,

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.5)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Uyarı 2.3.3. (2.5) de ki eşitsizliğin kesin olduğu açıktır. Gerçekten $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Böylelikle her $x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla f fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde p −konvekstir. Ayrıca

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) = 1, \qquad \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx = 1\,, \qquad \frac{f(a)+f(b)}{2} = 1$$

değerleri (2.5) eşitsizliğinde eşitlik olduğunu açık bir şekilde gösterir.

Önerme 2.3.1. $I \subset (0,\infty)$bir reel aralık, $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. Buna göre aşağıdaki sonuçları elde ederiz [12]:

(1) $p \leq 1$ için f, konveks ve azalmayan fonksiyon ise f, p −konvekstir.

(2) $p \geq 1$ için f, p −konveks ve azalmayan fonksiyon ise f, konvekstir.

(3) $p \leq 1$ için f, p −konkav ve azalmayan fonksiyon ise f, konkavdır.

(4) $p \geq 1$ için f, konkav ve azalmayan fonksiyon ise f, p −konkavdır.

(5) $p \geq 1$ için f, konveks ve artmayan fonksiyon ise f, p −konvekstir.

(6) $p \leq 1$ için f, p − konveks ve artmayan fonksiyon ise f, konvekstir.

(7) $p \geq 1$ için f, p −konkav ve artmayan fonksiyon ise f, konkavdır.

(8) $p \leq 1$ için f, konkav ve artmayan fonksiyon ise f, p −konkavdır.

İspat: $(0,\infty)$ aralığında tanımlı $g(x) = x^p$ fonksiyonu, $p \in (-\infty, 0) \cup [1,\infty)$ için bir konveks fonksiyon ve $g(x) = x^p$, $p \in (0,1]$ için bir konkav fonksiyondur. Gerçekten; $\forall x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliklerden bu durum kolayca elde edilir.

$$[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \geq tx + (1-t)y, \quad p \geq 1,$$

ve

$$[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \le tx + (1-t)y, \quad p \le 1.$$

Yukarıdaki önermeye göre p −konveks ve p −konkav fonksiyonlar için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.3.2. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ olsun. f fonksiyonu $p \le 1$ için p −konveks fonksiyon ve $p \ge 1$ için p −konkav fonksiyon olur.

Örnek 2.3.3. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-p}$, $p \ge 1$ için f fonksiyonu p −konkav fonksiyon olur.

Örnek 2.3.4. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$ ve $p \ge 1$ için f fonksiyonu p −konveks fonksiyon olur.

Örnek 2.3.5. $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ve $p \ge 1$ için f fonksiyonu p −konkav fonksiyon olur.

Aşağıdaki önermenin ispatı açık bir şekilde görülür.

Önerme 2.3.2. $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $g: [a^p, b^p] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ için $g(t) = f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ şeklinde tanımlanırsa; f, $[a,b]$ üzerinde p −konvekstir ancak ve ancak g, $[a^p, b^p]$ üzerinde $p > 0$ için ($ya\ da$ $[b^p, a^p]$ üzerinde $p < 0$) konvekstir [12].

Uyarı 2.3.4. Eğer f, $[a,b]$ üzerinde p −konveks ise$g(x) = f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)$ konveks bir fonksiyon olup, bu fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğini $[a^p, b^p]$ üzerinde aşağıdaki gibi yazarız:

$$g\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right) \le \frac{1}{b^p - a^p}\int_{a^p}^{b^p} g(t)dt \le \frac{g(a^p) + g(b^p)}{2}$$

Bu ise

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \le \frac{1}{b^p-a^p}\int_{a^p}^{b^p} f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.6)$$

eşitsizliğine eşdeğerdir. Burada $x = t^{\frac{1}{p}}$ değişken değiştirmesi kullanılarak,

$$\int_{a^p}^{b^p} f\left(t^{\frac{1}{p}}\right)dt = p\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

ve (2.6) eşitsizliği ile birlikte (2.5) eşitsizliğini elde ederiz.

2.4. Lipschitz Fonksiyonu

Tanım 2.4.1. $[a,b]$ kapalı aralığında verilen her x,y noktaları için

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$$

şartını sağlayan bir $M \ge 0$ sabiti varsa f, $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlıyor denir.

Teorem 2.4.1. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise , I^0 ' deki kapalı herhangi $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlar [23].

İspat: $a-\varepsilon$ ve $a+\varepsilon$, I kümesinin içinde olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. m ve M sırasıyla f' nin $[a-\varepsilon,\ a+\varepsilon]$ aralığında alt ve üst sınırları olsun. Bu durumda eğer x ve y , $[a,b]$ aralığının ayrık iki noktası olup

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y-x|}(y-x), \qquad \lambda = \frac{|y-x|}{\varepsilon+|y-x|}$$

olarak seçilirse

$$z \in [a-\varepsilon,\ a+\varepsilon], \quad y = \lambda z + (1-\lambda)x$$

yazabiliriz. Buradan

$$f(y) \le \lambda f(z) + (1-\lambda)f(x) = \lambda[f(z)-f(x)] + f(x)$$

olur. $K = \frac{M-m}{\varepsilon}$ olarak alınırsa

$$f(y) - f(x) \le \lambda(M-m) < \frac{|y-x|}{\varepsilon}(M-m) = K|y-x|$$

elde edilir. O halde herhangi bir $x\,,y \in [a,b]$ için

$$|f(x)-f(y)| \le K|y-x|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ispatı tamamlar.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Lipschitz ve Konveks Fonksiyonlarla İlgili Literatürde Bulunan Bazı Sonuçlar

Bu bölümde materyal ve yöntem olarak yararlandığımız Dragomir ve arkadaşlarının 'Inequalities of Hadamard's Type for Lipschitzian Mapping and Their Applications' adlı çalışmalarındaki elde ettikleri sonuçları derledik [24].

Teorem 3.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir Lipschitz fonksiyon $a,b \in I$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)}{4} \tag{3.1}$$

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)}{3} \tag{3.2}$$

İspat: f, Lipschitz fonksiyon olduğundan her $t \in [0,1]$ ve $a,b \in I$ için

$$\begin{aligned} &|tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta+(1-t)b)| \\ &\quad = \left|t\big(f(a) - f(ta+(1-t)b)\big) + (1-t)\big(f(b) - f(ta+(1-t)b)\big)\right| \\ &\quad \leq t|f(a) - f(ta+(1-t)b)| + (1-t)|f(b) - f(ta+(1-t)b)| \\ &\quad \leq tM|a - (ta+(1-t)b)| + (1-t)M|b - (ta+(1-t)b)| \\ &\quad = 2t(1-t)M|b-a| \end{aligned} \tag{3.3}$$

olur. Eğer $t = \frac{1}{2}$ seçersek;

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{M}{2}|b-a|$$

yazabiliriz. Burada sırasıyla a yerine $ta+(1-t)b$ ve b yerine de $(1-t)a+tb$ koyarsak;

$$\left| \frac{f(ta+(1-t)b) + f\big((1-t)a+tb\big)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{M|2t-1|}{2}|b-a|$$

elde ederiz. Eşitsizliğin her iki tarafının t değişkenine göre [0,1] aralığında integralini alınırsa;

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt+\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,dt\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{M|b-a|}{2}\int_0^1 |2t-1|dt$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt=\int_0^1 f\big((1-t)a+tb\big)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ve

$$\int_0^1 |2t-1|dt=\frac{1}{2}$$

değerleri bulunur. Bu değerler yukarıdaki eşitsizlikte yerlerine konulursa;

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{M(b-a)}{4}$$

bulunur. Böylece (3.1) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Şimdi, $a,b\in I$, $a<b$ ve $t\in[0,1]$ olmak üzere, (3.3) eşitsizliğinden

$$|tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b)|\leq 2t(1-t)M(b-a)$$

olup, bu eşitsizlikte t değişkenine göre [0,1] aralığında integral alırsak;

$$\left|f(a)\int_0^1 t\,dt+f(b)\int_0^1 (1-t)\,dt-\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\leq 2M(b-a)\int_0^1 t(1-t)dt$$

yazılabilir. Buradan;

$$\int_0^1 tdt=\int_0^1 (1-t)dt=\frac{1}{2}\,,\qquad \int_0^1 t(1-t)dt=\frac{1}{6}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{M(b-a)}{3}$$

elde edilir. Böylece (3.2) eşitsizliği ispatlanmış olur ve teoremin ispatı tamamlanır.

Sonuç 3.1.1. $I \subset (0,\infty)$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir konveks bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$ *ve* $M=: sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ olsun. Bu takdirde Hermite-Hadamart eşitsizliğini p-konveks fonksiyonlar için kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M}{4}(b-a) \tag{3.4}$$

ve

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{M}{3}(b-a). \tag{3.5}$$

İspat: Lagrange's teoremine göre, $\forall x, y \in (a,b)$ için

$$|f(x)-f(y)| = |x-y||f'(c)| \leq M|x-y|$$

olacak şekilde x ile y arasında bir c sabitinin olduğu biliniyor. Teorem 3.1.1 ve Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin sonucu olarak istenilen eşitsizlikler kolayca elce edilir.

Teorem 3.1.2. $I \subset (0,\infty)$ bir aralık, $f: I \to \mathbb{R}$ bir M-lipschitz fonksiyon, $a < b$ olan $a, b \in I$ için $[0,1]$ aralığında;

$$H(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

şeklinde tanımlanan H bir $\frac{M(b-a)}{4}$ -Lipschitzian fonksiyonudur.

İspat: $t_1, t_2 \in [0,1]$ olmak üzere

$|H(t_2) - H(t_1)|$

$$= \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right)dx - \int_a^b f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right) - f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)\right|dx$$

$$\leq \frac{M}{b-a}\int_a^b \left|t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2} - t_1x - (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right|dx$$

$$= \frac{M|t_2 - t_1|}{b-a}\int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right|dx = \frac{M(b-a)}{4}|t_2 - t_1|;$$

elde ederiz. $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ için;

$$|H(t_2) - H(t_1)| \leq \frac{M(b-a)}{4}|t_2 - t_1|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu da bize $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde H nınbir $\frac{M(b-a)}{4}$ - Lipschitz fonksiyonunu olduğunu gösterir.

Yukarıdaki eşitsizlikte, $t_1 = 0$ ve $t_2 = t$ alınırsa;

$$\left|H(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{Mt(b-a)}{4}$$

ve $t_1 = 1$ ve $t_2 = t$ alınırsa

$$\left|H(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{M(1-t)(b-a)}{4}$$

bulunur.

Teorem 3.1.3. $I \subset (0,\infty)$ bir aralık , $f: I \to \mathbb{R}$ bir M-lipschitz fonksiyon, $a < b$ olan her $a, b \in I$ ve $\forall t \in [0,1]$ için;

$$\left|\frac{f\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) + f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{2} - H(t)\right| \leq \frac{Mt}{3}(b-a) \quad (3.6)$$

dir.

İspat: $u = tb + (1-t)\frac{a+b}{2}$, $v = ta + (1-t)\frac{a+b}{2}$ alalım. Bu durumda

$$H(t) = \frac{1}{u-v}\int_u^v f(z)\,dz$$

olur. (3.2) eşitsizliğinde u ve v değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\left|\frac{f(u)+f(v)}{2} - \frac{1}{u-v}\int_v^u f(z)dz\right| \leq \frac{M(u-v)}{3}$$

eşitsizliğinden (3.6) eşitsizliğini elde ederiz.

Yukarıdaki iki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.4. $I \subset (0,\infty)$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir konveks bir fonksiyon $\forall t \in [0,1]$, $a, b \in I, a < b$ ve M=: $sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ olsun. Bu takdirde

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - H(t) \leq \frac{M(1-t)}{4}(b-a) \tag{3.7}$$

$$0 \leq H(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{Mt}{4}(b-a) \tag{3.8}$$

$$0 \leq \frac{f\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) + f\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{2} - H(t) \leq \frac{Mt}{3}(b-a) \tag{3.9}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

3.2. Bazı Tanım ve Yardımcı Teoremler

Tanım 3.2.1. (Hipergeometrik Fonksiyon) ${}_2F_1\ (a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2F_1\ (a,b;c;z) = \frac{1}{\beta(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\,(1-zt)^{-a}dt, c > b > 0, |z| < 1$$

şeklinde integral gösterimi ile tanımlanır [19].

Tanım 3.2.2. (Beta fonksiyonu) $m, n > 0$ için,

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

biçiminde tanımlanan iki değişkenli fonksiyona Beta fonksiyonu denir [19].

Lemma 3.2.1. $0 \leq x < y$ olsun. Bu takdirde $0 < \alpha \leq 1$ iken

$$|y^\alpha - x^\alpha| \leq |y - x|^\alpha$$

dır.

İspat: $0 \leq x < y$ olsun.

$$y^\alpha - x^\alpha \leq (y - x)^\alpha$$

olduğunu gösterelim.

i) $x = 0$ için eşitsizlik sağlanır.

ii) $x \neq 0$ olsun. $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(u) = (u-1)^\alpha - u^\alpha + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda f , $[1, \infty)$ da sürekli ve $(1, \infty)$ da türevlenebilir olup;

$$f'(u) = \alpha(u-1)^{\alpha-1} - \alpha u^{\alpha-1} = [(u-1)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}]$$
$$= \alpha u^{\alpha-1}\left[\left(1 - \frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} - 1\right] \geq 0$$

olacağından. f fonksiyonu $(1, \infty)$ da artandır. O halde $\forall u \in [1, \infty)$ için $f(u) \geq f(1)$ eşitsizliğinden;

$$(u-1)^\alpha - u^\alpha + 1 \geq 0$$

yazılabilir. Buradan $u^\alpha - 1 \leq (u-1)^\alpha$ bulunur. Bu eşitsizlikte, $u = \frac{y}{x}, (0 < x < y)$ alınırsa

$$-1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha \leq \left(\frac{y}{x} - 1\right)^\alpha$$

eşitsizliği yazılabilir. Bundan yaralanarak $-x^\alpha + y^\alpha \leq (y - x)^\alpha$ ve sonrasında

$$y^\alpha - x^\alpha \leq (y - x)^\alpha \implies |y^\alpha - x^\alpha| \leq |y - x|^\alpha$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.2.2. $0 < x < y$ olsun. Bu takdirde $\alpha < 0$ iken

$$|y^{\alpha} - x^{\alpha}| \leq |y - x|(-\alpha)x^{\alpha-1}$$

dır.

İspat: $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(u) = u^{\alpha}, \alpha < 0$$

fonksiyonu $0 < x < y$ için $[x, y]$ aralığında sürekli ve (x, y) aralığında türevlenebilir olup ortalama değer teoremine göre;

$\exists\, c \in (x, y)$ için

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$$

$$y^{\alpha} - x^{\alpha} = (y - x)\, \alpha\, c^{\alpha-1}$$

yazılabilir. $0 < x < c < y$ ve $\alpha - 1 < -1$ olduğundan

$$y^{\alpha-1} < c^{\alpha-1} < x^{\alpha-1} \implies (-\alpha)y^{\alpha-1} < (-\alpha)\, c^{\alpha-1} < (-\alpha)\, x^{\alpha-1}$$

yazılır. Buradan da

$$|y^{\alpha} - x^{\alpha}| = x^{\alpha} - y^{\alpha} = (y - x)(-\alpha)\, c^{\alpha-1} < (y - x)(-\alpha)\, x^{\alpha-1}$$
$$= |y - x|(-\alpha)\, x^{\alpha-1}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.3. $0 < x < y$ olsun. Bu takdirde $\alpha \geq 1$ iken

$$|y^{\alpha} - x^{\alpha}| \leq |y - x|\alpha\, y^{\alpha-1}$$

dır.

İspat: $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(u) = u^{\alpha}, \quad \alpha \geq 0$$

fonksiyonu $0 < x < y$ için $[x, y]$ aralığında sürekli ve (x, y) aralığında türevlenebilir olup ortalama değer teoremine göre;

$\exists\, c \in (x, y)$ için,

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$$
$$y^{\alpha} - x^{\alpha} = (y - x)\,\alpha\, c^{\alpha-1}$$

yazılabilir. $0 < x < c < y$ ve $\alpha - 1 \geq 0$ olduğundan

$$x^{\alpha-1} < c^{\alpha-1} < y^{\alpha-1} \Longrightarrow \alpha\, x^{\alpha-1} < \alpha\, c^{\alpha-1} < \alpha\, y^{\alpha-1}$$

eşitsizliği yazılabileceğinden

$$|y^{\alpha} - x^{\alpha}| = x^{\alpha} - y^{\alpha} = (y - x)\alpha\, c^{\alpha-1} < (y - x)\alpha x^{\alpha-1} = |y - x|\alpha x^{\alpha-1}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.4. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon , $a, b \in I$ $a < b$ ve M=: $sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ olsun. Bu takdirde f fonksiyonu M Lipschitz fonksiyonudur.

İspat: Lemmanın ispatı ortalama değer teoreminden açıktır. Gerçekten, $\forall x, y \in (a, b)$ için

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|.|f'(c)| \leq M.|x - y|$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ mevcuttur. Bu da f fonksiyonunun M-Lipschitzian olduğunu gösterir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde araştırma sonuçlarını bulmak için bölüm 3 te verdiğimiz lemmaları kullanacağız.

Teorem 4.1. $I \subset (0,\infty)$ bir aralık, $f: I \to \mathbb{R}$ bir M-Lipschitz fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun.

a) $p \geq 1$ için;

$$i)\ \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right| \leq 2\mathrm{M}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)} \tag{4.1}$$

ve

$$ii)\ \left|\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right| \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p}{p+1}$$

dir.

b) $p < 0$ için;

$$i)\ \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right| \leq M\frac{b^p - a^p}{6p}\left[{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p}, 2; 4; 1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right) + b^{1-p}\right]$$

ve

$$ii)\ \left|\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq M\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\frac{1}{2\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}+\frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)\right]$$

c) $0<p<1$ için;

i) $$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|\leq M\frac{|b^p-a^p|}{6p}[a^{1-p}+b^{1-p}]$$

ii) $$\left|\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx-f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|\leq M\frac{|a^p-b^p|}{2p}$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right)+\frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)\right)\right]$$

İspat: a) $p\geq 1$ için;

Lemma 3.2.1. ve f fonksiyonunun I da bir M-Lipschitz fonksiyon olduğu kullanılırsa;

i) $$\left|tf(a)+(1-t)f(b)-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$=\left|tf(a)+(1-t)f(b)-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)+f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right.$$

$$\left.-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$=\left|t\left(f(a)-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right)+(1-t)\left(f(b)-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right)\right|$$

$$\leq t\left|f(a)-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|+(1-t)\left|f(b)-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq tM\left|a-(ta^p+(1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right|+(1-t)M\left|b-(ta^p+(1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right|$$

$$\leq M\left[t|a^p-ta^p-b^p+tb^p|^{\frac{1}{p}}+(1-t)|b^p-ta^p-b^p+tb^p|^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$= M\left[t|t(b^p - a^p) - (b^p - a^p)|^{\frac{1}{p}} + (1-t)|t(b^p - a^p)|^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$= M\left[t|(1-t)(b^p - a^p)|^{\frac{1}{p}} + (1-t)|t(b^p - a^p)|^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$= M\left[t(1-t)^{\frac{1}{p}}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}} + (1-t)t^{\frac{1}{p}}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\right]$$

yazılır. Böylece ilk ve son terimden

$$\left|tf(a) + (1-t)f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$
$$\leq M\left[t(1-t)^{\frac{1}{p}}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}} + (1-t)t^{\frac{1}{p}}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\right]$$

yazılır. Daha sonra eşitsizliğin her iki tarafında t değişkenine göre $[0,1]$ aralığı üzerinden integral alınırsa;

$$\left|f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt - \int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}dt\right)\right|$$
$$\leq M|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 t(1-t)^{\frac{1}{p}}dt + \int_0^1 t^{\frac{1}{p}}(1-t)dt\right]$$
$$= 2M|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\int_0^1 t^{\frac{1}{p}}(1-t)dt$$
$$= 2M|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{p}}(1-t)dt = \int_0^1 t(1-t)^{\frac{1}{p}}dt = \frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

$$f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ve

$$\int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt = \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

olduğu göz önüne alınırsa;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right| \leq 2M|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

ii) $$\left|tf(a)+(1-t)f(b)-f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$
$$\leq M\left[t(1-t)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}+(1-t)t^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\right]$$

eşitsizliğinde $t=\frac{1}{2}$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)-f\left(\left[\frac{1}{2}a^p+\frac{1}{2}b^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right| \leq M\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\right]$$

eşitsizliğinden;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right| \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Son bulduğumuz eşitsizlikte a yerine $(ta^p+(1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}$ ve b yerine $((1-t)a^p+tb^p)^{\frac{1}{p}}$ alınırsa $\forall t\in[0,1]$ için;

$$\left|\frac{f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)+f\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)}{2}-f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$
$$\leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|(2t-1)(b^p-a^p)|^{\frac{1}{p}}=M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|2t-1|^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafında t değişkenine göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integral alınarak

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt+\int_0^1 f\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt\right]\right.$$
$$\left.-f\left(\left[\frac{1}{2}a^p+\frac{1}{2}b^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right| \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\int_0^1|2t-1|^{\frac{1}{p}}dt$$

yazılır. Burada,

$$\int_0^1 f\left([(1-t)a^p + tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt = \int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt = \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

ve

$$\int_0^1 |2t-1|^{\frac{1}{p}}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t+1)^{\frac{1}{p}}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^{\frac{1}{p}}\,dt = \frac{p}{(p+1)}$$

bulunur. Bulunan integral değerleri yerlerine yazılırsa;

$$\left|\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right| \le M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} |b^p - a^p|^{\frac{1}{p}} \frac{p}{(p+1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

b) $p < 0$ için;

Lemma 3.2.2. ve f fonksiyonunun I aralığı üzerinde bir M-Lipschitz fonksiyon olduğu kullanılarak;

i) $\left|tf(a) + (1-t)f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$

$$= \left|tf(a) + (1-t)f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right) + f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$= \left|t\left(f(a) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right) + (1-t)\left(f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right)\right|$$

$$\le t\left|f(a) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right| + (1-t)\left|f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\le tM\left|(a^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right| + (1-t)M\left|(b^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right| \qquad (4.2)$$

dir. Burada $p < 0$ için Lemma 3.2.2 kullanılırsa;

$$\left|(a^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right|$$

$$\leq |a^p - ta^p - b^p + tb^p| \left(-\frac{1}{p}\right) (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$= |(1-t)a^p - (1-t)b^p| \left(-\frac{1}{p}\right) (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$= |(1-t)(a^p - b^p)| \left(-\frac{1}{p}\right) (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$= (1-t)\frac{b^p - a^p}{p}(ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}-1} \tag{4.3}$$

ve yine $p < 0$ için Lemma 3.2.2 kullanılırsa;

$$\left|(b^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right| \leq |b^p - ta^p - b^p + tb^p| \left(-\frac{1}{p}\right) (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$= |t(a^p - b^p)| \left(-\frac{1}{p}\right) (b^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$= t\frac{b^p - a^p}{p} b^{1-p} \tag{4.4}$$

bulunur. (4.3) ve (4.4), (4.2) de kullanılırsa;

$$\left|tf(a) + (1-t)f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq \quad M\,\frac{(b^p - a^p)}{p}\left[\frac{t(1-t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}} + t(1-t)b^{1-p}\right] \tag{4.5}$$

yazılır. Bu son eşitsizlikte $[0,1]$ de t ye göre integral alırsak;

$$\left|f(a)\int_0^1 t\,dt + f(b)\int_0^1 (1-t)\,dt - \int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}dt\right)\right|$$

$$\leq \quad M\,\frac{(b^p - a^p)}{p}\left[\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}}dt + b^{1-p}\int_0^1 t(1-t)dt\right] \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\int_0^1 \frac{t(1-t)}{(ta^p + (1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}}dt = \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(tb^p + (1-t)a^p)^{1-\frac{1}{p}}}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t(1-t)}{\left(a^p - t(a^p - b^p)\right)^{1-\frac{1}{p}}} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t(1-t)}{a^{p-1}\left[1 - t\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^p\right)\right]^{1-\frac{1}{p}}} dt$$

$$= \frac{1}{6}\ {}_2F_1\left(1 - \frac{1}{p}, 2; 4; 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^p\right)$$

sonucu bulunur.

Ayrıca

$$b^{1-p} \int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{6} b^{1-p},$$

$$f(a) \int_0^1 tdt + f(b) \int_0^1 (1-t)dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ve

$$\int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right) dt = \frac{p}{b^p - a^p} \int_0^1 \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx$$

integral değerleri (4.6) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_0^1 \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \leq M \frac{b^p - a^p}{6p} \left[{}_2F_1\left(1 - \frac{1}{p}, 2; 4; 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^p\right) + b^{1-p} \right]$$

bulunur.

ii) (4.5) eşitsizliğinde $t = \frac{1}{2}$ ve $b^p - a^p = |b^p - a^p|$ alınırsa,

$$\left| \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) - f\left(\left[\frac{1}{2} a^p + \frac{1}{2} b^p\right]^{\frac{1}{p}}\right) \right| \leq M \frac{|b^p - a^p|}{-4p} \left[\frac{1}{\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}} + b^{1-p} \right]$$

eşitsizliğinden;

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \right| \leq M \frac{|b^p - a^p|}{-4p} \left[\frac{1}{\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}} + b^{1-p} \right]$$

yazılır. Son bulduğumuz eşitsizlikte a yerine $(ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}$ ve b yerine $((1-t)a^p + tb^p)^{\frac{1}{p}}$ alınırsa $\forall t \in [0,1]$ için;

$$\left|\frac{1}{2}f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right) + \frac{1}{2}f\left([(1-t)a^p + tb^p]^{\frac{1}{p}}\right) - f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq M\frac{\left|\left((ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p - \left(((1-t)a^p + tb^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p\right|}{-4p}$$

$$\times\left[\frac{1}{\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}} + \frac{1}{\left(((1-t)a^p + tb^p)^{\frac{1}{p}}\right)^{1-p}}\right]$$

$$= M|2t-1|\frac{b^p - a^p}{4p}\left[\frac{1}{\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}} + \frac{1}{((1-t)a^p + tb^p)^{1-\frac{1}{p}}}\right]$$

elde edilir. Son eşitsizliğin t değişkenine göre $[0,1]$ üzerinde integrali alınırsa;

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt + f\left([(1-t)a^p + tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right] - f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq M\frac{b^p - a^p}{4p}\left[\frac{1}{\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\int_0^1 |2t-1|dt + \int_0^1 \frac{|2t-1|dt}{((1-t)a^p + tb^p)^{1-\frac{1}{p}}}dt\right] \quad (4.7)$$

yazılır. Burada;

$$\int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt = f\left([(1-t)a^p + tb^p]^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

$$\int_0^1 |2t-1|dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2t+1)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)dt = \frac{1}{2}$$

ve

$$\int_0^1 \frac{|2t-1|dt}{\left((1-t)a^p+tb^p\right)^{1-\frac{1}{p}}} = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2t}{\left((1-t)a^p+tb^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2t-1}{\left((1-t)a^p+tb^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}dt}_{I_2}$$

yazılırsa, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2t}{\left((1-t)a^p+tb^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}dt = \frac{1}{4}\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2t-1}{\left((1-t)a^p+tb^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}dt = \frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)$$

elde edilir. I_1 ve I_2 değerlerinin toplanması ile

$$\int_0^1 \frac{|2t-1|dt}{\left((1-t)a^p+tb^p\right)^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{4}\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right) + \frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right) \quad (4.8)$$

bulunur. Bulunan bu integral değerleri (4.7) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\left|\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq M\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\frac{1}{2\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}} + \frac{1}{4}\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right) + \frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\ {}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

c) $0<p<1$ için;

(4.2) eşitsizliğinden

$$\left|tf(a) + (1-t)f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq tM\left|(a^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right| + (1-t)M\left|(b^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right|$$

yazabiliriz. Burada $0 < p < 1$ için Lemma 3.2.3 kullanılırsa;

$$\left|(a^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right| \leq |a^p - ta^p - b^p + tb^p|\left(\frac{1}{p}\right)(a^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$= |(1-t)a^p - (1-t)b^p|\left(\frac{1}{p}\right)a^{1-p}$$

$$= |(1-t)(a^p - b^p)|\left(\frac{1}{p}\right)a^{1-p}$$

$$= (1-t)\frac{b^p - a^p}{p}a^{1-p} \tag{4.9}$$

ve

$$\left|(b^p)^{\frac{1}{p}} - (ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}}\right| \leq |b^p - ta^p - b^p + tb^p|\left(\frac{1}{p}\right)(b^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

$$= |t(a^p - b^p)|\left(\frac{1}{p}\right)b^{1-p} = t\frac{b^p - a^p}{p}b^{1-p} \tag{4.10}$$

olur. (4.9) ve (4.10) dan;

$$\left|tf(a) + (1-t)f(b) - f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq \; M\frac{b^p - a^p}{p}[t(1-t)a^{1-p} + t(1-t)b^{1-p}] \tag{4.11}$$

yazılır. Bu son eşitsizlikte t ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinde integral alınırsa;

$$\left|f(a)\int_0^1 t\,dt + f(b)\int_0^1 (1-t)\,dt - \int_0^1 f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt\right|$$

$$\leq \; M\frac{b^p - a^p}{p}\left[a^{1-p}\int_0^1 t(1-t)dt + b^{1-p}\int_0^1 t(1-t)dt\right] \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 t(1-t)dt = \frac{1}{6}$$

$$f(a)\int_0^1 t\,dt + f(b)\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ve

$$\int_0^1 f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

dir. Bulunan integral değerlerini (4.11) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\right|\leq M\,\frac{|b^p-a^p|}{6p}\left[a^{1-p}+b^{1-p}\right]$$

eşitsizliği bulunur. (4.11) eşitsizliğinde $t=\frac{1}{2}$ alalım. Bu durumda

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|\leq M\,\frac{|b^p-a^p|}{4p}\left[a^{1-p}+b^{1-p}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte a yerine $[ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}$ ve b yerine $[(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}$ alınırsa her $t\in[0,1]$ için;

$$\left|\frac{1}{2}\left[f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)+f\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right]+-f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq M\frac{\left|\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)^p-\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)^p\right|}{4p}\left[\left([ta^p\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)^{1-p}+\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)^{1-p}\right]$$

$$=M\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\frac{|2t-1|}{(ta^p+(1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}}+\frac{|2t-1|}{((1-t)a^p+tb^p)^{1-\frac{1}{p}}}\right]$$

elde edilir. Son eşitsizliğin t ye göre $[0,1]$ aralığı üzerinden integrali alınırsa;

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt+\int_0^1 f\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt\right]-f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq M\frac{|a^p-b^p|}{4p}\left[\int_0^1\frac{|2t-1|}{(ta^p+(1-t)b^p)^{1-\frac{1}{p}}}dt+\int_0^1\frac{|2t-1|}{((1-t)a^p+tb^p)^{1-\frac{1}{p}}}dt\right] \qquad (4.13)$$

olur. Burada;

$$\int_0^1 f\left([ta^p+(1-t)b^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt=\int_0^1 f\left([(1-t)a^p+tb^p]^{\frac{1}{p}}\right)dt=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

ve (4.8) eşitliğinden;

$$\int_0^1 \frac{|2t-1|}{\left(ta^p+(1-t)b^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}dt = \int_0^1 \frac{|2t-1|}{\left((1-t)a^p+tb^p\right)^{1-\frac{1}{p}}}dt$$

$$= \frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right) + \frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)$$

şeklinde hesaplanan integraller (4.13) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\left|\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\right|$$

$$\leq M\frac{|a^p-b^p|}{2p}\left[\left(\frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)\right)\right]$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 4.1. Teorem 4.1. de $p=1$ alınırsa Teorem 4.1 a) daki her iki eşitsizlik sırasıyla Teorem 3.1.1 deki (3.2) ve (3.1) eşitsizliklerine indirgenir.

Önerme 4.1. $p \geq 1$ ve $0 < a < b$ için

i) $$|H^{-1}(a^p,b^p) - L^{-1}(a^p,b^p)| \leq 2\frac{p}{a^{p+1}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

ii) $$|L^{-1}(a^p,b^p) - A^{-1}(a^p,b^p)| \leq \frac{p}{a^{p+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p}{p+1}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $0 < x < y$ olmak üzere

$$H = H(x,y) = \frac{2xy}{x+y}, \qquad A = A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \qquad L = L(x,y) = \frac{x-y}{lnx - lny},$$

sırasıyla harmonik, aritmetik ve logaritmik ortalamalardır.

İspat: $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $p\geq 1$ için $f(x)=x^{-p}$ konveks fonksiyonu için Teorem 4. 1. a) şıkkına uygularsak;

i) Verilen fonksiyonu kullanarak

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx=\int_a^b \frac{x^{-p}}{x^{1-p}}dx=\int_a^b x^{-1}dx=lnb-lna$$

yazabiliriz. Şimdi $M=\mathrm{Sup}_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ değerini bulalım.

$$|f'(x)|=|-p\,x^{-p-1}|=p\,x^{-p-1}$$

olduğundan

$$M=\operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]}|f'(x)|=Sup\,p\,x^{-p-1}=\frac{p}{a^{p+1}}$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{a^{-p}+b^{-p}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^p}+\frac{1}{b^p}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^p+b^p}{(ab)^p}\right)$$

$$\left|\frac{a^p+b^p}{2(ab)^p}-\frac{p(lnb-lna)}{b^p-a^p}\right|\leq 2\frac{p}{a^{p+1}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

elde edilir. $p\geq 1$ ve $a<b$ için eşitsizlik sağlanır.

ii) $$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)=\left(\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{-p}=\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{-1}=\frac{2}{a^p+b^p}$$

$$\left|\frac{p(lnb-lna)}{b^p-a^p}-\frac{2}{a^p+b^p}\right|\leq\frac{p}{a^{p+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p}{p+1}$$

$p\geq 1$ ve $a<b$ için eşitsizlik sağlanır.

Önerme 4.2. $p\geq 1$ ve $0<a<b$ için

i) $$\left|\frac{1}{p}lnI(a^p,b^p)-lnG(a,b)\right|\leq 2\frac{1}{a}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

ii) $$\left|lnM_p(a,b)-\frac{1}{p}lnI(a^p,b^p)\right|\leq\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p}{p+1}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $0 < x < y$ olmak üzere,

$$I = I(x,y) = \frac{1}{e}\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}, \qquad G = G(x,y) = \sqrt{xy},\ M_p = M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

sırasıyla identrik, geometrik ve p-kuvvet ortalamalarıdır.

İspat: $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $p \geq 1$ için $f(x) = -lnx$ konveks fonksiyonu için Teorem 4. 1. a) şıkkına uygularsak;

i) Verilen fonksiyonu kullanarak

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{-lna - lnb}{2} = -\frac{ln(ab)}{2}$$

$$\int_a^b -\frac{lnx}{x^{1-p}}dx = -\int_a^b lnx\, x^{p-1}dx$$

bulunur. $lnx = u$ ise $\frac{1}{x}dx = du$, $x^{p-1}dx = dv$ ise $\frac{x^p}{p} = v$ olduğundan

$$-\int_a^b lnx\, x^{p-1}dx = -\left(lnx\frac{x^p}{p}\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{x^p}{p}\frac{1}{x}\,dx\right) = -\left(\frac{lnb\, b^p}{p} - \frac{lna\, a^p}{p} - \int_a^b \frac{x^{p-1}}{p}dx\right)$$

$$= -\left(\frac{lnb\, b^p - lna\, a^p}{p} - \left(\frac{x^p}{p^2}\bigg|_a^b\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{lnb\, b^p - lna\, a^p}{p} - \frac{b^p}{p^2} + \frac{a^p}{p^2}\right)$$

$$= \frac{p\, lna\, a^p - p\, lnb\, b^p}{p^2} + \frac{b^p}{p^2} - \frac{a^p}{p^2}$$

$$= \frac{b^p(1 - plnb) + a^p(plna - 1)}{p^2}$$

bulunur. Şimdi

$$M = \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

değerini bulalım.

$$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$$

olduğundan dolayı

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| = Sup\frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

$$\left|\frac{-ln(ab)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p}\left(\frac{b^p(1 - plnb) + a^p(plna - 1)}{p^2}\right)\right|$$

$$\leq 2\frac{1}{a}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $p \geq 1$ ve $a < b$ için eşitsizlik sağlanır.

ii) i) şıkkına benzer şekilde verilen fonksiyon yardımı ile

$$\left|\frac{p}{b^p - a^p}\left(\frac{b^p(1 - plnb) + a^p(plna - 1)}{p^2}\right) + ln\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p - a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p}{p+1}$$

elde edilir.

Önerme 4.3. $p \geq 1$ ve $0 < a < b$ için

i) $$\left|A(a,b) - L_{p-1}^{1-p}(a,b)L_p^p(a,b)\right| \leq \frac{|b^p - a^p|}{3p}A(a^{1-p}, b^{1-p})$$

ii) $$\left|L_{p-1}^{1-p}(a,b)L_p^p(a,b) - M_p(a,b)\right| \leq \frac{|a^p - b^p|}{2p}$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1 - \frac{1}{p}, 1; 3; 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^p\right) + \frac{1}{4\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1 - \frac{1}{p}, 2; 3; \frac{a^p - b^p}{a^p + b^p}\right)\right)\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $0 < x < y$ olmak üzere,

$$A = A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \qquad L_p = L_p(x,y) = \left(\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}, p \neq -1,0$$

$$M_p = M_p(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

sırasıyla aritmetik, p-logaritmik ve p-yinci mertebeden kuvvet ortalamalarıdır.

İspat: $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $p<1$ için $f(x)=x$ şeklinde verilen konveks fonksiyonunu için Teorem 4. 1. c) şıkkına uygulayalım.

Öncelikle, $f(x)=x$ için; $\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{a+b}{2}$ yazabiliriz. Buradan, kolayca

$$\int_a^b \frac{x}{x^{1-p}}dx=\int_a^b x^p dx=\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

elde edilir. Şimdi $M=\mathrm{Sup}_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ değerini bulalım:

$$|f'(x)|=|1|=1 \quad\Longrightarrow\quad M=\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|=Sup1=1$$

i) Verilen fonksiyon ile $p<1$ ve $a<b$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{a+b}{2}-\frac{p}{b^p-a^p}\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}\right|\le\frac{|b^p-a^p|}{6p}[a^{1-p}+b^{1-p}]$$

ii) Verilen fonksiyonun kullanılması ile $p\le1$ ve $a<b$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{p}{b^p-a^p}\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}-\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right|\le\frac{|a^p-b^p|}{2p}$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{a}{b}\right)^p\right)+\frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)\right)\right]$$

Sonuç 4.1. $I\subset(0,\infty)$ bir aralık ve $f:I\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir p-konveks bir fonksiyon $a,b\in I$, $a<b$ *ve* $M=:sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|<\infty$ olsun. Bu takdirde, p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini kullanarak Teorem 4.1 a) dan yaralanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$0\le\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx-f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)\le M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p}{(p+1)}$$

$$0\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\le 2M|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}.$$

İspat: $\forall x, y \in (a,b)$ için Lagrange teoremine göre

$$|f(x) - f(y)| = |x-y||f'(c)| \leq M|x-y|$$

olacak şekilde x ile y arasında bir c sabitinin açıktır. Dolayısıyla f Lipschitz fonksiyondur. O halde Teorem 4.1 ile ispat açıktır.

Teorem 4.2. $I \subset (0,\infty)$ bir aralık, $f: I \to \mathbb{R}$ bir M-lipschitz fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $p \geq 1$ için $[0,1]$ aralığında;

$$H_p(t) = \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f\left(\left[tx^p + (1-t)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx$$

ile tanımlı $H_p(t)$ fonksiyonu her $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$|H_p(t_2) - H_p(t_1)| \leq \frac{2Mp}{b^p - a^p}\frac{\left(\frac{b^p - a^p}{2}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}|t_2 - t_1|^{\frac{1}{p}}$$

Hölder koşulunu sağlar.

İspat: $t_1, t_2 \in [0,1]$ olmak üzere;

$|H_p(t_2) - H_p(t_1)|$

$$= \frac{p}{b^p - a^p}\left|\int_a^b \frac{f\left(\left[t_2x^p + (1-t_2)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx - \int_a^b \frac{f\left(\left[t_1x^p + (1-t_1)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx\right|$$

$$\leq \frac{M\,p}{b^p - a^p}\int_a^b \left|\frac{\left[t_2x^p + (1-t_2)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} - \left[t_1x^p + (1-t_1)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}}dx\right|$$

yazabiliriz. $\frac{a^p+b^p}{2} = A_p$ diyelim. O zaman Lemma 3.2.1 kullanılırsa;

$|H_p(t_2) - H_p(t_1)|$

$$\leq \frac{M\ p}{b^p - a^p}\int_a^b \left|\frac{\left[t_2x^p + (1-t_2)A_p\right]^{\frac{1}{p}} - \left[t_1x^p + (1-t_1)A_p\right]^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}}\right| dx$$

$$\leq \frac{Mp}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{|t_2 x^p + (1 - t_2)A_p - t_1 x^p - (1 - t_1)A_p|^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx$$

$$= \frac{Mp}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{|t_2 x^p + A_p - t_2 A_p - t_1 x^p - A_p + t_1 A_p|^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx$$

$$= \frac{Mp}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{|(t_2 - t_1)x^p - A_p(t_2 - t_1)|^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx$$

$$= \frac{Mp}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{|(t_2 - t_1)(x^p - A_p)|^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx$$

$$= \frac{Mp}{b^p - a^p} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{p}} \int_a^b \frac{|x^p - A_p|^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\underbrace{\int_a^b \frac{|x^p - A_p|^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx}_{I} = \underbrace{\int_a^{M_p} \frac{(A_p - x^p)^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{M_p}^b \frac{(A_p - x^p)^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx}_{I_2}$$

yazılabilir. Burada

$$I_1 = \int_a^{M_p} \frac{(A_p - x^p)^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx$$

integrali için gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$I_1 = \int_a^{M_p} \frac{(A_p - x^p)^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx = \int_{\frac{b^p - a^p}{2}}^{0} \frac{u^{\frac{1}{p}}}{-p} du = \frac{\left(\frac{b^p - a^p}{2}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}$$

ve benzer şekilde

$$I_2 = \int_{M_p}^b \frac{(A_p - x^p)^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}} dx = \int_0^{\frac{b^p - a^p}{2}} \frac{u^{\frac{1}{p}}}{p} du = \frac{\left(\frac{b^p - a^p}{2}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}$$

bulunur. Sonuç olarak, bulunan değerler $I = I_1 + I_2$ ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$I=\int_a^b \frac{|x^p-A_p|^{\frac{1}{p}}}{x^{1-p}}dx=\frac{\left(\frac{b^p-a^p}{2}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}+\frac{\left(\frac{b^p-a^p}{2}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}=2.\frac{\left(\frac{b^p-a^p}{2}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}$$

elde edilir. Bulunan integral değerleri gözönüne alınırsa

$$\left|H_p(t_2)-H_p(t_1)\right|\leq\frac{2Mp}{b^p-a^p}\frac{\left(\frac{b^p-a^p}{2}\right)^{\frac{p+1}{p}}}{p+1}|t_2-t_1|^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir.

Uyarı 4.2. Yukarıdaki teoremde $p=1$ için,

$$|H_1(t_2)-H_1(t_1)|\leq M\frac{b-a}{4}|t_2-t_1|$$

bulunur ki, bu bize Teorem 3.1.2 deki sonucu verir.

Teorem 4.3. $I\subset(0,\infty)$ bir aralık, $f:I\to\mathbb{R}$ bir M-lipschitz fonksiyon, $a,b\in I$ ve $a<b$ olsun.

$p\geq 1$ için;

$$\left|\frac{f\left(\left[tb^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+f\left(\left[ta^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{2}-H_p(t)\right|$$

$$\leq 2Mt^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Kolaylık olsun diye

$$u=\left(tb^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\quad v=\left(ta^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

alalım. Bu durumda

$$H_p(t)=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f\left(\left[tx^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx$$

ifadesinde $\frac{a^p+b^p}{2}=A_p$ şeklinde değişken değiştirmesi yapılırsa;

z= $\left[tx^p+(1-t)A_p\right]^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow z^p = tx^p+(1-t)A_p \Longrightarrow p\, z^{p-1}dz = t\, p\, x^{p-1}dx$

$$\frac{dz}{z^{1-p}}=\frac{t\,p}{x^{1-p}}\,dx$$

$$z_1=\left[ta^p+(1-t)A_p\right]^{\frac{1}{p}}=u, \qquad z_2=\left[tb^p+(1-t)A_p\right]^{\frac{1}{p}}=v$$

$$v^p-u^p=t.(b^p-a^p)$$

bulunur. Bu durumda;

$$H_p(t)=\frac{p}{t(b^p-a^p)}\int_a^b \frac{f\left(\left[tx^p+(1-t)A_p\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}t\,dx$$

$$=\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v \frac{f(z)}{z^{1-p}}dz$$

bulunur. (4.1) eşitsizliğini kullanarak

$$\left|\frac{f(u)+f(v)}{2}-\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v \frac{f(z)}{z^{1-p}}dz\right| \le 2M|v^p-u^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

elde edilir.

Önerme 4.4. $I\subset(0,\infty)$ bir aralık ve $f\colon I\to\mathbb{R}$ diferensiyellenebilir p-konveks bir fonksiyon ise;

$$i)\ H_p(t)=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f\left(\left[tx^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx \le \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

$$ii)\ H_p(t)=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f\left(\left[tx^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx \ge f(M_p)$$

ve

$$f(M_p) \le H_p(t) = \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f\left(\left[tx^p + (1-t)\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}} dx$$

$$\le \frac{f\left(\left[tb^p + (1-t)\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) + f\left(\left[ta^p + (1-t)\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{2}$$

dir. Burada $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = M_p$ alınmıştır.

İspat: i) f fonksiyonu p-konveks bir fonksiyon olduğundan;

$$H_p(t) = \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f\left(\left[tx^p + (1-t)\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}} dx$$

$$\le \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \left[\frac{tf(x)}{x^{1-p}} + \frac{(1-t)f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}\right] dx$$

$$\le \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \left[\frac{tf(x)}{x^{1-p}} + \frac{(1-t)f(M_p)}{x^{1-p}}\right] dx$$

$$= \frac{p}{b^p - a^p}\left[t\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx + (1-t)f(M_p)\int_a^b \frac{1}{x^{p-1}} dx\right]$$

$$= \frac{p}{b^p - a^p}\left[t\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx + (1-t)f(M_p)\frac{b^p - a^p}{p}\right]$$

$$H_p(t) \le t\left(\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx\right) + (1-t)f(M_p)$$

yazabiliriz. Hermite-Hadamard eşitsizliğinden

$$H_p(t) \le t\left(\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx\right) + \frac{(1-t)p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx = \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx$$

elde edilir.

$ii)\ u=\left(tb^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}},\quad v=\left(ta^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ olmak üzere

$$H_p(t)=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f\left(\left[tx^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx$$

ifadesinde z= $\left[tx^p+(1-t)A_p\right]^{\frac{1}{p}}$ şeklinde değişken değiştirmesi yapılırsa

$$H_p(t)=\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v\frac{f(z)}{z^{1-p}}dz$$

elde edilir. f fonksiyonunun p-konveksliği ve Hermite Hadamard eşitsizliği kullanılarak;

$$H_p(t)=\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v\frac{f(z)}{z^{1-p}}dz\geq f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)=f(M_p)$$

ve

$$f(M_p)\leq\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v\frac{f(z)}{z^{1-p}}dz\leq\frac{f(u)+f(v)}{2}$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte u ve v değerleri yerlerine yazılırsa,

$$f(M_p)\leq H_p(t)=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f\left(\left[tx^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{x^{1-p}}dx$$

$$\leq\frac{f\left(\left[tb^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)+f\left(\left[ta^p+(1-t)\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)}{2}$$

olur.

Bu önermeden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2. $I \subset (0,\infty)$bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir p-konveks bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$ ve $M =: sup_{t\in[a,b]}|f'(t)| < \infty$ olsun.

$p \geq 1$ için;

i) $$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq 2M|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p^2}{(p+1)(2p+1)}$$

ii) $$0 \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}|b^p-a^p|^{\frac{1}{p}}\frac{p}{p+1}$$

$p < 0$ için;

i) $$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq M\frac{b^p-a^p}{6p}$$
$$\times\left[{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;4;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right)+b^{1-p}\right]$$

ii) $$0 \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$\leq M\frac{b^p-a^p}{4p}\left[\frac{1}{2\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}+\frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)\right]$$

$0 < p < 1$ için;

i) $$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq M\,\frac{|b^p-a^p|}{p}[a^{1-p}+b^{1-p}]$$

ii) $$0 \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx - f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$\leq M\frac{|a^p-b^p|}{2p}\left[\left(\frac{1}{4}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},1;3;1-\left(\frac{b}{a}\right)^p\right)+\frac{1}{4\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1-\frac{1}{p}}}\,{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{a^p-b^p}{a^p+b^p}\right)\right)\right]$$

BÖLÜM 5 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma, daha önce p-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan eşitsizliklerin Lipschitz fonksiyonlar sınıfı için elde edilmesiyle ilgilidir. Bu tezde, öncelikle, konveks ve harmonik konveksliğin bir genellemesi olan p-konveks fonksiyon kavramı verilip, p-konveks fonksiyonlar için bulunan eşitsizlikler incelenerek bu eşitsizlikler, mutlak değerli bazı eşitsizlikler de kullanılarak Lipschitz fonksiyonları için yeniden elde edildi. Elde ettiğimiz eşitsizlikler literatürde olmayan yeni eşitsizliklerdir.

KAYNAKLAR

[1] Hardy, G., Littlewood, J.E., and Polya, G., Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom, 1952.

[2] Beckenbach E.F., and Bellman, B., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.

[3] Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities, Springer, Berlin, 1970.

[4] Pečarić, J., Convex functions: inequalities, Scientific books, Belgrade, p. 243, 1987.

[5] Mitrinovic, D.S., Pečarićand J.E., Fink. A.M., Inequalities Involving Functionsand Their Integrals and Derivatives. KluwerAcademic,Dordrecht. 1991.

[6] Mitrinović, D., Pečarić, J., and Fink, A., Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[7] Pachpatte, B., Mathematical Inequalities. 591 pp, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2005.

[8] Niculescu, C., Persson, L., Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, 253 pp, Springer Science Business Media, 2006.

[9] Fang, Z. B., and Shi, R., On the (p;h)-convex function and some integral inequalities, 16 pp, J. Inequal. Appl., 2014(45), 2014.

[10] Noor, M. A., Noor, K. I., Mihai, M. V., and Awan, M. U., Hermite-Hadamard inequalities for differentiable p-convex functions using hyper geometric functions. Publıcatıons De L'Instıtut Mathématıque, Nouvelle série, tome 100(114)) , 251–257, 2016.

[11] Noor, M.A., and Iftikhar, S., Non convex Functions and Integral Inequalities. Punjab University Journal of Mathematics, Vol. 47(2)(2015) pp.00.00 Article· January, 2015.

[12] İşcan, İ., Ostrowski type inequalities for p-convex functions. New Trends in Mathematical Sciences, NTMSCI 4, No. 3, 140-150, 2016.

[13] Kunt, M., and İşcan İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically (alpha, m)-convex functions by using fractional integrals. Konuralp journal of mathematics, vol.5, no.1, pp.201-213, 2017.

[14] Bayraktar, M., Analiz, Nobel, Ankara, 2010.

[15] İşcan, İ., Hermite-Hadamard Type Inequalities for p-Convex Functions, International Journal of Analysis and Applications. Volume 11, Number 2, 137-145, 2016.

[16] Pečarić, J., Proschan, F., and Tong, Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc. , 469 pp, Boston, 1992.

[17] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(6), 935-942, 2014.

[18] Zhang, K.S., and Wan, J.P., p-convex functions and their properties, Pure Appl. Math. 23(1), 130-133, 2007.

[19] Kilbas, A.A. Srivastava, H.M. and Trujillo, J., Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[20] Baloch, I. A., and İşcan, İ., Some Ostrowski Type Inequalities for Harmonically (s,m)-convex functions in Second Sense, International Journal of Analysis, vol. 2015, Article ID 672675, 9 pages, 2015.

[21] İşcan, İ., and Kunt, M. Hermite-Hadamard-Fejér Type Inequalities for Harmonically s-convex Functions via Fractional Integrals. Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 12(1), Article 10, 1-16, 2015.

[22] İşcan, İ., and Aydın, A., Dikmenoğlu, S., New integral inequalities via harmonically convex functions, Mathematics and Statistics, 3(5): 134-140, 2015.

[23] Roberts, A.W., and Varberg, D.E., Convex Functions. Academic Press,300pp, New York, 1973.

[24] Dragomir, S.S., Cho, Y.J., and Kim, S.S. Inequalities of Hadaamrd's type for Lipschitzian mappings and Their Applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 245, 489-501, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Cuma ALTUNSOY 1979 yılında Elazığ'da doğdu. İlk, Orta ve Lise eğitimini Elazığ'da tamamladı.1997 yılında Maden Lisesi'nden mezun oldu.1998 yılında başladığı Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2002 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun Merkez Mustafa Kemal Ortaokulu Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.