GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Emine YÜKSEK DİZDAR
20152110036

Şubat 2018

GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine YÜKSEK DİZDAR

Enstitü Anabilim Dalı : **MATEMATİK**

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Nurgül OKUR BEKAR**

Şubat 2018

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine YÜKSEK DİZDAR

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 12/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Selahattin MADEN .... Jüri Başkanı	Doç. Dr. İmdat İŞCAN .... Üye	Yrd. Doç. Dr. Nurgül OKUR BEKAR .... Üye

Doç. Dr. Bahadır KOZ
....
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Emine YÜKSEK DİZDAR

26.2/2018

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca, her türlü bilimsel ve manevi desteği sağlayan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nurgül OKUR BEKAR'a, Yüksek Lisans eğitimim boyunca desteklerini esirgemeyen iş arkadaşlarım ve sevgili eşim Hakan DİZDAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\forall$	: Her
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$f \in L[a,b]$	: $\int_a^b \lvert f(x) \rvert dx < \infty$
I^0	: I'nın içi
$E(X), m_x$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
$l.i.m.$	: Limit in Mean
Δ	: Üçgen
C_{st}	: Reel Konveks Stokastik Süreçler Kümesi
$\leq_{st}$	: Stokastik Sıralama
$\subseteq$	: Alt Küme
$\mathfrak{I}$	: X'in alt kümeleri üzerinde inşa edilen sigma cebir
P	: Olasılık fonksiyonu
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
f'	: f fonksiyonun türevi
max	: Maksimum
$L[a,b]$	: $[a,b]$ aralında sürekli olan fonksiyonların kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar
A	: Küme
A′	: Kümenin Tümleyeni
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	: Bileşim

ŞEKİLLER LİSTESİ

BAZI STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

ÖZET

Bu tezde literatürde mevcut olan konveks, log-konveks, preinveks, s-konveks, h-konveks ve φ-konveks stokastik süreçler tanıtılmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kısaca sunulmuştur. Bu çalışmanın özgün kısmı olan araştırma bulgularında ise m-konveks, r-konveks, harmonik konveks, p-konveks ve (p, h)-konveks stokastik süreçler tanımlanmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks, Log-Konveks, Preinveks, s-Konveks, h-Konveks ve φ-Konveks, m-Konveks, r-Konveks, Harmonik Konveks, p-Konveks ve (p, h)-Konveks, Stokastik Süreçler, Hermite-Hadamard Eşitsizliği,

HERMITE-HADAMARD TYPICAL INEQUALITIES FOR SOME STOCHASTIC PROCESSES

SUMMARY

In this thesis, convex, log-convex, preinvex, s-convex, h-convex and φ-convex stochastic processes are introduced in the literature and Hermite-Hadamard type inequalities for these processes are briefly presented. In the research findings which are the original part of this study, m-convex, r-convex, harmonic convex, p-convex and (p,h)-convex stochastic processes are defined and Hermite-Hadamard type inequalities are obtained for these processes.

Keywords: Convex, Log-Convex, Preinvex, s-Convex, h-Convex and φ-Convex, m-Convex, r-Convex, Harmonic Convex, p-Convex and (p,h)-Convex, Stochastic Processes, Hermite-Hadamard Inequality

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konvekslik geometrik temel bir kavram olmasının yanı sıra diğer alanlarda genişçe kullanılmaktadır. Fonksiyonel analiz, grafik teorisi, olasılık teorisi ve daha birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Konveksliğin ilk temelleri Yunan filozoflar tarafından atılmasına rağmen Mısır zamanına kadar dayanmaktadır. Yunanlıların matematiğe en önemli katkılarından biri de Euclid'in [1] "Elements" adlı kitabıdır. Konvekslikle alakalı ilk tanım ve gösterimler bu kitapta bulunmaktadır. Konvekslikle alakalı daha kesin bir tanımı Archimedes'in [2] "On The Sphere and Cylinder" adlı eserinde de bulmak mümkündür.

Eşitsizlik teorisi Gauss, Cauchy ve Chebyshev ile gelişmeye başlamıştır. Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramı göz önünde bulundurularak birçok çalışma yapılmıştır. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite'in (1822-1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. $[a, b]$ aralığında tanımlı her reel konveks fonksiyon için, meşhur Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Hermite'in 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması, 1905-1906 yıllarında ünlü Danimarkalı mühendis ve matematikçi Jensen ile başlar ve kendisi şunları öngörmüştür: "Bana göre, konveks fonksiyon kavramı temel olarak pozitif ve artan fonksiyonlarla alakalıdır. Bu konuda yanılmıyorsam, konveks fonksiyonlar teorisinin önemi zamanla anlaşılacaktır."

Son yıllarda modern matematikte araştırma makaleleri ve kitaplarda geniş bir şekilde yer alan konveks fonksiyon kavramının önemi gerçekten anlaşılmıştır. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin birçok uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-konveks fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-konveks ve r-konveks fonksiyonlar, p-konveks fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p-logaritmik ortalamalar, identik ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için bu eşitsizlikleri uygulamaya, genişletmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

19. ve 20. yüzyılda bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya [3] tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. İkinci çalışma ise Beckenbach ve Bellman [4] tarafından 1961'de yazılan, 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren, "Inequalities" adlı eserdir. Bunu Mitrinović'in [5] 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions:Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić[6] tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra Mitrinović [7,8] "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" ve "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte [9] "Mathematical Inequalities" ve Niculescu and Perssons [10] "Convex Functions and Their Applications" literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Hermite-Hadamard eşitsizlikleri konusu Dragomir ve Pearce [11] tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde detaylı olarak yer almaktadır. Bu alanda çalışan diğer matematikçiler Agarval, Anastassiou, Milovanovic, Fink, Roberts and Varberg, Barnett, Özdemir, Sarıkaya, İşcan şeklinde sıralanabilir.

Konvekslik kavramı Fizik, Termodinamik, Ekonometri, Olasılık ve İstatistik Teorisi dahil olmak üzere birçok uygulama sahasında büyük öneme sahiptir.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı, ilk kez bu teorinin kurucularından olan Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlamıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı Bortkiyeviç'in (1868-1913) büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden kullanılmaya başlamıştır.

Stokastik süreçler, esasen zaman içinde gelişen olasılıksal modelleri inceleyen olasılık teorisinin önemli bir dalıdır. 1900 yılında Fransız matematikci Bachalier ilk kez Brown hareketinin matematiksel modelini kurmuştur. 1905 yılında Einstein ve Smoluhovski bazı fizik problemlerinin incelenmesinde olasılık teorisini kullanmak zorunda kalmışlar ve Bachalier'nin kurmuş olduğu sürece benzer bir süreçle karşılaşmışlardır.1914 yılında Planck ve Fokker, olasılık teorisini kullanarak difüzyon olayını incelemeye çalışmışlardır. Tüm bunlar matematikte yeni bir kavram olan stokastik süreç kavramının meydana çıkmasına yol açmıştır.

Stokastik süreçler teorisinin matematiksel temelleri 20. yüzyılda Markov, Slutski, Wiener, Hincin, Kolmogorov gibi matematikçiler tarafından verilmiştir. Stokastik süreçler teorisinin sonraki gelişmesi Feller, Levy, Wald, Doob, Ito, Dynkin, Skorohod, Takac ve Çınlar gibi matematikçilerin çalışmaları ile devam etmektedir.

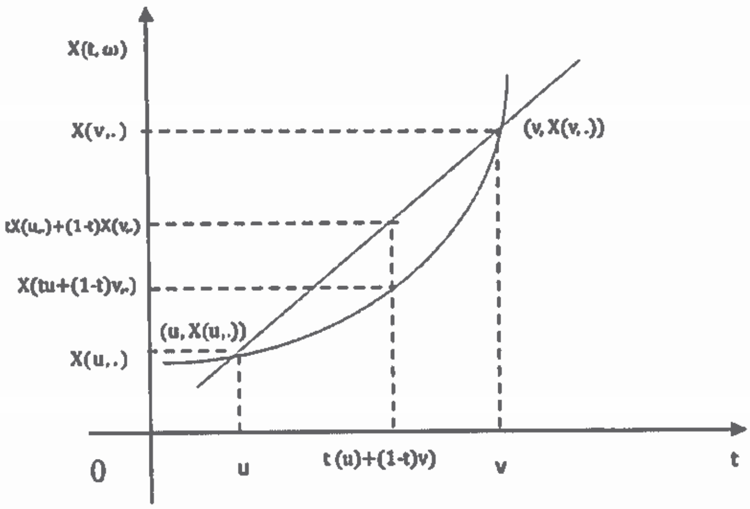
Son yıllarda, konvekslik ve eşitsizlik kavramları, optimizasyon ve matematiksel programlama problemlerinin incelenmesinde daha geniş bir çalışma imkanı sağladığı için, literatürde önemli bir yere sahip olmuştur. Bilhassa, stokastik süreçler için stokastik monotonluk ve konveksliği tanımlamak optimizasyonda özellikle optimal tasarımlarda, olasılıksal nicelikler mevcut olduğunda sayısal yaklaşımlar elde edebilmek için büyük önem taşımaktadır.

$(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı $T \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olsun. Reel değerli $X(t, \omega)$ fonksiyonu her $t \in \mathrm{T}$ için Ω'da tanımlanmış rastgele değişken ise ona rastgele fonksiyon denir. Eğer $T = \mathbb{R}^+$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa bu durumda $X(t, \omega)$ rastgele fonksiyonuna stokastik süreç denir. Bu tanımdan görüldüğü gibi, rastgele değişkenden farklı olarak, stokastik süreç ω'nın yanı sıra hem de zamana da bağlı bir fonksiyondur. Eğer $X(t,\omega)$ stokastik sürecinin ω parametresi sabit tutulursa bu durumda yalnız t'ye bağlı olan bir fonksiyon elde edilir [12].

1980'de Nikodem [13], konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve konveks stokastik süreçler için bilinen bazı özellikleri vermiştir. Bu çalışmada, $[u,v]\times\Omega$ kümesi üzerinde tanımlı her reel konveks X stokastik süreci için elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\leq\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt\leq\frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}$$

Burada, Nikodem[13] $X(t,\omega)$ konveks stokastik sürecinde ω parametresini sabit tutarak yukarıdaki eşitsizliği elde etmiştir. ω parametresi sabit tutulursa, bu durumda aşağıdaki şekil 1.1.1 elde edilir:



Şekil 1.1.1. Konveks Stokastik Süreç

Alınan bu sonucu olasılıksal olarak aşağıdaki gibi yorumlamak mümkündür:

$$X(ET,\cdot)\leq_{st} EX(T,\cdot)\leq_{st} EX(T^*,\cdot),\ T\in\mathcal{C}_{st}$$

Burada E beklenen değer, T (T^*) [u,v] aralığında ({u,v} kümesi üzerinde) düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken, $\mathcal{C}_{st}$ [u,v] üzerinde tanımlı bütün reel konveks stokastik süreçler kümesi ve $\leq_{st}$ ise rastgele değişkenlerin konveks sıralaması olarak tanımlanır.

Jensen-konveks, λ-konveks stokastik süreçler 1992'de Skowronski tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca Kotrys 2012'de stokastik süreçler için strongly konvekslik kavramını tanımlamış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği ve Jensen eşitsizliğini elde etmiş, Kuhn ve Bernstein-Doetsch teoremini ispatlamıştır.

Son yıllarda, 2014'den beri Okur, Akdemir, İşcan konveks stokastik süreçlerin bazı genelleştirmesi ve genişletmesi üzerinde çalışmaktadır. Ayrıca, Sarıkaya, Maden, Set eş zamanlı olarak bu konular üzerinde önemli çalışmalar yapmıştır.

Bu tezin giriş kısmında ilk olarak bu konuda literatürde yer alan araştırmalardan kısaca bahsedilmiştir. Daha sonra konu ile ilgili gerekli temel kavramlar verilmiştir. Tezin materyal ve yöntem kısmında ise, literatürde mevcut olan m-konveks, r-konveks, harmonik konveks, p-konveks ve (p,h)-konveks fonksiyonlar tanıtılmış ve bu fonksiyonlar için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kısaca sunulmuştur. Tezin araştırma bulguları kısmında m-konveks, r-konveks, harmonik konveks, p-konveks ve (p,h)-konveks stokastik süreçler özgün olarak tanımlanmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir. Ayrıca literatürde mevcut olan konveks, log-konveks, preinveks konveks, s-konveks, φ-konveks, h-konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Konveks Fonksiyonlar

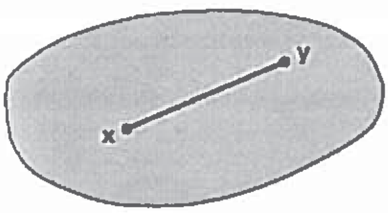
Öncelikle fonksiyonlardaki konvekslik ile ilgili kavramları verelim.

Tanım 2.1.1. L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

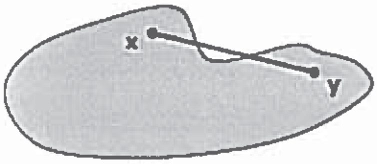
$$B = \{ z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y \ , 0 \leq \alpha \leq 1 \subseteq A \}$$

ise A kümesine konveks küme denir [14].

Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [14].



Şekil 1.1.1. Konveks küme[14].

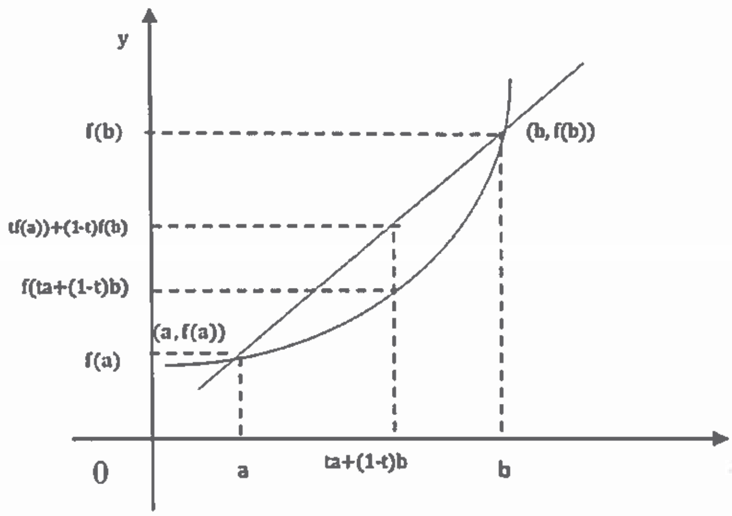


Şekil 2.1.2. Konveks olmayan küme[14].

Tanım 2.1.2. I, $\mathbb{R}$'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $a \in [0,1]$ için

$$f(ax + (1 - a)y \leq af(x) + (1 - a)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir [14].



Şekil 2.1.3. Konveks fonksiyon [14].

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f''nün artan olmasıdır [15].

Teorem 2.1.2. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeterli şart $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır [15].

2.2. Stokastik Süreçler

Stokastik süreçleri tanımlayabilmek için öncelikle σ-cebir, olasılık uzayı, olay, rastgele değişken gibi kavramların bilinmesi gerekmektedir. Aşağıda bu kavramların tanımları verilmektedir.

Tanım 2.2.1. $\Omega \neq \emptyset$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\Im$ sınıfı:

1) $\Omega \in \Im$,
2) $\forall A \in \Im$ için $\bar{A} \in \Im$,
3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall\ (A_n) \in \Im$ dizisi için

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Im$$

özelliklerine sahip olsun. Bu takdirde $\Im$ sınıfına Ω'da bir "σ-cebir"dir denir. Bir σ-cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalıdır [12].

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük aralıkların σ-cebirine "Borel cebiri" denir. Borel cebirinin her bir elemanına "Borel kümesi" denir [12].

Tanım 2.2.3. Sonuçlarının kümesi belli olan ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen deneylere "olasılık deneyi" veya "stokastik deney" denir [12].

Tanım 2.2.4. Bir stokastik deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine "örnek uzay" denir. Örnek uzayın her alt kümesine "olay" denir [12].

Tanım 2.2.5. $\Im$, $\Omega \neq \emptyset$ örnek uzayı üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir olmak üzere, $P: \Im \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

1) $\forall A \in \Im$ için $P(A) \geq 0$,
2) $P(\Omega) = 1$,
3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \Im$ dizisi için

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerine sahip ise, P fonksiyonuna $\Im$ üzerinde bir "olasılık ölçüsü" denir. $P(A)$ değerine ise, A olayının olasılık ölçüsü veya "A olayının olasılığı" denir [12].

Tanım 2.2.6. $\Omega \neq \emptyset$ bir örnek uzay, Ω'da tanımlanmış bir σ-cebir ve P, $\Im$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \Im, P)$ üçlüsüne bir "olasılık uzayı" denir [12].

Bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayı, bir stokastik deneyin modeli olarak kullanıldığında, $\Im$ σ-cebirindeki kümeler, deney ile ilgili olaylara karşılık gelir. Bir σ-cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalı olduğundan σ-cebirdeki kümeler üzerinde bu işlemler sonucu elde edilen bir küme ise bir olaya karşılık gelir.

Bir stokastik deneyin sonuçlarının kümesi olan örnek uzayın elemanları çok değişik türde olabilir. Rastgele değişkenler yardımıyla örnek uzayın elemanlarına reel sayılar eşlenmekte ve böylece olasılık ölçüleri Borel cebiri üzerindeki olasılık ölçülerine indirgenmiş olmaktadır.

Bir stokastik deney sonucunda değerler alan fonksiyona rastgele değişken denir. Rastgele değişkenler tanım kümesine göre kesikli, mutlak sürekli ve singüler olmak üzere üç kısma ayrılırlar. Örneğin, bir madeni para 10 kez atıldığında yazı gelmesi sayısı kesikli, bir elektrik cihazının bozulmadan çalışma süresi ise sürekli rastgele değişkendir. Rastgele değişken matematiksel olarak aşağıdaki Tanım 2.2.7'deki gibi tanımlanmaktadır:

Tanım 2.2.7. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı, $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \Im$ yani $\Im$-ölçülebilir ise, ξ fonksiyonuna bir "rastgele değişken" denir. Tanımından görüldüğü gibi rastgele değişken aslında, belli özellikleri olan bir değişkenli fonksiyondur. Birçok durumda ikinci bir değişkene de ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, sıvı içerisinde oluşan bir hareket sonucunda bir parçacığın zaman geçtikçe konumu veya hızı veyahut borsadaki herhangi bir hisse senedinin fiyatının zamanla değişmesi, sadece bir rastgele değişken yardımıyla tanımlanamaz. Bu durumda stokastik süreç kavramına ihtiyaç duyulmaktadır[12].

Tanım 2.2.8. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $X(t, \omega)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rastgele değişken ise, bu fonksiyona bir "rastgele fonksiyon" denir. $X(t,\omega), Y(t,\omega)$ sembolleri ile gösterilebilir. Eğer burada $T = \mathbb{R}^{+}$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $X(t,\omega)$ rastgele fonksiyonuna bir "stokastik süreç" denir [12].

Tanım 2.2.9. $X(t,\omega)$ bir stokastik süreç, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ olsun. Bu durumda $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = P\{\omega: X(t_1,\omega) \le x_1, \dots, X(t_n,\omega) \le x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ fonksiyonuna $X(t,\omega)$ stokastik sürecinin n-boyutlu dağılım fonksiyonu denir. Her $t_1, t_2, \dots, t_n$ için n-boyutlu $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$ fonksiyonlarının $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)\}$, $n \ge 1$ ailesine stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları denir. Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir [12]:

1. $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1,x_2 \dots, x_n) = F_{t_1,t_2,\dots,t_{n-1}}(x_1,x_2 \dots, x_{n-1}, \infty)$,
2. $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1,x_2 \dots, x_n) = F_{t_{i_1},t_{i_2},\dots,t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Teorem 2.2.1. $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)\}$, $t_i \in T$, $t_1 < \cdots < t_n$, $n \ge 1$ ailesi, yukarıdaki 1. ve 2. özelliklerine sahip olsun. Bu durumda

$$P\{\omega: X(t_1,\omega) \le x_1, \dots, X(t_n,\omega) \le x_n\} = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$$

dır. Bu teoreme göre, stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini birebir tanımlamaktadır. T ve D kümesinin her biri hem kesikli hem de sürekli olabilir [12].

Tanım 2.2.10. $T \subseteq \mathbb{N}$ ise $X(t,\omega)$'e kesikli zamanlı stokastik süreç, T aralık ise $X(t,\omega)$'e sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Eğer $X(t,\omega)$ stokastik sürecinin D durum (değerler) kümesi kesikli ise bu takdirde sürecin sonlu boyutlu dağılımları $P_{t_1,\dots,t_n}(k_1,\dots,k_n) = P\{\omega: X_{t_1}(\omega) = k_1, \dots, X_{t_n}(\omega) = k_n\}$, $t_n \in T, n = 1,2,\dots,$ olasılıkları ile tanımlanmaktadır [12].

Eğer $X(t,\omega)$ stokastik sürecinin D durum kümesi sayılamayan sonsuz elemana sahip ise bu takdirde stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu:

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} P_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n)du_1 \dots du_n$$

gibi tanımlanmaktadır. Burada $P_{t_1,\dots,t_n}(u_1,\dots,u_n)$, sürecin n-boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu temel kavramlardandır [12].

Tanım 2.2.11. $X(t,\omega)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her t için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| d\, F_t(x) < +\infty$$

ise

$$E(X(t,\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} xd\, F_t(x)$$

integraline $X(t,\omega)$ stokastik sürecinin beklenen değeri denir. Stokastik sürecinin beklenen değeri $m_X(t)$ sembolü ile de gösterilmektedir [12].

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu kısımda literatürde mevcut olan m-konveks, r-konveks, harmonik konveks, p-konveks, (p,h)-konveks fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kısaca sunulmuştur.

3.1.1. m-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda m-konveks fonksiyon tanımı ve bu fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.1.1. $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyonu ve $m\in[0,1]$ olsun. Eğer her $x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için

$$f(tx+m(1-t)y)\ \le t\,f(x)+m(1-t)f(y) \qquad (3.1.1.1)$$

ise bu fonksiyona m-konvekstir denir [16].

Açıkça görülür ki, (3.1.1.1) eşitsizliğinden $m=1$ için konveks fonksiyon ve $m=0$ için starshaped fonksiyon elde edilir.

Teorem 3.1.1.1. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu m-konveks olsun. Eğer her $0\le a<b<\infty$ için $f\in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir [16]:

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx \le min\left\{\frac{f(a)+m\,f(\frac{b}{m})}{2},\frac{f(b)+mf(\frac{a}{m})}{2}\right\}. \qquad (3.1.1.2)$$

3.1.2. r-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda r-konveks fonksiyonun tanımı ve bu fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.2.1. f pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(\,tx + (1-t)y) \leq M_r\,(f(x), f\,(y);\, t) = \begin{cases} (t[f(x)]^r + (1-t)[f(y)]^r)^{1/r}, & r \neq 0 \\ [f(x)]^t[f(y)]^{(1-t)}, & r = 0. \end{cases} \quad (3.1.2.1)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona $[a, b]$ aralığında r-konvekstir denir. Buradan $r = 0$ için log-konveks fonksiyon ve $r = 1$ için konveks fonksiyon elde edilir [17].

Teorem 3.1.2.1. $f: [a, b] \to (0, \infty)$, r-konveks bir fonksiyon ve $0 < r \leq 1$ olsun. Eğer her $a < b$ için $f \in L_1[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [17]:

$$\frac{1}{b-a}\int_b^a f(x)dx \leq \left(\frac{r}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}} ([f(a)]^r + [f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}. \quad (3.1.2.2)$$

3.1.3. Harmonik Konveks Fonksiyon için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda harmonik konveks fonksiyonun tanımı ve bu fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \quad (3.1.3.1)$$

ise bu fonksiyona harmonik konvekstir denir [18].

Teorem 3.1.3.1. $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ harmonik konveks bir fonksiyon ve $a, b \in I$ olsun. Eğer her $a < b$ için $f \in L_1[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [18]:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \quad (3.1.3.2)$$

3.1.4. p-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda p-konveks fonksiyonun tanımı ve bu fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.4.1. $f: I \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ ve $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ için

$$f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad (3.1.4.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyona p-konvekstir denir [19].

Teorem 3.1.4.1. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu p-konveks ve $a, b \in I$ olsun. Eğer her $a < b$ için $f \in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [19]:

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b x^{p-1} f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \qquad (3.1.4.2)$$

3.1.5. (p, h)-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda (p, h)-konveks fonksiyonun tanımı ve bu fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.5.1. $h: (0,1) \subseteq J \to \mathbb{R}$ reel değerli, sıfırdan farklı ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $t \in (0,1)$ ve $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna (p, h)-konvekstir denir [19]:

$$f([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y). \qquad (3.1.5.1)$$

Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik ters çevrilirse bu fonksiyona (p, h)-konkavdır denir [19].

Teorem 3.1.5.1. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (p, h)-konveks ve $a, b \in I$ olsun. Eğer her $a < b$ için $f \in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [19]:

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b x^{p-1} f(x)dx$$

$$\leq \left(f(a) + f(b)\right)\int_0^1 h(t)dt. \qquad (3.1.5.2)$$

3.2. Yöntem

Fonksiyonlar için yukarıda verilen tanım ve teoremleri stokastik süreçlere uygulayabilmek için aşağıdaki kuadratik orta anlamda yakınsama, türevlenebilme ve integrallenebilme çeşidi yöntem olarak kullanılacaktır.

Öncelikle stokastik süreç tanımını hatırlayalım:

Tanım 3.2.1. $(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $X(t,\omega)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rastgele değişken ise, bu fonksiyona bir "rastgele fonksiyon" denir. $X(t,\omega), Y(t,\omega)$ sembolleri ile gösterilebilir. Eğer burada $T = \mathbb{R}^+$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $X(t,\omega)$ rastgele fonksiyonuna bir "stokastik süreç" denir [12].

Bu konunun anlaşılması için olasılık teorisinden aşağıdaki yakınsama türü bilinmelidir:

Tanım 3.2.2. Aynı bir $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rastgele değişkenler dizisi ve X rastgele değişkeni verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n| < \infty$ ve $E|X| < \infty$ olsun. Eğer $0 < r < \infty$ ve $n \longrightarrow \infty$ iken $E|X_n - X|^r = \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^r dP(\omega) \longrightarrow 0$ ise, bu takdirde $\{X_n\}$ dizisi X'ye r. mertebeden orta anlamda yakınsıyor denir ve bu yakınsama $n \longrightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{L_r} X$ şeklinde yazılır. Bu yakınsama çeşidine analizde L_r anlamında yakınsama denir. Özel olarak $r = 2$ olduğunda bu yakınsamaya kuadratik orta yakınsama denir. Bu yakınsama $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$ şeklinde yazılır. Burada l.i.m. "limit in mean" kelimelerinin kısaltılmış yazılımıdır [12].

Buna göre, kuadratik anlamda yakınsama tanımı stokastik süreçler dizisi için aşağıdaki gibi yapılabilir.

Tanım 3.2.3. $(\Omega, \Im, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\{X_n(t,\omega)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi ve $X(t,\omega)$ stokastik süreci verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n(t,\omega)| < \infty$ ve $E|X(t,\omega)| < \infty$ olsun. Eğer $\forall\, t \in T$ için $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, E\,(X_n(t,\omega) - X(t,\omega))^2 = 0$ ise $\{X_n(t,\omega)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi, $X(t,\omega)$ stokastik sürecine kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir ve $\underset{n\to\infty}{l.i.m} X_n(t,\omega) = X(t,\omega)$ ile gösterilir [12].

Tanım 3.2.4. $X(t,\omega)$ stokastik süreci verilsin. Eğer

$$\underset{\Delta\to 0}{l.i.m}\, E(X(t+\Delta) - X(t))^2 = 0 \tag{3.2.1}$$

ise, bu durumda $X(t,\omega)$ stokastik sürecine t noktasında kuadratik orta anlamda süreklidir denir ve bu durum aşağıdaki gibi gösterilir[12]:

$$\underset{\Delta\to 0}{l.i.m}\, X(t+\Delta) = X(t).$$

Tanım 3.2.5. $(\Omega,\Im,P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t,\omega)$ stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise, aşağıdaki limite $X(t) = X(t,\omega)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda türevi denir.

$$\underset{\Delta\to 0}{l.i.m} \frac{X(t+\Delta) - X(t)}{\Delta} = X'(t) \tag{3.2.2}$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\underset{\Delta\to 0}{l.i.m}\, E\left[\frac{X(t+\Delta) - X(t)}{\Delta} - X'(t)\right]^2 = 0. \tag{3.2.3}$$

(3.2.2) limitinin varlığı ve tekliği için bir koşulun sağlanması gereklidir. Bu limitin varlığı için gerekli koşul ise $X(t,\omega)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır [12].

Tanım 3.2.6. Olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t,\omega)$ stokastik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $[u,v]$ aralığının parçalanışı $u = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = v$,$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1,2,\dots,n$ olmak üzere $\underset{n\to\infty}{l.i.m} \max_{k\le n} |\Delta t_k| = 0$ olsun. Bu durumda

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m} \sum_{k=1}^{n} X(t_k,\omega)\Delta t_k = \int_u^v X(t,\omega)dt$$

eşitliğine $X(t,\omega)$ stokastik fonksiyonunun $[u,v]$ aralığındaki integrali denir [12].

Bu tezde çalışma boyunca bütün yakınsama, süreklilik, türev ve integral işlemleri kuadratik orta anlamda kullanılmıştır.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım özgün çalışmamızı, ikinci kısım ise bu konu ile ilgili mevcut literatür çalışmalarını içermektedir.

4.1. Bazı Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri-I

Bu kısımda m-konveks, r-konveks, harmonik konveks, p-konveks ve (p,h) -konveks stokastik süreçler özgün olarak tanımlanmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.1.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir stokastik süreç ve $u, v \in I$ olsun. Bu taktirde her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot)d\lambda = \int_0^1 X(\lambda v + (1-\lambda)u,\cdot)d\lambda = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt$$

eşitliği mevcuttur.

İspat. $\frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt$ integralinde $t = \frac{uv}{\lambda u+(1-\lambda)v}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt = \int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot)d\lambda$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt = \int_0^1 X(\lambda v + (1-\lambda)u,\cdot)d\lambda$$

dır.

4.1.1. m-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda m-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.1.1.1. $X: [0,v] \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $t,s \in [0,v]$ olsun. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$X(\lambda t + m(1-\lambda)s,\cdot) \leq \lambda X(t,\cdot) + m(1-\lambda)X(s,\cdot) \qquad (4.1.1.1)$$

şartını sağlanıyorsa bu sürece m-konvekstir denir.

Açıkça görülür ki, (4.1.1.1) eşitsizliğinden $m = 1$ için konveks stokastik süreç ve $\lambda = 1/2$ için Jensen m-konveks stokastik süreç elde edilir.

Teorem 4.1.1.1. $X: [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ süreci m-konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer her $0 \leq u < v < \infty$ için $X \in L_1[u,v]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq min\left\{\frac{X(u,\cdot) + m\,X(\frac{v}{m},.)}{2}, \frac{X(v,\cdot) + mX(\frac{u}{m},.)}{2}\right\}. \qquad (4.1.1.2)$$

İspat. X , m-konveks bir stokastik süreç olduğundan her $t,s \geq 0$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\,(\lambda t + m(1-\lambda)s,\cdot) \leq \lambda X(t,\cdot) + m(1-\lambda)X(s,\cdot)$$

dır. Buradan $t = u$ ve $s = v$ için

$$X\,(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) \leq \lambda X(u,\cdot) + m(1-\lambda)X\left(\frac{v}{m},\cdot\right) \qquad (4.1.1.3)$$

$$X(\lambda v + (1-\lambda)u,\cdot) \leq \lambda X(v\,,\cdot) + m(1-\lambda)X\left(\frac{u}{m},\cdot\right) \qquad (4.1.1.4)$$

elde edilir. Yukarıdaki son iki eşitsizlik $[0,1]$ aralığında λ parametresine göre integrallenirse

$$\int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot)d\lambda \leq \int_0^1 \lambda X(u,\cdot) + m(1-\lambda)X\left(\frac{v}{m},\cdot\right)d\lambda$$

$$= X(u,\cdot)\int_0^1 \lambda d\lambda + mX\left(\frac{v}{m},\cdot\right)\int_0^1 (1-\lambda)d\lambda$$

$$= \frac{\left[X(u,\cdot) + mX\left(\frac{v}{m},\cdot\right)\right]}{2}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 X(\lambda v + (1-\lambda)u,\cdot)d\lambda \leq \frac{\left[X(v,\cdot) + mX\left(\frac{u}{m},\cdot\right)\right]}{2}$$

dır. Son olarak Lemma 4.1.1'den

$$\int_0^1 X\left(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot\right)d\lambda=\int_0^1 X\left(\lambda v+(1-\lambda)u,\cdot\right)d\lambda=\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t)dt$$

eşitsizlikleri kullanılırsa (4.1.1.2) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.1.2. $X:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$ m-konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer her $0\le u<v$ için $X\in L_1[u,v]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\le\frac{1}{v-u}\int_u^v\frac{X(t,\cdot)+mX\left(\frac{t}{m},\cdot\right)}{2}dt$$

$$\le\frac{m+1}{4}\left[\frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}+m\frac{X\left(\frac{u}{m},\cdot\right)+X\left(\frac{v}{m},\cdot\right)}{2}\right].\quad(4.1.1.5)$$

İspat. X stokastik süreci her $t,s\in[0,\infty)$ için m-konveks olduğundan aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$X\left(\frac{t+s}{2},\cdot\right)\le\frac{1}{2}\left[X(t,\cdot)+mX\left(\frac{s}{m},\cdot\right)\right]$$

Burada $t=\lambda u+(1-\lambda)v$, $s=(1-\lambda)u+\lambda v$ değerleri yazılırsa

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\le\frac{1}{2}\left[X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)+mX\left((1-\lambda)\frac{u}{m}+\lambda\frac{v}{m},\cdot\right)\right]$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizlik $[0,1]$ aralığında λ parametresine göre integrallenirse

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right)\le\frac{1}{2}\left[\int_0^1 X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)d\lambda+m\int_0^1 mX\left((1-\lambda)\frac{u}{m}+\lambda\frac{v}{m},\cdot\right)d\lambda\right]$$

elde edilir. Lemma 4.1.1'den

$$\int_0^1 X(\lambda u+(1-\lambda)v,\cdot)d\lambda=\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt$$

olduğu bilinmektedir. Buradan

$$\int_0^1 X\left(\lambda\frac{u}{m}+(1-\lambda)\frac{v}{m},\cdot\right)d\lambda=\frac{m}{v-u}\int_{\frac{u}{m}}^{\frac{v}{m}}X(t,\cdot)dt=\frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\frac{t}{m},\cdot\right)dt$$

elde edilir. Son iki eşitlik üstteki eşitsizlikte yerine yazılırsa, (4.1.1.5) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. X, m- konveks olduğundan $t=u,s=v$ için

$$\frac{1}{2}\left[X(\lambda u+(1-\lambda)v,.)+mX\left((1-\lambda)\frac{u}{m}+\lambda\frac{v}{m},.\right)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[\lambda X(u,.)+m(1-\lambda)X\left(\frac{v}{m},.\right)+m(1-\lambda)X\left(\frac{u}{m},.\right)+m^2\lambda X\left(\frac{v}{m^2},.\right)\right] \quad (4.1.1.6)$$

dır. Yukarıdaki son eşitsizlik [0,1] aralığında λ parametresine göre integrallenirse

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v\frac{X(t,.)+mX\left(\frac{t}{m},.\right)}{2}dt$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[\frac{X(u,.)+mX\left(\frac{v}{m},.\right)}{2}+\frac{mX\left(\frac{u}{m},.\right)+m^2X\left(\frac{v}{m^2},.\right)}{2}\right] \quad (4.1.1.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$X\left(\frac{t+s}{2},\cdot\right)\leq\frac{1}{2}\left[X(t,\cdot)+mX\left(\frac{s}{m},\cdot\right)\right]$$

eşitsizliğinde $t=\lambda v+(1-\lambda)u$, $s=(1-\lambda)v+\lambda u$ değerleri yazılır ve Lemma (4.1.1) kullanılırsa

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v\frac{X(t,.)+mX\left(\frac{t}{m},.\right)}{2}dt$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[\frac{X(v,.)+mX\left(\frac{u}{m},.\right)}{2}+\frac{mX\left(\frac{v}{m},.\right)+m^2X\left(\frac{u}{m^2},.\right)}{2}\right]$$

elde edilir. (4.1.1.6) ve (4.1.1.7) taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v\frac{X(t,.)+mX\left(\frac{t}{m},.\right)}{2}dt$$

$$\leq\frac{1}{8}\left[X(u,.)+X(v,.)+2m\left(X\left(\frac{u}{m},.\right)+X\left(\frac{v}{m},.\right)\right)\right.$$

$$\left.+m^2\left(X\left(\frac{u}{m^2},.\right)+X\left(\frac{v}{m^2},.\right)\right)\right]$$

$$\leq\frac{m+1}{4}\left[\frac{X(u,.)+X(v,.)}{2}+m\frac{X\left(\frac{u}{m},.\right)+X\left(\frac{v}{m},.\right)}{2}\right]$$

dır. Böylece teoremdeki eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir.

4.1.2. r-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda r-konveks stokastik süreç tanımı, bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.1.2.1. $X: [u,v] \times \Omega \to (0,\infty)$ pozitif bir stokastik süreç ve $0 < r \leq 1$ olsun. Eğer her $t,s \in [u,v]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq M_r(X(t,\cdot), X(s,\cdot);\lambda)$$

$$= \begin{cases} (\lambda[X(t,\cdot)]^r + (1-\lambda)[X(s,\cdot)]^r)^{1/r}, & r \neq 0 \\ [X(t,\cdot)]^{\lambda}[X(s,\cdot)]^{(1-\lambda)} & , r = 0. \end{cases} \tag{4.1.2.1}$$

şartı sağlanıyorsa bu sürece r-konvekstir denir. Açıkça görülmektedir ki, (4.1.2.1) eşitsizliği ile $r = 0$ için log-konveks stokastik süreç ve $r = 1$ için konveks stokastik süreç elde edilir.

Teorem 4.1.2.1. $X: [u,v] \times \Omega \to (0,\infty)$ r-konveks bir stokastik süreç ve olsun. Eğer her $0 \leq u < v < \infty$ için $X \in L_1[u,v]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq \left(\frac{r}{r+1}\right)^{\frac{1}{r}} ([X(u,\cdot)]^r + [X(v,\cdot)]^r)^{\frac{1}{r}}.$$

İspat. X, r-konveks stokastik süreç ve $r > 0$ olduğundan her $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq (\lambda[X(t,\cdot)]^r + (1-\lambda)[X(s,\cdot)]^r)^{1/r}$$

dır Buradan $t = u$, $s = v$ olmak üzere Lemma 4.1.1 ile

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt = \int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot)d\lambda$$

$$\leq \int_0^1 (\lambda[X(u,\cdot)]^r + (1-\lambda)[X(v,\cdot)]^r)^{1/r} d\lambda$$

dır. Burada Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\int_0^1 (\lambda[X(u,\cdot)]^r + (1-\lambda)[X(v,\cdot)]^r)^{\frac{1}{r}} d\lambda$$

$$\leq \left[\left(\int_0^1 \lambda^{\frac{1}{r}} X(u,\cdot)d\lambda\right)^r + \left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\frac{1}{r}} X(v,\cdot)d\lambda\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\frac{r}{r+1}[X(u,\cdot)]^r + \frac{r}{r+1}[X(v,\cdot)]^r\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$= \left(\frac{r}{r+1}\right)^{1/r} ([X(u,\cdot)]^r + [X(v,\cdot)]^r)^{1/r}.$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \le \left(\frac{r}{r+1}\right)^{1/r} ([X(u,\cdot)]^r + [X(v,\cdot)]^r)^{1/r}$$

dır.

4.1.3. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda, harmonik konveks stokastik süreçler tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.1.3.1. $X: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \Omega \to \mathbb{R}$ pozitif bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X'e harmonik konveks stokastik süreç denir:

$$X\left(\frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s},\cdot\right) \le \lambda X(s,\cdot) + (1-\lambda)X(t,\cdot). \qquad (4.1.3.1)$$

Lemma 4.1.3.1. $X: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \Omega \to \mathbb{R}$ pozitif ve integrallenebilir bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Bu taktirde her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v},\cdot\right)d\lambda = \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u},\cdot\right)d\lambda = \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt$$

eşitliği mevcuttur.

İspat. $\frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt$ integralinde $t = \frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt = \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v},\cdot\right)d\lambda$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt = \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u},\cdot\right)d\lambda$$

dır.

Teorem 4.1.3.1. $X: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Eğer her $u, v \in I$ için $X \in L_1[u, v]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X\left(\frac{2uv}{u+v},\cdot\right) \leq \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt \leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}. \qquad (4.1.3.2)$$

İspat. $X: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik stokastik süreç olmak üzere her $t, s \in I$ için (4.1.3.1) eşitsizliğinde $\lambda = 1/2$ yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$X\left(\frac{2ts}{t+s},\cdot\right) \leq \frac{X(t,\cdot)+X(s,\cdot)}{2}.$$

Burada $t = \frac{uv}{\lambda u+(1-\lambda)v}$, $s = \frac{uv}{\lambda v+(1-\lambda)u}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$X\left(\frac{2uv}{u+v},\cdot\right) \leq \frac{X\left(\frac{uv}{\lambda u+(1-\lambda)v},\cdot\right)+X\left(\frac{uv}{\lambda v+(1-\lambda)u},\cdot\right)}{2}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizlik [0,1] aralığında λ parametresine göre integrallenirse

$$X\left(\frac{2uv}{u+v},\cdot\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v+(1-\lambda)u},\cdot\right)d\lambda + \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u+(1-\lambda)v},\cdot\right)d\lambda\right] \qquad (4.1.3.3)$$

elde edilir. Buradan Lemma 4.1.3.1 ile (4.1.3.2) eşitsizliğinin sol tarafını elde edilir.

X, harmonik konveks stokastik süreç olmak üzere her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X\left(\frac{ts}{\lambda t+(1-\lambda)s},\cdot\right) \leq \lambda X(s,\cdot)+(1-\lambda)X(t,\cdot)$$

dır. Buradan $t = u$, $s = v$ değişken dönüşümü ile Lemma (4.1.3.1) kullanılarak

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u+(1-\lambda)v},\cdot\right)d\lambda = \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v+(1-\lambda)u},\cdot\right)d\lambda = \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt$$

olduğu görülür. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa (4.1.3.2) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

Son olarak, $X: (0,\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecinde $X(u,\cdot) = 1$ olsun. Bu durumda her $u, v \in (0,\infty)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$1 = X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v},\cdot\right) = \lambda X(v,\cdot) + (1-\lambda)X(u,\cdot) \;= 1$$

dır. Bu nedenle X stokastik süreci $(0,\infty)$ üzerinde harmonik konvekstir. Buradan

$$X\left(\frac{2uv}{u+v},\cdot\right) = 1\,, \qquad \frac{uv}{v-u}\int_u^v \frac{X(t,\cdot)}{t^2}dt = 1, \qquad \frac{X(u,.) + X(v,.)}{2} = 1$$

dır.

4.1.4. p-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda p-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.1.4.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t, s \in I$, $\lambda \in (0,1)$ ve $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ için

$$X\left([\lambda t^p + (1-\lambda)s^p]^{1/p},\cdot\right) \leq \lambda X(t,\cdot) + (1-\lambda)X(s,\cdot) \qquad (4.1.4.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu sürece p-konvekstir denir.

Lemma 4.1.4.1. $X: I \times \Omega \to R$ integrallenebilir bir p-konveks stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $u, v \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$\frac{p}{v^p - u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt \;=\; \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{1/p},\cdot\right)dy$$

eşitliği mevcuttur.

İspat. $\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt$ integralinde $t^p = \frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{p}{v^p - u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt \;=\; \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{1/p},\cdot\right)dy$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ p-konveks bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $X \in L_1[u,v]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{1/p},\cdot\right) \leq \frac{p}{v^p - u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt$$

$$\leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}. \tag{4.1.4.2}$$

İspat. Tanım 4.1.4.1'den $\lambda = \frac{v-y}{v-u}$, $t = u, s = v$ için

$$X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{1/p},\cdot\right) \leq \left(\frac{y-u}{v-u}\right)X(v,\cdot) + \left(\frac{v-y}{v-u}\right)X(u,\cdot)$$

dır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı y parametresine göre integrallenirse

$$\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dy \leq X(v,\cdot)\int_u^v \left(\frac{y-u}{v-u}\right)dy + X(u,\cdot)\int_u^v \left(\frac{v-y}{v-u}\right)dy$$

$$\leq (v-u)\frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}$$

elde edilir. Buradan Lemma 4.1.4.1 ile

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{1/p},\cdot\right)dy = \frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt$$

$$\leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{2}$$

dır. Böylece (4.1.2.1) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Şimdi

$$\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt = \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{1/p},\cdot\right)dy$$

integralinde $y = \frac{1}{2}(u+v) + t$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt = \frac{1}{v-u}\int_{-\frac{1}{2}(v-u)}^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p) + \frac{v^p-u^p}{v-u}t\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dt$$

$$= \frac{1}{v-u}\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p) + \frac{v^p-u^p}{v-u}t\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dt$$

$$+\frac{1}{v-u}\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p) - \frac{v^p-u^p}{v-u}t\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dt$$

$$\geq \frac{2}{v-u}\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p)\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dt = X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p)\right]^{1/p},\cdot\right)$$

elde edilir. Böylece (4.1.2.1) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

4.1.5. (p,h)-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda (p,h)-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.1.5.1. $h: (0,1) \subseteq J \to \mathbb{R}$ reel değerli, sıfırdan farklı ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $t, s \in \mathrm{I}$ olsun. Eğer her $\lambda \in (0,1)$ ve $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa bu sürece (p,h)-konvekstir denir:

$$X\left([\lambda t^p + (1-\lambda)s^p]^{\frac{1}{p}}, \cdot\right) = h(\lambda)X(t,\cdot) + h(1-\lambda)X(s,\cdot) \qquad (4.1.5.1)$$

Ayrıca (p,h)-konveks stokastik süreç tanımında $h = 1$ alınırsa p-konveks stokastik süreç elde edilir.

Teorem 4.1.5.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ (p,h)-konveks bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $X \in L_1[u,v]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} X\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{1/p}, \cdot\right) \leq \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t,\cdot)dt$$

$$\leq \left(X(u,\cdot) + X(v,\cdot)\right) \int_0^1 h(\lambda)d\lambda. \quad (4.1.5.2)$$

İspat. Tanım 4.1.5.1'den $\lambda = \frac{v-y}{v-u}$, $t = u$ ve $s = v$ için

$$X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{1/p}, \cdot\right) \leq h\left(\frac{y-u}{v-u}\right)X(v,\cdot) + h\left(\frac{v-y}{v-u}\right)X(u,\cdot)$$

dır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı y parametresine göre integrallenirse

$$\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{\frac{1}{p}}, \cdot\right)dy$$

$$\leq X(v,\cdot)\int_u^v h\left(\frac{y-u}{v-u}\right)dy + X(u,\cdot)\int_u^v h\left(\frac{v-y}{v-u}\right)dy$$

$$= (v-u)\left(X(u,\cdot) + X(v,\cdot)\right)\int_0^1 h(\lambda)d\lambda$$

elde edilir. Buradan Lemma 4.1.4.1 ile

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p + \frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{\frac{1}{p}}, \cdot\right)dy = \frac{p}{v^p - u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt$$

$$\leq \left(X(u,\cdot)+X(v,\cdot)\right)\int_0^1 h(\lambda)d\lambda$$

dır. Böylece (4.1.5.1) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Şimdi

$$\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt = \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\left[\frac{y-u}{v-u}v^p+\frac{v-y}{v-u}u^p\right]^{1/p},\cdot\right)dy$$

integralinde $y=\frac{1}{2}(u+v)+t$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{p}{v^p-u^p}\int_u^v t^{p-1}X(t,\cdot)dt = \frac{1}{v-u}\int_{-\frac{1}{2}(v-u)}^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p)+\frac{v^p-u^p}{v-u}t\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dt$$

$$=\frac{1}{v-u}\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p)+\frac{v^p-u^p}{v-u}t\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dt$$

$$+\frac{1}{v-u}\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p)-\frac{v^p-u^p}{v-u}t\right]^{\frac{1}{p}},\cdot\right)dt$$

$$\geq \frac{1}{(v-u)h(\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{1}{2}(v-u)} X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p)\right]^{1/p},\cdot\right)dt$$

$$=\frac{1}{2h(\frac{1}{2})}X\left(\left[\frac{1}{2}(u^p+v^p)\right]^{1/p},\cdot\right)$$

elde edilir. Böylece (4.1.2.1) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir.

4.2. Bazı Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri-II

Bu kısımda literatürde mevcut olan konveks, log-konveks, preinveks konveks, s-konveks, φ-konveks ve h-konveks stokastik süreçlerle ilgili yapılan çalışmalar kısaca sunulmuştur.

4.2.1. Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.2.1.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde $\lambda \in [0,1]$ ve her $t, s \in I$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece konvekstir denir [21]:

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + (1-\lambda) X(s, \cdot). \qquad (4.2.1.1)$$

Eğer eşitsizlikte $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa bu sürece Jensen-convex stokastik süreç denir.

Lemma 4.2.1.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $A, B: \Omega \to R$ rastgele değişkenler olsun. Eğer $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ ve her $[a, b] \in I$ ve $a < b$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ ise

$$\int_a^b X(t, \cdot) dt = A(\cdot) \frac{b^2 - a^2}{2} + B(\cdot)(b - a) \qquad (4.2.1.2)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$P - \lim_{t \to t_0^-} \frac{X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot)}{t - t_0} = X'_-(t_0, \cdot),$$

$$P - \lim_{t \to t_0^+} \frac{X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot)}{t - t_0} = X'_+(t_0, \cdot)$$

olmak üzere her $t, s \in I$ ve $t < s$ için

$$X'_-(t, \cdot) \leq X'_+(t, \cdot) \leq X'_-(s, \cdot) \leq X'_+(s, \cdot)$$

eşitsizliği mevcuttur [21].

Lemma 4.2.1.2. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir konveks stokastik süreç, $A: \Omega \to R$ bir rasgele değişken ve $t_0 \in I^0$ olsun. Bu takdirde $t \in I$ için

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot)(t - t_0) + X(t_0, \cdot)$$

eşitsizliği elde edilir [21].

Teorem 4.2.1.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ konveks bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $u, v \in I$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [21]:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

4.2.2. Log-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda log-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.2.2.1. $X: I \times \Omega \to [0, \infty)$ bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece log-konvekstir denir [22]:

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s, \cdot) \leq [X(t,\cdot)]^{\lambda}[X(s,\cdot)]^{(1-\lambda)}.$$

Teorem 4.2.2.1. $X: I \times \Omega \to (0, \infty)$ log-konveks bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $u, v \in I$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq exp\left[\frac{1}{v-u}\int_u^v ln[X(t,\cdot)]dt\right] \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v G(X(t,\cdot), X(u+v-t,\cdot))dt$$
$$\leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq L\big(X(u,\cdot), X(v,\cdot)\big)$$

Burada $L(p,q)$ pozitif reel sayıların logaritmik ortalamasıdır [22]:

$$L(p,q) = \begin{cases} \dfrac{p-q}{lnp - lnq}, & p \neq q \\ p \quad , & p = q \end{cases}.$$

4.2.3. Preinveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda preinvex stokastik süreç tanımı ve bu süreç için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.2.3.1. $I \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : IxI \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $v + \lambda\eta(u,v) \in I$ ise I ya η'ya göre inveks bir küme denir. Her konveks kümenin $\eta(u,v) = u - v$ fonksiyonuna göre invex olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan inveks kümeler mevcuttur [23].

Her konveks fonksiyon $\eta(u,v) = u - v$ fonksiyonuna göre preinveks fonksiyondur, ancak bunun tersi genelde doğru değildir. η fonksiyonu üzerine aşağıdaki koşul Mohan ve Neogy tarafından konulmuştur [24].

C Koşulu: $I \subset \mathbb{R}^n$, $\eta : IxI \to \mathbb{R}$'ya göre inveks bir küme olsun. $\forall\, v, u \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\eta(u, u + \lambda\eta(v,u)) = -\lambda\eta(v,u)$$
$$\eta\big(v, u + \lambda\eta(v,u)\big) = (1-\lambda)\eta(v,u)$$

dır. C koşulundan her $v, u \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\eta\big(u + \lambda_2\, \eta(v,u), u + \lambda_1\, \eta(v,u)\big) = (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(v,u). \quad (4.2.3.1)$$

Tanım 4.2.3.2. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik sürecine $\forall\, v, u \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için η'ya göre preinvekstir denir:

$$X(u + \lambda\eta(v,u),\cdot) \leq (1-\lambda)X(u,\cdot) + \lambda X(v,\cdot)\,. \qquad (4.2.3.2)$$

Eğer λ sayısı $(0,1)$ arasında sabit bir sayı ise süreç λ-preinvex stokastik süreç ve $\lambda = 1/2$ ise, süreç Jensen-preinvex stokastik süreç olarak adlandırılır. Eğer $\eta(v,u) = v - u$ seçersek, $X(t,\cdot)$ bir konveks stokastik süreç olur [24].

Tanım 4.2.3.3. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda türevlenebilir stokastik süreç olmak üzere her $t, t_0 \in I$ için

$$X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot) \geq X'(t_0,\cdot)\eta(t,t_0)$$

ise sürece invekstir denir. Ayrıca $t \to t_0$ için

$$P\left\{\left|\frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} - X'(t_0,\cdot)\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{E\left[\left(\frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} - X'(t_0,\cdot)\right)^2\right]}{\varepsilon^2} \to 0$$

dır. Burada $\eta(t,t_0) = -\eta(t_0,t)$ ve her $t, t_0 \epsilon I^0$ için $\eta(t,t_0) \geq 0$ olmak üzere sağ ve sol türev işlemler şu şekilde tanımlanır [24]:

$$X'_+(t_0,\cdot) = P - \lim_{t \to t_0^+} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} = P - \lim_{\substack{t \geq t_0 \\ t_0 + \eta(t,t_0) \leq t}} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0},$$

$$X'_-(t_0,\cdot) = P - \lim_{t \to t_0^-} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0} = P - \lim_{\substack{t \leq t_0 \\ t + \eta(t_0,t) \leq t_0}} \frac{X(t,\cdot) - X(t_0,\cdot)}{t - t_0}.$$

Lemma 4.2.3.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ preinvex stokastik süreci aşağıdaki koşullardan herhangi birini sağlasın.

1. Sürecin t_0'da türevi mevcuttur,

2. X azalan ve t_0'da soldan türevi varsa,
3. X, t_0'da kuadratik orta anlamda türevlenebilirdir.

Bu takdirde $A: \Omega \to \mathbb{R}$ rasgele değişken olmak üzere her $t \in I$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [24]:

$$X(t,\cdot) \geq A(\cdot)\eta(t,t_0) + X(t_0,\cdot).$$

Lemma 4.2.3.2. $A(\cdot)B(\cdot)$ birer rasgele değişken, $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ preinvex bir stokastik süreç ve $X(t,\cdot) = A(\cdot)\eta(t,u) + B(\cdot)$ olsun. Eğer $E[A^2]$, $E[B^2] < \infty$ ve $[u, u + \eta(v,u)] \subset I$ ise

$$\int_u^{u+\eta(v,u)} X(t,\cdot)dt = A(\cdot)\frac{\eta(v,u)^2}{2} + B(\cdot)\eta(v,u)$$

eşitliği elde edilir [24].

Teorem 4.2.3.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ preinveks stokastik süreci Lemma 4.2.3.1'in koşullarından herhangi birini sağlasın. Bu takdirde her $u, v \in I$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [24]:

$$X\left(\frac{2u + \eta(v,u)}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{\eta(v,u)} \int_u^{u+\eta(v,u)} X(t,\cdot)dt \leq \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2}.$$

4.2.4. s-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda birinci anlamda ve ikinci anlamda s-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

a) Birinci anlamda s-Konveks Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Tanım 4.2.4.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $s \in (0,1]$, $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha^s + \beta^s = 1$ olsun. Her $u, v \geq 0$ için

$$X(\alpha u + \beta v,\cdot) \leq \alpha^s X(u,\cdot) + \beta^s X(v,\cdot)$$

eşitsizliği mevcut ise bu sürece birinci anlamda s-konvekstir denir. Bu s-konveks stokastik süreç sınıfı genellikle C_s^1 olarak bilinir [25]. Birinci anlamda s-konveks stokastik süreçlerde $s = 1$ için konvekslik ve $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ için Jensen-konvekslik kolayca elde edilir [26].

Lemma 4.2.4.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $u, v \in \mathrm{I}$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [25]:

$$\int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot)d\lambda = \int_0^1 X((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot)d\lambda.$$

Teorem 4.2.4.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ birinci anlamda s-konveks stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $u, v \in \mathrm{I}$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [25]:

$$X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt.$$

a) **İkinci anlamda s-Konveks için Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler**

Tanım 4.2.4.2. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç, $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha + \beta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olsun. Bu taktirde her $u, v \geq 0$ için

$$X(\alpha u + \beta v,\cdot) \leq \alpha^s X(u,\cdot) + \beta^s X(v,\cdot)$$

eşitsizliği mevcut ise bu sürece ikinci anlamda s-konvekstir denir. Bu s-konveks stokastik süreç sınıfı genellikle C_s^2 olarak bilinir. İkinci anlamda s-konveks stokastik süreçlerde s-konveksliği $s = 1$ için alırsak konvekslik kolayca elde edilir [20].

Lemma 4.2.4.2. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde her $u, v \in \mathrm{I}$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur [20]:

$$\int_0^1 X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot)d\lambda = \int_0^1 X((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot)d\lambda.$$

Teorem 4.2.4.2. Eğer $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}^+$ stokastik süreci ikinci anlamda s-konveks ise, her $u, v \in \mathrm{I}$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [20]:

$$2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq \frac{X(u,\cdot)+X(v,\cdot)}{s+1}.$$

4.2.5. φ-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda φ-konveks stokastik süreç tanımı ve φ-konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.2.5.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v),\cdot) \leq \lambda X(\varphi(u),\cdot) + (1-\lambda)X(\varphi(v),\cdot)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa X'e φ-konveks stokastik süreç denir [26].

Lemma 4.2.5.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci olsun. Bu süreç $(0,1) \times \Omega$ aralığının her noktası üzerinde integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\int_0^1 X(\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v),\cdot)d\lambda = \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v),\cdot)d\lambda.$$

Teorem 4.2.5.1. $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ ortalama karelerin sürekli fonksiyonu olsun. Bu taktirde $X: T \times \Omega \to \mathbb{R}$ φ-konveks stokastik süreci için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [27]:

$$X\left(\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} X(t,\cdot)dt \leq \frac{1}{2}[X(\varphi(a),\cdot) + (\varphi(b),\cdot)]. \quad (4.2.5.1)$$

4.2.6. h-Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda h-konveks stokastik süreç tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.2.6.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $t, s \in I$, $\lambda \in (0,1)$ ve $h \neq 0$ için

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq h(\lambda)X(t,\cdot) + h(1-\lambda)X(s,\cdot) \quad (4.2.6.1)$$

şartı sağlanıyorsa bu sürece h-konvekstir denir [28].

Sonuç 4.2.6.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ stokastik süreci için Tanım 4.2.6.1'de

1) $h(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ için

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq \frac{X(t,\cdot)}{\lambda} + \frac{X(s,\cdot)}{1-\lambda}$$

eşitsizliği ile Godunova-Levin stokastik süreci,

2) $h(\lambda) = 1$ için

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq X(t,\cdot) + X(s,\cdot)$$

eşitsizliği ile P-stokastik süreci

3) (p, h)-konveks stokastik sürecinde $p = 1$ için

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s,\cdot) \leq h(\lambda)\, X(t,\cdot) + h(1-\lambda) X(s,\cdot)$$

eşitsizliği ile h-konveks stokastik süreci elde edilir.

Teorem 4.2.6.1. $X: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir bir h-konveks stokastik süreç ve $h \neq 0$ için $h: (0,1) \to R$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde her $u, v \in I$ ve $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [28]:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,\cdot)dt \leq \left(X(u,\cdot) + X(v,\cdot)\right)\int_0^1 h(\lambda)\, d\lambda.$$

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında literatürde mevcut olan konveks, log-konveks, preinveks, s-konveks, h-konveks ve φ-konveks stokastik süreçler tanıtılmış ve bu süreçler için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler kısaca sunulmuştur. Bu çalışmanın özgün kısmı olan araştırma bulgularında ise m-konveks, r-konveks, harmonik konveks, p-konveks ve (p, h)-konveks stokastik süreçler tanımlanmış ve bu süreçler için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmada bulunun sonuçlar, düzgün dağılıma sahip çeşitli konveks stokastik süreçlerin beklenen değeri ile maximum ve minimum değerlerinin karşılaştırılmasında gereklidir. Yani bu tezde ele alınan çeşitli konveks stokastik süreçler için elde edilen Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri, olasılıksal olarak kısaca aşağıdaki gibi yorumlamak mümkündür:

$$X(ET,\cdot) \leq_{st} EX(T,\cdot) \leq_{st} EX(T^{*},\cdot), \quad T \in \mathcal{C}_{st}$$

Burada E beklenen değer, T (T^{*}) [a,b] aralığında ({a,b} kümesi üzerinde) düzgün dağılım sahip bir rastgele değişken, $\mathcal{C}_{st}$ [a,b] üzerinde tanımlı bütün reel konveks stokastik süreçler kümesi ve $\leq_{st}$ ise rastgele değişkenlerin konveks sıralaması olarak tanımlanır.

KAYNAKLAR

[1] Euclid, The Thirteen Books of Elements III, (Trans: Thomas L. Heath), 2nd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1908.ww.google.com., Erişim Tarihi: 05.10.2017.

[2] Berggren, J.L., A lacuna in Book I of Archimedes Sphere and Cylinder. Historia Mathematica 4, 1-5,1977.

[3] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Polya, G. Znequalities (2nd ed.), Cambridge U.P., Cambridge,1952-1961.

[4] Beckenbach, E.F. & Bellman, R., Inequalities. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin,

[5] Mitrinović, D. S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York

[6] Pecaric, J., Konveksne funkcije: nejednakosti, Naucna knjiga, Beograd, 243 pp., 1987.

[7] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. & Fink, A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp,Dordrecht/Boston/London, 1991.

[8] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. & Fink, A.M., Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.

[9] Pachpatte, B.G., Mathematical Inequalities, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2005.

[10] Niculescu, C. & Persson, L.E., Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media, Inc,2006.

[11] Dragomir, S.S. & Pearce, C.E.M., Selected topics on Hermite-Hadamard inequality and applications, Victoria University, Melbourne,2000.

[12] Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisi, KTÜ Matbaası,Trabzon, 2010.

[13] Nikodem, K., On convex stochastic processes, Aequat. Math. 20, 184-197,1980.

[14] Yıldız,Ç., n. Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Erzurum, 2014.

[15] Josip E., Pecaric J.E, Proschan, F. & Thong, Y.L., Convex Functions, Parital Orderings, and Statistical Applications Mathematics in Science and Engineering Series, Academic Press, 1992.

[16] Dragomir, S., "On some new inequalities of HermiteHadamard type for m−convex functions." , Tamkang Journal of Mathematics, 33(1), 45–55, 2002.

[17] Ngoc, N.P.N, Vinh, N.V, Hien, P.T.T. , Integral inequalities of Hadamard type for r-convex functions.International Mathematical Forum, 4(35), 1723-1728, 2009.

[18] İşcan, İ., Hermıte-Hadamard type Inequalities For Harmonically Convex Functions, Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 43 (6), 935-942,2014.

[19] Fang, Z.B., & Shi,R., "On the (p,h)-convex function and some integral inequalities" , J. Inequal. Appl. Article45, 16 pp.,2014.

[20] Set E., Tomar M. and Maden S., Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the second sense. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2 (6): 202-207, 2014.

[21] Kotrys, D., Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes, Aequationes Mathematicae, 83, 143-151, 2012.

[22] Tomar, M., Set, E., & Okur Bekar, N., "On Hermite-Hadamard-Type Inequalities for Strongly-Log Convex Stochastic Processes", The Journal of Global Engineering Studies, 1(2), pp. 53-61,2014.

[23] Antczak T., A new method of solving nonlinear mathematical programming problems involving r-invex functions, J. Math. Anal. Appl. (311) 313–323,2005.

[24] Akdemir G.H., Okur Bekar, N., & İşcan, İ., On Preinvexity for Stochastic Processes, Statistics, Journal of the Turkish Statistical Association, 7(1), pp. 15-22, 2014.

[25] Maden S., Tomar M. and Set E., Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the first sense. Pure and Applied Mathematics Letters, 1-7,2014.

[26] Youness E. A., E- Convex Sets, E- Convex Functions and E- Convex Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, 102(2): 439-450. 23,1999.

[27] Bodur, B., "Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve φ-Konveks Fonksiyonlar", Yükseklisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Afyon Kocatepe Üniversitesi,2016.

[28] Barraez, D., Gonzalez, L., Merentes, N., Moros, A. M., On h-convex stochastic process, Mathematica Aeterna, 5(4), 571-581,2015.

ÖZGEÇMİŞ

Emine YÜKSEK DİZDAR 1991 yılında Giresun'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Giresun ilinde tamamladı. 2009 yılında Giresun Lisesinden mezun oldu. 2009 yılında başladığı Giresun Üniversitesi İstatistik Bölümü'nü 2013 yılında bitirdi. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2013 yılında Giresun Çoruh Elektrik Perakende Satış A.Ş. Şirketinde çalışmaya başladı ve halen aynı Şirkette Tahakkuk Şefi olarak görev yapmaktadır.