GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI SONSUZ BOYUTLU UZAYLARDA LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Volkan ÇAKMAK
20152110019
Haziran 2018

GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI SONSUZ BOYUTLU UZAYLARDA LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Volkan ÇAKMAK

Enstitü Anabilim Dalı	**:**	**Matematik anabilim dalı**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Feyzullah AHMETOĞLU**

Haziran 2018

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI SONSUZ BOYUTLU UZAYLARDA LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Volkan ÇAKMAK

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 22/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. İmdat İŞCAN	**Prof. Dr. Feyzullah AHMETOĞLU**	**Dr. Öğr.Üyesi Mehmet KORKMAZ**
Jüri Başkanı	**Üye**	**Üye**

Doç. Dr.
Bahadır KOZ

Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Volkan ÇAKMAK
22/06/2018

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım sırasında tecrübeleri ve bilgisiyle bana yol gösterip ,bilimsel destek sağlayan, mental ve psikolojik olarak da her daim yardımını gördüğüm değerli hocam, sayın Prof. Dr. Feyzullah AHMETOĞLU 'na çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

E_n	: Öklid uzayı
π	: Hiperdüzlem
inf	: İnfimum
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\overline{1\,,m}$	: 1 'den m 'ye kadar tamsayılar
x^T	: x matrisinin transpozesi
$(x\,,y)$	: x ile y 'nin iç çarpımı
ε	: Epsilon
H	:Hilbert uzayı
$L^P[0,T]$	: $[0,T]$ üzerinde reel değerli Lebesgue ölçülebilir ve sonlu L^P normuna sahip fonksiyonların denklik sınıflarının ailesi
$L(x\,,y)$	: Lagrange fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

BAZI SONSUZ BOYUTLU UZAYLARDA LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİ

ÖZET

Bu tez çalışması, sonsuz boyutlu uzaylarda lineer programlama problemlerinin optimal çözümlerinin, dual problem yardımıyla bulunması üzerine olup başlangıç kısmında lineer programlama problemleri için temel teoremler verilmiştir.

Bu teoremlerin bazılarının sonsuz boyutlu uzaylara direkt olarak uygulanamayacağı gösterilmiştir. Son kısımda ise bazı özel problemler için bazı özel şartlar altında güçlü duallik teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara uygulanabilir olduğu Tyndall'ın makalesi alıntılanarak gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Lineer programlama. Sonsuz boyutlu uzaylar

LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS IN SOME INFINITE DIMENSIONAL SPACES

SUMMARY

This dissertation study is on finding optimal solutions to the linear programming problems by means of dual problem in the infinite dimensional spaces, and at the beginning, fundamental theorems for linear programming problems have been given.

It has been indicated that some of these theorems can not be applied to infinite dimensional spaces directly. At the end of the study, strong duality theorem has been demonstrated to be applied to infinite dimensional spaces for some special problems under some special conditions by citing from Tyndall's article.

Keywords: Linear programming, Infinite dimensional spaces

1. GİRİŞ

Lineer Programlama, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. 1947' de, George Dantzig, Lineer Programlama problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir yol olan Simpleks Algoritma' yı buldu ve bu buluşla birlikte Lineer Programlama, sıklıkla ve hemen hemen her sektörde kullanılmaya başlandı. Özellikle endüstri, işletme, bankacılık, eğitim sektörlerinde ve askeriyede, optimizasyon problemlerinin çözümünde Lineer Programlama, çok defa kullanılmıştır ve kullanılmaya devam edilmektedir. Firmalarda karşılaşılacak darboğazların giderilmesinde, seçenekli üretim tekniklerinin kullanılmasının getirilerini belirlemede, kıt kaynakların etkin kullanımında ve bunların gölge fiyatlarının belirlenmesinde kullanılacak en uygun politikaların belirlenmesinde ,en uygun karın ve en az maliyetin belirlenmesinde kullanılan bir tekniktir. Fortune 500' e üye firmalar arasında yapılan bir araştırma sonucunda, bu firmaların % 85' inin Lineer Programlama yöntemini kullandığı öğrenilmiştir. Lineer Programlama o kadar önemlidir ki, Yöneylem Araştırması kitaplarının çok büyük bir kısmını tek başına kaplar.

Lineer Programlama , değişkenlere ve kısıtlara bağlı kalarak, lineer amaç fonksiyonunu en uygun (maksimum ya da minimum) kılmaya çalışır. Temel olarak, Lineer Programlama, kıt kaynakların optimum şekilde dağılımını içeren deterministik bir matematiksel tekniktir.

Sonlu ölçülü uzaylarda, simpleks gibi çeşitli algoritmalar haricinde , duallik teoreminin yardımıyla da esas ve dual problemlere çözüm bulunabilmektedir .Bazen bir problemin çözümü yerine diğer problemin çözümüyle sonuca ulaşmak daha kolay olabilmektedir.

Bu bakımdan bu tezde, sonlu boyutlu uzaylarda lineer programlama probleminin Lagrange fonksiyonunun eyer noktasının varlığı gösterilmiştir. Bildiğimiz gibi sonsuz boyutlu uzaylarda bu yeter şarttır fakat gerek şart değildir ve bunun için ek şartlar gerekir ve burda yeterlilik ispatlanmış fakat gereklilik ispatlanamamıştır. Bu anlamda özel olarak Tyndall'ın makalesi[1] derlenmiştir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

Tanım 2.1.(Öklid uzayı):

n tane $x_1, x_2, ..., x_n$ reel sayısının, tüm $x^T=(x_1, x_2, ..., x_n)$ sıralı sistemlerinin oluşturduğu kümeye;

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$
$$(x, y) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

koşullarını sağlıyorsa n boyutlu Öklid uzayı denir. E_n ile gösterilir.($x \in E_n, y \in E_n, \alpha \in \mathbb{R}$)

$x^T=(x_1, x_2, ..., x_n)$ elemanına nokta(vektör), $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarına da o noktanın koordinatları denir.

Öklid uzayındaki norm(vektör uzunluğu);

$$\|x\|=(x, x)^{\frac{1}{2}}$$

aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\|x\| \geq 0$$
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$
$$(x, y) \leq \|x\| . \|y\| \qquad \text{(Cauchy- Bunyakovski)}$$

Bu norm E_n 'de yakınsaklık verir. E_n 'e ait bir $\{x_m\}$ noktalar dizisi için $\lim_{m\to\infty} \|x_m - x\| = 0$ ($\lim_{m\to\infty} x_m = x$) ise $\{x_m\}$ noktalar dizisi $m \to \infty$ iken x 'e yakınsıyor denir. Böylece x noktasına dizinin limit noktası denir.

$U_\varepsilon(x) = \{y: \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ kümesine x noktasının <u>ε komşuluğu</u> denir.

Bir $X \subseteq E_n$ kümesi tüm alt kümelerini içeriyorsa bu kümeye <u>kapalı küme</u> denir.

$x \in X$ noktasının herhangi bir komşuluğundaki tüm noktalar yine X kümesine aitse x noktasına X kümesinin iç noktası denir.

Bir $x \in X$ noktasının herhangi bir komşuluğunda hem X 'e ait ,hem de X 'e ait olmayan noktalar varsa x 'e sınır noktası denir. Tüm sınır noktalarının kümesi ise X kümesinin sınırıdır.

Tanım 2.2. (Konveks küme):

Bir X kümesinde , her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için, $z = \alpha x + (1-\alpha)y \in X$ ise X kümesine konveks küme denir.

Bir X kümesi lineer eşitsizlikler veya eşitliklerden oluşan bir sistemle belirlenmişse bu küme konveks ve kapalıdır. Örneğin:

$R_1 = \left\{x : Ax \geq b,\ x \geq 0,\ A = [a_{ij}]_{m \times n}, b = [b_{ij}]_{m \times 1}\right\}$ kümesi konveks ve kapalıdır.

Herhangi sayıda konveks kümenin kesişimi yine konveks kümedir.

$\alpha_i \geq 0$, $(i = \overline{1, m})$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ iken $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ ise z noktasına , $x_1, x_2, \ldots, x_m$ noktalarının konveks kombinasyonu denir.

Bir konveks X kümesi , noktalarının tüm konveks kombinasyonlarını içerir.

Tanım 2.3.(Hiperdüzlem):

E_n de hiperdüzlem ile kastedilen , $\pi = \{x : (c,x) = \lambda,\ c \neq 0\}$ kümesidir.Bir hiperdüzlem E_n 'i iki yarı uzaya ayırır bu uzaylar $\{x : (c,x) \leq \lambda\}$ ve $\{x : (c.x) \geq \lambda\}$ dır.

Tanım 2.4.(İzdüşüm):

Bir v noktasının, X kümesi üzerine izdüşümünün, bir $p \in X$ noktası olması için $\|p - v\| = \inf_{x \in X} \|x - v\| = d$ olması gerekir ve d, v noktasının X kümesine uzaklığıdır.

Herhangi kapalı X kümesi ve herhangi v noktası için bir $p \in X$ noktası vardır ki bu nokta v'nin X üzerine izdüşümüdür. Eğer X kümesi konveks ise bu $p \in X$ noktası yeganedir.

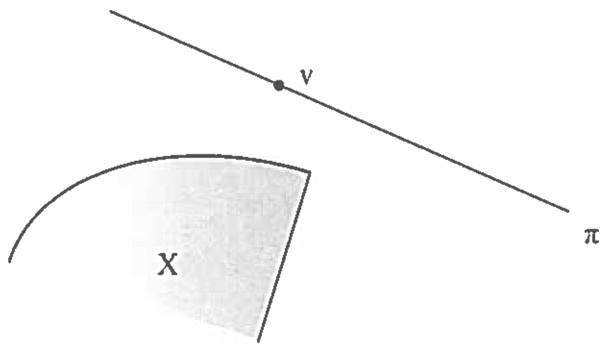
Teorem 2.1.

v 'nin X kapalı, konveks kümesi üzerine izdüşümünün bir $p \in X$ noktası olması için gerek ve yeter şart $(x-p, v-p) \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 2.2. (Ayrılma teoremi):

Herhangi bir konveks ve kapalı X kümesi ve X 'e ait olmayan herhangi bir v noktası için $(c, v) = \lambda$ olacak şekilde bir π hiperdüzlemi vardır ve tüm $x \in X$ için $(c, v) < \lambda$ olur.

Bu teoremin geometrik anlamı şudur; v noktasından geçen bir π hiperdüzlemi vardır öyle ki X kümesi bu hiperdüzlemin belirlediği iki yarı uzaydan birine aittir.

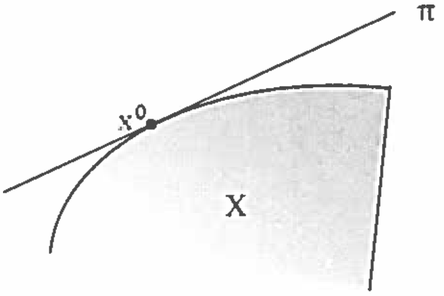


Şekil 1.1.

Teorem 2.3. (Destek Hiperdüzlem Üzerine Teorem):

Konveks X kümesinin herhangi bir x^0 sınır noktasında,bir yardımcı hiperdüzlem vardır. Yani bir $c \neq 0$ ve bir λ vardır öyle ki $\pi = \{x : (c,x) = \lambda\}$ hiperdüzlemi için $(c, x^0) = \lambda$ olur ve tüm $x \in X$ için $(c, x) \leq \lambda$ 'dir.

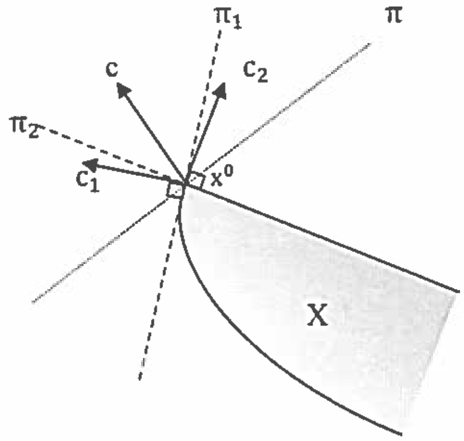
Eğer x^0 noktasında, bir tanjant hiperdüzlemi(teğet hiperdüzlem) varsa, bu hiperdüzlem, destek hiperdüzlemdir ve yeganedir. Fakat destek hiperdüzlem kavramı daha geniş kapsamlıdır, çünkü bazen x^0 noktasında tanjant hiperdüzlemi var olamaz.(Köşe noktalarda olduğu gibi. Bkz. şekil 1.2 , 1.3).



Şekil.1.2.

Burada destek hiperdüzlem

ile tanjant hiperdüzlemi aynıdır.



şekil 1.3.

Burada x^0 'da tanjant hiperdüzlem yok.

Destek hiperdüzlem var. c_1 ve c_2

arasındaki herhangi bir vektör ,c olarak

alınabilir.

Teorem 2.4.(Ayırıcı hiperdüzlem üzerine teorem):

Eğer konveks bir X kümesinin, boş olmayan X_0 iç noktalar kümesi ile konveks bir Y kümesi kesişmiyorsa ($X_0 \cap Y = \emptyset$), X ve Y kümelerini ayıran bir π ayırıcı hiperdüzlemi vardır. Yani, bir $c \neq 0$ vektörü vardır öyle ki tüm $x \in X$ ve tüm $y \in Y$ için $(c\,,\,y) \leq (c\,,\,x)$ olur.

Tanım 2.5.(Uç (ekstremum) nokta):

X kümesinde, $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$, $(\alpha \in (0,1))$ olacak şekilde x' ve x'' $(x' \neq x'')$ noktaları yoksa, x noktasına, X kümesine ait bir uç nokta denir.

Örneğin bir konveks çok yüzlünün köşeleri uç noktadır.

Teorem 2.5.

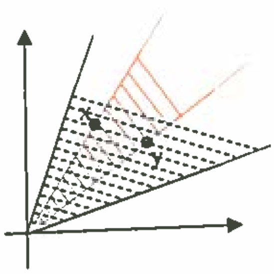
Konveks, kapalı ve sınırlı bir X kümesindeki herhangi x^0 noktası, kümenin sonlu sayıdaki uç noktalarının konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir.

$$x^0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \ , \quad \alpha_i \geq 0\ , \quad i = \overline{1\,,N}\ . \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

Tanım 2.6.(Koni):

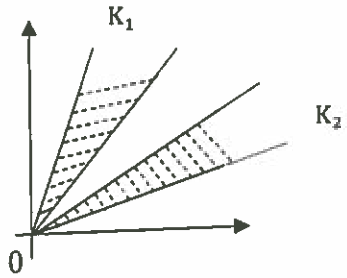
Bir K kümesine koni diyebilmemiz için $x \in K$ iken tüm $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$ olması gerekir.

Bir K konisine; $\alpha, \beta \geq 0$ iken herhangi $x, y \in K$ için $\alpha x + \beta y \in K$ ise konveks koni denir.



Şekil 1.4.

Siyah bölge konveks konidir. Turuncu konveks koni ise verilen x ve y için $\alpha, \beta \geq 0$ iken tüm $\alpha x + \beta y$ noktalarından oluşur.



Şekil 1.5.

$K = K_1 \cup K_2$ normal bir konidir. Konveks koni değildir.

Konveks konilerde; iki vektörün her birini pozitif katsayılarla çarpıp toplarsak oluşan vektör, o iki vektörün sınırlarını belirlediği koninin içinde yer alır.

K konisine ait herhangi bir x vektörü, K konisinin kenarlarının negatif olmayan lineer kombinasyonu şeklinde gösterilebilir. Yani $\lambda_i \geq 0$ ve $i = \overline{1, k}$ olmak üzere $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^*$ olur.

$\mathbb{R}^n$ 'in sonlu veya sonsuz bir vektörler kümesinin kanonik kombinasyonu bir konveks konidir.

Bir V vektör uzayı için boş küme, V uzayı ve V 'nin herhangi bir lineer altuzayı konveks konidir.

Negatif olmayan sürekli fonksiyonların kümesi konveks konidir.

Konilerin şu özelliğine de dikkat edelim;

$\mathbb{R}$ kümesinde tüm elemanlar kıyaslanabilirdir çünkü herhangi $a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b$, $a > b$, $a = b$ ifadelerinden biri doğrudur. Onun için $\mathbb{R}$, tüm bileşenleri pozitif olan $\mathbb{R}^+$ konisiyle tam sıralamadır. Fakat vektörler ve matrisler için bunu söyleyemeyiz. Ancak iki vektörün birbiri ile mukayesesinde, ilk vektörün tüm bileşenleri, ikinci vektörün tüm bileşenlerinden sırasıyla büyükse $\mathbb{R}^n$ de kısmi sıralamayla 1. vektör 2. vektörden büyüktür diyebiliriz.

$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{2+}$ ile kısmen sıralanmıştır. Örneğin (2 , 3) ve (1 , 1) vektörlerini ele alırsak;

$$(2\,,3)-(1\,,1)=(1\,,2)\in\mathbb{R}^{2+} \implies (2\,,3)>(1\,,1) \quad \text{olur.}$$

Fakat (2 , 3) ve (1 , 4) için bunu söyleyemeyiz çünkü $(2\,,3) - (1\,,4) \notin \mathbb{R}^{2+}$. İki elemanın farkı seçtiğimiz koninin elemanıysa, bu koni bize kısmi sıralama verir. Yani $x-y\in K$ ise $x\geq y$ dir. $\mathbb{R}^{2+}$ konisi $\mathbb{R}^2$ de kısmi sıralama veriyor. Yani bu koninin elemanlarını kullanarak $\mathbb{R}^2$ 'nin bazı elemanlarını kıyaslayabiliriz. Burada bir elemanın diğerinden büyüklüğü için sembolik büyüklük kullanılır.

Ana konumuzla alakalı olarak H bir Hilbert uzayı olsun ve $K\subset H$ da Hilbert uzayında konveks bir koni olsun. Her bir K konisi Hilbert uzayına sıralama verecektir.

Teorem 2.6.(Farkas Teorem):

Tüm $x\in\{x : Bx \leq 0\}$ 'ler için $v = B^T u$ olacak şekilde bir $u\geq 0$ 'nun varlığı, $(v\,,x)\leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şarttır.

İspat:

Yeterlilik: $u\geq 0$ ve $v=B^Tu$ olsun. Öyleyse herhangi bir $x\in\{x : Bx \leq 0\}$ için

$$(v\,,x)=(B^Tu\,,x)=(u\,,Bx)\leq 0$$

olur.

Gereklilik: $\forall x\in\{x : Bx \leq 0\}$ için $(v\,,x)\leq 0$ olsun. Bir Y konisi düşünelim ve $Y=\{y : y=B^Tu\,,u\geq 0\}$ olsun. Eğer $v\in Y$ ise teorem sağlanmış olur. Varsayalım ki; $v\notin Y$. Y kümesi konveks ve kapalı olduğundan Teorem 2.4.'ten, bir $c\neq 0$ vektörü vardır ki : tüm $y\in Y$ için $(c\,,y)<(c\,,v)$ olur. Tüm $\lambda\geq 0$ için $\lambda y\in Y$ olacağından, her $\lambda\geq 0$ için $\lambda(c\,,y)<(c\,,v)$ olmalıdır. $(c\,,y)$ 'nin herhangi bir pozitif λ katının, $(c\,,v)$ üst sınırını geçememesi için $(c\,,y)$ 'nin pozitif olmaması gerekir. Böylece $(c\,,y)\leq 0$ dır. Buradan:

$$(c\,,y)=(c\,,B^Tu)=(u\,,Bc)\leq 0 \text{ dır.}$$

$u \geq 0$ olduğundan, $Bc \leq 0$ olmalıdır. $y = 0 \in Y$ olduğunu göz önüne alırsak $(c, v) > 0$ olmalıdır. $c = x$ alırsak; $Bx \leq 0$ ve $(v, x) > 0$ elde ederiz. Bu da varsayımımızla çelişir. Öyleyse $v \in Y$ 'dir.

Sonuç: (Farkas Lemma):

Herhangi bir B matrisi ve herhangi bir v vektörü için ;

Ya $Bx \geq 0$, $(v, x) < 0$ sisteminin,

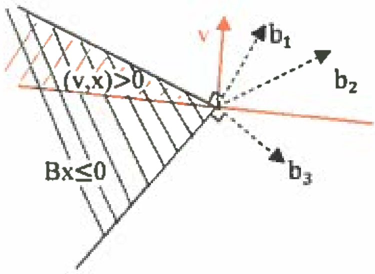
Ya da $v = B^T u$, $u \geq 0$ ($Bx \geq 0$, $(v, x) \geq 0$) sisteminin bir çözümü vardır.

Farkas lemma sayesinde yukarıdaki sistemlerden birindeki çözüm , diğer sistemin çözülemezliğini tasdikler.

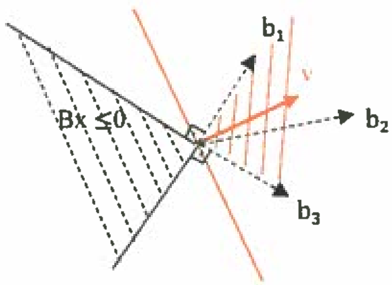
Örneğin S_1 ve S_2 şeklinde iki sistemimiz olsun ;

$S_1 : Bx \leq 0 , (v , x) > 0$, $S_2 : Bx \leq 0 , (v , x) \leq 0$

$(v = B^T u , u \geq 0)$



Şekil.1.6

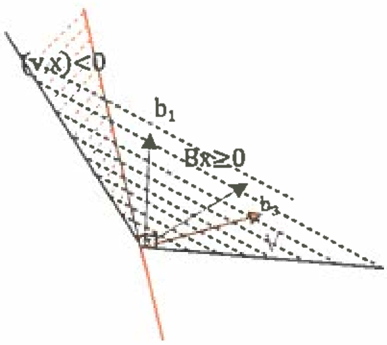


Şekil 1.7.

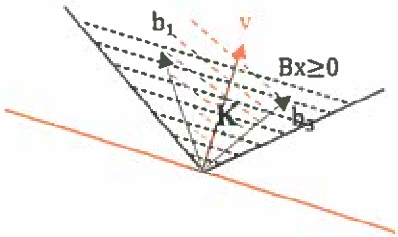
Ya da

$S_1 : Bx \geq 0 , (v , x) < 0$ $S_2 : Bx \geq 0 , (v , x) \geq 0$

$(v = B^T u , u \geq 0)$



Şekil.1.8.



Şekil.1.9.

v ; b_1 , b_2 , b_3 tarafından oluşturulan koninin içindeyse S_2 'nin çözümü vardır, içinde değilse S_1 'in çözümü vardır.

Yani bir v vektörünün, K konisinin elemanı olması için gerek ve yeter şart v 'nin ,X kümesinin kısıtlarının normallerinin, negatif olmayan katsayılı lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilmesidir.

Ya v kısıtların normallerinin oluşturduğu konveks koninin içindedir ki o zaman kısıtların belirlediği bölgedeki vektörlerle iç çarpımı, bölgenin eşitsizlik şartlarıyla aynıdır ya da içinde değildir ki o zaman da uygun bölgedeki vektörlerin bir kısmıyla çarpımı, bölgenin eşitsizlik şartlarıyla farklıdır.

Tanım 2.7.(Konveks Fonksiyon):

Bir X konveks kümesinin üzerindeki $Q(x)$ fonksiyonunun, konveks olması için herhangi x , y $\in$ X ve tüm $\alpha \in [0, 1]$ için;

$$Q(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha Q(x) + (1-\alpha)Q(y)$$

eşitsizliği sağlanmalıdır.

Konveks bir küme üzerinde z = (c , x) fonksiyonunu ele alırsak , vektör uzayı olma özelliklerinden $(c, \alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha (c, x) + (1-\alpha)(c, y)$ olacağından z, konveks bir fonksiyondur.

Herhangi bir λ sayısı için $z = \{ x \in X : (c, x) \leq \lambda \}$ kümesi de konvekstir.

Bir konveks X kümesinin üzerindeki, konveks $Q(x)$ fonksiyonu, kümenin her bir iç noktasında sürekli ve herhangi bir s ($\|s\| = 1$) yönünde türevlidir.

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial s} = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{Q(x+\lambda s) - Q(x)}{\lambda}$$

Tanım 2.8.(Uygun yön) :

Bir x $\in$ X noktasındaki $s \neq 0$ yönüne ; tüm $\beta \in [0, \bar{\beta}]$ için $x + \beta s \in X$ olacak şekilde bir $\bar{\beta} > 0$ sayısı varsa uygun yön denir.

x, bir iç nokta ise herhangi bir s vektörü, x 'in bulunduğu kümede uygun yön verir.

Eğer z, konveks X kümesi üzerinde konveks bir fonksiyonsa bir $x^* \in X$ lokal minimum noktası, z 'yi X kümesi üzerinde minimize etme probleminin optimalidir.

$z = (c\,,\,x)$ olmak üzere;

$$(P) \quad \min_{x \in R_1} \; (c\,,x) \qquad R_1 = \{x : Ax \geq b\,, x \geq 0\}$$

Lineer programlama problemimiz olsun. $i = \overline{1\,,m}$, $j = \overline{1\,,n}$ olmak üzere,

$Ax \geq b$ kısıtlarından, x^* noktasında aktif olanlarının indislerinin kümesi;

$I(x^*) = \{\, i\,;\, (Ax^*)_i = b_i \,\}$ 'dir.

$x \geq 0$ kısıtlarından, x^* noktasında aktif olanlarının indislerinin kümesi;

$J(x^*) = \{\, j\,;\, x_j^* = 0 \,\}$ 'dır.

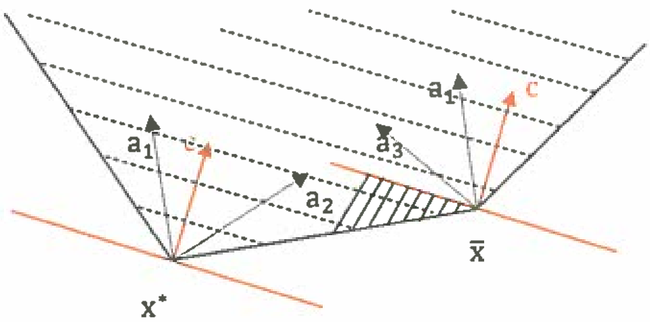
Teorem 2.7.

R_1 kümesine ait x noktasında s' nin uygun bir yön olması için gerek ve yeter şart;

$$(As)_i \geq 0 \qquad \forall\, i \in I(x)$$

$$s_j \geq 0 \qquad \forall\, j \in J(x)$$

koşullarının sağlanmasıdır.



Şekil 1.10.

Satırları a_i , $i \in I$ ve e_j , $j \in J$ olan matrisimiz G olsun.

$$G = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

x^* 'ın optimal çözüm olduğu göz önüne alındığında, bu noktada amaç fonksiyonunu daha iyileyen bir uygun s yönü olmamalıdır. Demek ki ;

$(c\,,\,s) < 0$, $Gs \geq 0$ olacak şekilde uygun bir s yönü mevcut olmamalıdır.

Şekil 1.10 da $\bar{x}$ noktası için taralı bölgede daha iyileyen bir s yönü bulabiliyorken , x^* noktasında böyle bir şansımız olmayacaktır.

Teorem 2.8. :

x^* optimal nokta ise;

$$(As)_i \geq 0 \qquad \forall i \in I(x)$$
$$s_j \geq 0 \qquad \forall j \in J(x)$$

sistemini sağlayan tüm s 'ler için,

$$(c\ ,\ s) \geq 0 \qquad \text{olur.}$$

$$\|s\| \,.\, \frac{dz}{dx}\Big|_{x=x^*} = \left(\frac{d(c,x^*)}{dx}\ ,s\right) \geq 0$$

Sonuç 1. Böylece Farkas lemmasından; bir u var ki ;

$$u \geq 0 \ \text{ ve } \ G^T u = c \quad (Gs \geq 0\ ,(c\ ,s) \geq 0) \ \text{ olur.} \qquad (\star)$$

u 'yu

$$u = (y_i : i \in I\ ;\ v_j : j \in J) \geq 0$$

olarak ifade edersek ($\star$) sistemini aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$c = \sum_{i \in I} y_i\, a_i + \sum_{j \in J} v_j\, e_j \qquad (1)$$

$$y_i \geq 0\ ,\ i \in I \ \text{ ve } \ v_j \geq 0\ , j \in J \qquad (2)$$

x^* , optimal nokta ise (1) ve (2) çözümlüdür. Bu halde, (1) ve (2) optimalliğin gerek şartlarıdır.

Bunun geometrik anlamı ; optimal noktada , c vektörü aktif kısıtların gradyentlerinin oluşturduğu koniye aittir.

Şimdi (1) ve (2) koşullarının, x^* , uygun noktasında sağlandığını varsayalım ve $\hat{x}$,başka bir uygun çözüm olsun.

(1) 'i $(\hat{x} - x^*)$ ile çarparsak;

$$c\hat{x} - cx^* = \textstyle\sum_{i \in I} y_i\,(a_i\hat{x} - a_i x^*) + \sum_{j \in J} v_j\,(e_j\hat{x} - e_j x^*)$$

eşitliğini elde ederiz. $a_i x^* = b$ ve $e_j x^* = 0$ olduğundan

$$\sum_{i \in I} y_i (a_i \hat{x} - b) + \sum_{j \in J} v_j e_j \hat{x} \geq 0$$

olmalıdır. Çünkü ; $\hat{x}$ uygun olduğundan $a_i \hat{x} \geq b$, $\forall i \in I$ ve $e_j \hat{x} \geq 0$, $\forall j \in J$ olacaktır ve (2) koşulunu da göz önüne alırsak $c\hat{x} - cx^* \geq 0$ olmalıdır. Böylece ; $c\hat{x} \geq cx^*$ olur. Öyleyse x^* , optimaldir.

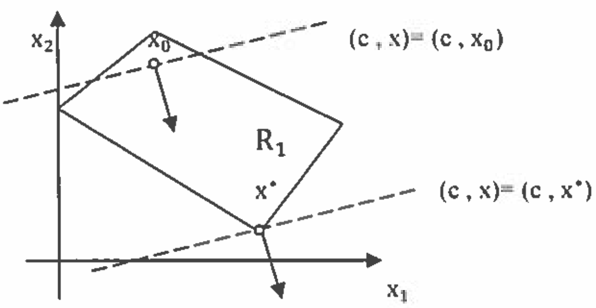
Bu nedenle, (1) ve (2) koşullarının sağlanması bir lineer programlama probleminin optimal bir çözümünün olması için gerek ve yeter şarttır.

Başka bir bakış açısıyla ; R_1 kümesi E_n uzayında yarı uzayların kesişimi olarak düşünülebilir.(n=2 için yarıdüzlemlerin):

$$(Ax)_i \geq b_i \qquad i = \overline{1,m}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = \overline{1,n} \quad ,$$

$(c , x) = \lambda$ paralel hiperdüzlemler (n=2 için paralel doğrular) ailesini düşünelim. $-c$ vektörü amaç fonksiyonunun azalması yönünde hareket edecektir.



Şekil 1.11. (R_1 kümesinin sınırlı olma hali.)

Tanım 2.9 (Karush-Kuhn-Tucker):

Karush Kuhn Tucker şartları ; x^* 'ın primal problemin optimal çözümü olması için gerek ve yeter şartlardır.

$y = (y_1, y_2,\ldots, y_m)$ ve $v = (v_1, v_2,\ldots, v_n)$ olsun. (y ve v 'ye Lagrange çarpanı veya dual değişken denir.)

Şimdi (P) problemimiz için KKT koşullarını tanımlayalım.

1) $Ax^* \geq b$, $x^* \geq 0$ (primalin uygunluğu)

2) $c = \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j^* e_j$, $y_i^* \geq 0$, $v_j^* \geq 0$ (dualin uygunluğu)

3) $x_i^*(c - A^T y^*)_i = 0$, $i=\overline{1,n}$ (tamamlayan gayri sertlik şartları)
$y_j^*(b - Ax^*)_j = 0$, $j=\overline{1,m}$

(P) problemine göre 1; uygunluğu verir . 2 ve 3; c 'nin , aktif kısıtların normallerinin oluşturduğu koniye ait olduğunu söyler.

Burada ayrıca tamamlayan gayri sertlik şartlarını irdelersek bu şartlar bize ;

$(A^T y^*)_i < c_i$ ise $x_i^* = 0$ ya da $(A^T y^*)_i = c_i$ ise $x_i^* > 0$ olması gerektiğini ,

$(Ax^*)_j > b_j$ ise $y_j^* = 0$ ya da $(Ax^*)_j = b_j$ ise $y_j^* > 0$ olması gerektiğini ,

söyler.

Yani (P) 'nin aktif kısıtlarıyla ilişkili dual değişken, sıfırdan büyük , aktif olmayan kısıtlarıyla ilgili dual değişken, sıfır olmalıdır.(D) dual problemimiz ise (D) 'nin aktif kısıtlarıyla ilişkili primal değişken sıfırdan büyük , aktif olmayan kısıtlarıyla ilgili primal değişken sıfır olmalıdır.

Tanım 2.10.(Lagrange fonksiyonu ve Eyer noktası):

(P) problemimiz için Lagrange fonksiyonu;

$L_1(x , y) = (c , x) - (y , Ax - b)$ 'dir.

Bir x^*, y^* ikilisine; $x \geq 0$, $y \geq 0$ kümesi üzerinde $L_1(x , y)$ fonksiyonunun eyer noktasıdır diyebilmemiz için;

$$x^* \geq 0 , y^* \geq 0,$$
$$L_1(x^* , y) \leq L_1(x^* , y^*) \leq L_1(x , y^*) \quad (\forall x \geq 0 \text{ ve } \forall y \geq 0)$$

sisteminin sağlanması gerekir.

Teorem 2.9.

x^*, y^* ($x^* \geq 0$, $y^* \geq 0$) ikilisinin, $x \geq 0$, $y \geq 0$ bölgesinde $L(x, y)$ fonksiyonunun eyer noktası olması için gerek ve yeter şart ;

1. $\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = \frac{\partial L^*}{\partial x} \geq 0$ yani $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} \geq 0$ $\quad i = \overline{1,n}$
2. $(x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}) = 0$ yani $x_i^* \frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0$ $\quad i = \overline{1,n}$
3. $x^* \geq 0$ yani $x_i^* \geq 0$ $\quad i = \overline{1,n}$
4. $\frac{\partial L^*}{\partial y} \leq 0$ yani $\frac{\partial L^*}{\partial y_j} \leq 0$ $\quad j = \overline{1,m}$
5. $(y^*, \frac{\partial L^*}{\partial y}) = 0$ yani $y_j^* \frac{\partial L^*}{\partial y_j} = 0$ $\quad j = \overline{1,m}$
6. $y^* \geq 0$ yani $y_j^* \geq 0$ $\quad j = \overline{1,m}$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat:

<u>Gereklilik</u>: x^*, y^* ikilisi eyer noktası olsun. $L_1(x^*, y^*) \leq L_1(x, y^*)$ olduğundan tüm $x_i \geq 0$ için $L(x^*, y^*) \leq L(x_i, y^*) \triangleq L(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*, y^*)$ 'dir. Yani x_i^*, $x_i \geq 0$ yarı doğrusu üzerindeki tek değişkenli $L(x_i, y_i^*)$ konveks fonksiyonunun bir minimum noktasıdır. 1. ve 3. şartlar minimum için gerek koşullardır bilhassa $x_i \geq 0$ için tek değişkenli fonksiyonun lokal minimumu olması içindir.(Çünkü ya x_i^* , $x_i \geq 0$ yarı-ekseninin bir iç noktası iken $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0$ olur ya da $x_i^*=0$ iken $\frac{\partial L^*}{\partial x_i} \geq 0$ olur.)

Benzer şekilde y değişkenine bağlı $L(x, y)$ fonksiyonunu baz alarak 4. ve 6. şartların geçerliliğini ispatlayabiliriz.

<u>Yeterlilik:</u> 1. ve 6. Şartların sağlandığını düşünelim. $L(x, y)$ 'nin x 'e göre $x \geq 0$ için konveks oluşundan

$$L(x, y^*) \geq L(x^*, y^*) + (x - x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x})$$

eşitsizliğini elde ederiz ki bu 1. ve 3. ile birlikte

$$L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$$

eşitsizliğini verir.

Eşitsizliğin sol tarafı benzer şekilde ispatlanır.

Böylece biz aşağıdaki teoreme geldik.

Teorem 2.10.

$x^* \in R_1$ 'in $(P)\,;\ \min\limits_{x \in R_1} (c, x)$, $R_1 = \{x : Ax \geq b\ ,\ x \geq 0\}$ probleminin optimal noktası olması için gerek ve yeter şart ; $x \geq 0$, $y \geq 0$ bölgesinde, x^*, y^* ikilisinin, $L(x, y)$ Lagrange fonksiyonunun eyer noktası olmasını sağlayacak $y^* \geq 0$ 'ın var olmasıdır.

İspat:

<u>Yeterlilik</u>: x^*, y^* ikilisi eyer noktası ise x^*, (P) 'nin optimal noktasıdır.

x^*, y^* ikilisi, $x \geq 0$, $y \geq 0$ bölgesinde eyer noktası ise

$L_1(x^*, y) \leq L_1(x^*, y^*) \leq L_1(x, y^*)$ olur. Yani ;

$$(c,\ x^*) - (y, Ax^* - b) \leq (c,\ x^*) - (y^*, Ax^* - b) \leq (c,\ x) - (y^*, Ax - b) \qquad (1)$$

$$\forall\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

(1) 'deki eşitsizliklerden soldakini ele alırsak

$$(c,\ x^*) - (y, Ax^* - b) \leq (c,\ x^*) - (y^*, Ax^* - b) \qquad \forall x \geq 0, \forall y \geq 0$$

$$(y, Ax^* - b) \geq (y^*, Ax^* - b) \qquad \forall y \geq 0 \qquad (2)$$

olur.

Şimdi $\forall\, y \geq 0$ için $(y, Ax^* - b) < 0$ olduğunu varsayarsak, $\forall\, \lambda > 0$ için $(\lambda y, Ax^* - b) < 0$ olurdu, fakat bu $(y, Ax^* - b)$ skaler çarpımının, herhangi pozitif bir λ katının alt sınırı olan $(y^*, Ax^* - b)$ çarpımının değerinin altına inememesi imkansızdır. Bu nedenle $\forall\, y \geq 0$ için $(y, Ax^* - b) \geq 0$ olmalıdır.

Bu durumda $y \geq 0$ iken $Ax^* \geq b$ olduğundan x^*, uygun bölgede olacaktır. Ayrıca, $(y, Ax^* - b) \geq 0$ olacağından,$(y^*, Ax^* - b)$ alt sınırının pozitif olabileceğini düşünemeyiz çünkü özel olarak y=0 ihtimalini düşünürsek $(y, Ax^* - b)=0$ olacaktır.

Böylece (2) eşitsizliğinden $0 \geq (y^*, Ax^* - b)$ olur. Fakat $y^* \geq 0$, $Ax^* - b \geq 0$ olduğundan bu eşitsizlik ancak

$$(y^*, Ax^* - b) = 0$$

durumunda sağlanır.

Bunun sonucu olarak (1) eşitsizliğinin sağ tarafından

$$(c,\ x^*) \leq (c,\ x) - (y^*, Ax - b) \qquad \forall x \geq 0, \forall y \geq 0$$

gelir.

$y^* \geq 0$ ve $Ax - b \geq 0$ olduğundan $(y^*, Ax - b) \geq 0$ olur. Böylece $\forall x \geq 0$ için

$$(c, x^*) \leq (c, x)$$

olur. Yani x^* , (P) 'nin optimalidir. Bu şekilde yeterliliği ispatladık .

Gereklilik: x^*, optimal nokta ise x^*, y^* eyer noktasıdır.

Gereklilik için Teorem 2.8 'in sonuç kısmına bakmamız yeterli olacaktır.

x^* , optimal nokta ise ;o noktada $c = G^T u$ 'yu sağlayan $u = (y_i : i \in I \; ; v_j : j \in J) \geq 0$ vardır. Yani;

$$c = \sum_{i \in I(x^*)} y_i a_i + \sum_{j \in J(x^*)} v_j e_j$$

olur. c 'nin bu gösterilişiyle KKT eşdeğerdir. KKT şartları sağlanıyorsa eyer noktası vardır çünkü KKT şartları ile eyer noktası olma şartları denktir.

Demek ki, öyle bir y^* var ki ; x^*, y^* ikilisi $L(x , y)$ 'ın eyer noktasıdır. ■

Tanım 2.11. (Dual Problem):

(c , x) ve (b , y) amaç fonksiyonları , R_1 ve Q_1 uygun bölgeler olmak üzere;

$$(P) \quad \min_{x \in R_1} (c, x) \qquad R_1 = \{x : Ax \geq b \; , \; x \geq 0\}$$

problemimizi ; $((c, x) = c^T x) \to \min$

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

şeklinde yazıp,

kısıtlarımızı, eşitsizliklerin yönünü etkilememek için negatif olmayan katsayılarla ($y \geq 0$,$v \geq 0$) çarpıp ,taraf tarafa toplarsak;

$$\begin{array}{r} y^T A x \geq y^T b \\ + \quad v^T x \geq 0 \\ \hline y^T A x + v^T x \geq y^T b \\ (y^T A + v^T) x \geq y^T b \end{array}$$

olur.

$$c^T = (y^T A + v^T)$$

alırsak, $v \geq 0$ olduğundan,

$$c^T \geq y^T A$$

Yani;

$$c \geq A^T y$$

olmalıdır. Ayrıca $c^T x \geq y^T b$ olacaktır .Bu durumda $y^T b$ ifadesi (P) 'nin amaç fonksiyonu için bir alt sınır belirleyecektir. O halde biz

$$A^T y \leq c$$

$$y \geq 0$$

kısıtları altında $y^T b = (b\,,\,y)$ ' maksimize etmeliyiz.

Böylece;

(P) primal problemimizin duali (D);

$$(D) \quad \max_{y \in Q_1} (b\,,y) \qquad Q_1 = \{y : A^T y \leq c \,,\; y \geq 0\} \qquad \text{'dir.}$$

Sonuç 2. Yukarıdan da anlaşılacağı gibi her uygun x ve her uygun y için $c^T x \geq y^T b$ dir.

Teorem 2.11.(Zayıf Duallik):

Her uygun $x \in R_1$ ve $y \in Q_1$ için $(c\,,\,x) \geq (b\,,\,y)$ 'dir.

İspat: $x \geq 0\;,\; y \geq 0$,

$$(c\,,\,x) \geq (A^T y\,,\,x) = (y\,,\,Ax) \geq (y\,,\,b) = (b\,,\,y) \qquad \blacksquare$$

Sonuç 3. Gösterelim ki (P) problemi de (D) probleminin dualidir.

(D) problemini (-) ile çarparsak.

$$(-b\,,y) \rightarrow \min$$

$$-A^T y \geq -c$$

$$y \geq 0$$

olur. Bu problemin duali:

$$(-c\,,x) \rightarrow \max$$

$$-Ax \leq -b$$

$$x \geq 0$$

olur. Bu problemi tekrar (-)ile çarparsak

$$(c\,,x)\rightarrow\min$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

problemini elde ederiz ki bu (P) problemimizin ta kendisidir. Yani karşılıklı dualdirler.

Teorem 2.12.

(P) ve (D) problemlerinin ya ikisinin de optimum x^* ve y^* çözümleri vardır ki o zaman $(c\,,x^*) = (b\,,y^*)$ olur ya da hiçbirinin çözümü yoktur.

İspat:

(D) problemi için Lagrange fonksiyonunu düşünelim. Bunun için bu problemi (P) problemi şeklinde yazmalıyız. Açıktır ki (D) problemi

$$\min_{y\in Q_1}(-b\,,y) \qquad Q_1 = \{y : -A^Ty \geq -c\ ,\ y \geq 0\}$$

problemiyle aynıdır.Bu durumda Lagrange fonksiyonu;

$$L_2(y\,,x) = -(b\,,y) - (x\,,c-A^Ty)$$

Dikkat edilirse görülür ki

$$L_1(x\,,y) = -L_2(y\,,x) \quad \text{'dir.}$$

Eğer x^*,y^* ikilisi; $L_1(x\,,y)$ nin eyer noktası ise

1) y^*,x^* ; $L_2(y\,,x)$ in eyer noktasıdır.

2)(P)'nin optimal noktası vardır ve x^* dır .

Bu durumda (D)'nin de y^* çözümü vardır ve y^* da (D) nin optimalidir. Bu nedenle ya x^* ve y^* kendi problemlerinin optimal noktasıdır ya da eyer noktası yokken her iki problem de çözümsüzdür. Dahası esas problemin optimal çözümü varsa dualin de vardır ve bu noktalarda amaç fonksiyonlarının aldığı değerler eşittir.

$$L_1(x^*,y^*) = -L_2(y^*,x^*)$$
$$(c\,,x^*) - (y^*\,,Ax^* - b) = -\,((-b\,,y^*) - (x^*\,,c-A^Ty^*))$$
$$(c\,,x^*) = (b\,,y^*)$$

Dikkate almalıyız ki problemlerden biri sınırsız ise diğeri uygun değildir.

Teorem 2.13.

$(c , x^*) = (b , y^*) \Rightarrow$ x^*; (P)' nin, y^* da (D)'nin optimal noktasıdır.

İspat.

Zayıf duallik teoreminden

$(c , x) \geq (b , y^*) = (c , x^*)$ ve $(b , y) \leq (c , x^*) = (b , y^*)$ olur.

Teorem 2.14.(Güçlü Duallik):

$x^* \in R_1$ ve $y^* \in Q_1$ ve kendi problemlerinin optimal noktasıdır $\Leftrightarrow$ $(c , x^*) = (b , y^*)$

Bunun ispatı bahsettiğimiz teoremlerle açığa çıkmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde (P) problemimizi Hilbert uzayında düşüneceğiz. Bunun için öncelikle şunları hatırlayalım;

Tanım 3.1. (Hilbert uzayları):

Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise bu uzaya bir Hilbert uzayı adı verilir. H bir kompleks vektör uzayı olsun. H üzerinde tanımlı iççarpım (.,.): H X H $\rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyondur, öyle ki ;

$$(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$$
$$\overline{(x, y)} = (y, x)$$
$$\|x\|^2 = (x, x) \geq 0, \quad \|x\|^2 = 0 \text{ ancak ve ancak } x = 0$$

koşullarını sağlar.

$$((z, ax + by) = \bar{a}(z, x) + \bar{b}(z, y))$$

Hatırlatmalar ;

R^n uzayında iç çarpım $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

$L^2[a,b]$ Uzayında iç çarpım $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$

ℓ^2uzayında iç çarpım $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j}$

Bir (X, d) metrik uzayında , bir (x_n) dizisini göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık , $\forall$ m, n >N için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa , (x_n) dizisine bir cauchy dizisi denir. Herhangi bir dizinin elemanları, bir süre sonra birbirlerine yakınlaşıyorsa, yani aradaki uzaklık sıfırdan büyük herhangi bir sayıdan daha az ise bu dizi cauchy dizisidir. Metrik uzaylardaki her yakınsak dizi cauchy dizisidir ve her cauchy dizisi o uzayın tamlamasında yakınsaktır.Yani cauchy dizisi aslında yakınsak bir dizidir fakat uzayın eksikliğinden ötürü limit noktası kaybolmuştur X' de ki her cauchy dizisi yakınsak ise(yani yine X' de bulunan bir limit noktasına sahip ise) X uzayı tamdır denir.

Tanım 3.2.(Eşlenik (Adjoint)):

$\forall x \in H$ ve $\forall y \in H$ için $(A x , y) = (x , A^{*}y)$ olacak şekilde bir tek $A^{*}: H \to H$ $(A: H \to H)$ operatörü vardır. Bu A^{*} operatörüne A 'nın eşleniği denir.

$$A^{*} = (\bar{A})^{T} \text{ ve } \|A^{*}\| = \|A\| \text{ 'dir.}$$

Eğer $A^{*} = A$ ise H 'nin A sınırlı operatörüne self-adjoint veya hermisyen denir. self-adjoint operatörler kısmi sıralama verirler yani eğer $A - B \geq 0$ ise $A \geq B$ 'dir. A self-adjoint ve $(Ax , x) \geq 0$ $(\forall x \in H)$ ise A 'ya nonnegatif $(A \geq 0)$ denir.

H Hilbert uzayının eşleniği olan H^{*} ,Hilbert uzayında tanımlanan lineer fonksiyoneller uzayı demektir. Hilbert uzayındaki lineer fonksiyoneller yine Hilbert uzayının elemanı olduğundan Hilbert uzayının eşleniği yine kendisidir.

$K \subset H$ bir koni olsun. Öyle bir K^{*} vardır ki ; $K^{*}=\{y: (y , x) \geq 0 , x \in K\}$ 'a K 'nın eşleniği denir. Hilbert uzayının eşleniği kendisi olduğundan (çakışık) $K^{*} = K$ 'dır. Öyleyse K^{*} yerine K 'kullanacağız.

Hatırlatalım ki, H uzayında konveks koniler kısmi sıralama verirler. Yani $x \geq y$ 'dir ancak ve ancak $x - y \in K$ ise.

Şimdi $b \in H , c \in H , x \in H , y \in H$,
$(.,.): H \times H \to \mathbb{R}$ bir iç çarpım ve $A: H \to H$ lineer bir operatör olsun.

Problemimiz;

$$\text{(P)} \quad \min_{x \in R_1} (c , x) \quad , \quad R_1 = \{x : Ax \geq b \; , \; x \geq 0\}$$

Buradaki $Ax \geq b$ ve $x \geq 0$ için Hilbert uzayında $x \geq 0$ olup olmadığını bilmiyoruz. Koni tanımından diyebiliriz ki;

$\forall y \geq 0$ için $(y , Ax - b) \geq 0$ ise $Ax - b \geq 0$ olur. Yani;

$\forall y \in K$ için $(y , Ax - b) \geq 0$ ise eşlenik özelliğinden $Ax - b \in K^{*}$ olur ve $K^{*} = K$ olduğu için $Ax - b \in K$ 'dır.

Buradaki $Ax \geq b$ ifadesi $Ax - b \in K$; $x \geq 0$ ifadesi $x \in K$ anlamına gelir.

Teorem 3.1.

Hilbert uzaylarında $L(x, y) = (c, x) - (y, Ax - b)$ problemimizin Lagrange fonksiyonu olmak üzere x^*, y^* ikilisi $L(x, y)$ 'nin eyer noktası ise x^*, (P) probleminin optimalidir.

İspat:

Şimdi x^*, y^* ikilisinin problemimiz için yazacağımız Lagrange fonksiyonunun eyer noktası olsun. Öyleyse ;

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad x \geq 0, y \geq 0 \quad (x \in K, y \in K)$$

olmalıdır. Yani ;

$$(c, x^*) - (y, Ax^* - b) \leq (c, x^*) - (y^*, Ax^* - b) \leq (c, x) - (y^*, Ax - b)$$

olur. Eşitsizliğin solunu ele alırsak $(y, Ax^* - b) \geq (y^*, Ax^* - b)$ olur. Burada $(y, Ax^* - b) < 0$ olsa herhangi bir $\lambda > 0$ katının yani $(\lambda y, Ax^* - b)$ 'ın $(y^*, Ax^* - b)$ alt sınırının altına inememe durumu olamazdı o sebeple $\forall\, y \in K$ $(y \geq 0)$ için $(y, Ax^* - b) \geq 0$ olmalıdır ve bu da $Ax^* - b$ 'nin K ' ya ait olduğunu gösterir.

Özel olarak y=0 durumunu göz önüne alırsak $0 \geq (y^*, Ax^* - b)$ olurdu. $(y^*, Ax^* - b) \geq 0$ olması gerektiğinden $(y^*, Ax^* - b) = 0$ olmalıdır $(y^* \in K)$. Eşitsizliğin sağ tarafını ele alırsak ; artık $(c, x^*) \leq (c, x) - (y^*, Ax - b)$ olur. $(y^*, Ax - b) \geq 0$ olacağından $(c, x^*) \leq (c, x)$ 'dir.

Yani x^*, y^* eyer noktası ise x^* (P) probleminin optimalidir.

Fakat Hilbert uzayında, sonsuz boyutlu uzayların yapısından kaynaklı olarak bu teoremin karşıtı doğru olmayacaktır. Yani x^*, (P) probleminin optimali iken bir $y^* \geq 0$ 'ın varlığı(eyer noktasının varlığı) garantilenemez.Buradan görülüyor ki esas(primal) problemin çözümü varken dual problemin de çözümü vardır denemez .

Hilbert uzaylarında regülerlik , slater , vs... gibi şartlar da sağlandığında az önceki teoremimiz tersten de sağlanacaktır.

4.Bölümde örnek olarak aldığımız Tyndall 'ın makalesinde.belirli hipotezler altında dual problem ile esas problem arasında nasıl bir ilişki kurulabildiği tartışılmıştır ve güçlü duallik teoreminin geçerliliği analiz edilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Tyndall 'ın "sürekli lineer programlama problemlerinin bir sınıfı için duallik teoremi " adlı makalesini inceleyeceğiz.

Tyndall ; R. Belmann 'ın Dinamik Programlama kitabında ,"bottleneck" adını verdiği sürekli lineer programlama problemlerinin bir sınıfını irdelediğini , bu irdelemede üretim bölüştürmenin çeşitli dinamik lineer modellerini ortaya koyup analiz ettiğini ve dahası her bir esas(primal) programın dualiyle ilişkilendirildiğini söylüyor ve böyle esas ve dual ikililerinin optimallik ve denklik şartlarını sağladığını gösteriyor.

Tyndall makalesinde ;uygun hipotezler altında sürekli lineer programlama problemlerinin bir sınıfı için geçerli olacak duallik(güçlü duallik) teoreminin bir benzerini ispatlıyor. Ardından çeşitli ilişkili sonuçları belirleyerek bu duallik teoremini üretimin leontief modeline uygulanabildiğini gösteriyor..

Duallik teoremi:

z : [0 , T] $\rightarrow$E^N olmak üzere ,

t $\in$ [0 , T] için z(t) = (ζ_1(t) , ζ_2(t), ... , ζ_N(t)) olsun.

Varsayacağız ki $j=\overline{1,N}$ için ζ_j , sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyondur (reel doğrunun Lebesgue ölçümüne göre) . Böyle z fonksiyonlarına sınırlı ve ölçülebilirdir diyelim.

a ve c ; [0 , T] aralığını sırasıyla E^N ve E^M 'e eşleyen sürekli birer fonksiyon ve B ve C ; *m* x *n* tipinde reel matrisler olsun.

Not: d = ($\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$)$\in$ E^N , e = ($\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$)$\in$ E^M ve A. *m* x *n* tipinde matris olmak üzere vektör matris çarpımını A.d ve e.A seklinde gösterelim. d, d'$\in$E^N ' in iç çarpımı , d . d' = $\sum_{j=1}^{N} \delta_j \, \delta_j{}'$ 'dir. son olarak d $\leq$ d' ancak ve ancak $j=\overline{1,N}$ için $\delta_j \leq \delta_j{}'$ ise.

Şimdi ;

$$z(t) \geq 0,$$

$$Bz(t) \leq c(t) + \int_0^t Cz(s)ds \quad (0 \leq t \leq T)$$

olacak şekildeki tüm sınırlı ve ölçülebilir z : [0 , T] $\rightarrow$E^N fonksiyonlarının kümesini Z olarak tanımlayalım.

$$w(t) \geq 0,$$

$$w(t)B \geq a(t) + \int_t^T w(s)C ds \quad (0 \leq t \leq T)$$

olacak şekildeki tüm sınırlı ve ölçülebilir $w : [0 , T] \to E^M$ fonksiyonlarının kümesini W olarak tanımlayalım. Şimdi tartışılmak üzere sürekli lineer programlama problemini belirlersek ;

Esas (Primal) problem:

$$\int_0^T \bar{z}(t).a(t)\, dt = \max\{\int_0^T z(t).a(t)\, dt\}$$

olacak şekilde $\bar{z} \in Z$ ' ler bulalım.

Dual problem:

$$\int_0^T \bar{w}(t).c(t)\, dt = \min\{\int_0^T w(t).c(t)\, dt\}$$

olacak şekilde $\bar{w} \in W$ ' ler bulalım.

Böyle $\bar{z}$ ve $\bar{w}$ fonksiyonlarına eğer varlarsa optimal çözüm diyeceğiz.

Eğer C' yi sıfır matrisi ve a ve c'yi sabit olarak kabul edersek bu sürekli lineer programlama problemlerinin optimal çözümlerini ; meydana gelen standart maksimum problemini ve onun dualini çözerek elde edebilirdik. Bu nedenledir ki sürekli lineer programlama probleminin bu sınıfını , sonlu lineer programlama probleminin bir sınıfının bir genişlemesi olarak görüp, lineer programlamanın temel teoremlerini bu daha geniş sınıfa genişletmeye çalışmalıyız.

Aslında bu makalenin ana sonucu olarak elde edilen ekonomik olarak anlamlı sürekli lineer programlama probleminin bir sınıfına uygun bir duallik teoreminin benzeridir.

Teorem 4.1:

Hipotez: (I): $\{ x \in E^N : Bx \leq 0 \text{ ve } x \geq 0 \} = \{ 0 \}$

(II): B , C ve c(t) , $(0 \leq t \leq T)$ için nonnegatif bileşenlere sahiptir.

Çıkarım: $\bar{z} \in Z$ ve $\bar{w} \in W$ optimal çözümleri mevcuttur. Dahası uygun z ve w çözümleri optimaldir ancak ve ancak

$$\int_0^T z(t).a(t)\, dt = \int_0^T w(t).c(t)\, dt .$$

İleride yani teorem 5 ve 6 da görülecektir ki hipotezlerin hiçbiri tek başlarına yeterli olmayacaktır.

Dikkate alınmalıdır ki , primal ve dual problemleri uygun yapan koşul , sonlu lineer programlamanın duallik teoremi için bir yeter şart, bu sürekli lineer programlama problemleri için bir duallik teoremine uyum sağlamak için daha fazla yeterli değildir. Bu teorem 4 te gösteriliyor.

Dualliğin bazı özellikleri :

Bu bölümde lineer programlamanın bazı teoremleri sürekli lineer programlamaya genişletiliyor.

Herhangi bir z : [0 , T] $\rightarrow E^N$ sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon için $\ell(z) : [0, T] \rightarrow E^M$ fonksiyonunu t∈[0 , T] 'de

$$\ell(z)(t) = Bz(t) - \int_0^t Cz(s)ds \quad = Az(t)$$

şeklinde tanımlayalım. Açıktır ki $\ell(z)$ de sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyondur.

Benzer şekilde herhangi bir w : [0 , T] $\rightarrow E^M$ sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon için , (sınırlı ve ölçülebilir) $\ell^*(w) : [0, T] \rightarrow E^N$ fonksiyonunu t∈[0 , T] 'de

$$\ell^*(w)(t) = w(t)B - \int_t^T w(s)Cds = A'w(t)$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 1.

$\int_0^T \ell(z)(t)\, w(t)dt = \int_0^T \ell^*(w)(t)\, z(t)dt$ olması bakımından ℓ^* . ℓ 'nin eşleniğidir.

$$(w , Az) = (A'w , z)$$

İspat:

integralleri açarsak ;

$$\int_0^T(\omega_i(t).\int_0^t \zeta_j(s)ds)\, dt = \int_0^T(\zeta_j(t).\int_t^T \omega_i(s)ds)\, dt \qquad j=\overline{1,n} \;\; , i=\overline{1,m}$$

olmalıdır. kısmi integrasyon kullanırsak;

$u(t) = \int_0^t \zeta_j(s)ds$ ve $v(t) = \int_t^T \omega_i(s)ds$ alırsak $u'(t) = \zeta_j(t)$ ve $v'(t) = -\omega_i(t)$ olur.

$$\int_0^T(\omega_i(t).\int_0^t \zeta_j(s)ds)\, dt = -\int_0^T u(t)\, v'(t)dt = -\, u(t)v(t)\,\big|_0^T + \int_0^T v(t)\, u'(t)dt$$

$$= \int_0^T(\zeta_j(t).\int_t^T \omega_i(s)ds)\, dt \qquad \text{olur.}$$

Lemma 2. (zayıf duallik)

Eğer $z \in Z$ ve $w \in W$ ise $\int_0^T z(t).a(t)\,dt \leq \int_0^T w(t).c(t)\,dt$

İspat:

Problemimize göre $\ell(z)(t) \leq c(t)$ ve $\ell^*(w)(t) \geq a(t)$, $0 \leq t \leq T$ 'dir. $z(t) \geq 0$, $w(t) \geq 0$ olduğundan $\ell(z)(t)\,w(t) \leq w(t)c(t)$ ve $\ell^*(w)(t)\,z(t) \geq z(t)a(t)$ 'dir. Sonuç lemma 1 'den gelir. Bu lemmanın bize söylediği ; değişkenler mevcutken

$$\text{Sup}\{ \int_0^T z(t).a(t)\,dt : z \in Z \} \leq \inf\{\int_0^T w(t).c(t)\,dt : w \in W\} \text{ 'dir.}$$

Teorem 4.2.(optimallik şartı):

Eğer $\int_0^T \bar{z}(t).a(t)\,dt = \int_0^T \bar{w}(t).c(t)\,dt$ olacak şekilde $\bar{z} \in Z$ ve $\bar{w} \in W$ varsa $\bar{z}$ ve $\bar{w}$ kendi problemleri için optimal çözümlerdir.

İspat:

Lemma 2 'yi kullanırsak tüm $z \in Z$ 'ler için

$$\int_0^T z(t).a(t)\,dt \leq \int_0^T \bar{w}(t).c(t)\,dt = \int_0^T \bar{z}(t).a(t)\,dt \text{ 'dir.}$$

Tüm $w \in W$ 'ler için de

$$\int_0^T w(t).c(t)\,dt \geq \int_0^T \bar{z}(t).a(t)\,dt = \int_0^T \bar{w}(t).c(t)\,dt \text{ olur.} \qquad \blacksquare$$

$Bz(t) \in E^M$ 'nin i. bileşenini $(Bz(t))_i$ şeklinde gösterelim.

Teorem 4.3.(denklik şartları):

$z \in Z$ ve $w \in W$ olsun.

(i) $i=\overline{1\,,M}$ için $(Bz(t))_i < \gamma_i(t) + (\int_0^t Cz(s)ds)_i$ ise $\omega_i(t) = 0$ 'dır.

(ii) $j=\overline{1\,,N}$ için $(w(t)B)_j > \alpha_j(t) + (\int_t^T w(s)Cds)_i$ ise $\zeta_j(t) = 0$ 'dır.

$\int_0^T z(t).a(t)\,dt = \int_0^T w(t).c(t)\,dt$ olur ancak ve ancak (i) ve (ii) hemen hemen her $t \in [0,T]$ için sağlanıyorsa.

$(w\,,c) = (a\,,z) \Leftrightarrow (w\,, Az - c) = 0 = (A'w - a\,, z)$

İspat :

Varsayalım ki (i) ve (ii) [0,T] de hemen hemen her yerde sağlanıyor. i. eşitsizliği $\omega_i(t)$ ile j. eşitsizliği $\zeta_j(t)$ ile çarpıp toplarsak;

$$\sum_{i=1}^{M} \omega_i(t)(Bz(t))_i = \sum_{i=1}^{M} \omega_i(t)\gamma_i(t) + \sum_{i=1}^{M} \omega_i(t)\,(\int_0^t Cz(s)ds)_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \zeta_j(t)(w(t)B)_j = \sum_{i=1}^{N} \zeta_j(t)\alpha_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \zeta_j(t)\,(\int_t^T w(s)Cds)_j$$

elde ederiz . İntegralleme ve lemma 1 'i kullanarak $\int_0^T z(t).a(t)\,dt = \int_0^T w(t).c(t)\,dt$ eşitliği gelir. Tersine ,eğer (i) ve (ii) koşulları [0,T] 'nin bir alt kümesindeki t için sağlamıyorsa yukarıdaki eşitsizlikler pozitif ölçümün bir kümesindeki t için direk eşitsizlik olmalıdır. Sonuç olarak $\int_0^T z(t).a(t)\,dt < \int_0^T w(t).c(t)\,dt$ elde ederiz. Bu ispatı tamamlar.

Duallik teoreminin genişletilmesi üzerine;

Buraya kadar görülmüştür ki optimallik ve denklik şartları ,sürekli lineer programlama problemlerinin bu sınıfına zorluk çıkmadan genişletilebilmiştir. Fakat diğer taraftan duallik teoremi , hipotezleri modifiye etmeden genişletilememiştir.

Bu bölümde teorem 4 .5 ,6 hipotezlerin ve teorem 1 in içeriğini haklı çıkaracaktır.

Teorem 4.4:

Kendi problemleri için uygun olan z ve w fonksiyonlarının varlığı , optimize eden çözümün varlığını garantilemek için yeterli değildir.

İspatı 1. örnekde

Teorem 4.5:

Hipotez (II) olmadan hipotez (I) , optimize eden çözümün varlığını garantilemek için yeterli değildir.

İspatı 1. örnekde

Teorem 4.6:

Hipotez (I) olmadan hipotez (II) , optimize eden çözümün varlığını garantilemek için yeterli değildir.

İspatı 2. örnekde

Örnek 1:

γ_1 ve γ_2 pozitif sayılar olsun ve varsayalım ki $T > \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

$$0 \leq \gamma_1 - \int_0^t \zeta(s)ds \quad , \quad 0 \leq t \leq T \qquad (1.1)$$
$$\zeta(t) \leq \gamma_2 \quad , \quad 0 \leq t \leq T \qquad (1.2)$$

kısıtları altında $\int_0^T \zeta(t)dt$ 'yi maksimum yapan nonnegatif ζ fonksiyonunu bulunuz.

Problemin çözümü açıktır. $\zeta(t) = \frac{\gamma_1}{T}$ olsa baştaki varsayımımızdan $\frac{\gamma_1}{T} < \gamma_2$ 'dir. Ayrıca $\int_0^t \zeta(s)ds = \frac{t\gamma_1}{T} \leq \gamma_1$ $(0 \leq t \leq T)$ olur. Buradan ζ fonksiyonunun uygun olduğunu anlarız. (1.1) kısıtı açısından bakarsak ζ ; maksimum γ_1 değerini üretecektir.

Bu problemin duali ise ;

$$\omega_2(t) \geq 1 - \int_t^T \omega_1(s)\, ds \quad , \quad 0 \leq t \leq T \qquad (1.3)$$

Kısıtı altında $\int_0^T(\gamma_1\omega_1(t) + \gamma_2\omega_2(t))\, dt$ 'yi minimum yapan nonnegatif ω_1 ve ω_2 fonksiyonlarını bulmaktır. Şimdi eğer ω_1 ve ω_2 uygun fonksiyonları bir minimum γ_1 değerine erişebiliyorlarsa $\zeta(t) = \frac{\gamma_1}{T}$ iken denklik şartlarını sağlamalıdır. (1.2) kısıtı, [0,T] aralığı boyunca direk eşitsizlik ise $\omega_2 = 0$ olmalı ve $\zeta(t) > 0$ olduğundan ω_1 , (1.3) kısıtını hemen hemen her yerde eşitlik olarak sağlamalıdır. Bu nedenle ω_1 'i ; [0,T] aralığındaki hemen hemen her yerde $\int_t^T \omega_1(s)\, ds = 1$ olacak şekilde aramalıyız. Fakat hiçbir ölçülebilir fonksiyon bu özelliğe sahip değildir.

$$\frac{d\int_t^T \omega(s)\, ds}{dt} = \frac{d(1)}{dt}$$
$$\Longrightarrow -\omega(t) = 0$$

$\omega(t) = c$ olsa $c(T-t) = 1$ olurdu

$$\Longrightarrow c = \omega(t) = \frac{1}{T-t} \text{ olur.}$$

Buradan primal problemin çözümü olmasına rağmen dual problemin çözümü olmayacağı anlamını çıkartmak zorunda kalırız. Fakat hernasılsa bu dual problem uygundur. Aslında

$$\lim_{n} \int_0^T \omega^n(t)c(t)dt = \gamma_1$$

olacak şekilde bir $\omega^n \in W$ dizisi vardır.

$n > \frac{1}{T}$ için $\omega^n(t)$ 'yi ;

$$\omega_1^n(t) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \le t \le T - \frac{1}{n} \\ n & \text{eğer } T - \frac{1}{n} \le t \le T \end{cases}$$

$$\omega_2^n(t) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 0 \le t \le T - \dfrac{1}{n} \\ 1-(T-t)n & \text{eğer } T - \dfrac{1}{n} \le t \le T \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi görürüz ki her bir ω^n uygundur ve dahası

$$\int_0^T (\gamma_1 \omega_1^n(t) + \gamma_2 \omega_2^n(t))\, dt = \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2n} \to \gamma_1 \qquad (n \to \infty)$$

olur.

Bu problemde primal problem de dual problem de uygundur. Böylece teorem 4.4 ispatlanmıştır. Peşinden B matrisi $\binom{0}{1}$ olduğundan Hipotez (I) sağlanmış , $C = \binom{-1}{0}$ olduğundan Hipotez (II) sağlanmamıştır. Bu teorem 4.5 'i ispatlar.

Örnek 2 :

γ bir pozitif sayı olsun .

$$\zeta_1(t) \le \gamma + \int_0^t \zeta_2(s)ds \quad , 0 \le t \le T \qquad (2.1)$$

kısıtı altında $\int_0^T \zeta_1(t)dt$ 'yi maksimum yapan nonnegatif ζ_1 ve ζ_2 fonksiyonlarını bulunuz.

$0 \le t \le T$ için $\zeta_2^n(t) = n$ ve $\zeta_1^n(t) = \gamma + nt$ olmasına izin verirsek

$$\int_0^T \zeta_1(t)dt = \gamma T + \frac{nT^2}{2}$$

buluruz. Bu da demektir ki maksimum yoktur.

Burada hipotez (II) sağlanmışken hipotez (I) sağlanmamıştır. Bu teorem 6 'yı ispatlar.

Ana lemma:

Şimdi bizi duallik teoreminin ispatına götürecek bazı lemmaların ispatlarına yöneliyoruz. Sürekli problemin çözümüne , sonlu ayrık yaklaşımların bir dizisi aracılığıyla yanaşıyoruz.

n= 1,2,... için $\Delta t^n = \frac{T}{n}$ ve $t_k^n = \frac{kT}{n}$ $(k = \overline{0,n})$ olsun,

$k = \overline{0, n-1}$ için $a^n(t_k^n) = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} a(t)dt$ olsun,

$a^n(t_n^n) = a^n(t_{n-1}^n)$ olsun,

$k = \overline{1,n}$ için $c^n(t_k^n) = \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} c(t)dt$ olsun.

$c^n(t_0^n) = c^n(t_1^n)$ olsun.

Şimdi P^n ;

$$Bz^n(t_0^n) \le c^n(t_0^n) ,$$

$$Bz^n(t_k^n) \le c^n(t_k^n) + \Delta t^n \sum_{v=0}^{k-1} C\, z^n(t_v^n) \qquad k = \overline{1,n}$$

kısıtları altında

$$\sum_{k=0}^{n} z^n(t_k^n) a^n(t_k^n) \text{ 'i}$$

maksimum yapan $z^n(t_0^n)$, ... , $z^n(t_n^n) \in E^N$ nonnegatif vektörleri bulma problemi olsun.

Bu sonlu lineer programlama probleminin duali ise ;

$$w^n(t_n^n)\, B \le a^n(t_n^n) ,$$

$$w^n(t_k^n)\, B \le a^n(t_k^n) + \Delta t^n \sum_{v=k+1}^{n} w^n(t_v^n)\, C \qquad k = \overline{1, n-1}$$

kısıtları altında

$$\sum_{k=0}^{n} w^n(t_k^n) c^n(t_k^n)$$

minimum yapan $w^n(t_0^n)$, ... , $w^n(t_n^n) \in E^M$ nonnegatif vektörlerini araştırır.

Bu diskret (kesikli) dual problemi sürekli dual problemle kıyaslamak bilgilendirici olacaktır. Kıyaslamada görürüz ki , sürekli esas problemin diskret versiyonuyla ilişkili dual problem , sürekli primal problemle ilişkili dual problemin diskret versiyonuyla aynıdır.

Eğer $z^n(t_0^n)$, … , $z^n(t_n^n)$; P^n problemi için uygunlarsa

$$\hat{z}^n(t) = \begin{cases} z^n(t_0^n), & t_0^n \le t \le t_1^n \\ z^n(t_k^n), & t_{k-1}^n \le t \le t_k^n \\ z^n(t_{n-1}^n), & t_{n-1}^n \le t \le t_n^n \end{cases} \qquad k = 1,2,\dots,n\text{-}2$$

şeklinde bir ilgili basamak fonksiyonu $\hat{z}^n(t) : [0,T\,] \to E^N$ 'i tanımlayalım.

Benzer şekilde ;

Eğer $w^n(t_0^n)$, … , $w^n(t_n^n)$; P^n probleminin duali için uygunlarsa

$$\hat{w}^n(t) = \begin{cases} w^n(t_1^n), & t_0^n \le t \le t_1^n \\ w^n(t_k^n), & t_{k-1}^n \le t \le t_k^n \\ w^n(t_n^n), & t_{n-1}^n \le t \le t_n^n \end{cases} \qquad k = 2,\dots,n\text{-}1$$

şeklinde bir ilgili basamak fonksiyonu $\hat{w}^n(t) : [0,T] \to E^M$ 'i tanımlayalım.

Not edelim ki böyle ilgili basamak fonksiyonları genelde sürekli problemler için doğru değildir.

Ana lemmayı ispatlamak için sürekli problem ve duali için uygun fonksiyonlar kümeleri olan Z ve W 'nin tanımındaki tüm $t \in [0,T]$ için sağlanan eşitsizlikler gerekliliğini geçici olarak gevşetmemiz gerekmektedir.

$p = 1$, ∞ için $L^P[0,T]$; $[0,T]$ üzerinde reel değerli Lebesgue ölçülebilir ve sonlu L^P normuna sahip fonksiyonların denklik sınıflarının ailesi olsun.

Bir $z : [0,T\,] \to E^N$ eşlemesi için eğer $j = \overline{1,N}$ için $\zeta_j \in L^P[0,T]$ ise $z \in L_N^P$ diyebileceğiz.

Z_L 'yi $Z_L = \{z \in L_N^1 : Bz(t) \le c(t) + \int_0^t Cz(s)ds$ ve h.h.h. $t \in [0,T]$ için $z(t) \ge 0\}$ şeklinde tanımlayalım ve

$Z_L' = \{ z \in L_N^1 : \int_{t_1}^{t_2} Bz(t)dt \leq \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} (\int_0^t Cz(s)ds)\, dt$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ için h.h.h. yerde $z(t) \geq 0\}$ olsun.

W_L ve W_L' 'benzer tanımları W ile ilişkilendirilebilir.

İddia ediyoruz ki $Z_L = Z_L'$

$z(t) \to Bz(t) - \int_0^t Cz(s)ds$ fonksiyonu L_N^1 'i L_M^1 'in içine eşlediğinden her bir bileşene ayrı ayrı bakan biri görebilir ki özel durum $N = M = 1$ için $Z_L = Z_L'$ eşitliğini ispatlamak yeterlidir.

Şimdi açıkça $Z_L \subset Z_L'$ 'dir. Diğer içerme iyi bilinen reel fonksiyonlar teorisinden gelir. Şöyle ki ; eğer $f \in L^1$ ve $F(x) = \int_0^x f(t)dt)$ ise F' hemen hemen her yerde vardır ve h.h.h. yerde $F'(x) = f(x)$ 'tir.

$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ 'de t_1 ' i sabitlediğimizi düşünelim . öyleyse

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} Bz(t)dt \leq \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} c(t)dt + \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}(\int_0^t Cz(s)ds)\, dt \quad \text{olur.}$$

fakat ; $t_2 \to t_1^+$ iken eşitsizliğin sol tarafı $Bz(t_1)$ 'e, sağ tarafı $c(t_1) + \int_0^{t_1} Cz(s)ds$ 'ye yaklaşır.(her $t \in [0,T]$ için)

böylece $Z_L' \subset Z_L$ olur.

Banach uzayları teorisinden bir sonuca ihtiyaç duyacağız. Ayrılabilir(seperable) Banach uzayı $L^1[0,T]$ 'nin duali $L^\infty[0,T]$ şeklinde gösterilebilir. Bir ayrılabilir Banach uzayının duali tarafından yararlanılan önemli bir özellik ; güçlü topolojide sınırlandırılmış kümeler için zayıf* dizisel kompaktlıktır.

Amaçlarımız doğrultusunda yeniden ifade edersek , bu şuna dönüşür;

$\lambda_n \in L^\infty[0,T]$ olsun ve $n = 1,2,\ldots$ için $\|\lambda_n\|_\infty \leq p$ olduğunu farzedin .ardından $\lambda \in L^\infty[0,T]$ ve $\lambda_{n_k} \to \lambda$ (zayıf*) olacak şekilde bir $\{n_k\}$ alt dizisi vardır ki bu her $f \in L^1[0,T]$ için $\int_0^T \lambda_{n_k} f \to \int_0^T \lambda f$ 'i verir.

Bunu yeniden ifade edersek.

Lemma 3.

$\lambda_n \in L^{\infty}[0,T]$ olsun ve farzedelim ki n = 1,2,... için $\|\lambda_n\|_{\infty} \leq$ p olsun . Öyleyse $\lambda \in L^{\infty}[0,T]$ ve $\int_{t_1}^{t_2} \lambda_{n_k}(t)dt \to \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt$ $(0\leq t_1 \leq t_2 \leq T)$ olacak şekilde bir $\{n_k\}$ alt dizisi vardır.

İspat :

$\mathcal{X}$, $[t_1, t_2]$ için karakteristik fonksiyon olsun. [0, T] sonlu ölçüme sahip olduğundan $\mathcal{X} \in L^1[0,T]$ olur ve yukarıda tekrarlanan sonuçlardan çıkarım gelir.

Şimdi ana lemmayı ispatlayabiliriz.

Lemma 4.

n=1,2,... için P^n ;sürekli primal problemle ilişkili diskret problem olsun .Varsayalım ki tüm n 'ler için P^n 'i ve dualini çözen $\{z^n(t_0^n), \ldots, z^n(t_n^n)\}$ ve $\{w^n(t_0^n), \ldots, w^n(t_n^n)\}$ vektörleri mevcut. Dahası farzedin ki tüm o çözüm kümeleri; sırasıyla E^N ve E^M 'in sınırlı alt kümelerinin içinde. Öyleyse , $\bar{z} \in Z_L$ ve $\bar{w} \in W_L$ sınırlı fonksiyonları varsa,

$$\int_0^T \bar{z}(t).a(t)dt = \int_0^T \bar{w}(t).c(t)dt$$

olur.

İspat:

$\{z^n(t_0^n), \ldots, z^n(t_n^n)\}$ 'le ilişkili $\hat{z}^n$ basamak fonksiyonu için

$$\hat{z}^n(t) = \{ \zeta_1^n(t), \ldots, \zeta_N^n(t) \} \quad (0\leq t \leq T)$$

yazalım . Hipotezler sayesinde p > 0 vardır öyle ki j=1,...,N ; n=1,2,... ve $0\leq t \leq T$ için $|\zeta_j^n(t)|_{\infty} \leq$ p 'dir. böylece j=1,...,N ; n=1,2,... ve $\|\zeta_j^n(t)\|_{\infty} \leq$ p için $\zeta_j^n \in L^{\infty}[0,T]$ olur. zayıf* limiti bulmak için köşegen yönteminden(diagonal process) faydalanacağız. Lemma 3 'ten $k \to \infty$ iken $0\leq t_1 \leq t_2 \leq T$ için $\bar{\zeta}_1 \in L^{\infty}[0,T]$ ve bir alt dizi $\{n_k\}$ vardır öyle ki ;

$$\int_{t_1}^{t_2} \zeta_1^{n_1(k)}(t)dt \to \int_{t_1}^{t_2} \bar{\zeta}_1(t)dt$$

olur. Peşinden , bir $\bar{\zeta}_2 \in L^\infty[0,T]$ elde etmek için lemma 3 'ü $\{\zeta_2^{n_1(k)}\}$ 'ya uygulayalım . öyle ki $\{\zeta_2^{n_1(k)}\}$ 'nın bir alt dizisi $\bar{\zeta}_2$ 'ye yakınsar(zayıf*).

$j=1,\ldots,N$ için $\bar{\zeta}_j \in L^\infty[0,T]$ ' yi ve yine $j=1,\ldots,N$ için $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ de $k \to \infty$ iken

$$\int_{t_1}^{t_2} \zeta_j^{n_2(k)}(t)dt \to \int_{t_1}^{t_2} \bar{\zeta}_j(t)dt \qquad (4.1)$$

Olacak şekilde bir ortak $\{ n_2(k)\}$ altdizisini elde etmek için başarılı dizileri almayı tekrar edelim.

$t \in [0,T]$, $j=1,\ldots,N$ ve $k= 1,2,\ldots$ için $0 \leq \zeta_j^{n_2(k)} \leq p$ olduğundan $u=(1,1,\ldots,1)$ olduğu yerde hemen hemen her $t \in [0,T]$ için $0 \leq \bar{z}(t) \leq pu$ eşitsizliği (4.1) den direk gelir. L_N^∞ dan eşdeğer bir temsilci alarak

$$0 \leq \bar{z}(t) \leq pu \quad , \quad 0 \leq t \leq T \qquad (4.2)$$

olduğunu varsayabiliriz.

$\bar{z} \in Z_L$ 'yi ispatlamak için

$$\hat{c}^n(t) = \begin{cases} c^n(t_k^n) \ eğer \ t_k^n \leq t \leq t_{k+1}^n \\ c^n(t_n^n) \ eğer \ t = t_n^n \end{cases} \qquad k = 0,\ldots,n-1 \quad ,$$

sayesinde $\{c^n(t_0^n) , \ldots , c^n(t_n^n)\}$ 'le ilişkili $\hat{c}^n : [0,T] \to E^M$ basamak fonksiyonu tanımlamak kullanışlıdır.

Şimdi iddia ediyoruz ki : $0 \leq t \leq T$ de tüm t ve tüm n için $x_n(t) \in E^M$ vardır öyle ki. $t \in [0,T]$ için t de düzgün olarak $\lim_n x_n(t) = 0$ olduğu yerde ;

$$B\hat{z}^n(t) \leq \hat{c}^n(t) + \int_0^t C\hat{z}^n(s)ds + x_n(t) \quad \text{'dir.} \qquad (4.3)$$

Şimdi verilen herhangi bir n ve $t \in [0,T)$ için $0 \leq k \leq n-1$ olacak şekilde yegane bir k vardır öyle ki $t_k^n \leq t < t_{k+1}^n$ 'dir. Tanımdan $\hat{z}^n(t) = z^n(t_k^n)$ ve $\hat{c}^n(t) = c^n(t_k^n)$ 'dir. Yine tanımdan , $k=0$ olması halinde $\sum_{v=0}^{-1} z^n(t_v^n) = 0$ olacağını kabul edeceğimiz yerde,

$\int_0^t C\hat{z}^n(s)ds = \Delta t^n \sum_{\nu=0}^{k-1} Cz^n(t_\nu^n)$ +(t- t_k^n)$Cz^n(t_k^n)$ 'dir

Açıktır ki bu prosedür, herhangi bir n ve $t_k^n \leq t < t_{k+1}^n$olacak şekilde k 'yı temin eden $t \in [0, T)$için , (t- t_k^n)$Cz^n(t_k^n)$ (buna $x_n(t)$ diyelim) terimini eşsiz bir şekilde tanımlar. Dikkate alalım ki (E^M üzerinde herhangi bir lineer norm için); tüm n ve $t \in [0, T)$ için,

$$\|x_n(t)\| \leq \Delta t^n \|Cz^n(t_k^n)\| \text{ 'dir.}$$

Artık hipotezler sayesinde $p > 0$ vardır öyle ki tüm n ve k, $0 \leq k \leq n$ için $0 \leq z^n(t_k^n) \leq pu$ olur. Bundan dolayı $p' > 0$ vardır öyle ki tüm n ve k ,$0 \leq k \leq n$ için $\|Cz^n(t_k^n)\| \leq p'$ olur. Böylece tüm n ve $t \in [0, T)$ için $\|x_n(t)\| \leq \frac{T}{n} p'$ olur, dolayısıyla , $t \in [0, T]$ için t de düzgün olarak $\lim_n x_n(t) = 0$ olur. (4.3) eşitsizliği $z^n(t_\nu^n)$ 'in P^n için uygun olmasından dolayı gelir. Özellikle

$$B\hat{z}^n(t) - \int_0^t C\hat{z}^n(s)ds \leq \hat{c}^n(t) + x_n(t) \text{ olsun diye}$$

$$Bz^n(t_k^n) \leq c^n(t_k^n) + \Delta t^n \sum_{\nu=0}^{k-1} Cz^n(t_\nu^n) \quad \text{'dir.} \qquad (4.4)$$

Bu varsayımı ispatlar.

Şimdi $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ olmak üzere (4.3) 'ü t_1 den t_2 ye integrallersek n=1,2,... için

$$\int_{t_1}^{t_2} B\hat{z}^n(t)\, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \hat{c}^n(t)dt + \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^t C\hat{z}^n(s)ds\right)dt + \int_{t_1}^{t_2} x_n(t)dt \quad (4.5)$$

'yi elde ederiz. Fakat (4.1) den $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ için $k \to \infty$ iken

$$\int_{t_1}^{t_2} B\hat{z}^{n_2(k)}(t)\, dt \to \int_{t_1}^{t_2} B\bar{z}(t)\, dt \text{ ve}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^t C\hat{z}^{n_2(k)}(s)ds\right)dt \to \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^t C\bar{z}(s)ds\right)dt \quad \text{olur.}$$

Şimdi eğer $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ için $k \to \infty$ iken

$\int_{t_1}^{t_2} \hat{c}^{n_2(k)}(t)dt \to \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$ ise bu (4.5) ten gelir ve bu $\bar{z} \in Z_L'$ sonucunu verir buradan da $\bar{z} \in Z_L$ olur.

Bunu $\hat{c}^n(t)$ in $n \to \infty$ iken $t \in [0, T]$ için c(t) ye düzgün yakınsadığını göstererek ispatladık. Artık c kapalı $[0, T]$ aralığında süreklidir ayrıca c orada düzgün süreklidir. Sonuç olarak verilen herhangi $\epsilon > 0$ için bir n_0 tamsayısı vardır ki ;ne zaman $0 \leq t'$, $t \leq T$, $|t' - t| < 2\Delta t^n$ ve $n > n_0$ olsa $\|c(t') - c(t)\| < \epsilon$ olur.

Verilen n ve $t \in [0, T]$ için $t_k^n \leq t$ olacak şekilde k en büyük değere sahip olsun. Ardından tanımlardan $k \geq 1$ için ne zaman $n > n_0$ olsa

$$\|\hat{c}^n(t) - c(t)\| = \|c^n(t) - c(t)\| \leq \frac{1}{\Delta t^n}\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \|c(s) - c(t)\|ds < \epsilon$$

olur. Çünkü ne zaman $n > n_0$ olsa $k = 0$ için kolayca görülebilir ki $\|\hat{c}^n(t) - c(t)\| < \epsilon$ 'dur. İspat tamamlanmıştır.

Aradığımız $\overline{w} \in W_L$ yi elde etmek için , $k \to \infty$ iken $j=1,\dots,N$ için $\zeta_j^{n_2(k)} \to \bar{\zeta}_j$ (zayıf*) olduğu yerde $\{\widehat{w}^{n_2(k)}\}$ dizisine bakarız.(bkz(4.1)) . Önceden yaptığımıza benzer şekilde köşegen yönteminden bir $\overline{w} \in L_M^\infty$ fonksiyonu ve $\{n_2(k)\}$ 'nın bir altdizisi ($n_3(k)$ diyelim) vardır öyle ki $i=1,\dots,M$ için $k \to \infty$ iken $\omega_i^{n_3(k)} \to \overline{\omega}_i$ (zayıf*) olur.

Öncekine benzer bir argüman sayesinde $\overline{w} \in W_L$ elde ederiz ve bu $v=(1,1,\dots 1) \in E^M$ olduğu yerde bazı pozitif $\bar{p}$ 'ler için

$$0 \leq \overline{w}(t) \leq \bar{p}v \quad , \; 0 \leq t \leq T \qquad (4.6)$$

olduğu varsayılabilir.

Lemmanın ispatını tamamlamak için $\int_0^T \bar{z}(t).a(t)dt = \int_0^T \overline{w}(t).c(t)dt$ 'nin ispatı kalmıştır.

Şimdi lineer programlamanın duallik teoremini kullanıyoruz ve $n = 1,2,\dots$ için P^n ve dualini çözen $z^n(t_v^n)$ ve $w^n(t_v^n)$ vektörleri hipotezinden

$$\sum_{v=0}^n z^n(t_v^n).a^n(t_v^n) = \sum_{v=0}^n w^n(t_v^n).c^n(t_v^n) \quad , \; n=1,2,\dots \qquad (4.7)$$

eşitliğini elde ederiz.

Not edelim ki $v = 0,\dots,n\text{-}1$ için eğer $t_v^n \leq t < t_{v+1}^n$ ise $\hat{z}^n(t) = z^n(t_v^n)$ 'dir. böylece tanımlardan ,

$$\Delta t^n \sum_{v=0}^{n-1} z^n(t_v^n).a^n(t_v^n)$$

$$= \sum_{v=0}^{n-1} z^n(t_v^n).\int_{t_v^n}^{t_{v+1}^n} a(t)dt = \sum_{v=0}^{n-1} \int_{t_v^n}^{t_{v+1}^n} \hat{z}^n(t)a(t)dt = \int_0^T \hat{z}^n(t)a(t)dt$$

olur.

Benzer şekilde $v = 0,\dots,n$ için eğer $t_{v-1}^n < t \leq t_v^n$ ise $\widehat{w}^n(t) = w^n(t_v^n)$ 'dir. bundan dolayı

$$\Delta t^n \sum_{\nu=1}^{n} w^n(t_\nu^n).\, c^n(t_\nu^n)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} w^n(t_\nu^n). \int_{t_{\nu-1}^n}^{t_\nu^n} c(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{t_{\nu-1}^n}^{t_\nu^n} \widehat{w}^n(t)c(t)dt = \int_0^T \widehat{w}^n(t)c(t)dt$$

olur.

Böylece (4.7) den ,n=1,2,... için

$$\int_0^T \hat{z}^n(t)a(t)dt + \Delta t^n z^n(t_n^n).\, a^n(t_n^n)$$

$$= \int_0^T \widehat{w}^n(t)c(t)dt + \Delta t^n w^n(t_0^n).\, c^n(t_0^n) \qquad (4.8)$$

olur.

Açıktır ki, $z^n(t_n^n), a^n(t_n^n)$, $w^n(t_0^n)$ ve $c^n(t_0^n)$ vektörleri tüm n 'ler için sınırlı olmaya devam etmişlerdir bundan dolayı da,

$$\lim_n \Delta t^n z^n(t_n^n).\, a^n(t_n^n) = \lim_n \Delta t^n w^n(t_0^n).\, c^n(t_0^n) = 0 \quad \text{'dır.}$$

Şimdi bir ortak $\{n_3(k)\}$ altdizisinin var olması durumunu kullanacağız öyle ki i=1,....M ve j=1,...,N için $k \to \infty$ iken $\zeta_j^{n_3(k)} \to \bar{\zeta}_j$ ve $\omega_i^{n_3(k)} \to \bar{\omega}_i$ (zayıf*) olur. Böylece $k \to \infty$ iken

$a \in L_N^1$ olduğundan $\int_0^T \hat{z}^{n_3(k)}(t)a(t)dt \to \int_0^T \bar{z}(t)a(t)dt$ ve

$c \in L_M^1$ olduğundan $\int_0^T \widehat{w}^{n_3(k)}(t)c(t)dt \to \int_0^T \bar{w}(t)c(t)dt$ olur.

Fakat bu $\int_0^T \bar{z}(t)a(t)dt$ ve $\int_0^T \bar{w}(t)c(t)dt$ limit değerleri eşit olmalıdır. Bu durum (4.8) 'den ve Δt^n içeren terimlerin sıfıra meyilli olmasından gelir.

Bu ana lemmanın ispatını tamamlar.

Not edelim ki sadece hemen hemen her yerde sağladıklarından $\bar{z}$ ve $\bar{w}$ orijinal problemin çözümü olmayabilirler.

Lemma 5. (yama yöntemi (patch-up process)) :

$t \in [0,T]$ için $0 \leq z(t) \leq pu$ ile verilmiş $z \in Z_L$ için bir $\tilde{z} \in Z$ vardır öyle ki hemen hemen her yerde $\tilde{z} = z$ 'dir. (benzer bir sonuç dual problem için geçerlidir.)

İspat:

$S = \{ t \in [0,T] : Bz(t) \leq c(t) + \int_0^t Cz(s)ds \}$ olsun. Sonrasında hipotezlerden, eğer $\tilde{S}$, $[0,T]$ de S 'nin tümleyenini belirtiyor ise $\tilde{S}$ 'nin lebesgue ölçümü sıfırdır. Böylece S, $[0,T]$ de yoğundur.

Seçim aksiyomu sayesinde, $t \in S$ için $\tilde{z}(t) = z(t)$ olacak şekilde bazı sınırlı, ölçülebilir ve nonnegatif $\tilde{z}$ fonksiyonu seçmek istiyoruz öyle ki ;

$$B\tilde{z}(t) \leq c(t) + \int_0^t C\tilde{z}(s)ds \quad , \quad 0 \leq t \leq T \qquad (4.9)$$

olsun. (4.9) yerine

$$B\tilde{z}(t) \leq c(t) + \int_0^t Cz(s)ds \quad , \quad 0 \leq t \leq T \qquad (4.10)$$

'ye sahip olmamız yeterlidir çünkü $t \in S$ için $\tilde{z}$ hemen hemen her yerde z 'ye eşit olur.

Öyle bir fonksiyonun varlığını göstermek için her $t \in \tilde{S}$ için bazı $x \in E^N$ 'lerin varlığını $Bx \leq c(t) + \int_0^t Cz(s)ds$ ve $0 \leq x \leq pu$ olacak şekilde göstermek yeterlidir. Bu doğrultuda $t_0 \in \tilde{S}$ olsun. $k = 1,2,\ldots$ için [0,T] de S 'nin yoğun olmasından $k \to \infty$ iken $t_k \to t_0$ olacak şekilde $t_k \in S$ vardır. Şimdi hipotezler sayesinde $k = 1,2,\ldots$ için $0 \leq z(t_k) \leq pu$ olur ve ayrıca kompaktlıktan, $x \in E^N$ ve bir $\{k_l\}$ altdizisi vardır öyle ki $z(t_{k_l}) \to x$ 'dır. Fakat her bir l için $Bz(t_{k_l}) \leq c(t_{k_l}) + \int_0^{t_{k_l}} Cz(s)ds$ olur. Bundan dolayı limit durumunda $Bx \leq c(t_0) + \int_0^{t_0} Cz(s)ds$ 'dir. Bu c 'nin ve integralin sürekliliğini kullanır. Dahası $l = 1,2,\ldots$ için $0 \leq z(t_{k_l}) \leq pu$ 'dir böylece de $0 \leq x \leq pu$ olur.

Bu nedenle , seçim aksiyomu sayesinde arzulanan özelliklere sahip bazı $\tilde{z}$ 'ler vardır deriz.

Tyndall makalesinin bundan sonraki kısımlarında ispatlanmış bir lemma 4 'e sahip olmakla teorem 1'in hipotez (I) ve (II) 'sinin , teoremi, lemma 4 'ün uygulanabilir olduğu bir noktaya indirgemek için yeterli olacaklarını göstermenin yollarını aramıştır. Bu nedenle lemma 6 ve lemma 7 ile hipotez (I) 'in primal problemlerin sınırlılığını garantilediğini göstermiştir.

Lemma 6.

Varsayalım ki

$$\{z \in E^N : z \geq 0 \text{ ve } Az \leq 0\} = \{0\}.$$

Öyleyse $z \geq 0$ olacak şekilde $p > 0$ vardır ve $Az \leq x$ ise $z \in E^N$ ve $x \in E^M$ iken $\|z\| \leq p\|x\|$ 'dir.

Lemma 7.

Farzedelim ki

$$\{z \in E^N : z \geq 0 \text{ ve } Bz \leq 0\} = \{0\}.$$

n=1,2,... için, $\{z^n(t_0^n), \ldots, z^n(t_n^n)\}$, P^n için uygun olsun. Öyleyse R> 0 vardır öyle ki tüm n ve k için $0 \leq k \leq n$,$\|z^n(t_k^n)\| \leq R$ olur.

Ardından Tyndall hipotez (II) yi kullanan dual problemin sınırlılığını lemma 8 ve lemma 9 la irdelemiştir.

Lemma 8.

Farzedelim ki B ,C ve c(t) nonnegatif bileşenlere sahip($0 \leq t \leq T$). Bu durumda $p > 0$ vardır öyle ki eğer P^n in duali bir çözüme sahipse p den büyük olmayan bileşenlere sahip çözüm vektörlerine sahiptir.

Buradan da görülüyor ki eğer $B \geq 0$ ise $\{x \in E^N : x \geq 0 \text{ ve } Bx \leq 0\} = \{0\}$ dır ancak ve ancak B nin her bir sütunu pozitif girdilere sahipse.

Lemma 9.

Lemma 8 in hipotezleri sağlanırsa ve B nin her bir sütunu pozitif girdilere sahipse , $\overline{w}^n(t_0^n), \ldots, \overline{w}^n(t_n^n)$ 'ler P^n in duali için uygundurlar.(n =1,2,...)

Tüm bu teoremlerin ve lemmaların elde edilmesiyle Tyndall teorem 1 in artık ispatlanabilir duruma geldiğini belirtmiş, lemma 10 'da teorem 1 in hipotezleri altında n = 1,2,... için P^n in ve dualinin optimize eden $z^n(t_k^n)$ ve $w^n(t_k^n)$ çözümlerinin var olacağını ispatlamıştır(k = 0,..., n).

Ardından Tyndall ilişkili sonuçlar başlığı altında primal problem P^n için olan $\{\hat{z}^n\}$ fonksiyonları üzerinde hipotez (I) in düzgün bir sınır vermek için yeterli olduğunu ve hipotez (II) nin P^n in duali için $\{\widehat{w}^n\}$ fonksiyonlar kümesinin düzgün sınırlılığını garantilediğini söylemiş ve bu hipotez (I) 'in Z ile ve hipotez (II) 'nin W ile ilişkili olduğunun teorem 7 ve 8 ile daha görünür olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 4.7 :

Hipotez (I) altında ,eğer Z boş değilse $z \in Z$ için $\int_0^T z(t)a(t)dt$ yi maksimum yapan bir $\bar{z} \in Z$ vardır.

Teorem 4.8 :

Hipotez (II) altında ,eğer W boş değilse $w \in W$ için $\int_0^T w(t)c(t)dt$ yi minimum yapan bir $\bar{w} \in W$ vardır.

Makalesinin son kısmında Tyndall bir dinamik leontief modeline ekonomik bir uygulama yapmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde elde edilen sonuç ; Lineer programlama problemlerine, dual problem yardımıyla optimal çözüm bulma yeteneğimiz, sonsuz boyutlu uzaylarda yeterli olmamaktadır. Fakat yine de bazı özel durumlar için özel şartlar altında dualliğin de yardımıyla çözüm elde edilebilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Tyndall W.F.,1965,"A duality theorem for a class of continuous linear programming problems", J.Soc.Indust.Appl.Math., vol.13 no:3,USA.

[2] Karmanov V.G.,1989, "Mathematical programming", Mir publishers Moscow , USSR.

[3] Gass S.I.,1985, "Linear programming methods and applications" fifth edition,Dover publication inc. New York

[4] Yüksel Soykan, 2008, "Fonksiyonel analiz" ,Nobel yayınları

[5] Öner Çakar ,2007, "Fonksiyonel analize giriş" A.Ü.Fen edebiyat fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları,Ankara

ÖZGEÇMİŞ

Volkan ÇAKMAK

1980 yılında Muş'un Malazgirt ilçesinde doğdu. İlk öğreniminin ilk iki yılını Ankara Polatlı ilçesinde son üç yılını Ordu ilinde tamamladı. Ortaokul ve liseyi Ordu Anadolu Lisesinde okudu.1999 yılında Çukurova üniversitesi Matematik bölümünde okumaya başlayıp 2003 senesinde bölümü bitirdi. Aynı üniversitenin tezsiz yüksek lisans programını (pedagojik formasyon) 2004 senesinde bitirdi. 2005 senesinde Ordu Özel Seçkin Kadro Dershanesinde Matematik Öğretmeni olarak meslek hayatına başladı . 2014 senesinde devlet kadrosuna atandı. Bugün Ordu Başöğretmen Anadolu Lisesinde öğretmenlik mesleğine devam etmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.