GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-NORMLU ÇİFT DİZİ UZAYLARINDA SUPERPOSITION OPERATORLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Aydın IRMAK
162110010

Haziran 2019

GİRESUN

T.C
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-NORMLU ÇİFT DİZİ UZAYLARINDA SUPERPOSITION OPERATORLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aydın IRMAK

Enstitü Ana Bilim Dalı : **FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

Tez Danışmanı : **Dr. Öğr. Üyesi Oğuz OĞUR**

Haziran 2019

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-NORMLU ÇİFT DİZİ UZAYLARINDA SUPERPOSITION OPERATORLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Aydın IRMAK

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 17/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR Jüri Başkanı	Dr. Öğr. Üyesi Kerim BEKAR Üye	Dr. Öğr. Üyesi Oğuz OĞUR Üye

Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerden herhangi bir tahrifat yapılmadığını başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Aydın IRMAK

17/06/2019

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyerek bana karşılaştığım her zorluğun üstesinden gelmemde yardımcı olan çok değerli tez danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Oğuz OĞUR' a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Giresun Üniversitesi Matematik Bölümü'nün çok değerli hocalarıma sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Ayrıca daima yanımda olan dualarını, desteklerini benden esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$=$	: Tanım olarak eşittir
$\Rightarrow$	: Gerek koşul
$\Leftarrow$	: Yeter koşul
$\forall$	: Her
$\exists$	: Vardır, mevcuttur
P_H	: Superposition operatör
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^2$	: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
X	: Boyutu birden büyük reel vektör uzayı
w^2	: Çift indisli diziler uzayı
w_x^2	: X değerli çift diziler uzayı

2-NORMLU ÇİFT DİZİ UZAYLARINDA SUPERPOSITION OPERATORLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Tezin ilk bölümünde superposition operatörlerin tarihi hakkında kısa bilgiler verildi.

İkinci bölümde, çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Tezin dördüncü bölümünde, 2–normlu çift dizi uzayları üzerinde tanımlı superposition operatörlerin karakterizasyonu verildi. Ayrıca, elde edilen bulgular 2–normlu Maddox çift dizi uzaylarına genelleştirildi.

Anahtar kelimeler: Superposition operatör, Çift dizi uzayları, Maddox dizi uzayları

SOME PROPERTIES OF SUPERPOSITION OPERATORS DEFINED ON 2 – NORMED DOUBLE SEQUENCE SPACES

SUMMARY

In the first chapter of the thesis, the information of the history of superposition operators were given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems, which are used in the work, were given.

In the fourth chapter, the superposition operator P_f defined on 2 – normed double sequence space were charecterized. Also, the results obtained were generolized to the 2 – normed Maddox double sequence spaces.

Keywords: Superposition operators, Double sequence space, Maddox sequence space

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Kompleks değerli bütün dizilerin uzayı w ile gösterilsin. Ayrıca, w uzayının X ve Y alt uzayları verilsin. $f:\mathbb{N}\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ olmak üzere X uzayından w uzayına tanımlı,

$$P_f(x)=\left(f(m,x_m)\right)_{m\in\mathbb{N}}$$

fonksiyonuna bir superposition operatör veya Nemytskij operatörü adı verilir. Eğer her $x\in X$ için $P_f(x)\in Y$ oluyorsa, P_f operatörüne X uzayından Y uzayına bir superposition operatör denir.

Bu lineer olmayan operatörleri lineer operatörlerden ayıran en önemli soru şudur; f fonksiyonunun düzgünlüğü (analitikliği) gibi bazı özelliklerine P_f superposition operatörü sahip olmak zorunda mıdır? Bu sorunun cevabı olumsuzdur. Örneğin, $P_f:L_p\rightarrow L_q$ olmak üzere f fonksiyonunun analitikliği P_f operatörünün analitikliğini gerektirmez. Bu durum, P_f superposition operatörünün hangi özellikleri hangi koşullarda sağladığı problemlerini ortaya çıkarır.

Eski terminolojide "bileşke fonksiyon" veya daha yaygın olarak "bir fonksiyonun fonksiyonu" olarakta adlandırılan bu operatörün sürekli fonksiyonların superposition operatörünün sürekliliği ve diferansiyellenebilir fonksiyonların superposition operatörünün türevi gibi analiz, diferansiyel ve integral eşitlikleri, olasılık teorisi gibi birçok alanda kullanılmıştır.

Son zamanlarda, özellikle dizi uzaylarında tanımlı superposition operatörlerin karakterizasyonu üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Chew ve Lee (Chew ve Lee,1985) "Orthogonally Additive Functionals on Sequence Spaces" adlı çalışmalarında ℓ_p dizi uzayından ℓ_1 dizi uzayına tanımlanan superposition operatörün karakterizasyonunu verdiler. Dedagich ve Zabreiko (Dedagich ve Zabreiko,1987) "Operator Superpositions in The Spaces lp" adlı çalışmalarında ℓ_p dizi uzayından ℓ_q dizi uzayına tanımlı superposition operatörün bir karekterizasyonunu verdiler. Petranuarant ve Kemprasit (Petranuarant ve Kemprasit, 1997) " Superposition Operators On ℓ_p and c_0 into ℓ_q $(1 \leq p, g < \infty)$" adlı çalışmalarında (Chew ve Lee, 1985) çalışmasını genellemişlerdi. Sağır ve Güngör (Sağır ve Güngör,2015) "Continurty of Superposition Operators on the Double Seguence Spaces L_p" adlı çalışmalarında L_p çift dizi uzayları üzerinde tanımlanan superposition operatörünün karakterizasyonunu verdiler. Ayrıca, P_f superposition operatörünün sürekliliği için gerek ve yeter koşul verildi.

Bu tezde, 2 – normlu çift dizi uzayları üzerinde tanımlı superposition operatörlerinin bazı karakterizasyonları verildi. Ayrıca, 2 – normlu Maddox çift dizi uzayları üzerinde tanımlı P_f operatörünün benzer özellikleri gösterildi.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Boştan farklı bir V kümesi ve K kompleks veya reel sayı cismi olsun. $\forall x, y \in V$ ve $\forall \lambda \in \mathrm{K}$ için $+(x,y)=x+y$ ve $\cdot(\lambda,y)=\lambda y$ şeklinde tanımlı

$$+: V \mathrm{x}\, V \rightarrow V$$
$$\cdot: \mathrm{K}\, \mathrm{x} V \rightarrow V$$

(2.1)

fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, V kümesine (2.1) de tanımlanan "+" ve "·" işlemlerine göre K üzerinde bir vektör uzayı denir.

V1) $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$,

V2) $\forall x, y, z \in V$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$,

V3) $\forall x, y, z \in V$ için $x+0_X = x$ olacak şekilde bir tane $0_x \in V$ vardır,

V4) $\forall x \in V$ için $x+(-x)=0_X$ olacak şekilde bir tane $-x \in V$ vardır,

V5) $\forall x \in V$ için $1 \cdot x = x$,

V6) $\forall x, y \in V$ ve her $\alpha \in K$ için $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

V7) $\forall x \in V$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

V8) $\forall x \in V$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

(Maddox,1970).

Tanım 2.1.2. V , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve Y, V kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $x, y \in Y$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $\alpha x + \beta y$ ise Y kümesine V uzayının bir alt vektör uzayı denir (Maddox,1970).

Tanım 2.1.3. V bir kompleks vektör uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde norm adını alır ve $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir;

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\forall x \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

3) $\forall x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(Maddox,1970).

Tanım 2.1.4. Boyutu birden büyük X vektör uzayı verilsin. $X \times X$ üzerinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli $\|\cdot, \cdot\|$ fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir $2-$norm denir;

N1) $\|x, y\| = 0 \Leftrightarrow x$ ve y vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır,

N2) $\forall x, y \in X$ için $\|x, y\| = \|y, x\|$,

N3) $\forall x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$,

N4) $\forall x, y, z \in X$ için $\|x + z, y\| \leq \|x, y\| + \|z, y\|$,

(Gahler, 1964).

Örnek 2.1.5. $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ üzerinde , $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\|\cdot, \cdot\| : \mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ fonksiyonu tanımlansın. Kolayca görüleceği gibi bu fonksiyon $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir $2-$normdur.

Tanım 2.1.6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{C}$ kompleks uzayına tanımlı her x fonksiyonuna çift dizi denir ve kısaca (x_{mn}) ile gösterilir. Bütün kompleks terimli çift dizilerin uzayı $w^{(2)}$ ile gösterilir. Buna göre,

$$w^{(2)} = \{x = (x_{mn}); m,n \in \mathbb{N}, x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

yazılır ve bu küme $\forall x,y \in w^{(2)}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\alpha x = \alpha(x_{mn})$ ve $x+y=(x_{mn}+y_{mn})$ işlemleri altında bir vektör uzayıdır(Apostol,1974).

Tanım 2.1.7. x_{mn} bir çift dizi olsun. Verilen keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için her $m,n > k_\varepsilon$ olduğunda

$$|x_{mn} - a| < \varepsilon$$

olacak şekilde k_ε doğal sayısı varsa x_{mn} çift dizisi $a \in \mathbb{C}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Pringsheim yakınsak çift dizilerin uzayı c^2 ile gösterilir(Apostol,1974).

Bu çalışmada bütün yakınsaklıklar Pringsheim anlamında yakınsaklık olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.8. $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n \geq 1} |x_{mn}| < \infty$$

ifadesi sağlanıyorsa $x = (x_{mn})$ dizisine sınırlı çift dizi denir.

Sınırlı çift dizilerin uzayı $\ell^{2,\infty}$ ile gösterilir. Buna göre

$$\ell^{2,\infty} = \left\{ x = (x_{mn}) \in w^{(2)} : \sup_{m,n \geq 1} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklindedir (Moricz ve Rhoades,1988).

Uyarı: Tek indisli dizilerin aksine yakınsak çift indisli diziler sınırlı olmak zorunda değildir. Gerçekten her $n,m \in \mathbb{N}$ için

$$x_{mn}=\begin{cases} m & , n=1 \\ \dfrac{1}{m+n} & , \text{diğer} \end{cases}$$ olmak üzere $x=(x_{mn})$ dizisi yakınsak olmasına rağmen sınırlı değildir.

Tanım 2.1.9. $S_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}$ kısmi toplamlar dizisinin Pringsheim anlamında yakınsak olması halinde $\sum_{m,n=1}^{\infty}x_{mn}$ kompleks terimli serisi yakınsaktır denir (Apostol,1974).

Tanım 2.1.10. $R_{ks}=\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=s}^{\infty}x_{mn}+\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=1}^{s-1}x_{mn}+\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=s}^{\infty}x_{mn}$ toplamına $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{mn}$ serisinin kalan kısmı denir (Başar ve Sever, 2009).

$R_{ks}=\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{n=s}^{\infty}x_{mn}+\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=1}^{s-1}x_{mn}+\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=s}^{\infty}x_{mn}$ ifadesinde, $k=s=N$ olması durumunda kısaca $\sum_{\max\{m,n\}\geq N}^{\infty}x_{mn}$ gösterimi kullanılacaktır. Yakınsak bir çift seride kalan kısmın limiti sıfırdır(Başar ve Sever, 2009).

Tanım 2.1.11. $w^{(2)}$ bütün çift dizilerin uzayı ve $M,N\subset w^{(2)}$ olsun. Ayrıca, $\forall i,j\in\mathbb{N}$ için $f(i,j,0)=0$ ifadesini sağlayan $f:\mathbb{N}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. M uzayından $w^{(2)}$ uzayına,

$$P_f(a)=\left(f\left(i,j,a_{ij}\right)\right)_{i,j=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlanan P_f dönüşümüne M uzayı üzerinde tanımlı superposition operatör denir. Eğer $\forall\, a=(a_{ij})\in M$ için $P_f(a)\in N$ ise P_f fonksiyonuna M uzayından N uzayına bir superposition operatör denir ve $P_f:M\to N$ ile gösterilir (Güngör, 2015).

Tanım 2.1.12. X bir 2 – normlu uzay olmak üzere,

$$\ell_{(2)}^{2,p}=\left\{x\in w_X^2:\forall y\in X \text{ için } \sum_{m,n=1}^{\infty}\|x_{mn},y\|^p<\infty\right\},$$

$$\ell_{(2)}^{2,\infty}=\left\{x\in w_X^2:\forall y\in X \text{ için } \sup\|x_{mn},y\|<\infty\right\},$$

$$C_{(2)}^{2,0}=\left\{x\in w_X^2:\forall y\in X \text{ için, } \lim_{m,n\to\infty}\|x_{mn},y\|=0\right\},$$

$$C_{(2)}^{2,0}(p)=\left\{x\in w_X^2:\forall y\in X \text{ için, } \lim_{m,n\to\infty}\|x_{mn},y\|^{p_{mn}}=0\right\},$$

$$\ell_{(2)}^{2}(p)=\left\{x\in w_X^2:\forall y\in X \text{ için } \sum_{m,n=1}^{\infty}\|x_{mn},y\|^{p_{mn}}<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Yukarıda tanımlanan kümeler birer vektör uzayıdır. $\ell_{(2)}^{2,p}$, $\ell_{(2)}^{2,\infty}$ ve $C_{(2)}^{2,0}$ vektör uzayları sırasıyla $\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\|x_{mn},y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ve $\sup\|x_{mn},y\|$ ile birer normlu uzaydır. Ayrıca $C_{(2)}^{2,0}(p)$ ve $\ell_{(2)}^{2}(p)$ vektör uzayları sırasıyla, $M=\max\left\{1,\sup_{m,n\in\mathbb{N}}p_{mn}\right\}$ olmak üzere, $\sup_{m,n\in\mathbb{N}}\|x_{mn},y\|^{\frac{p_{mn}}{M}}$ ve $\left(\sum_{m,n=1}^{\infty}\|x_{mn},y\|^{p_{mn}}\right)^{\frac{1}{M}}$ ile birer paranormlu uzaydır(Tug, Doğan, Kurudirek, 2012).

.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tek indisli dizi uzayları için tanımlanan superposition operatörler (Güngör, 2015) çalışmasında çift indisli dizi uzaylarına aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

$w^{(2)}$ bütün çift dizilerin uzayı ve $M,N \subset w^{(2)}$ olsun. Ayrıca, $\forall i,j \in \mathbb{N}$ için $f(i,j,0)=0$ ifadesini sağlayan $f:\mathbb{N}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. M uzayından $w^{(2)}$ uzayına,

$$P_f(a)=\left(f\left(i,j,a_{ij}\right)\right)_{i,j=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlanan P_f dönüşümüne M uzayı üzerinde tanımlı superposition operatör denir. Eğer $\forall\, a=\left(a_{ij}\right)\in M$ için $P_f(a)\in N$ ise P_f fonksiyonuna M uzayından N uzayına bir superposition operatör denir ve $P_f : M \to N$ ile gösterilir (Güngör, 2015).

Bu çalışmada yukarıdaki tanım esas alınarak (Sağır ve Güngör, 2015) ve (Oğur, 2017) çalışmalarındaki teknikler kullanılarak $2-$normlu çift dizi uzayları üzerinde tanımlı superposition operatörlerin bazı özellikleri incelenmiştir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde $f:\mathbb{N}^2 \text{x} X \to X$ fonksiyonunun X vektör uzayının sınırlı alt kümeleri üzerinde sınırlı olduğu kabul edilecektir.

Tanım 4.1. w_X^2, $X-$değerli çift diziler uzayı ve $M,N \subset w_X^2$ olsun.

Her $m,n \in \mathbb{N}$ için $f(m,n,0)=0$ olacak şekilde $f:\mathbb{N}^2 \text{x} X \to X$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde

$$P_f(x)=\left(f(m,n,x_{mn})\right)_{m,n=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme M uzayından w_X^2 uzayına superposition operatör denir. Eğer $\forall x \in M$ için $P_f(x) \in N$ ise P_f dönüşümüne M uzayından N uzayına superposition operatör denir.

Teorem 4.2. $P_f:\ell_{(2)}^{2,\infty} \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha>0$ ve her bir $m,n \in \mathbb{N}$ için $\|t,y\| \le \alpha$ olduğunda bütün $y \in \text{X}$ için;

$$\|f(m,n,t),y\| \le |c_{mn}|$$

olacak şekilde $(c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ dizisinin var olmasıdır.

İspat: "$\Rightarrow$" $P_f:\ell_{(2)}^{2,\infty} \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olsun. Keyfi bir $\alpha>0$ ve her $m,n \in \mathbb{N}$ için;

$$A_X(\alpha)=\{t \in \text{X} : \forall y \in \text{X} \text{ için } \|t,y\| \le \alpha\}$$

ve

$$B_X(m,n,\alpha)=\sup\{\|f(m,n,t),y\| : t \in A_X(\alpha), \forall y \in \text{X}\}$$

tanımlansın. Böylece, $\forall y \in \text{X}$ için $\|t,y\| \le \alpha$ olduğunda,

$\left\|f(m,n,t),y\right\| \le B_X(m,n,\alpha)$ olur. Eğer her $\alpha>0$ sayısı için $\left(B_X(m,n,\alpha)\right)\in \ell^{2,1}$ olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır. En az bir $\alpha_1>0$ sayısı için $\left(B_X(m,n,\alpha_1)\right)\notin \ell^{2,1}$ olsun. Buradan $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} B_X(m,n,\alpha_1)=\infty$ yazılır. Böylece, her $r',v'>r$ için,

$$\sum_{m=r+1}^{r'}\sum_{n=v+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1)>1$$

yazılır. Buradan,

$\sum\limits_{m=r_0+1}^{r_1'}\sum\limits_{n=v_0+1}^{v_1'} B_X(m,n,\alpha_1)>1$ olacak şekilde $r_1'>r_0$ ve $v_1'>v_0$ doğal sayıları vardır. Şimdi r_1 ve v_1 doğal sayıları aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$r_1=\min\left\{r'\in\mathbb{N}: v'\in\mathbb{N}, r'>r_0, v'>v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'}\sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1)>1\right\}$$

ve

$$v_1=\min\left\{v'\in\mathbb{N}: r'\in\mathbb{N}, r'>r_0, v'>v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'}\sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1)>1\right\}.$$

Bunun yanında $\sum\limits_{m=r_1+1}^{r_2'}\sum\limits_{n=v_1+1}^{v_2'} B(m,n,\alpha_1)>1$ olacak şekilde $r_2'>r_1$ ve $v_2'>v_1$ vardır.

Böylece,

$$r_2=\min\left\{r'\in\mathbb{N}: v'\in\mathbb{N}, r'>r_1, v'>v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'}\sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1)>1\right\}$$

ve

$$v_2=\min\left\{v'\in\mathbb{N}: r'\in\mathbb{N}, r'>r_1, v'>v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'}\sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1)>1\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Tümevarım yöntemi ile benzer şekilde devam edilirse,

$$r_i = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{i-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1) > 1\right\}$$

ve

$$v_i = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{i-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1) > 1\right\}$$

elde edilir. Bu halde $\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v'} B_X(m,n,\alpha_1) > 1$ koşulunu sağlayan en küçük sayı ikilisi r_i ve v_i olmak üzere pozitif tam sayıların $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_i < \ldots$ ve $v_0 = 0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_i < \ldots$ dizileri elde edilir.

Buradan her $i \in \mathbb{N}$ için $\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X(m,n,\alpha_1) - \varepsilon_i (r_i - r_{i-1})(v_i - v_{i-1}) > 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon_i > 0$ pozitif reel sayısı vardır. Ayrıca f fonksiyonu sınırlı olduğundan $r_{i-1} + 1 \leq m \leq r_i$ ve $v_{i-1} + 1 \leq n \leq v_i$ koşulunu sağlayan her $m,n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq B_X(m,n,\alpha_1) < \infty$ olur. Yine , $B_X(m,n,\alpha_1)$ kümesinin tanımından her $y \in X$ için,

$$\left\| f(m,n,x_{mn}), y \right\| > B_X(m,n,\alpha_1) - \varepsilon_i$$

olacak şekilde $x_{mn} \in A(\alpha_1)$ vardır. Böylece, her $y \in X$ için,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \left\| f(m,n,x_{mn}), y \right\| = \infty$$

bulunur. Bu ise $\left(f(m,n,x_{mn})\right) \notin \ell_{(2)}^{2,1}$ olduğunu gösterir. Bunun yanında,

$\forall y \in X$ için $\left\| x_{mn}, y \right\| \leq \alpha_1$ olduğundan $x_{mn} \in \ell_{(2)}^{2,\infty}$ olur. $P_f : \ell_{(2)}^{2,\infty} \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olduğunda $P_f\left((x_{mn})\right) \in \ell_{(2)}^{2,1}$ olmalıydı. Fakat $\left(f(m,n,x_{mn})\right) \notin \ell_{(2)}^{2,1}$ çelişkisi oluşur. Bu ise $\left(B_X(m,n,\alpha)\right)_{m,n=1}^{\infty} \in \ell^{2,1}$ olduğunu gösterir. $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $c_{mn} = B_X(m,n,\alpha)$ tanımlanırsa ispat tamamlanır.

Tersine, her $\alpha > 0$, her $m,n \in \mathbb{N}$ ve $\forall y \in X$ için $\|t,y\| \le \alpha$ olduğunda $\|f(m,n,t),y\| \le |c_{mn}|$ olacak şekilde $c = (c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ var olsun. Keyfi bir $x = (x_{mn}) \in \ell^{2,\infty}_{(2)}$ verilsin. Buradan, $\ell^{2,\infty}_{(2)}$ uzayının tanımı kullanılırsa her $y \in X$ için $\|x_{mn}, y\| \le M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Hipotez gereği $\|f(m,n,x_{mn}),y\| \le |c_{mn}|$ olacak şekilde $(c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=1}^{\infty} \|f(m,n,x_{mn}),y\| &\le \sum_{m,n=1}^{\infty} |c_{mn}| \\ &< \infty\end{aligned}$$

olur. Bu ise $(f(m,n,x_{mn})) \in \ell^{2,1}_{(2)}$ olduğunu gösterir.

Örnek 4.3. $X = \mathbb{R}^2$ olsun ve $\forall\, x,y \in \mathbb{R}^2$ için $\|x,y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ verilsin. Yine $t = (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $f : \mathbb{N}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(m,n,t) = \left(\frac{|t_1|}{4^{m+n}}, 0 \right)$ şeklinde tanımlansın ve $\forall z \in \mathbb{R}^2$ için $\|t,z\| \le \alpha$ olacak şekilde $\alpha > 0$ var olsun. Buradan $\|t,z\| \le \alpha$ eşitsizliği $\forall z \in \mathbb{R}^2$ için sağlandığından $z^* = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ noktası içinde sağlanır. Böylece $\|t,z^*\| = |t_1| \le \alpha$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\|f(m,n,t),z\| &= \left| \frac{|t_1|}{4^{m+n}} \cdot z_2 - 0 \cdot z_1 \right| \\ &= \frac{|t_1||z_2|}{4^{m+n}} \\ &\le \frac{\alpha |z_2|}{4^{m+n}}\end{aligned}$$

olur. Eğer $c_{mn} = \frac{\alpha |z_2|}{4^{m+n}}$ şeklinde tanımlanırsa $c = (c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ olur. Teorem 4.2. gereğince $P_f : \ell^{2,\infty}_{(2)} \to \ell^{2,1}_{(2)}$ olur.

Teorem 4.4. $P_f : C^{2,0}_{(2)} \to \ell^{2,1}_{(2)}$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $m,n \in \mathbb{N}$ için $\|t,y\| \le \alpha$ olduğunda bütün $y \in \mathrm{X}$ için;

$$\|f(m,n,t),y\| \le |c_{mn}|$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ reel sayısının ve $(c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ dizisinin var olmasıdır.

İspat: "$\Rightarrow$" $P_f : C^{2,0}_{(2)} \to \ell^{2,1}_{(2)}$ olsun. Keyfi bir $\alpha > 0$ sayısı ve her $m,n \in \mathbb{N}$ için;

$$A_X(\alpha) = \{t \in X : \forall y \in \mathrm{X} \text{ için } \|t,y\| \le \alpha\}$$

ve

$$B_X(m,n,\alpha) = \sup\{\|f(m,n,t),y\| : t \in A_X(\alpha), \forall y \in \mathrm{X}\}$$

tanımlansın. Buradan, her $y \in \mathrm{X}$ için $\|t,y\| \le \alpha$ olduğunda,

$\|f(m,n,t),y\| \le B_X(m,n,\alpha)$ olur. Eğer bir $\alpha_1 > 0$ pozitif reel sayısı için $(B_X(m,n,\alpha_1))_{m,n=1}^{\infty} \in \ell^{2,1}$ olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır. Aksine her $\alpha > 0$ pozitif reel sayısı için $(B_X(m,n,\alpha))_{m,n=1}^{\infty} \notin \ell^{2,1}$ olduğu varsayılırsa buradan her $i,j \in \mathbb{N}$ için $\sum_{m,n=1}^{\infty} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) = \infty$ yazılır. Böylece her bir $i,j \in \mathbb{N}$ ve her $r' > r$, $v' > v$ için,

$$\sum_{m=r+1}^{r'} \sum_{n=v+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1$$

yazılır. Buradan $\sum_{m=r_0+1}^{r_1'} \sum_{n=v_0+1}^{v_1'} B_X\left(m,n,\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right) > 1$ olacak şekilde $r_1' > r_0$ ve $v_1' > v_0$ sayıları vardır. Yine, r_1 ve v_1 doğal sayıları,

$$r_1 = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_0, v' > v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'} \sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X(m,n,2) > 1\right\}$$

ve

$$v_1 = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_0, v' > v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'} \sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X(m,n,2) > 1\right\}$$

biçiminde tanımlansın. Bunun yanında, $\sum_{m=r_1+1}^{r_2'} \sum_{n=v_1+1}^{v_2'} B_X\left(m,n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) > 1$ olacak şekilde $r_2' > r_1$ ve $v_2' > v_1$ vardır. Benzer şekilde,

$$r_2 = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_1, v' > v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'} \sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) > 1\right\}$$

ve

$$v_2 = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_1, v' > v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'} \sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) > 1\right\}$$

yazılır. Tümevarım kullanılarak,

$$r_i = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{j-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1\right\}$$

ve

$$v_i = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{j-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1\right\}$$

elde edilir. Bu durumda, her $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1$ olacak şekilde doğal sayıların $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_i < \ldots$ ve $v_0 = 0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_j < \ldots$ koşullarını sağlayan iki (r_i) ve (v_j) dizileri vardır. Ayrıca,

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) - \varepsilon_{ij}\left(r_i - r_{i-1}\right)\left(v_j - v_{j-1}\right) > 1 \tag{4.4.1}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\varepsilon_{ij} > 0$ pozitif reel sayısı vardır. i ve j doğal sayıları sabitlensin. Yine, f fonksiyonu sınırlı olduğundan $r_{i-1}+1 \le m \le r_i$ ve $v_{j-1}+1 \le n \le v_j$ şartlarını sağlayan her $m,n \in \mathbb{N}$ için $B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) < \infty$ yazılır. Buradan da $B_X(m,n,\alpha)$ ifadesinin tanımı kullanılarak $r_{i-1}+1 \le m \le r_i$ ve $v_{j-1}+1 \le n \le v_j$ şartlarını sağlayan her $m,n \in \mathbb{N}$ ve her $y \in X$ için,

$$\left\| f(m,n,x_{mn}),y \right\| > B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) - \varepsilon_{ij} \tag{4.4.2}$$

olacak şekilde $x_{mn} \in A_X\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)$ dizisi vardır. Böylece, (4.4.1) ve (4.4.2) ifadeleri ile

$$\begin{aligned}\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}\left\| f(m,n,x_{mn}),y \right\| &> \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) - \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}\varepsilon_{ij} \\ &> \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) - \varepsilon_{ij}(r_i-r_{i-1})(v_j-v_{j-1}) \\ &> 1\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, her $y \in X$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\| f(m,n,x_{mn}),y \right\| = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}\left\| f(m,n,x_{mn}),y \right\|\right) = \infty$$

olduğundan, $\left(f(m,n,x_{mn})\right) \notin \ell^{2,1}_{(2)}$ elde edilir. Ayrıca $r_{i-1}+1 \le m \le r_i$ ve $v_{j-1}+1 \le n \le v_j$ iken $x_{mn} \in A_X\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)$ olduğundan, $\left\| x_{mn},y \right\| \le \frac{1}{i}+\frac{1}{j}$ olur. Bu ise $(x_{mn}) \in C^{2,0}_{(2)}$ olduğunu gösterir. Fakat bu $P_f : C^{2,0}_{(2)} \to \ell^{2,1}_{(2)}$ olması ile çelişir. Bu durumda $\left(B_X(m,n,\alpha_1)\right)_{m,n=1}^{\infty} \in \ell^{2,1}$ olacak şekilde bir $\alpha_1 > 0$ reel sayısı vardır. Her $m,n \in \mathbb{N}$ için $c_{mn} = B_X(m,n,\alpha_1)$ seçimi yapılırsa istenen elde edilir.

Tersine, her bir $m,n\in\mathbb{N}$ için $\|t,y\|\leq\alpha$ olduğunda bütün $y\in X$ için;

$$\|f(m,n,t),y\|\leq|c_{mn}|$$

olacak şekilde bir $\alpha>0$ reel sayısı ve $(c_{mn})\in\ell^{2,1}$ dizisi var olsun. Eğer $x=(x_{mn})\in C_{(2)}^{2,0}$ ise $\forall y\in X$ için $\lim_{m,n\to\infty}\|x_{mn},y\|=0$ olur. Buradan özellikle bu α pozitif reel sayısına karşılık her $m,n\geq i$ ve $y\in X$ için $\|x_{mn},y\|\leq\alpha$ olacak şekilde bir $i\in\mathbb{N}$ vardır. Hipotez gereğince, her $m,n\geq i$ ve $\forall y\in X$ için $\|f(m,n,x_{mn}),y\|\leq|c_{mn}|$ olacak şekilde bir $(c_{mn})\in\ell^{2,1}$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=i}^{\infty}\|f(m,n,t),y\|&\leq\sum_{m,n=i}^{\infty}|c_{mn}|\\&<\infty\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $P_f:C_{(2)}^{2,0}\to\ell_{(2)}^{2,1}$ olduğunu gösterir.

Örnek 4.5. $X=\mathbb{R}^2$ olsun ve $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^2$ için $\|x,y\|=|x_1y_2-x_2y_1|$ verilsin. Yine $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere $f:\mathbb{N}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(m,n,t)=\left(\frac{|t_1|(t_1-1)}{2^{m+n}},0\right)$ şeklinde tanımlansın ve $\forall z\in\mathbb{R}^2$ için $\|t,z\|\leq1$ olsun. Buradan $\|t,z\|\leq1$ eşitsizliği $\forall z\in\mathbb{R}^2$ için sağlandığından $z^*=(0,1)\in\mathbb{R}^2$ noktası içinde sağlanır. Böylece $\|t,z^*\|=|t_1|\leq1$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\|f(m,n,t),z\|&=\left|\frac{|t_1|(t_1-1)}{2^{m+n}}\cdot z_2-0\cdot z_1\right|\\&=\frac{\left(|t_1|^2+|t_1|\right)|z_2|}{2^{m+n}}\\&\leq\frac{2|z_2|}{2^{m+n}}\end{aligned}$$

olur. Eğer $c_{mn}=\frac{2|z_2|}{2^{m+n}}$ şeklinde tanımlanırsa $c=(c_{mn})\in \ell^{2,1}$ olur. Teorem 4.4. gereğince $P_f : C_{(2)}^{2,0}\to \ell_{(2)}^{2,1}$ olur.

Teorem 4.6. $P_f : \ell_{(2)}^{2,p}\to \ell_{(2)}^{2,1}$ olması için gerek ve yeter koşul her $m,n\in\mathbb{N}$ ve $\forall y\in X$ için $\|t,y\|\le\beta$ koşulunu sağlayan her $t\in X$ için;

$$\|f(m,n,t),y\|\le|c_{mn}|+\alpha\|t,y\|^p$$

olacak şekilde $\alpha>0$, $\beta>0$ reel sayılarının ve $(c_{mn})\in\ell^{2,1}$ dizisinin var olmasıdır.

İspat: "$\Leftarrow$" $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $\|t,y\|\le\beta$ koşulunu sağlayan her $t\in X$ ve $\forall y\in X$ için, $\|f(m,n,t),y\|\le|c_{mn}|+\alpha\|t,y\|^p$ olacak şekilde $\alpha>0$, $\beta>0$ reel sayıları ve $(c_{mn})\in\ell^{2,1}$ dizisi var olsun. Bu durumda bir $x=(x_{mn})\in\ell_{(2)}^{2,p}$ dizisi verilsin. $\ell_{(2)}^{2,p}$ tanımı gereğince $\forall y\in X$ için $\sum_{m,n=1}^{\infty}\|x_{mn},y\|^p<\infty$ olduğundan,

$$p-\lim_{v,r\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{n=v}^{\infty}\|x_{mn},y\|^p+\sum_{m=r}^{\infty}\sum_{n=1}^{v-1}\|x_{mn},y\|^p+\sum_{m=r}^{\infty}\sum_{n=v}^{\infty}\|x_{mn},y\|^p\right)=0$$

olur. Buradan $\sum_{\max\{m,n\}\ge N}^{\infty}\|x_{mn},y\|^p<\varepsilon\le\beta^p$ eşitsizliğini sağlayan yeterince büyük bir $N\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\max\{m,n\}\ge N$ sağlandığında $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $\forall y\in X$ için $\|x_{mn},y\|\le\beta$ olur. Hipotez gereği, $\max\{m,n\}\ge N$ olduğunda $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $\forall y\in X$ için $\|f(m,n,x_{mn}),y\|\le|c_{mn}|+\alpha\|x_{mn},y\|^p$ bulunur. Buradan , $D=\sum_{m,n=1}^{N-1}\|f(m,n,x_{mn}),y\|<\infty$ olmak üzere,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\|f(m,n,x_{mn}),y\|=\sum_{m,n=1}^{N-1}\|f(m,n,x_{mn}),y\|+\sum_{\max\{m,n\}\ge N}^{\infty}\|f(m,n,x_{mn}),y\|$$

$$\le\sum_{m,n=1}^{N-1}\|f(m,n,x_{mn}),y\|+\sum_{\max\{m,n\}\ge N}^{\infty}|c_{mn}|+\alpha\sum_{\max\{m,n\}\ge N}^{\infty}\|x_{mn},y\|^p$$

$$\leq D+\sum_{m,n=1}^{\infty}|c_{mn}|+\alpha\sum_{m,n=1}^{\infty}\|x_{mn},y\|^{p}$$

$$<\infty$$

elde edilir. Bu ise $P_f:\ell_{(2)}^{2,p}\to\ell_{(2)}^{2,1}$ olduğunu gösterir

"$\Rightarrow$" P_f superposition operatörü $\ell_{(2)}^{2,p}$ uzayından $\ell_{(2)}^{2,1}$ uzayına tanımlı olsun. Yine her $\alpha>0$, $\beta>0$ reel sayıları için $A_X(m,n,\alpha,\beta)$ kümesi ve $B_X(m,n,\alpha,\beta)$ ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$A_X(m,n,\alpha,\beta)=\left\{t\in X:\forall y\in X,\|t,y\|^{p}\leq\min\left\{\beta,\alpha^{-1}\|f(m,n,t),y\|\right\}\right\}$$

ve

$$B_X(m,n,\alpha,\beta)=\sup\left\{\|f(m,n,t),y\|:t\in A_X(m,n,\alpha,\beta)\right\}.$$

Yukarıdaki tanımlar gereğince, $\forall y\in X$ için $\|t,y\|\leq\beta$ ve $t\in A_X(m,n,\alpha,\beta)$ ise $\|f(m,n,t),y\|\leq B_X(m,n,\alpha,\beta)$ ve $\forall y\in X$ için $\|t,y\|\leq\beta$ ve $t\notin A_X(m,n,\alpha,\beta)$ ise $\|f(m,n,t),y\|<\alpha\|t,y\|^{p}$ olduğu görülür. Bu durumda $\forall y\in X$ için $\|t,y\|\leq\beta$ olduğunda $\|f(m,n,t),y\|\leq B_X(m,n,\alpha,\beta)+\alpha\|t,y\|^{p}$ olur. Eğer $(B_X(m,n,\alpha,\beta))\in\ell^{2,1}$ olacak şekilde $\alpha>0$, $\beta>0$ reel sayıları bulunursa ispat tamamlanır. Aksine her α ve β pozitif reel sayıları için $\sum_{m,n=1}^{\infty}B_X(m,n,\alpha,\beta)=\infty$ olsun. Bu durumda her i doğal sayısı için $\sum_{m,n=1}^{\infty}B_X\left(m,n,2^{i},2^{-i}\right)=\infty$ olur. Buradan her $i\in\mathbb{N}$ ve her $r',v'>r$ için,

$$\sum_{m=r+1}^{r'}\sum_{n=r+1}^{v'}B_X\left(m,n,2^{i},2^{-i}\right)>1$$

yazılır. Bu durumda $\sum_{m=r_0+1}^{r_1'} \sum_{n=v_0+1}^{v_1'} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right) > 1$ olacak şekilde $r_1' > r_0$ ve $v_1' > v_0$ doğal sayıları mevcuttur. r_1 ve v_1 sırasıyla,

$$r_1 = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_0, v' > v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'} \sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X\left(m,n,2^1,2^{-1}\right) > 1\right\}$$

ve

$$v_1 = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_0, v' > v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'} \sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X\left(m,n,2^1,2^{-1}\right) > 1\right\}$$

olsun. Bununla beraber, $\sum_{m=r_1+1}^{r_2'} \sum_{n=v_1+1}^{v_2'} B_X\left(m,n,2^2,2^{-2}\right) > 1$ ifadesini sağlayan $r_2' > r_1$ ve $v_2' > v_1$ vardır. O halde,

$$r_2 = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_1, v' > v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'} \sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X\left(m,n,2^2,2^{-2}\right) > 1\right\}$$

ve

$$v_2 = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_1, v' > v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'} \sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X\left(m,n,2^2,2^{-2}\right) > 1\right\}$$

olur. Tümevarım yöntemi kullanılarak,

$$r_i = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{i-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v'} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right) > 1\right\}$$

ve

$$v_i = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{i-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v'} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right) > 1\right\}$$

elde edilir. Bu durumda $\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)>1$ eşitsizliğini sağlayan en küçük iki sayı r_i ve v_i olmak üzere $r_0=0<r_1<r_2<\ldots<r_i<\ldots$ ve $v_0=0<v_1<v_2<\ldots<v_i<\ldots$ dizileri vardır. O halde,

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i-1} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i-1} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)\leq 1 \tag{4.6.1}$$

olduğu açıktır. Her i doğal sayısı için,

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\varepsilon_i\left(r_i-r_{i-1}\right)\left(v_i-v_{i-1}\right)>1 \tag{4.6.2}$$

ifadesini sağlayacak şekilde $\varepsilon_i>0$ vardır. i doğal sayısını sabitleyelim. f fonksiyonu sınırlı olduğundan, $r_{i-1}+1\leq m\leq r_i$ ve $v_{i-1}+1\leq n\leq v_i$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için $0\leq B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)<\infty$ olur. $B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)$ ifadesinin tanımından $r_{i-1}+1\leq m\leq r_i$ ve $v_{i-1}+1\leq n\leq v_i$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için,

$$\left\|f\left(m,n,x_{mn}\right),y\right\|>B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\varepsilon_i \tag{4.6.3}$$

ifadesini sağlayacak şekilde $x_{mn}\in A_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)$ dizisi vardır. Bu durumda $\forall y\in X$ için, (4.6.2) ve (4.6.3) ifadeleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}\left\|f(m,n,t),y\right\| &> \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}\varepsilon_i\\ &> \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\varepsilon_i\left(r_i-r_{i-1}\right)\left(v_i-v_{i-1}\right)\\ &>1\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifadeden $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}\left\|f(m,n,t),y\right\|\right)=\infty$ yani

$\left(f\left(m,n,x_{mn}\right)\right)_{m,n=1}^{\infty} \notin \ell_{(2)}^{2,1}$ bulunur. Ayrıca $x_{mn} \in A_X\left(m,n,2^t,2^{-t}\right)$ olduğundan $r_{t-1}+1 \le m \le r_t$ ve $v_{t-1}+1 \le n \le v_t$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|x_{mn},y\|^p \le 2^{-t} \text{ ve } \|x_{mn},y\|^p \le 2^{-t}\left\|f\left(m,n,x_{mn}\right),y\right\| \tag{4.6.4}$$

ifadeleri yazılır. Böylece (4.6.1) ve (4.6.4) ifadelerinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{t-1}+1}^{r_t}\sum_{n=v_{t-1}+1}^{v_t}\|x_{mn},y\|^p\right) &= \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{t-1}+1}^{r_t-1}\sum_{n=v_{t-1}+1}^{v_t-1}\|x_{mn},y\|^p+\|x_{r_tv_t},y\|^p\right)\\
&\le \sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{t-1}+1}^{r_t-1}\sum_{n=v_{t-1}+1}^{v_t-1}2^{-t}\left\|f\left(m,n,x_{mn}\right),y\right\|\right)+\sum_{t=1}^{\infty}2^{-t}\\
&\le \sum_{t=1}^{\infty}\left(2^{-t}\sum_{m=r_{t-1}+1}^{r_t-1}\sum_{n=v_{t-1}+1}^{v_t-1}B_X\left(m,n,2^t,2^{-t}\right)\right)+\sum_{t=1}^{\infty}2^{-t}\\
&\le \sum_{t=1}^{\infty}\left(2^{-t}+2^{-t}\right)\\
&\le \sum_{t=1}^{\infty}2^{1-t}
\end{aligned}$$

Bulunur. Buradan $\left(x_{mn}\right) \in \ell_{(2)}^{2,p}$ olduğu görülür ki bu $P_f : \ell_{(2)}^{2,p} \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olmasıyla çelişir. Yani $\left(B_X\left(m,n,\alpha,\beta\right)\right) \in \ell^{2,1}$ olacak şekilde α ve β pozitif reel sayıları vardır. İspatın tamamlanması için her $m,n \in \mathbb{N}$ için $c_{mn} = B_X\left(m,n,\alpha,\beta\right)$ seçimi yeterlidir.

Teorem 4.7. $P_f : \ell_{(2)}^2(p) \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olması için gerek ve yeter koşul her $m,n \in \mathbb{N}$ ve $\forall y \in \mathrm{X}$ için $\|t,y\| \le \beta$ koşulunu sağlayan her $t \in \mathrm{X}$ için, $M = \max\left\{1, \sup_{m,n\in\mathbb{N}} p_{mn}\right\}$ olmak üzere,

$$\left\|f\left(m,n,t\right),y\right\| \le \left|c_{mn}\right| + \alpha\|t,y\|^{\frac{p_{mn}}{M}}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\alpha > 0$, $\beta > 0$ reel sayılarının ve $(c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ dizisinin var olmasıdır.

İspat: "$\Leftarrow$" $\forall m,n \in \mathbb{N}$ ve $\|t,y\| \leq \beta$ koşulunu sağlayan her $t \in X$ ve $\forall y \in X$ için, $\|f(m,n,t),y\| \leq |c_{mn}| + \alpha \|t,y\|^{\frac{p_{mn}}{M}}$ olacak şekilde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sayıları ve $(c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ dizisi var olsun ve $x = (x_{mn}) \in \ell^2_{(2)}(p)$ dizisi verilsin. $\ell^2_{(2)}(p)$ tanımı gereğince $\forall y \in X$ için $\sum_{m,n=1}^{\infty} \|x_{mn},y\|^{p_{mn}} < \infty$ olduğundan,

$$p-\lim_{v,r\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{n=v}^{\infty}\|x_{mn},y\|^{p_{mn}} + \sum_{m=r}^{\infty}\sum_{n=1}^{v-1}\|x_{mn},y\|^{p_{mn}} + \sum_{m=r}^{\infty}\sum_{n=v}^{\infty}\|x_{mn},y\|^{p_{mn}}\right) = 0$$

olur. Buradan $\sum_{\max\{m,n\}\geq N}^{\infty} \|x_{mn},y\|^{p_{mn}} < \varepsilon \leq \beta^{p_{mn}}$ eşitsizliğini sağlayan yeterince büyük bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $\max\{m,n\} \geq N$ sağlandığında $\forall m,n \in \mathbb{N}$ ve $\forall y \in X$ için $\|x_{mn},y\| \leq \beta$ olur. Hipotez gereğince, $\max\{m,n\} \geq N$ sağlandığında $\forall m,n \in \mathbb{N}$ ve $\forall y \in X$ için $\|f(m,n,x_{mn}),y\| \leq |c_{mn}| + \alpha \|x_{mn},y\|^{\frac{p_{mn}}{M}}$ bulunur. Buradan , $D = \sum_{m,n=1}^{N-1} \|f(m,n,x_{mn}),y\| < \infty$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{\infty}\|f(m,n,x_{mn}),y\| &= \sum_{m,n=1}^{N-1}\|f(m,n,x_{mn}),y\| + \sum_{\max\{m,n\}\geq N}^{\infty}\|f(m,n,x_{mn}),y\| \\
&\leq \sum_{m,n=1}^{N-1}\|f(m,n,x_{mn}),y\| + \sum_{\max\{m,n\}\geq N}^{\infty}|c_{mn}| + \alpha \sum_{\max\{m,n\}\geq N}^{\infty}\|x_{mn},y\|^{\frac{p_{mn}}{M}} \\
&\leq D + \sum_{m,n=1}^{\infty}|c_{mn}| + \alpha\sum_{m,n=1}^{\infty}\|x_{mn},y\|^{\frac{p_{mn}}{M}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $P_f : \ell^2_{(2)}(p) \to \ell^{2,1}_{(2)}$ olduğu görülür.

"$\Rightarrow$" P_f superposition operatörü $\ell^2_{(2)}(p)$ uzayından $\ell^{2,1}_{(2)}$ uzayına tanımlı olsun. Yine her $\alpha > 0$, $\beta > 0$ reel sayıları için $A_X(m,n,\alpha,\beta)$ kümesi ve $B_X(m,n,\alpha,\beta)$ ifadesi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$A_X(m,n,\alpha,\beta) = \left\{ t \in X : \forall y \in X, \|t,y\|^{\frac{p_{mn}}{M}} \leq \min\left\{ \beta^{\frac{1}{M}}, \alpha^{-1}\|f(m,n,t),y\| \right\} \right\}$$

ve

$$B_X(m,n,\alpha,\beta) = \sup\left\{ \|f(m,n,t),y\| : t \in A_X(m,n,\alpha,\beta) \right\}.$$

Yukarıdaki tanımlar gereğince, $\forall y \in X$ için $\|t,y\| \leq \beta$ ve $t \in A_X(m,n,\alpha,\beta)$ ise $\|f(m,n,t),y\| \leq B_X(m,n,\alpha,\beta)$ ve $\forall y \in X$ için $\|t,y\| \leq \beta$ ve $t \notin A_X(m,n,\alpha,\beta)$ ise $\|f(m,n,t),y\| < \alpha\|t,y\|^{\frac{p_{mn}}{M}}$ olduğu görülür. Bu durumda $\forall y \in X$ için $\|t,y\| \leq \beta$ olduğunda $\|f(m,n,t),y\| \leq B_X(m,n,\alpha,\beta) + \alpha\|t,y\|^{\frac{p_{mn}}{M}}$ olur. Eğer $(B_X(m,n,\alpha,\beta)) \in \ell^{2,1}$ olacak şekilde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sayıları bulunursa ispat tamamlanır. Aksine her α ve β pozitif reel sayıları için $\sum_{m,n=1}^{\infty} B_X(m,n,\alpha,\beta) = \infty$ olsun. Bu durumda her i doğal sayısı için $\sum_{m,n=1}^{\infty} B_X(m,n,2^i,2^{-i}) = \infty$ olur. Buradan her $i \in \mathbb{N}$ ve her $r', v' > r$ için,

$$\sum_{m=r+1}^{r'} \sum_{n=r+1}^{v'} B_X(m,n,2^i,2^{-i}) > 1$$

yazılır. Bu durumda $\sum_{m=r_0+1}^{r_1'} \sum_{n=v_0+1}^{v_1'} B_X(m,n,2^1,2^{-1}) > 1$ olacak şekilde $r_1' > r_0$ ve $v_1' > v_0$ doğal sayıları mevcuttur. r_1 ve v_1 sırasıyla,

$$r_1 = \min\left\{ r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_0, v' > v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'} \sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X(m,n,2^1,2^{-1}) > 1 \right\}$$

ve

$$v_1=\min\left\{v'\in\mathbb{N}:r'\in\mathbb{N},r'>r_0,v'>v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'}\sum_{n=v_0+1}^{v'}B_X\left(m,n,2^1,2^{-1}\right)>1\right\}$$

olsun. Bununla beraber, $\sum_{m=r_1+1}^{r_2'}\sum_{n=v_1+1}^{v_2'}B_X\left(m,n,2^2,2^{-2}\right)>1$ ifadesini sağlayan $r_2'>r_1$ ve $v_2'>v_1$ vardır. O halde,

$$r_2=\min\left\{r'\in\mathbb{N}:v'\in\mathbb{N},r'>r_1,v'>v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'}\sum_{n=v_1+1}^{v'}B_X\left(m,n,2^2,2^{-2}\right)>1\right\}$$

ve

$$v_2=\min\left\{v'\in\mathbb{N}:r'\in\mathbb{N},r'>r_1,v'>v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'}\sum_{n=v_1+1}^{v'}B_X\left(m,n,2^2,2^{-2}\right)>1\right\}$$

olur. Tümevarım kullanılarak,

$$r_i=\min\left\{r'\in\mathbb{N}:v'\in\mathbb{N},r'>r_{i-1},v'>v_{i-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v'}B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)>1\right\}$$

ve

$$v_i=\min\left\{v'\in\mathbb{N}:r'\in\mathbb{N},r'>r_{i-1},v'>v_{i-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v'}B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)>1\right\}$$

elde edilir. Bu durumda $\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)>1$ ifadesini sağlayan en küçük iki sayı r_i ve v_i olmak üzere $r_0=0<r_1<r_2<\ldots<r_i<\ldots$ ve $v_0=0<v_1<v_2<\ldots<v_i<\ldots$ dizileri vardır. O halde,

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i-1}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i-1}B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)\le 1 \qquad \textbf{(4.7.1)}$$

olduğu açıktır. Her i doğal sayısı için,

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\varepsilon_i\left(r_i-r_{i-1}\right)\left(v_i-v_{i-1}\right)>1 \qquad (4.7.2)$$

ifadesini sağlayacak şekilde $\varepsilon_i>0$ vardır. i doğal sayısını sabitleyelim. f fonksiyonu sınırlı olduğundan, $r_{i-1}+1\le m\le r_i$ ve $v_{i-1}+1\le n\le v_i$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için $0\le B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)<\infty$ olur. $B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)$ ifadesinin tanımından $r_{i-1}+1\le m\le r_i$ ve $v_{i-1}+1\le n\le v_i$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall m,n\in\mathbb{N}$ ve $\forall y\in X$ için,

$$\left\|f\left(m,n,x_{mn}\right),y\right\|>B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\varepsilon_i \qquad (4.7.3)$$

ifadesini sağlayacak şekilde $x_{mn}\in A_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)$ dizisi vardır. Bu durumda (4.7.2) ve (4.7.3) ifadelerinden,

$$\begin{aligned}\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}\left\|f(m,n,t),y\right\| &> \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}\varepsilon_i\\ &> \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)-\varepsilon_i\left(r_i-r_{i-1}\right)\left(v_i-v_{i-1}\right)\\ &>1\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}\left\|f(m,n,t),y\right\|\right)=\infty$ olduğu yani $\left(f\left(m,n,x_{mn}\right)\right)_{m,n=1}^{\infty}\notin\ell_{(2)}^{2,1}$ bulunur. Ayrıca $x_{mn}\in A_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right)$ olduğundan $r_{i-1}+1\le m\le r_i$ ve $v_{i-1}+1\le n\le v_i$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall m,n\in\mathbb{N}$ için,

$$\left\|x_{mn},y\right\|^{p_{mn}}\le 2^{-i} \text{ ve } \left\|x_{mn},y\right\|^{p_{mn}}\le 2^{-i}\left\|f\left(m,n,x_{mn}\right),y\right\| \qquad (4.7.4)$$

ifadeleri yazılır. Böylece (4.7.1) ve (4.7.4) ifadelerinden,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i}\left\|x_{mn},y\right\|^{p_{mn}}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i-1}\sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i-1}\left\|x_{mn},y\right\|^{p_{mn}}+\left\|x_{r_iv_i},y\right\|^{p_{mn}}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i-1} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i-1} 2^{-i} \left\| f(m,n,x_{mn}), y \right\| \right) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(2^{-i} \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i-1} \sum_{n=v_{i-1}+1}^{v_i-1} B_X\left(m,n,2^i,2^{-i}\right) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(2^{-i}+2^{-i}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{1-i}$$

bulunur. Yani $(x_{mn}) \in \ell_{(2)}^2(p)$ olduğu görülür. Fakat bu $P_f : \ell_{(2)}^2(p) \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olmasıyla çelişir. Yani $\left(B_X(m,n,\alpha,\beta)\right) \in \ell^{2,1}$ olacak şekilde α ve β pozitif reel sayıları vardır. İspatın tamamlanması için her $m,n \in \mathbb{N}$ için $c_{mn} = B_X(m,n,\alpha,\beta)$ seçimi yeterlidir.

Teorem 4.8. $P_f : C_{(2)}^{2,0}(p) \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $m,n \in \mathbb{N}$ için $\|t,y\| \leq \alpha$ olduğunda bütün $y \in X$ için;

$$\left\| f(m,n,t), y \right\| \leq |c_{mn}|$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ reel sayısının ve $(c_{mn}) \in \ell^{2,1}$ dizisinin var olmasıdır.

İspat: "$\Rightarrow$" $P_f : C_{(2)}^{2,0}(p) \to \ell_{(2)}^{2,1}$ olsun. Keyfi bir $\alpha > 0$ sayısı ve her $m,n \in \mathbb{N}$ için;

$$A_X(\alpha) = \left\{ t \in X : \forall y \in X \text{ için } \|t,y\|^{\frac{p_{mn}}{M}} \leq \min\left\{ \alpha^{\frac{1}{M}}, \alpha^{\frac{p_{mn}}{M}} \right\} \right\}$$

ve

$$B_X(m,n,\alpha) = \sup\left\{ \left\| f(m,n,t), y \right\| : t \in A_X(\alpha), \forall y \in X \right\}$$

tanımlansın. Buradan, her $y \in X$ için $\|t,y\| \leq \alpha$ olduğunda,

$\|f(m,n,t),y\| \le B_X(m,n,\alpha)$ olur. Eğer bir $\alpha_1 > 0$ pozitif reel sayısı için $(B_X(m,n,\alpha_1))_{m,n=1}^{\infty} \in \ell^{2,1}$ olduğu gösterilirse, ispat tamamlanır. Aksine her $\alpha > 0$ pozitif reel sayısı için $(B_X(m,n,\alpha))_{m,n=1}^{\infty} \notin \ell^{2,1}$ olduğu varsayılırsa buradan her $i,j \in \mathbb{N}$ için $\sum_{m,n=1}^{\infty} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) = \infty$ yazılır. Böylece herbir $i,j \in \mathbb{N}$ ve her $r' > r$, $v' > v$ için,

$$\sum_{m=r+1}^{r'} \sum_{n=v+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1$$

yazılır. Buradan $\sum_{m=r_0+1}^{r_1'} \sum_{n=v_0+1}^{v_1'} B_X\left(m,n,\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right) > 1$ olacak şekilde $r_1' > r_0$ ve $v_1' > v_0$ sayıları vardır. Yine, r_1 ve v_1 doğal sayıları,

$$r_1 = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_0, v' > v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'} \sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X(m,n,2) > 1\right\}$$

ve

$$v_1 = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_0, v' > v_0 \text{ ve } \sum_{m=r_0+1}^{r'} \sum_{n=v_0+1}^{v'} B_X(m,n,2) > 1\right\}$$

biçiminde tanımlansın. Bunun yanında, $\sum_{m=r_1+1}^{r_2'} \sum_{n=v_1+1}^{v_2'} B_X\left(m,n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) > 1$ olacak şekilde $r_2' > r_1$ ve $v_2' > v_1$ vardır. Benzer şekilde,

$$r_2 = \min\left\{r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_1, v' > v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'} \sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) > 1\right\}$$

ve

$$v_2 = \min\left\{v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_1, v' > v_1 \text{ ve } \sum_{m=r_1+1}^{r'} \sum_{n=v_1+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) > 1\right\}$$

yazılır. Tümevarım kullanılarak,

$$r_i = \min\left\{ r' \in \mathbb{N} : v' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{j-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1 \right\}$$

ve

$$v_i = \min\left\{ v' \in \mathbb{N} : r' \in \mathbb{N}, r' > r_{i-1}, v' > v_{j-1} \text{ ve } \sum_{m=r_{i-1}+1}^{r'} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v'} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1 \right\}$$

elde edilir. Bu durumda, her $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) > 1$$

olacak şekilde doğal sayıların $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_i < \ldots$ ve $v_0 = 0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_j < \ldots$ koşullarını sağlayan iki (r_i) ve (v_j) dizileri vardır. Ayrıca,

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i} \sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j} B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) - \varepsilon_{ij}\left(r_i - r_{i-1}\right)\left(v_j - v_{j-1}\right) > 1 \qquad \textbf{(4.8.1)}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\varepsilon_{ij} > 0$ pozitif reel sayısı vardır. i ve j doğal sayıları sabitlensin. Yine, f fonksiyonu sınırlı olduğundan, $r_{i-1}+1 \le m \le r_i$ ve $v_{j-1}+1 \le n \le v_j$ şartlarını sağlayan her $m,n \in \mathbb{N}$ için $B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) < \infty$ yazılır. Buradan da $B_X(m,n,\alpha)$ ifadesinin tanımı kullanılarak $r_{i-1}+1 \le m \le r_i$ ve $v_{j-1}+1 \le n \le v_j$ şartlarını sağlayan her $m,n \in \mathbb{N}$ ve her $y \in X$ için,

$$\left\| f\left(m,n,x_{mn}\right), y \right\| > B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right) - \varepsilon_{ij} \qquad \textbf{(4.8.2)}$$

olacak şekilde $x_{mn} \in A_X\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)$ dizisi vardır. Böylece, (4.8.1) ve (4.8.2) ifadeleri ile

$$\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}\left\|f(m,n,x_{mn}),y\right\|>\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)-\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}\varepsilon_{ij}$$

$$>\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}B_X\left(m,n,\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)-\varepsilon_{ij}\left(r_i-r_{i-1}\right)\left(v_j-v_{j-1}\right)$$

$$>1$$

bulunur. Böylece, her $y\in X$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f(m,n,x_{mn}),y\right\|=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{m=r_{i-1}+1}^{r_i}\sum_{n=v_{j-1}+1}^{v_j}\left\|f(m,n,x_{mn}),y\right\|\right)=\infty$$

olduğundan, $\left(f(m,n,x_{mn})\right)\notin\ell_{(2)}^{2,1}$ elde edilir. Ayrıca $r_{i-1}+1\leq m\leq r_i$ ve $v_{j-1}+1\leq n\leq v_j$ iken $x_{mn}\in A_X\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}\right)$ olduğundan, $\left\|x_{mn},y\right\|^{p_{mn}}\leq\frac{1}{i}+\frac{1}{j}$ olur. Bu ise $(x_{mn})\in C_{(2)}^{2,0}(p)$ olduğunu gösterir. Fakat bu $P_f:C_{(2)}^{2,0}(p)\to\ell_{(2)}^{2,1}$ olması ile çelişir. Bu durumda $\left(B_X(m,n,\alpha_1)\right)_{m,n=1}^{\infty}\in\ell^{2,1}$ olacak şekilde bir $\alpha_1>0$ reel sayısı vardır. Her $m,n\in\mathbb{N}$ için $c_{mn}=B_X(m,n,\alpha_1)$ seçimi yapılırsa istenen elde edilir.

"$\Leftarrow$" Her bir $m,n\in\mathbb{N}$ için $\left\|t,y\right\|\leq\alpha$ olduğunda bütün $t\in X$ ve $y\in X$ için;

$$\left\|f(m,n,t),y\right\|\leq\left|c_{mn}\right|$$

olacak şekilde bir $\alpha>0$ reel sayısı ve $(c_{mn})\in\ell^{2,1}$ dizisi var olsun. Eğer $x=(x_{mn})\in C_{(2)}^{2,0}(p)$ ise $\forall y\in X$ için $\lim\limits_{m,n\to\infty}\left\|x_{mn},y\right\|^{p_{mn}}=0$ olur. Buradan özellikle bu α pozitif reel sayısına karşılık her $\max\{m,n\}\geq i$ ve $y\in X$ için $\left\|x_{mn},y\right\|^{p_{mn}}\leq\alpha$ olacak şekilde bir $i\in\mathbb{N}$ vardır. Hipotez gereğince, her $\max\{m,n\}\geq i$ ve $\forall y\in X$ için $\left\|f(m,n,x_{mn}),y\right\|\leq\left|c_{mn}\right|$ olacak şekilde bir $(c_{mn})\in\ell^{2,1}$ vardır. Böylece,

$$\sum_{\max\{m,n\}=i}^{\infty}\left\|f(m,n,x_{mn}),y\right\|\leq\sum_{m,n=i}^{\infty}\left|c_{mn}\right|$$

$$<\infty$$

elde edilir. Bu ise $P_f : C^{2,0}_{(2)}(p) \to \ell^{2,1}_{(2)}$ olduğunu gösterir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde 2 – normlu çift dizi uzaylarının superposition operatörlerinin bazı özellikleri verildi. Ayrıca bu özellikler 2 – normlu Maddox çift dizi uzayları içinde incelendi.

Yukarıda belirtilen bu uzaylar üzerindeki superposition operatörlerin süreklilik, sınırlılık ve yerel sınırlılık özellikleri incelenebilir. Ayrıca elde edilen teoremler Orlicz fonksiyonu yardımıyla elde edilen daha genel 2 – normlu çift dizi uzayları içinde araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Apostol, T. M., 1974, Mathematical Analysis, Pearson Education Asia Limited and China Machine Press.

Appell, J., Zabreiko, P.P., 1990, Nonlinear Superposition Operators, Cambridge University Press.

Başar, F., Sever, Y., 2009, The Space of Double Sequences, Math. J. Okayama Univ., 51, 149−157.

Başar, F., 2012, Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, İstanbul.

Chew, T. S., Lee, P. Y., 1985, Orthogonally Additive Functionals on Sequence Spaces, SEA Bull. Math., 9, 81-85.

Dedagich, F., Zabreiko, P. P., 1987, Operator Superpositions in The Spaces *lp* ,Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 28 ,86-98.

Dedagich, F., Okicic, N., 2005, On The Compactness and Condensing of Nonlinear Superposition Operators, Kragujevac J. Math., 28, 173-183.

Gahler, S., 1964, Lincare 2 – normierte Raume, Math. Nachr.,28, 1-43.

Güngör, N., 2015, Bazı çift indisli dizi uzayları üzerinde superposition operatörler, Doktora tezi.

Grosse-Erdmann, K. G., 1992, The Structure of Sequence Spaces of Maddox, Can.J. Math., Vol 44 (2), 298-307.

Hamilton, H. J., 1936, Transformations of Multiple Sequences, Duke Math. J., 2, 29-60.

Hardy, G. H., 1904, On The Convergence of Certain Multiple Series, London Math. Soc., s2-1(1), 124-129.

Kolk, E., 2004, Superposition Operators on Sequence Spaces Defined By □ □ Functions, Demonstratio Mathematica, 37, 159-175.

Kolk, E., Raidjoe A., 2007, The Continuity of Superposition Operators on Some Sequence Spaces Defined By Moduli, Czech. Math. J., 57, 777-792.

Maddox, I. J., 1967, Spaces of Strongly Summable Sequences, Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2) 18, 345-355.

Maddox, I. J., 1968, Paranormed Sequence Spaces Generated By Infinite Matrices, Proc. Cambridge Philos., 335-340.

Maddox, I. J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge at the University Press.

Moricz, F., Rhoades B. E., 1988, Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability, 104 (2), 283-294.

Oğur, O., 2018, Superposition Operator on Some 2- Normed Seguence Spaces,8(1): 288-291.

Petranuarant, S., Kemprasit, Y., 1997, Superposition Operators On ℓ_p and c_0 into ℓ_q $(1 \leq p, g < \infty)$, Southeast Asian Bull. Math.,21, 139-147.

Sağır, B., Güngör, N., 2015, Continurty of Superposition Operators on the Double Seguence Spaces L_p, Filomat, 29(9): 2107-2118.

Tug, O., Doğan, M., Kurudirek, A., 2012, Some New Double-Sequence Spaces in 2-Normed Spaces Defined by Ideal Convergence and an Orlicz Function.,11.

ÖZGEÇMİŞ

Aydın IRMAK 1983 yılında Hatay Samandağ ilçesinde dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Hatay Samandağ ilçesinde tamamladı. 2001- 2005 yılları arasında Samsun 19 Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 2005 – 2012 yılları arasında Samsun Bafra ilçesinde 75. Yıl İMKB Şehit Erol Haspulat Yatılı İlköğretim Okulunda öğretmenlik yaptı. 2012 den şu ana kadar Hatay Defne ilçesinde Koçören Naciye Tınaztepe Ortaokulunda öğretmenliğe devam etmektedir. 2016 yılından itibaren Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Analiz Anabilim Dalında tezli yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.