GİRESUN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LA-Γ-YARIGRUPLAR VE LA-Γ-YARI HİPER GRUPLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK KABA KÜMELER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Kübra EYÜBOĞLU
162110006

Mayıs 2019

GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LA-Γ-YARIGRUPLAR VE LA-Γ-YARI HİPER GRUPLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK KABA KÜMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra EYÜBOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı	:	**Matematik**
Tez Danışmanı	:	**Dr. Öğr. Üyesi Canan AKIN**

Mayıs 2019

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LA-Γ-YARIGRUPLAR VE LA-Γ-YARI HİPER GRUPLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK KABA KÜMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra EYÜBOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 03/05/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Ş. Yılmaz.		
Dr. Öğr. Üyesi **Şerife YILMAZ** **Jüri Başkanı**	**Doç. Dr.** **İmdat İŞCAN** **Üye**	**Dr. Öğr. Üyesi** **Canan AKIN** **Üye**

Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

eyüboğlu

Kübra EYÜBOĞLU

03/05/2019

TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinden bu hale getirilmesine kadar tüm aşamalarında sabırla her türlü bilimsel desteği sağlayan, hoşgörüyle çalışmalarıma ışık tutan ve bu çalışma sayesinde kendimi geliştirme adına beni cesaretlendiren değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Canan AKIN'a sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarımda ve tüm hayatım boyunca maddi, manevi desteklerini esirgemeyen başta annem Elvan ve babam Haluk EYÜBOĞLU olmak üzere tüm aileme, arkadaşlarıma ve Giresun Üniversitesi Matematik Bölümü'nün değerli hocalarına çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{Z}$	: tam sayılar kümesi
$\wp(X)$	: X in güç kümesi
$\wp^*(X)$	: $\wp(X)\setminus\{\emptyset\}$
$A\Gamma B$	: A ve B kümelerinin Γ çarpımı
$F(X)$	: X in bulanık güç kümesi
μ_α	: μ bulanık alt kümesinin α-seviye alt kümesi
$\wedge$	: minimum operatörü
$\vee$	: maksimum operatörü
$[0,1]$	: Kapalı birim aralık
I	: indis kümesi
$\bigwedge_{i\in I}\mu_i$	: $\{\mu_i \mid i\in I\}$ bulanık alt kümeler ailesinin infimumu
$\bigvee_{i\in I}\mu_i$	: $\{\mu_i \mid i\in I\}$ bulanık alt kümeler ailesinin supremumu
$\mathcal{T}$	: $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir t-norm
$\mathcal{T}_M$	: $\wedge$ t-normu
S	: $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir t-conorm
S_M	: $\vee$ t-conormu
$\mathcal{I}$	: $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir implikasyon
$\mathcal{N}$	: $[0,1]$ üzerinde tanımlı bir negatör
$\mathcal{N}_S$	: standart negatör

$\mu \cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} \nu$	: μ ve ν bulanık alt kümelerinin $\mathcal{T}_\Gamma$ çarpımı
$\mu \cdot_\Gamma \nu$	: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ için $\mu \cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} \nu$
$F_\varphi(x)$	: $x \in X$ in φ bağıntısına göre ardıl komşuluğu
$\underline{\varphi}(A)$	: A kümesinin φ bağıntısı altındaki alt kaba yaklaşımı
$\overline{\varphi}(A)$	: A kümesinin φ bağıntısı altındaki üst kaba yaklaşımı
(X, Y, φ)	: X, Y kümeleri ve φ bağıntısı ile oluşturulmuş genelleştirilmiş yaklaşım uzayı
$F_\varphi(x)$	: $x \in X$ in φ bağıntısına göre ardıl komşuluğu
$\overline{\varphi}(A)$	: A kümesinin üst kaba yaklaşımı
$\underline{\varphi}(A)$	: A kümesinin alt kaba yaklaşımı
(X, Y, θ)	: Genelleştirilmiş L-bulanık yaklaşım uzayı
$\overline{R}^{\mathcal{T}}(\mu)$	: R bulanık bağıntısı altında μ nün $\mathcal{T}$-bulanık üst kaba yaklaşımı
$\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$	: R bulanık bağıntısı altında μ nün $\mathcal{I}$-bulanık alt kaba yaklaşımı
$\overline{R}(\mu)$	: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ için $\overline{R}^{\mathcal{T}}(\mu)$
$\underline{R}(\mu)$	: $\mathcal{I}$, $\mathfrak{R}$-veya $\mathcal{S}$-implikasyon ise $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$
$\mathrm{Hom}(X, F(Y))$	: X ten Y ye tüm bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfiler kümesi
$\mu \star \nu$	: μ ve ν bulanık alt kümelerinin $\mathcal{T}_M$-çarpımı
$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(S, F(H))$	: S ten H ye tüm bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfileri kümesi

TABLOLAR LİSTESİ

LA-Γ-YARIGRUPLAR VE LA-Γ-YARI HİPER GRUPLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK KABA KÜMELER

ÖZET

Bu tez çalışması genelleştirilmiş bulanık yaklaşım uzayları ile ilgilidir. Bu çalışmada bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi kavramını tanımlayacağız ve onların bazı özelliklerine değineceğiz. Ayrıca LA-Γ-yarıgruplar üzerine inşa edilmiş ve bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ile üretilmiş bir genelleştirilmiş bulanık yaklaşım uzayının alt ve üst yaklaşımlarının çeşitli özelliklerini araştıracağız. Özellikle, bu yaklaşımlar altında bazı özelliklerin korunması açısından bulanık alt kümelerin bazı cebirsel özelliklerine odaklanacağız.

Anahtar kelimeler: Genelleştirilmiş bulanık yaklaşım uzayı, bulanık küme değerli homomorfi, LA-Γ-yarıgrup.

GENERALIZED FUZZY ROUGH SETS IN LA-Γ-SEMİGROUPS AND LA-Γ-SEMİHYPERGROUPS

SUMMARY

This thesis is related to generalized fuzzy approximation spaces. In this paper we define the concept of fuzzy set valued homomorphism of LA-Γ-semigroups and mention some features of them. We also investigate some properties of the lower and upper approximations of a generalized fuzzy approximation space constructed on LA-Γ-semigroups and derived by fuzzy set valued homomorphism of LA-Γ-semigroups. Especially, we focus on some algebraic properties of fuzzy subsets in terms of protection of some properties under these approximations.

Keywords: Generalized fuzzy approximation space, fuzzy set valued homomorphism, LA-Γ-semigroup.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Gerçek yaşamdaki konularda belirsizlikler vardır. Arkadaşlarınızla denize gittiğinizde size "su çok güzel" diyorlarsa sağduyunuzla suyun rahat edebileceğiniz bir sıcaklıkta olduğu sonucuna varabilirsiniz. Bu uygun sıcaklığı "ılık" şeklinde ifade ederiz. Ancak arkadaşınız size soğuk gelebilecek bir ısıda daha rahat ediyor olabilir ve böylece size göre soğuk olan su ona göre ılıktır. Bu nedenle "su çok güzel" veya "su çok kötü" şeklinde iki sınıf mevcuttur diyemeyiz. Hatta "sıcak su", "ılık su" veya "soğuk su" şeklinde üç sınıf da yeterli olmayacaktır. Bu durumda "Nisan ayında suyu ılık olan denizler" bir küme oluşturmaz. Klasik küme teorisindeki bu türden belirsizlikleri gidermede yararlı olan bulanık küme teorisi 1965 yılında L.A. Zadeh [1] tarafından geliştirilmiştir. Zadeh'in teorisinde doğadaki bütün nesnelere üyelik derecesi atayarak bu nesneleri derecelendirmek suretiyle matematiksel olarak tanımlamak mümkündür. Üyelik derecesi, verilen kavram ile uyumludur ve [0,1] aralığındaki gerçek değerlerle ifade edilir. Nisan ayında suyu en soğuk denizlere 0, çok soğuk denizlere 0,15, soğuk denizlere 0,25, ılık denizlere 0,5, sıcak denizlere 0,75, çok sıcak denizlere 0,85 ve en sıcak denize 1 değerlerini atayarak onları derecelendirebiliriz. Bulanık kümeler matematik ve mantık alanlarının yanında, günümüzde; yapay zeka, bilgisayar bilimleri, veri madenciliği, endüstri mühendisliği, tıp gibi bir çok alanda uygulamaları mevcuttur.

1971 yılında Rosenfeld'in [2] herhangi bir grubun bulanık alt grubu kavramını tanımlaması ile bulanık küme teorisi pek çok matematikçi tarafından cebirsel yapılar ile birleştirilerek bulanık cebirsel yapıların gelişimi sağlanmıştır.

Kaba kümeler teorisi 1982'de Pawlak [3] tarafından geliştirilmiştir. Pawlak; boştan farklı sonlu bir evrensel küme üzerinde, bir denklik bağıntısı yardımıyla bir X kümesinin alt ve üst yaklaşımlarını tanımlamıştır. Buna göre bir nesnenin bu kümede olma olasılığının bulunduğu küme, üst yaklaşım ve bu kümede kesinlikle bulunduğu küme ise alt yaklaşımdır. Burada üst yaklaşımın alt yaklaşımdan farkına sınır bölgesi denir. Eğer sınır bölgesi boş küme ise X kesin bir kümedir, ancak sınır kümesi boş değil ise X kaba kümedir. Biswas ve Nanda'nın [4] kaba alt gruplar kavramını sunması ile kaba kümeler ilk kez cebirsel yapılara aktarılmıştır. Kaba kümeler birçok uygulama alanı bulmuş olan ve bulanık kümeler gibi başka teorilerle birleştirilebilen bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır. Klasik bağıntılar yerine bulanık bağıntıları tasarlayan Dubois ve Prade [5], bulanık kaba kümeler kavramını tanıtmıştır. Daha sonra Kuroki [6] yarıgruplarda, kongrüans ve bulanık kongrüans bağıntılarına göre, alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerini inceleyerek kaba kümeleri bulanık cebirsel yapılara genişletmiştir. Kaba kümeler, Yao [7] tarafından denklik bağıntıları yerine herhangi bir bağıntının tasarlanması ile 1998 yılında genelleştirilmiştir. Davvaz [8] tanımladığı küme değerli homomorfi kavramı ile genelleştirilmiş kaba kümeleri gruplara aktarmıştır. Wu ve ark. [9, 10, 11] bulanık kaba kümeleri iki farklı evrensel küme ile oluşturarak genelleştirmiştir. Ekiz ve ark. [12, 13, 14] genelleştirilmiş bulanık kaba kümeleri çeşitli cebirsel yapılara aktarmıştır.

Jun ve Lee [15], Γ-halkalarda bulanık idealleri tanıtmıştır. LA-yarıgrup (AG-grupoid) kavramı Kazım ve Naseeruddin [16] tarafından tanımlanmıştır. Sen [17], Γ-yarıgrup kavramını tanıtmıştır. 2010 yılında Shah ve Rehman [18, 19], LA-Γ-yarıgrup (Γ-AG-yarıgrup) kavramını tanımlayarak Γ-idealler ile Γ-bi-ideallerin özelliklerini araştırmışlar ve [20]' da bu kavramları bulanıklaştırmışlardır.

Hiper grup kavramını ilk olarak 1934 yılında Fransız matematikçi Marty [21], İskandanivyalı Matematikçiler Kongresi'nde sunmuştur. Sen, Ameri ve Chowdhury [22] bulanık yarı hiper grupları tanıtmıştır. Hiper grupların, LA-yarıgruplar ile genellemesi olan LA-yarı hiper grubunu Hila ve Dine [23], Γ-yarıgruplar ile genellemesi olan Γ-yarı hiper grubunu Davvaz ve arkadaşları [24,25,26] tanımlamışlardır.

Bu tez çalışmasında öncelikle bağıntısal ile küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve bulanık bağıntısal ile bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi kavramları tanıtılarak bunlar arasındaki ilişkiler ve bazı özellikler incelenmiştir. Daha sonra ise bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfileri ile genelleştirilmiş kaba yaklaşım uzayı oluşturulmuş ve bu uzayın bulanık alt ve üst yaklaşımlarının özellikleri araştırılmıştır. Özellikle bir t-normdan üretilmiş $\mathfrak{R}$-implikasyon veya bir t-conorm ve standart negatörden üretilmiş $\mathcal{S}$-implikasyon ile oluşturulmuş alt yaklaşımlar üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca bu tez çalışmasında küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisi kavramı tanıtılmıştır. Bu homomorfilerle oluşturulan bulanık hiper yaklaşım uzayının incelenmesine olanak verecek şekilde konuya bir giriş yapılmıştır.

BÖLÜM 2. GENEL BİLGİLER

Aşağıda bu tez çalışmasındaki kavramların anlaşılmasında gereken ve iyi bilinen bazı cebirsel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Bağıntılar

Tanım 2.1.1 [27]: $X, Y \neq \emptyset$ olan kümeler olsun. $\theta \in \wp(X \times Y)$ alt kümesine X'ten Y'ye bir bağıntı denir. $X = Y$ ise θ ya X üzerinde bir bağıntı denir.

Tanım 2.1.2 [9, 10]: $\theta \in \wp(X \times Y)$ olsun. Her $a \in X$ için $(a, b) \in \theta$ olacak şekilde $b \in Y$ mevcut ise θ ya serial bağıntı denir.

Tanım 2.1.3 [9, 10]: $\theta \in \wp(X \times X)$ olsun. Bu takdirde θ ya,

a. yansıyan denir : $\Leftrightarrow$ Her $a \in X$ için $(a, a) \in \theta$;

b. simetrik denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b \in X$ için $(a, b) \in \theta$ ise $(b, a) \in \theta$;

c. geçişken denir : $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c \in X$ için $(a, b) \in \theta$ ve $(b, c) \in \theta$ ise $(a, c) \in \theta$

Yansıyan, simetrik ve geçişken bir θ bağıntısına X üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Tanım 2.1.4 [28, 29]: $\theta \in \wp(X \times Y)$ bir bağıntı olsun. Bu takdirde $(x, y) \in \theta \Leftrightarrow (y, x) \in \theta^{-1}$ koşulunu sağlayan $\theta^{-1} \in \wp(Y \times X)$ bağıntısına θ nın tersi denir.

2.2. LA-Yarıgruplar ve LA-Γ-Yarıgruplar

Bu bölümde LA-yarıgrup (AG-grupoid) ve LA-Γ-yarıgrup (Γ-AG-grupoid) tanımları verilecek olup daha detaylı bilgi için Kazım ve Naseeruddin'in [16]'da ve de Shah ve Rehman'ın [18]'de verilen çalışmaları incelenebilir.

Tanım 2.2.1: $(S,.)$ grupoidine LA-yarıgrup veya AG-grupoid denir. $\Leftrightarrow \forall a,b,c \in S$ için $(a.b).c = (c.b).a$ dır. Her $a \in S$ için $(a.a).a = a.(a.a)$ şartını sağlayan S LA-yarıgrubuna locally associative LA-yarıgrup denir.

Tanım 2.2.2: S ve Γ boştan farklı iki küme olsun. (a,γ,b) yi $a\gamma b$ ile eşleyen $S \times \Gamma \times S \to S$ dönüşümüyle her $a,b,c \in S$ ve $\gamma,\alpha \in \Gamma$ için $(a\gamma b)\alpha c = (c\gamma b)\alpha a$ denkliğini sağlayan S kümesine LA-Γ-yarıgrup (Γ-AG-grupoid) denir. S kümesi LA-Γ-yarıgrup ve $A,B \subseteq S$ olsun. $A\Gamma B = \{a\gamma b \mid a \in A \ ve \ b \in B\}$ dir.

Örnek 2.2.3: S keyfi bir LA-yarıgrup ve Γ boştan farklı bir küme olsun. Her $a,b \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için (a,γ,b) yi $a\gamma b = ab$ ile eşleyen $S \times \Gamma \times S \to S$ dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde S bir LA-Γ-yarıgruptur. Böylece her LA-yarıgrup bir LA-Γ-yarıgruptur.

Örnek 2.2.4: $\Gamma = \{1,2,3\}$ ve "$-$" tam sayılarda çıkartma işlemi olsun. Her $a,b \in \mathbb{Z}$ ve $\gamma \in \Gamma$ için (a,γ,b) yi $a\gamma b = b - \gamma - a$ ile eşleyen $\mathbb{Z} \times \Gamma \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde $\mathbb{Z}$ bir LA-Γ-yarıgruptur.

Tanım 2.2.5: $f: A \to B$ bir fonksiyon her $a,b \in A$ ve $\gamma,\alpha \in \Gamma$ için $f(a\gamma b) = f(a)\alpha f(b)$ ise LA-Γ-yarıgruplarda homomorfisi denir.

Tanım 2.2.6: Her $a \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $e\gamma a = a(a\gamma e = a)$ şartını sağlayan $e \in S$ elemanına LA-Γ-yarıgrubunun sol (sağ) birimi denir. LA-Γ-yarıgrubunun sol (sağ) birimi varsa tektir. LA-Γ-yarıgrubu sağ birimli ise değişmeli LA-Γ-yarıgruptur.

Tanım 2.2.7: A kümesi S nin boştan farklı alt kümesi olsun. Eğer her $a,b \in A$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b \in A$ ise A ya S nin LA-Γ-altyarıgrubu denir.

Tanım 2.2.8: S nin LA-Γ-altyarıgrubu I ya $S\Gamma I \subseteq I$ $(I\Gamma S \subseteq I)$ ise S nin sol(sağ) Γ-ideali denir. I, S nin hem sol Γ-ideali hem de sağ Γ-ideali ise Γ-idealidir.

Tanım 2.2.9: A kümesi S nin boştan farklı alt kümesi olsun. Eğer $(A\Gamma S)\Gamma A \subseteq A$ ise A ya S nin genelleştirilmiş Γ-bi-ideali denir. A, S nin LA-Γ-altyarıgrubu ve genelleştirilmiş Γ-bi-ideali ise Γ-bi-idealidir. Eğer $(S\Gamma A)\Gamma S \subseteq A$ ise A ya S nin Γ-interior ideali denir.

2.3. Bulanık Kümeler

Tanım 2.3.1 [30, 31]: $X \neq \emptyset$ olan bir küme olsun. Her $\mu: X \to [0,1]$ fonksiyonuna X in bulanık kümesi (veya bulanık alt kümesi) denir. X in bütün bulanık alt kümelerinin kümesine X in bulanık güç kümesi denir ve $F(X)$ ile gösterilir.

$\alpha \in [0,1]$ için $\mu_\alpha = \{x \in X | \alpha \leq \mu(x)\}$ kümesine μ nün α-kesim veya α-seviye alt kümesi denir.

Tanım 2.3.2 [32]: $\mu, \nu \in F(X)$ olsun. Her $x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise μ, ν de içerilir denir ve bu durum $\mu \leq \nu$ şeklinde gösterilir. Eğer $\mu \leq \nu$ ve $\mu \neq \nu$ ise μ ye, ν de kesin içerilir (veya ν, μ yü kesin içerir) denir ve bu durumda $\mu < \nu$ yazılır.

Teorem 2.3.3 [33]: $\mu, \nu \in F(X)$ olsun. Bu takdirde her $\alpha \in [0,1]$ için $\mu \leq \nu$ ise $\mu_\alpha \subseteq \nu_\alpha$ dir.

Tanım 2.3.4 [11]: " $\circ$ ", $[0,1]$ üzerinde bir ikili işlem olmak üzere $F(X)$ üzerinde bir ikili işlem her $\mu, \nu \in F(X)$ ve her $x \in X$ için $(\mu \circ \nu)(x) = \mu(x) \circ \nu(x)$ olarak tanımlanır. Maksimum ve minimum operatörleri $[0,1]$ üzerinde birer ikili işlemdir. Bu tezde $\max\{\mu(x), \nu(x)\}$ yerine $\mu(x) \vee \nu(x)$ ve $\min\{\mu(x), \nu(x)\}$ yerine de $\mu(x) \wedge \nu(x)$ gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 2.3.5 [32]: $I \neq \emptyset$ olan bir indis kümesi olmak üzere $\{\mu_i | i \in I\} \subseteq F(X)$, X in bulanık alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu ailenin en küçük üst sınırı $\bigvee_{i \in I} \mu_i$ ve en büyük alt sınırı $\bigwedge_{i \in I} \mu_i$; her $x \in X$ için, sırasıyla, $(\bigvee_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(x)$ ve $(\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.6: X, Y kümeler olsun. Bir $R: X \times Y \to [0,1]$ fonksiyonuna X ten Y ye bulanık bağıntı denir. $R: X \times Y \to [0,1]$ bulanık bağıntılarının eşitliği, bileşimi ve arakesiti bulanık kümelerdeki gibi tanımlanır. Burada $(x,y) \in X \times Y$ için $R(x,y)$ ye x ile y elemanları arasındaki ilgililik derecesi denir. $\alpha \in [0,1]$ için R nin α-seviye alt kümesi $R_a = \{(x,y) \in X \times Y | \alpha \leq R(x,y)\}$ şeklindedir.

Tanım 2.3.7 [34]: $R \in F(X \times Y)$ ve $P \in F(Y \times Z)$ olsun. Bu bulanık bağıntıların bileşkesi $P \circ R: X \times Z \to [0,1]$ şeklindeki bulanık bağıntıdır ve her $(x,z) \in X \times Z$ için $P \circ R(x,z) = \bigvee_{y \in Y} R(x,y) \wedge P(y,z)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.8 [9, 11, 35]: $R \in F(X \times Y)$ olsun. R ye serial bulanık bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $R(x,y) = 1$ olacak şekilde $y \in Y$ mevcuttur.

Teorem 2.3.9 [36]: $R \in F(X \times Y)$ serial bulanık bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in [0,1]$ için $R_\alpha \subseteq X \times Y$ serial bağıntıdır.

Tanım 2.3.10 [10, 11]: $R \in F(X \times X)$ ise R ye X üzerinde bulanık bağıntı denir. R, X üzerinde bulanık bağıntı olsun. Bu takdirde R ye,

a. yansıyan bulanık bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $R(x,x) = 1$,
b. simetrik bulanık bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in X$ için $R(x,y) = R(y,x)$,
c. geçişken bulanık bağıntı denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,z \in X$ için $\bigvee_{y \in Y}(R(x,y) \wedge R(y,z)) \leq R(x,z)$ dir.

Teorem 2.3.11 [36]: $R \in F(X \times X)$ olsun.

a. R yansıyan bulanık bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in [0,1]$ için R_α yansıyan bağıntıdır,
b. R simetrik bulanık bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in [0,1]$ için R_α simetrik bağıntıdır,
c. R geçişken bulanık bağıntıdır ancak ve ancak her $\alpha \in [0,1]$ için R_α geçişken bağıntıdır.

Tanım 2.3.12 [37]: $R \in F(X \times Y)$ olsun. $R^{-1} \in F(Y \times X)$ bulanık bağıntısına R nin ters bulanık bağıntısıdır denir : $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $R^{-1}(y,x) = R(x,y)$ dir.

2.4. Bulanık Mantıksal Operatörler

2.4.1. t-normlar ve t-conormlar

Bu bölümde t-norm ve t-conorm kavramları açıklanacaktır. Ayrıntılı bilgi için De Baets ve Mesiar [38] ve Klement, Mesiar ve Pap'ın [39] çalışmalarından yararlanılabilir.

Tanım 2.4.1.1: $L = [0,1]$ üzerinde tanımlı $\mathcal{T}: L^2 \to L$ ikili işlemine bir t-norm denir: $\Leftrightarrow$

a. Her $x, y \in L$ için $\mathcal{T}(x,y) = \mathcal{T}(y,x)$, (Değişme)
b. Her $x, y, z \in L$ için $\mathcal{T}(\mathcal{T}(x,y),z) = \mathcal{T}(x,\mathcal{T}(y,z))$, (Birleşme)
c. Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $\mathcal{T}(x,z) \leq \mathcal{T}(y,z)$, (Monotonluk)
d. Her $x \in L$ için $\mathcal{T}(x,1) = x$. (Sınır Şartı)

Herhangi $x, y \in X$ için $\mathcal{T}(x,y)$ notasyonu yerine $x\mathcal{T}y$ notasyonu da kullanılabilir.

Örnek 2.4.1.2: Aşağıda $L = [0,1]$ üzerinde tanımlanan temel t-normlar verilmiştir:

a. $\mathcal{T}_M(x,y) = \min(x,y)$, (Minimum)
b. $\mathcal{T}_P(x,y) = x.y$, (Çarpım)
c. $\mathcal{T}_L(x,y) = \max(x+y-1,0)$, (Lukasiewicz$t$-norm)
d. $\mathcal{T}_D(x,y) = \begin{cases} 0, & x,y \in [0,1) \\ \min(x,y), & x = 1 \; veya \; y = 1 \end{cases}$, (Kesin Çarpım)
e. $\mathcal{T}_{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y \leq 1 \\ \min(x,y), & x+y > 1 \end{cases}$, (Nilpotent Minimum)

Teorem 2.4.1.3: $L = [0,1]$ olmak üzere $\mathcal{T}$, L üzerinde t-norm olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

a. $\forall x, y \in L$ için $\mathcal{T}(x,y) \leq x \wedge y$,
b. $\forall x \in L$ için $\mathcal{T}(x,0) = \mathcal{T}(0,x) = 0$,
c. $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ için $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ ise $\mathcal{T}(x_1,y_1) \leq \mathcal{T}(x_2,y_2)$.

Tanım 2.4.1.4 [38, 40]: $\mathcal{T}$, $L = [0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun.

a. $\mathcal{T}$ ye L üzerinde $\vee$-dağılımlı t-norm denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b_1, b_2 \in L$ için $\mathcal{T}(a, b_1 \vee b_2) = \mathcal{T}(a, b_1) \vee \mathcal{T}(a, b_2)$.

b. $\mathcal{T}$ ye L üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-norm denir $:\Leftrightarrow$ Her $a, b_i \in L$, $i \in J$ için $\mathcal{T}(a, \bigvee_{i\in J} b_i) = \bigvee_{i\in J} \mathcal{T}(a, b_i)$.

Örnek 2.4.1.5: $\mathcal{T}_M$ ve $\mathcal{T}_P$ t-normları, $[0,1]$ üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı t-normlardır ancak $\mathcal{T}_D$ t-normu, $[0,1]$ üzerinde sonsuz $\vee$-dağılımlı değildir.

Tanım 2.4.1.6: $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$, L üzerinde herhangi iki t-norm olsun. $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ den zayıftır (veya $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1$ den güçlüdür) denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y \in L$ için $\mathcal{T}_1(x,y) \leq \mathcal{T}_2(x,y)$ dir. Bu durum $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ şeklinde yazılır.

Örnekler 2.4.1.7: L üzerindeki herhangi bir $\mathcal{T}$ t-normu için $\mathcal{T}_D \leq \mathcal{T} \leq \mathcal{T}_M$ olduğundan $\mathcal{T}_D$, L üzerindeki en zayıf t-norm ve $\mathcal{T}_M$ L üzerindeki en güçlü t-normdur.

Tanım 2.4.1.8: $\mathcal{T}$, $L = [0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. $a \in L$ ye L nin, $\mathcal{T}$ t-normuna göre bir idempotent elemanı denir $:\Leftrightarrow \mathcal{T}(a, a) = a$ dır. L nin tüm idempotent elemanlarının kümesi $D_\mathcal{T} = \{a \in L | \mathcal{T}(a, a) = a\}$ ile gösterilir. Herhangi bir $\mathcal{T}$ t-normu için $\mathcal{T}$ ikili işlemi, $D_\mathcal{T}$ kümesi üzerinde bir ikili işlemdir.

Teorem 2.4.1.9: $\mathcal{T}$, $L = [0,1]$ üzerinde bir t-norm olsun. I ve J birer indis kümesi olmak üzere $\{a_i \in L | i \in I\}$ ve $\{b_j \in L | j \in J\}$ aileleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right) \mathcal{T} \left(\bigwedge_{j\in J} b_j\right) \leq \bigwedge_{\substack{i\in I \\ j\in J}} (a_i \mathcal{T} b_j).$$

Tanım 2.4.1.10: $L = [0,1]$ olmak üzere $S: L^2 \to L$ ile tanımlanan ikili işlemine t-conorm denir $:\Leftrightarrow$

a. Her $x, y \in L$ için $S(x, y) = S(y, x)$, (Değişme)

b. Her $x, y, z \in L$ için $S(S(x,y),z) = S(x, S(y,z))$, (Birleşme)

c. Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $S(x,z) \leq S(y,z)$, (Monotonluk)

d. Her $x \in L$ için $S(x, 0) = x$. (Sınır Şartı)

Her $x, y \in L$ için $S_M(x,y) = x \vee y$ olarak tanımlanan S_M, L üzerinde t-conormdur.

Önerme 2.4.1.11: $L = [0,1]$ olmak üzere $S: L^2 \to L$ fonksiyonu bir t-conormdur ancak ve ancak her $x, y \in [0,1]$ için $S(x,y) = 1 - \mathcal{T}(1-x, 1-y)$ olacak şekilde, L üzerinde tanımlı olan bir $\mathcal{T}$ t-normu mevcuttur.

2.4.2. Negatörler

Tanım 2.4.2.1 [41]: $L = [0,1]$ olsun. $\mathcal{N}: L \to L$ fonksiyonuna bir negatör denir: $\Leftrightarrow$

a. $\mathcal{N}: L \to L$ azalan bir fonksiyondur,

b. $\mathcal{N}(0) = 1$ ve $\mathcal{N}(1) = 0$.

Her $x \in L$ için $\mathcal{N}_S(x) = 1 - x$ negatörü standart negatör olarak adlandırılır.

Örnek 2.4.2.2: T ve S, L üzerinde, sırasıyla, t-norm ve t-conorm olmak üzere her $\alpha \in L$ için

$$\mathcal{N}(\alpha) = \bigvee_{T(\alpha,t)=0} t \quad , \mathcal{N}(\alpha) = \bigwedge_{S(\alpha,t)=1} t$$

olarak tanımlanan $\mathcal{N}: L \to L$ fonksiyonları negatördür.

2.4.3. İmplikasyonlar

Tanım 2.4.3.1 [42, 43, 44, 45, 46, 47]: $L = [0,1]$ üzerinde tanımlı $\mathcal{I}: L^2 \to L$ ikili işlemine bir implikasyon denir : $\Leftrightarrow$

a. Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ise $\mathcal{I}(y,z) \leq \mathcal{I}(x,z)$,

b. Her $x, y, z \in L$ için $y \leq z$ ise $\mathcal{I}(x,y) \leq \mathcal{I}(x,z)$,

c. Her $\mathcal{I}(0,0) = \mathcal{I}(1,1) = 1$ ve $\mathcal{I}(1,0) = 0$.

Tanımdan kolayca görülebilir ki $\mathcal{I}$ implikasyonu her $y \in L$ için $\mathcal{I}(0,y) = 1$ ve her $x \in L$ için $\mathcal{I}(x,1) = 1$ eşitliklerini sağlar.

Örnekler 1.4.3.2 [3, 44]: $L = [0,1]$ olsun.

1. $\mathcal{T}$, L üzerinde bir t-norm olmak üzere,

$$\mathcal{I}(x,y) = \bigvee_{x\mathcal{T}k\leq y} k$$

ikili işlemi L üzerinde bir implikasyondur. Bu implikasyona $\mathfrak{R}$-implikasyon denir.

$L = [0,1]$ üzerindeki bazı $\mathfrak{R}$-implikasyonlar şunlardır:

a. $x\mathcal{T}y = x \wedge y$ ise $\mathcal{I}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}$ (Gödel)

b. $x\mathcal{T}y = x.y$ ise $\mathcal{I}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{cases}$ (Goguen)

c. $x\mathcal{T}y = max\{0, x + y - 1\}$ ise $\mathcal{I}(x,y) = min\{1, 1 - x + y\}$. (Lukasiewicz)

2. $\mathcal{S}$, L üzerinde bir t-conorm ve $\mathcal{N}$, L üzerinde bir negatör olmak üzere,

$$\mathcal{I}(x,y) = \mathcal{S}(\mathcal{N}(x), y)$$

ile tanımlı $\mathcal{I}: L^2 \rightarrow L$ ikili işlemi L üzerinde bir implikasyondur. Bu implikasyona $\mathcal{S}$-implikasyon denir.

$L = [0,1]$ üzerindeki bazı $\mathcal{S}$-implikasyonlar şunlardır:

a. $x\mathcal{S}y = max(x,y)$ ve $\mathcal{N}(x) = 1 - x$ ise $\mathcal{I}(x,y) = max\{1 - x, y\}$ (Kleene-Dienes)

b. $x\mathcal{S}y = x + y - xy$ ve $\mathcal{N}(x) = 1 - x$ ise $\mathcal{I}(x,y) = 1 - x + x\,y$ (Reichenbach)

c. $x\mathcal{S}y = min\{1, x + y\}$ ve $\mathcal{N}(x) = 1 - x$ ise $\mathcal{I}(x,y) = min\{1, 1 - x + y\}$ (LK)

2.5. Bulanık LA-Γ-Yarıgruplar

Bu bölümde Shah ve arkadaşlarının [25, 26]'da ve de Jun ve Lee'nin [48]'de verilen çalışmalarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.5.1: S bir LA- Γ-yarıgrup ve $\mu,\nu \in F(S)$ olsun. Bu takdirde $\mu \cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} \nu \in F(S)$, her $x \in S$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\mu \cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} \nu)(x) = \bigvee_{\substack{x=y\gamma z \\ y,z\in S,\gamma\in\Gamma}} (\mu(y)\mathcal{T}\nu(z))$$

Burada $\mathcal{T} = T_M$ ise $\mu \cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} \nu \in F(S)$, $\mu \cdot_\Gamma \nu$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.2: S bir LA-Γ-yarıgrup ve $\mu \in F(S)$ olsun. μ ye S nin $\mathcal{T}$-bulanık LA- Γ-altyarıgrubu denir. $\Leftrightarrow$ Her $x,y \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\mu(x\gamma y) \geq \mu(x)\mathcal{T}\mu(y)$ dir.

Tanım 2.5.3: S bir LA-Γ-yarıgrup ve μ, S nin bir $\mathcal{T}$-bulanık LA-Γ-altyarıgrubu olsun. Bu takdirde:

a. μ ye S nin $\mathcal{T}$-bulanık sağ Γ-ideali denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\mu(x) \leq \mu(x\gamma y)$ dir.

b. μ ye S nin $\mathcal{T}$-bulanık sol Γ-ideali denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\mu(y) \leq \mu(x\gamma y)$ dir.

c. μ ye S nin $\mathcal{T}$-bulanık iki yanlı Γ-ideali denir: $\Leftrightarrow$ μ, S nin $\mathcal{T}$-bulanık sol ve sağ Γ-idealidir.

Burada $\mathcal{T} = T_M$ ise $\mathcal{T}$-bulanık yerine sadece bulanık ifadesi kullanılır.

Tanım 2.5.4: μ ye, S nin $\mathcal{T}$-bulanık genelleştirilmiş Γ-bi-ideali denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\mu((x\gamma y)\alpha z) \geq \mu(x)\mathcal{T}\mu(z)$ dir. μ, S nin $\mathcal{T}$-bulanık LA-Γ-altyarıgrubu ve $\mathcal{T}$-bulanık genelleştirilmiş Γ-bi-ideali ise μ ye, S nin $\mathcal{T}$-bulanık Γ-bi-ideali denir. μ ye, S nin bulanık Γ-interior ideali denir $:\Leftrightarrow$ Her $x,y \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\mu((x\gamma y)\alpha z) \geq \mu(y)$ dir.

2.6. Genelleştirilmiş Kaba Kümeler

$X,Y \neq \emptyset$ olan kümeler ve $\varphi \subseteq X \times Y$ olsun. (X,Y,φ) üçlüsüne bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı denir. Her $x \in X$ için $F_\varphi(x) = \{y \in Y | (x,y) \in \varphi\}$ olarak tanımlanan $F_\varphi : X \to \wp(Y)$ küme değerli fonksiyonu olmak üzere herhangi bir $A \subseteq Y$ için $\underline{\varphi}(A)$

alt ve $\overline{\varphi}(A)$ üst yaklaşımları, sırasıyla, $\underline{\varphi}(A) = \{x \in X | F_\varphi(x) \subseteq A\}$ ve $\overline{\varphi}(A) = \{x \in X | F_\varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}$ olarak tanımlanır.

Burada bir $x \in X$ için $F_\varphi(x)$ kümesine, x in φ ye göre ardıl komşuluğu denir. $(\underline{\varphi}(A), \overline{\varphi}(A))$ çiftine A nın (X, Y, φ) üzerindeki genişletilmiş kaba kümesi denir. $\underline{\varphi}$ ve $\overline{\varphi}$ fonksiyonları, sırasıyla, alt ve üst genelleştirilmiş yaklaşım operatörleri olarak adlandırılır. φ nın verilmesinin aksine olarak bir $F: X \to \wp(Y)$ fonksiyonunun verilmesi durumunda $\varphi_F = \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\} \subseteq X \times Y$ şeklinde bir bağıntı tanımlanabilir.

Teorem 2.6.1 [10, 11]: $\varphi \subseteq X \times Y$ olmak üzere $A, B \in \wp(Y)$ kümelerinin alt ve üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

(L1) $\underline{\varphi}(A) = \sim\overline{\varphi}(\sim A)$, **(U1)** $\overline{\varphi}(A) = \sim\underline{\varphi}(\sim A)$,

(L2) $\underline{\varphi}(Y) = X$, **(U2)** $\overline{\varphi}(\emptyset) = \emptyset$,

(L3) $\underline{\varphi}(A \cap B) = \underline{\varphi}(A) \cap \underline{\varphi}(B)$, **(U3)** $\overline{\varphi}(A \cup B) = \overline{\varphi}(A) \cup \overline{\varphi}(B)$,

(L4) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\varphi}(A) \subseteq \underline{\varphi}(B)$, **(U4)** $A \subseteq B \Rightarrow \overline{\varphi}(A) \subseteq \overline{\varphi}(B)$,

(L5) $\underline{\varphi}(A) \cup \underline{\varphi}(B) \subseteq \underline{\varphi}(A \cup B)$. **(U5)** $\overline{\varphi}(A \cap B) \subseteq \overline{\varphi}(A) \cap \overline{\varphi}(B)$.

Burada herhangi bir $A \subseteq Y$ için A nın Y deki komplementi $\sim A$ ile gösterilmiştir. (L1) ve (U1) özellikleri gösterir ki $\underline{\varphi}$ ve $\overline{\varphi}$ dual yaklaşım operatörleridir. Aynı numaralı özellikler dual özellikler olarak düşünülebilir.

2.7. Genelleştirimiş Bulanık Kaba Kümeler

$X, Y \neq \emptyset$ olan kümeler ve R, X den Y ye bir bulanık bağıntı olmak üzere (X, Y, R) üçlüsüne bulanık yaklaşım uzayı denir. R, X üzerinde bulanık bağıntı olmak üzere (X, R) ye bulanık yaklaşım uzayı denir. Bu yaklaşım uzayı üzerindeki çeşitli özellikler Dubois ve Prade [5], Wu ve arkadaşları [9,10,11], Mi ve arkadaşları [32], Chakrabarty ve arkadaşları [49], Davvaz [50], Kazancı ve Davvaz [51], Kuroki ve

Wang [52], Mi ve Zhang [53], Pei [54], Pei ve Fan [55], Yeung ve arkadaşları [56] tarafından incelenmiştir.

(X, Y, R) bulanık yaklaşım uzayı ve $\mu: Y \to [0,1]$ olmak üzere μ nün bu yaklaşım uzayına göre üst ve alt bulanık kaba yaklaşımları, sırasıyla, $\overline{R}^{\mathcal{T}}(\mu)$ ve $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overline{R}^{\mathcal{T}}(\mu)(x) = \bigvee_{y \in Y} (R(x,y)\mathcal{T}\mu(x)), \forall x \in X$$

$$\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)(x) = \bigwedge_{y \in Y} (R(x,y)\mathcal{I}\mu(x)), \forall x \in X$$

$\overline{R}^{\mathcal{T}}, \underline{R}_{\mathcal{I}}: L^Y \to L^X$ operatörleri (X, Y, R) yaklaşım uzayının $\mathcal{T}$-üst ve $\mathcal{I}$-alt bulanık kaba yaklaşım operatörleridir. $\overline{R}^{\mathcal{T}}(\mu)$ ve $\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu)$, X in birer bulanık kümesidir. $\left(\underline{R}_{\mathcal{I}}(\mu), \overline{R}^{\mathcal{T}}(\mu)\right)$ ikilisine μ nün (X, Y, R) yaklaşım uzayına göre bulanık kaba kümesi denir. Bu tezde $\mathcal{T} = T_M$ olduğunda $\overline{R}^{\mathcal{T}}(\mu)$ yerine $\overline{R}(\mu)$ alınmıştır.

Örnek 2.7.1: $X = \{x, y, z\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ olsun.
$\mu: Y \to [0,1]$ bulanık kümesi: $\mu(a) = 1$, $\mu(b) = 0.5$, $\mu(c) = 0,6$ olarak tanımlansın.
$R: X \times Y \to [0,1]$ bulanık bağıntısı aşağıdaki tablo yardımıyla tanımlansın.

Tablo 2.1. Örnek 2.7.1'deki R bulanık bağıntısı

R	a	b	c
x	0.7	0.5	0.6
y	0.8	0.5	0.8
z	0.7	0.6	0.7

$\alpha\mathcal{T}\beta = max\{0, \alpha + \beta - 1\}$ olarak tanımlanan t-norm için $\overline{R}(\mu)$ üst yaklaşımı şöyledir:

$$\overline{R}(\mu)(x) = \bigvee_{t\in Y} R(x,t)\mathcal{T}\mu(t) = sup\{R(x,a)\mathcal{T}\mu(a), R(x,b)\mathcal{T}\mu(b), R(x,c)\mathcal{T}\mu(c)\}$$
$$= sup\{\mathcal{T}(0.7,1), \mathcal{T}(0.5,0.5), \mathcal{T}(0.6,0.6)\} = sup\{0.7, 0, 0.2\} = 0.7$$

$$\overline{R}(\mu)(y) = \bigvee_{t\in Y} R(y,t)\mathcal{T}\mu(t) = sup\{R(x,a)\mathcal{T}\mu(a), R(x,b)\mathcal{T}\mu(b), R(x,c)\mathcal{T}\mu(c)\}$$
$$= sup\{\mathcal{T}(0.8,1), \mathcal{T}(0.5,0.5), \mathcal{T}(0.8,0.6)\} = sup\{0.8, 0, 0.4\} = 0.8$$

$$\overline{R}(\mu)(z) = \bigvee_{t\in Y} R(z,t)\mathcal{T}\mu(t) = sup\{R(x,a)\mathcal{T}\mu(a), R(x,b)\mathcal{T}\mu(b), R(x,c)\mathcal{T}\mu(c)\}$$
$$= sup\{\mathcal{T}(0.7,1), \mathcal{T}(0.6,0.5), \mathcal{T}(0.7,0.6)\} = sup\{0,7, 0.1, 0.3\} = 0.7$$

$\alpha\mathcal{I}\beta = min\{1, 1-\alpha+\beta\}$ olarak tanımlanan implikasyon için $\underline{R}(\mu)$ alt yaklaşımı şöyledir:

$$\underline{R}(\mu)(x) = \bigwedge_{t\in Y} R(x,t)\mathcal{I}\mu(t) = inf\{R(x,a)\mathcal{I}\mu(a), R(x,b)\mathcal{I}\mu(b), R(x,c)\mathcal{I}\mu(c)\}$$
$$= inf\{\mathcal{I}(0.7,1), \mathcal{I}(0.5,0.5), \mathcal{I}(0.6,0.6)\} = inf\{1,1,1\} = 1$$

$$\underline{R}(\mu)(y) = \bigwedge_{t\in Y} R(y,t)\mathcal{I}\mu(t) = inf\{R(x,a)\mathcal{I}\mu(a), R(x,b)\mathcal{I}\mu(b), R(x,c)\mathcal{I}\mu(c)\}$$
$$= inf\{\mathcal{I}(0.8,1), \mathcal{I}(0.5,0.5), \mathcal{I}(0.8,0.6)\} = inf\{1,1, 0.8\} = 0.8$$

$$\underline{R}(\mu)(z) = \bigwedge_{t\in Y} R(z,t)\mathcal{I}\mu(t) = inf\{R(x,a)\mathcal{I}\mu(a), R(x,b)\mathcal{I}\mu(b), R(x,c)\mathcal{I}\mu(c)\}$$
$$= inf\{\mathcal{I}(0.7,1), \mathcal{I}(0.6,0.5), \mathcal{I}(0.7,0.6)\} = inf\{1, 0.9, 0.9\} = 0.9$$

Teorem 2.7.2 [11]: $\mu, \nu \in F(Y)$ ve $B \subseteq Y$olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

a. $\overline{R}(\bigvee_{i\in I}\mu_i) = \bigvee_{i\in I}\overline{R}(\mu_i)$,
b. $\mu \leq \nu$ ise $\overline{R}(\mu) \leq \overline{R}(\nu)$,
c. $\overline{R}(\bigwedge_{i\in I}\mu_i) \leq \bigwedge_{i\in I}\overline{R}(\mu_i)$.

Teorem 2.7.3 [11]: $\mu, \nu \in F(Y)$ ve $B \subseteq Y$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

a. $\underline{R}(\wedge_{i\in I}\mu_i) = \wedge_{i\in I}\underline{R}(\mu_i)$,
b. $\mu \leq \nu$ ise $\underline{R}(\mu) \leq \underline{R}(\nu)$,
c. $\vee_{i\in I}\underline{R}(\mu_i) \leq \underline{R}(\vee_{i\in I}\mu_i)$.

2.8. LA-Γ-Yarı Hiper Gruplar

Marty, 1934'te hiper grup teorisinin temel özelliklerini ortaya koymuştur. Daha sonraları ise Sen, Ameri ve Chowdhury; Hila ve Dine; Davvaz ve arkadaşları gibi bir çok araştırmacı hiper yapılar üzerine çeşitli katkılarda bulunmuştur [21, 22, 23, 24, 25, 26].

Tanım 2.8.1 [57]: $H \neq \emptyset$ ve $\wp^*(H)$, H ın boştan farklı tüm alt kümelerinin ailesi olsun. $\circ: H \times H \to \wp^*(H)$ dönüşümüne hiper işlem, $(H,\circ)$ ikilisine bir hiper grupoid denir. $\emptyset \neq A, B \subseteq H$ ve $\forall a, b, x \in H$ olsun.

a. $x \circ A = \{x\} \circ A = \bigcup_{a\in A} x \circ a$ ve $A \circ x = A \circ \{x\} = \bigcup_{a\in A} a \circ x$,
b. $A \circ B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a \circ b$.

Tanım 2.8.2 [57]: $(H,\circ)$ hiper grupoid olsun. H, " $\circ$ " üzerinde birleşme özelliğine sahipse yani $\forall x, y, z \in H$ için $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ ise $(H,\circ)$ ikilisine yarı hiper grup denir.

Tanım 2.8.3 [22]: H boştan farklı bir küme ve $F(H)$, H nin bütün bulanık alt kümeleri olsun. $\circ: H \times H \to F(H)$, (x, y) nin görüntüsü $x \circ y$, işlemine H nin bulanık hiper işlemi denir. $(H,\circ)$ ikilisine ise bulanık hiper grupoid denir. $\forall x, y, z \in H$ için $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ ise bulanık yarı hiper gruptur denir.

Tanım 2.8.4 [23]: $(H,\circ)$ hiper grupoidine LA-yarı hiper grup denir $:\Leftrightarrow$ Her $x, y, z \in H$ için $(x \circ y) \circ z = (z \circ y) \circ x$ dir.

Örnek 2.8.5: $H = \{a, b, c\}$ ve $\circ: H \times H \to F(H)$ hiper işlemi şu şekilde tanımlansın:

Tablo 2.2. Örnek 2.8.5'deki $\circ$ hiper işlemi

$\circ$	a	b	c
a	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$
b	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
c	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$

Bu takdirde H bir LA-yarı hiper gruptur. $S = \{a, b, c\}$ ve $\cdot: S \times S \to F(S)$ hiper işlemi şu şekilde tanımlansın:

Tablo 2.3. Örnek 2.8.5'deki $\cdot$ hiper işlemi

$\cdot$	a	b	c
a	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$
b	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$
c	$\{c\}$	$\{c\}$	$\{c\}$

Böylece S bir LA-yarı hiper gruptur.

Tanım 2.8.6 [26]: H ve Γ boştan farklı iki küme olsun. her $x, y \in S$ için $x\gamma y \subseteq S$ yani her $\gamma \in \Gamma$, S nin hiper işlemi ve her $x, y, z \in S$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ için $x\alpha(y\beta z) = (x\alpha y)\beta z$ ise S ye Γ- yarı hiper grup denir.

Tanım 2.8.7 [58]: S ve Γ boştan farklı iki küme olsun. (a, γ, b) yi $a\gamma b$ ile eşleyen $S \times \Gamma \times S \to \wp^*(S)$ dönüşümüyle her $a, b, c \in S$ ve $\gamma, \alpha \in \Gamma$ için $(a\gamma b)\alpha c = (c\gamma b)\alpha a$ denkliğini sağlayan S kümesine LA-Γ-yarı hiper grup denir.

Tanım 2.8.8 [58]: A kümesi S nin boştan farklı alt kümesi olsun. Eğer her $a, b \in A$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $a\gamma b \subseteq A$ ise A ya S nin LA-Γ-alt yarı hiper grubu denir. A ve B S nin boştan farklı alt kümeleri için $A\Gamma B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma}\{a\gamma b \mid a \in A \; ve \; b \in B\} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A\gamma B$, $x\gamma A = \{x\}\gamma A$ ve $A\gamma x = A\gamma\{x\}$ dir.

Örnek 2.8.9: S kümesi LA-yarı hiper grup ve Γ boştan farklı küme olsun. Her $a, b, c \in S$ ve $\gamma, \alpha \in \Gamma$ için (a, γ, b) yi $a\gamma b = a \circ b$ ile eşleyen $S \times \Gamma \times S \to \wp^*(S)$

dönüşümü tanımlansın. Bu takdirde $(a\gamma b)\alpha c = (a \circ b)\alpha c = (a \circ b) \circ c = (c \circ b) \circ a = (c \circ b)\alpha a = (c\gamma b)\alpha a$ olduğundan S kümesi LA-Γ-yarı hiper gruptur. Böylece Örnek 2.8.5 teki S ve H kümeleri LA-Γ-yarı hiper gruptur.

Örnek 2.8.10 [58]: $P = \{1,2,3\}$ ve $\Gamma = \{\alpha, \beta\}$ bu küme üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan ikili hiper işlemler olsun.

Tablo 2.4. Örnek 2.8.10'daki α hiper işlemi [58]

α	1	2	3
1	{1,3}	{1,2}	{1,3}
2	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
3	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}

Tablo 2.5. Örnek 2.8.10'daki β hiper işlemi [58]

α	1	2	3
1	{1,3}	{1,2}	{1,3}
2	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
3	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}

Böylece $\{1,2,3\} = (1\alpha 1)\beta 3 \neq 1\alpha(1\beta 3) = \{1,3\}$ olduğundan P kümesi Γ-yarı hiper grup değildir. Ancak P kümesi LA-Γ-yarı hiper gruptur.

BÖLÜM 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde öncelikle bağıntısal ve bulanık bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfileri ile küme değerli ve bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfilerinin tanımları verilmiş ve bunlarla ilgili bazı teoremler ispat edilerek bu kavramlar arasındaki ilişkiler gözlemlenmiştir. Daha sonra ise bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi yardımıyla LA-Γ-yarıgruplar üzerinde oluşturulan genelleştirilmiş bulanık kaba yaklaşım uzaylarının çeşitli özellikleri incelenmiştir.

3.1. Bağıntısal ve Bulanık Bağıntısal LA-Γ-Yarıgrup Homomorfileri

Aşağıda Ignjatović ve arkadaşlarının [59]'daki makalesinde ilk kez verilmiş ve Akın'ın [36, 60]'deki yüksek lisans ve doktora tezleri ile [13,14]'teki makalelerinde bazı diğer cebirsel yapılar için çalışılmış olan bağıntısal ve bulanık bağıntısal homomorfi kavramları LA-Γ-yarıgruplar için tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1:

a. $\varphi \subseteq X \times Y$ bağıntısına bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X, a, b \in Y$ ve $\gamma, \alpha \in \Gamma$ için $(x, a), (y, b) \in \varphi$ ise $(x\gamma y, a\alpha b) \in \varphi$ dir.

b. $\mathcal{T}$ bir t-norm olmak üzere $R: X \times Y \to [0,1]$ bulanık bağıntısına $\mathcal{T}$-bulanık bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ ve $\gamma, \alpha \in \Gamma$ için $R(x, a)\mathcal{T}R(y, b) \leq R(x\gamma y, a\alpha b)$ dir. $\mathcal{T} = T_M$ için R $\mathcal{T}$-bulanık bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisi, bulanık bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olarak isimlendirilir.

3.2. Küme Değerli ve Bulanık Küme Değerli LA-Γ-Yarıgrup Homomorfileri

Bu bölümde daha önceden gruplar için, Davvaz'ın [8] makalesinde verilmiş olan küme değerli homomorfi ile Akın'ın [12] makalesinde verilmiş olan bulanık küme değerli homomorfi kavramları LA-Γ-yarıgruplar için tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Tanım 3.2.1:

a. $T: X \to \wp(Y)$ fonksiyonuna küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $x, y \in X$ ve $\beta, \gamma \in \Gamma$ için $T(x)\beta T(y) \subseteq T(x\gamma a)$ dir.

b. $T: X \to F(Y)$ fonksiyonuna $\mathcal{T}$-bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $x, a \in X$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $T(x) \cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} T(y) \leq T(x\gamma a)$ dir. Burada $\mathcal{T} = T_M$ ise $T: X \to F(Y)$ fonksiyonu, bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olarak adlandırılır.

Bu tezde X den Y ye tüm bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfilerinin kümesi $\mathrm{Hom}(X, F(Y))$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.2: (Bulanık) küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfi ile (bulanık) bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfi arasında şu bağıntılar vardır:

a. $T: X \to \wp(Y)$ fonksiyonu küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir $\Leftrightarrow$ $\varphi \in X \times Y$ bağıntısı bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir.

b. $T: X \to F(Y)$ fonksiyonu $\mathcal{T}$-bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir $\Leftrightarrow$ $R: X \times Y \to [0,1]$ bulanık bağıntısı $\mathcal{T}$-bulanık bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir.

İspat:

a. $T: X \to \wp(Y)$ fonksiyonunun küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olduğunu kabul edelim. Her $x, y \in X$ ve $a, b \in Y$ için $(x, a), (y, b) \in \varphi$ olsun. Bu takdirde $a \in T(x)$ ve $b \in T(y)$ dir. Böylece $a\alpha b \in T(x)\alpha T(y) \subseteq T(x\gamma y)$ ve dolayısıyla her $\alpha, \gamma \in \Gamma$ için $(x\gamma y, a\alpha b) \in \varphi$ dir. Bu yüzden φ bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir. Tersine, $\varphi \in X \times Y$ bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve her $x, y \in X$ için $z \in T_\varphi(x)\alpha T_\varphi(y)$ olsun. Bu takdirde $z = a\alpha b$ olacak şekilde bir $a \in T_\varphi(x)$ ve $b \in T_\varphi(y)$ vardır. Dolayısıyla $(x, a), (y, b) \in \varphi$ ve $(x\gamma y, z) \in \varphi$ dir. Böylece her $x, y \in X$ için

$z \in T_{\varphi}(x\gamma y)$ olduğundan $T_{\varphi}(x)\alpha T_{\varphi}(y) \subseteq T_{\varphi}(x\gamma y)$ dir. Bu nedenle $T: X \to \wp(Y)$ fonksiyonu küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfidir.

b. $T: X \to F(Y)$ fonksiyonunun $\mathcal{T}$-bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olduğunu kabul edelim. $(x,a),(y,b) \in X \times Y$ olsun. Bu takdirde $R_T(x,a)\mathcal{T}R(y,b) = T(x)(a)\mathcal{T}T(y)(b) \leq \left(T(x)\cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} T(y)\right)(a\alpha b) \leq T(x\gamma y)(a\alpha b) = R_T(x\gamma y, a\alpha b)$ dir. Dolayısıyla $R: X \times Y \to [0,1]$ bir $\mathcal{T}$-bulanık bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir. Tersine $R: X \times Y \to [0,1]$ bir $\mathcal{T}$-bulanık bağıntısal LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $x,y \in X$ olsun. $\left(T_R(x)\cdot_{\mathcal{T}_\Gamma} T_R(y)\right)(z) = \bigvee_{z=a\alpha b} T_R(x)(a)\mathcal{T}T_R(y)(b) =$
$\bigvee_{z=a\alpha b} R(x,a)\mathcal{T}R(y,b) \leq \bigvee_{z=a\alpha b} R(x\gamma y, a\alpha b) = R(x\gamma y, z) = T_R(x\gamma y)(z)$ dir. Bu takdirde $T_R: X \to F(Y)$ fonksiyonu $\mathcal{T}$-bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir.

Örnek 3.2.3: $f: X \to Y$ LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olsun. $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ olmak üzere $x \in X$ için $T(x): X \to [0,1]$, her $y \in Y$ için

$$T(x)(y) = \begin{cases} \alpha, \text{eğer } f(x) \neq y \text{ ise} \\ \beta, \text{eğer } f(x) = y \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $T: X \to F(Y)$ fonksiyonu bir bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir.

Tanım 3.2.4: $T \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ olsun. Bu takdirde:

a. T ye kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için $T(x)(y) = 1$ olacak şekilde $y \in Y$ mecuttur.

b. T ye tam bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $a,b \in X$, $x,y \in Y$ ve $\gamma, \alpha \in \Gamma$ için $T(a)(x) \wedge T(b)(y) = T(a\gamma b)(x\alpha y)$ dir.

Lemma 3.2.5: $T \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bu takdirde her $x,y \in X$ için $T(x)_\alpha \Gamma T(y)_\alpha \subseteq (T(x)\cdot_\Gamma T(y))_\alpha$ dir.

İspat: $x,y \in X$ ve $s \in T(x)_\alpha \Gamma T(y)_\alpha$ olsun. Öyleyse herhangi bir $\gamma \in \Gamma$ için $s = s_1\gamma s_2$ olacak şekilde $s_1 \in T(x)_\alpha$ ve $s_2 \in T(y)_\alpha$vardır. Dolayısıyla $T(x)(s_1) \geq \alpha$ ve

$T(y)(s_2) \geq \alpha$ dır. Böylece $T(x)(s_1) \wedge T(y)(s_2) \geq \alpha \wedge \alpha$ olduğundan $\bigvee_{s=s_1\gamma s_2}\big(T(x)(s_1) \wedge T(y)(s_2)\big) \geq \alpha$ dır. Böylece $(T(x) \cdot_\Gamma T(y))(s) \geq \alpha$ ve $s \in (T(x) \cdot_\Gamma T(y))_\alpha$ dır. Dolayısıyla $T(x)_\alpha \Gamma T(y)_\alpha \subseteq (T(x) \cdot_\Gamma T(y))_\alpha$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.6: $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $K: X \to \mathcal{P}(Y)$ fonksiyonu her $x \in K$ için $K(x) = T(x)_\alpha$ olarak tanımlansın. Bu takdirde; $T \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ dir $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in [0,1]$ için K bir küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir.

İspat: $T \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ ve $\alpha \in [0,1]$ keyfi olsun. Lemma 3.2.5 ile her $x, y \in X$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $K(x)\Gamma K(y) = T(x)_\alpha \Gamma T(y)_\alpha \subseteq \big(T(x) \cdot_\Gamma T(y)\big)_\alpha \subseteq T(x\gamma y)_\alpha = K(x\gamma y)$ dir. Böylece $K(x)\Gamma K(y) \subseteq K(x\gamma y)$ elde edildiğinden K bir küme değerli homomorfidir. Tersine olarak, her $\alpha \in [0,1]$ için K küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $x, y \in X$ olsun. Eğer herhangi bir $a \in Y$ için $\big(T(x) \cdot_\Gamma T(y)\big)(a) = 0$ ise $\gamma \in \Gamma$ için $\big(T(x) \cdot_\Gamma T(y)\big)(a) \leq T(x\gamma y)(a)$ dır. Şimdi $(T(x) \cdot_\Gamma T(y))(a) \neq 0$ olsun ve $\alpha := T(x)(c) \wedge T(y)(d)$ alalım. Bu takdirde $c \in T(x)_\alpha, d \in T(y)_\alpha$ dır. Böylece her $\beta \in \Gamma$ için $c\beta d \in T(x)_\alpha \beta T(y)_\alpha = K(x)\beta K(y)$ dir. K küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olduğundan her $\gamma \in \Gamma$ için $c\beta d \in K(x\gamma y)$ elde edilir. Böylece $c\beta d \in T(x\gamma y)_\alpha$ olduğundan $T(x\gamma y)(c\beta d) \geq \alpha$ dır.

$$\big(T(x) \cdot_\Gamma T(y)\big)(a) = \bigvee_{a=c\beta d} T(x)(c) \wedge T(y)(d) \leq \bigvee_{a=c\beta d} T(x\gamma y)(c\beta d) = T(x\gamma y)(a)$$

Böylece $\big(T(x) \cdot_\Gamma T(y)\big)(a) \leq T(x\gamma y)(a)$dır. Sonuç olarak her $\alpha \in [0,1]$ için K bir küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olduğunda her $x, y \in X$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $T(x) \cdot_\Gamma T(y) \leq T(x\gamma y)$ olduğu elde edilir. Böylece $T \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ dir.

Teorem 3.2.7: $T_1: X \to F(Y)$ ve $T_2: Y \to F(Z)$ dönüşümler olsun. Eğer $T_1 \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ ve $T_2 \in \mathrm{Hom}(Y, F(Z))$ ise $T_1 * T_2 \in \mathrm{Hom}(X, F(Z))$ dir.

İspat: $x, y \in X$ ve $z \in Z$ olsun.

$$\big((T_1 * T_2)(x) \cdot_\Gamma (T_1 * T_2)(y)\big)(z) = \bigvee_{z=k\delta l} \big((T_1 * T_2)(x)(k) \wedge (T_1 * T_2)(y)(t)\big)$$

$$= \bigvee_{z=k\delta l} \left(\left(\bigvee_{y_1 \in Y} T_1(x)(y_1) \wedge T_2(y_1)(k) \right) \right.$$

$$\left. \wedge \left(\bigvee_{y_2 \in Y} T_1(y)(y_2) \wedge T_2(y_2)(t) \right) \right)$$

$$= \bigvee_{\substack{z=k\delta l \\ y_1, y_2 \in Y}} \big(T_1(x)(y_1) \wedge T_2(y_1)(k) \wedge T_1(y)(y_2) \wedge T_2(y_2)(t)\big)$$

$$\leq \bigvee_{y_1, y_2 \in Y} \Big(\big(T_1(x) \cdot_\Gamma T_1(y)\big)(y_1 \delta y_2) \wedge \big(T_2(y_1) \cdot_\Gamma T_2(y_2)\big)(z)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{y_1, y_2 \in Y} \big(T_1(x\gamma y)(y_1 \delta y_2) \wedge T_2(y_1 \delta y_2)(z)\big) = (T_1 * T_2)(x\gamma y)(z).$$

Böylece her $\gamma \in \Gamma$ için $\big((T_1 * T_2)(x) \cdot_\Gamma (T_1 * T_2)(y)\big)(z) \leq (T_1 * T_2)(x\gamma y)(z)$ olduğundan $T_1 * T_2$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisidir.

Önerme 3.2.8: $F(Y) \times \Gamma \times F(Y) \longrightarrow F(Y)$ fonksiyonu $\mu . \gamma . \nu = \mu ._\Gamma \nu$ şeklinde tanımlansın. Böylece $F(Y)$ bir LA-Γ-yarıgruptur.

İspat: $\mu, \nu, \eta \in F(Y)$, $x \in Y$ ve $\gamma, \beta \in \Gamma$ olsun.

$$\big((\nu\beta\eta)\gamma\mu\big)(x) = \bigvee_{x=k\gamma l} (\nu\beta\eta)(k) \wedge \mu(l) = \bigvee_{x=k\gamma l} \left(\left(\bigvee_{k=m\beta n} \nu(m) \wedge \eta(n) \right) \wedge \mu(l) \right)$$

$$= \bigvee_{x=(m\beta n)\gamma l} \big(\nu(m) \wedge \eta(n) \wedge \mu(l)\big) = \bigvee_{x=(l\beta n)\gamma m} \big(\mu(l) \wedge \eta(n) \wedge \nu(m)\big)$$

$$= \bigvee_{x=k\gamma m} \left(\left(\bigvee_{k=l\beta n} \mu(l) \wedge \eta(n) \right) \wedge \nu(m) \right) = \bigvee_{x=k\gamma m} (\mu\beta\eta)(k) \wedge \nu(m)$$

$$= \big((\mu\beta\eta)\gamma\nu\big)(x).$$

Dolayısıyla $F(Y)$ bir LA-Γ-yarıgruptur.

3.3. Bulanık Küme Değerli Homomorfiler ile LA-Γ-Yarıgruplar Üzerine İnşa Edilmiş Genelleştirilmiş Bulanık Kaba Kümeler

Bu bölümde bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi yardımıyla oluşturulan genelleştirilmiş bulanık kaba yaklaşım uzayları incelenmiştir.

Teorem 3.3.1. $T \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ olsun. $\overline{T} \in \mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$ dir.

İspat. $v, \mu \in F(Y)$ ve $\beta \in \Gamma$ olsun. $x \in X$ alalım.

$$\left(\overline{T}(v) \cdot_\Gamma \overline{T}(\mu)\right)(x) = \bigvee_{x=k\gamma l} \overline{T}(v)(k) \wedge \overline{T}(\mu)(l)$$

$$= \bigvee_{x=k\gamma l} \left(\bigvee_{s \in Y} (T(k)(s) \wedge v(s)) \wedge \bigvee_{t \in Y} (T(l)(t) \wedge \mu(t)) \right)$$

$$= \bigvee_{x=k\gamma l} \bigvee_{s,t \in Y} \left((T(k)(s) \wedge T(l)(t)) \wedge (v(s) \wedge \mu(t)) \right)$$

$$= \bigvee_{x=k\gamma l} \left(\bigvee_{s,t \in Y} (T(k)(s) \wedge T(l)(t)) \wedge \bigvee_{s,t \in Y} (v(s) \wedge \mu(t)) \right)$$

$$\leq \bigvee_{x=k\gamma l} \bigvee_{s,t \in Y} \left((T(k)\beta T(l))(s\beta t) \wedge (v\beta\mu)(s\beta t) \right)$$

$$\leq \bigvee_{x=k\gamma l} \bigvee_{s,t \in Y} \left((T(k) \cdot_\Gamma T(l))(s\beta t) \wedge (v\beta\mu)(s\beta t) \right)$$

$$\leq \bigvee_{x=k\gamma l} \bigvee_{p \in Y} \left((T(k) \cdot_\Gamma T(l))(p) \wedge (v\beta\mu)(p) \right)$$

$$\leq \bigvee_{x=k\gamma l} \bigvee_{p \in Y} (T(k\gamma l)(p) \wedge (v\beta\mu)(p)) = \bigvee_{p \in Y} (T(x)(p) \wedge (v\beta\mu)(p))$$

$$= \overline{T}(v\beta\mu)(x).$$

Sonuç 3.3.2: μ ve v, Y nin bulanık LA-Γ-altyarıgrupları olsun. Bu takdirde; $T \in \mathrm{Hom}(X, F(Y))$ ise $\overline{T}(\mu) \cdot_\Gamma \overline{T}(v) \leq \overline{T}(\mu \cdot_\Gamma v)$ dür.

İspat. $\gamma \in \Gamma$ olsun. Böylece $\mu\gamma\nu \leq \mu \cdot_\Gamma \nu$ olduğundan Teorem 2.7.2 (b) ile $\overline{T}(\mu\gamma\nu) \leq \overline{T}(\mu \cdot_\Gamma \nu)$ dür. Dolayısıyla Teorem 3.3.1 den $\overline{T}(\mu) \cdot_\Gamma \overline{T}(\nu) \leq \overline{T}(\mu \cdot_\Gamma \nu)$ olduğu açıktır.

Tanım 3.3.3: $T: X \to F(Y)$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olsun. T nin görüntü kümesi ImT ile gösterilir ve her $y \in Y$ için $ImT(y) = \bigvee_{x \in X} T(x)(y)$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 3.3.4: $T: X \to F(Y)$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olsun. ImT, Y nin bulanık LA-Γ-altyarıgrubudur.

İspat. $y, b \in Y$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun.

$$ImT(y\gamma b) = \bigvee_{t \in X} T(t)(y\gamma b) \geq \bigvee_{t = x\beta a} \big(T(x) \cdot_\Gamma T(a)\big)(y\gamma b)$$

$$\geq \bigvee_{x, a \in X} \big(T(x)(y) \wedge T(a)(b)\big) = \left(\bigvee_{x \in X} T(x)(y)\right) \wedge \left(\bigvee_{a \in X} T(a)(b)\right)$$

$$= ImT(y) \wedge ImT(b).$$

Dolayısıyla her $y, b \in Y$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $ImT(y) \wedge ImT(b) \leq ImT(y\gamma b)$ elde edilir.

Teorem 3.3.5: $T: X \to F(Y)$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-altyarıgrubu ise $\overline{T}(\mu)$, Xin bulanık LA-Γ-altyarıgrubudur.

İspat. $x, a \in X$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun.

$$\overline{T}(\mu)(x) \wedge \overline{T}(\mu)(a) = \bigvee_{y \in Y} \big(T(x)(y) \wedge \mu(y)\big) \wedge \bigvee_{b \in Y} \big(T(a)(b) \wedge \mu(b)\big)$$

$$= \bigvee_{y, b \in Y} \big(T(x)(y) \wedge T(a)(b)\big) \wedge \bigvee_{y, b \in Y} \big(\mu(y) \wedge \mu(b)\big)$$

$$\leq \bigvee_{y, b \in Y} \Big(\big(T(x) \cdot_\Gamma T(a)\big)(y\alpha b) \wedge \mu(y\alpha b)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{p \in Y} \Big(\big(T(x) \cdot_\Gamma T(a)\big)(p) \wedge \mu(p)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{p \in Y} \left((T(x\gamma a))(p) \wedge \mu(p) \right) = \overline{T}(\mu)(x\gamma a).$$

Teorem 3.3.6: $T: X \to F(Y)$ kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-sağ (sol veya iki yanlı) ideali ise $\overline{T}(\mu)$, Xin bulanık LA-Γ-sağ (sol veya iki yanlı) idealidir.

İspat. $x, a \in X$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun.

$$\overline{T}(\mu)(x) = \overline{T}(\mu)(x) \wedge 1 = \overline{T}(v)(x) \wedge T(a)(y), \exists y \in Y$$
$$= \left(\bigvee_{b \in Y} T(x)(b) \wedge \mu(b) \right) \wedge T(a)(y)$$
$$\leq \left(\bigvee_{b \in Y} T(x)(b) \wedge \mu(b\alpha y) \right) \wedge T(a)(y)$$
$$= \bigvee_{b,y \in Y} \left(T(x)(b) \wedge T(a)(y) \wedge \mu(b\alpha y) \right)$$
$$\leq \bigvee_{b,y \in Y} \left((T(x) \cdot_{\Gamma} T(a))(b\alpha y) \wedge \mu(b\alpha y) \right) \leq \bigvee_{p \in Y} \left(T(x\gamma a)(p) \wedge \mu(p) \right)$$
$$= \overline{T}(\mu)(x\gamma a).$$

Benzer şekilde μ, Y nin bulanık LA-Γ-sol(veya iki yanlı) ideal ise $\overline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-sol(veya iki yanlı) idealidir.

Teorem 3.3.7: $T: X \to F(Y)$ kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olsun. μ, Y nin bulanık genelleştirilmiş LA-Γ-bi-ideali ise $\overline{T}(\mu)$, X in bulanık genelleştirilmiş LA-Γ-bi-idealidir.

İspat. $a, b, c \in X$ ve $\alpha, \gamma \in \Gamma$ olsun.

$$\overline{T}(\mu)(a) \wedge \overline{T}(\mu)(c) = \overline{T}(\mu)(a) \wedge \overline{T}(\mu)(c) \wedge 1$$
$$= \overline{T}(\mu)(a) \wedge \overline{T}(\mu)(c) \wedge T(b)(p), \exists p \in P$$
$$= \left(\bigvee_{q \in Y} (T(a)(q) \wedge \mu(q)) \right) \wedge \left(\bigvee_{r \in Y} (T(c)(r) \wedge \mu(r)) \right) \wedge T(b)(p)$$

$$= \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(T(a)(q) \wedge T(b)(p) \wedge T(c)(r) \wedge \mu(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(\left(T(a) \cdot_\Gamma T(b)\right)(q\gamma p) \wedge T(c)(r) \wedge \mu(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(\left(T(a\gamma b)\right)(q\gamma p) \wedge T(c)(r) \wedge \mu(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(\left(T(a\gamma b) \cdot_\Gamma T(c)\right)\left((q\gamma p)\alpha r\right) \wedge \mu(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(T\left((a\gamma b)\alpha c\right)\left((q\gamma p)\alpha r\right) \wedge \mu(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(T\left((a\gamma b)\alpha c\right)\left((q\gamma p)\alpha r\right) \wedge \mu\left((q\gamma p)\alpha r\right)\right)$$

$$\leq \bigvee_{s\in Y} \left(T\left((a\gamma b)\alpha c\right)(s) \wedge \mu(s)\right) = \overline{T}(\mu)\left((a\gamma b)\alpha c\right).$$

Böylelikle $\overline{T}(\mu)$, X in bulanık genelleştirilmiş LA-Γ-bi-idealdir. Ayrıca Teorem 3.3.5 ile $\overline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-bi-ideal olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.3.8: $T: X \to F(Y)$ kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-interior ideali ise $\overline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-interior idealidir.

İspat. $a, b, c \in X$ ve $\alpha, \gamma \in \Gamma$ olsun.

$$\overline{T}(\mu)(c) = 1 \wedge \overline{T}(\mu)(c) \wedge 1 = T(a)(p) \wedge \overline{T}(\mu)(c) \wedge T(b)(q), \exists p, q \in Y$$

$$= T(a)(p) \wedge \left(\bigvee_{r\in Y} \left(T(c)(r) \wedge \mu(r)\right)\right) \wedge T(b)(q)$$

$$= \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(T(a)(p) \wedge T(c)(r) \wedge T(b)(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(\left(T(a) \cdot_\Gamma T(c)\right)(p\gamma r) \wedge T(b)(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \left(T(a\gamma c)(p\gamma r) \wedge T(b)(q) \wedge \mu(r)\right)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \Big(\big(T(a\gamma c)\cdot_{\Gamma} T(b)\big)\big((p\gamma r)\alpha q\big) \wedge \mu(r)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \Big(T\big((a\gamma c)\alpha b\big)\big((p\gamma r)\alpha q\big) \wedge \mu(r)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{p,q,r\in Y} \Big(T\big((a\gamma c)\alpha b\big)\big((p\gamma r)\alpha q\big) \wedge \mu\big((p\gamma r)\alpha q\big)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{s\in Y} \Big(T\big((a\gamma c)\alpha b\big)(s) \wedge \mu(s)\Big) = \overline{T}(\mu)\big((a\gamma c)\alpha b\big).$$

Teorem 3.3.9: $T: X \to F(Y)$ tam bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathfrak{I}$, T_M t-normuyla üretilen bir $\mathfrak{R}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-altyarıgrubu ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-altyarıgrubudur.

İspat. $a, b \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(a) \wedge \underline{T}(\mu)(b) = \bigwedge_{p\in Y} \big(T(a)(p)\mathfrak{I}\mu(p)\big) \wedge \bigwedge_{q\in Y} \big(T(b)(q)\mathfrak{I}\mu(q)\big)$$

$$= \bigwedge_{p\in Y} \left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge x_1 \leq \mu(p)} x_1 \right) \wedge \bigwedge_{q\in Y} \left(\bigvee_{T(b)(q)\wedge x_2 \leq \mu(q)} x_2 \right)$$

$$\leq \bigwedge_{p,q\in Y} \left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge x_1 \leq \mu(p)} x_1 \wedge \bigvee_{T(b)(q)\wedge x_2 \leq \mu(q)} x_2 \right)$$

$$= \bigwedge_{p,q\in Y} \left(\bigvee_{\substack{T(a)(p)\wedge x_1 \leq \mu(p) \\ T(b)(q)\wedge x_2 \leq \mu(q)}} x_1 \wedge x_2 \right)$$

$$\leq \bigwedge_{p\alpha q\in Y} \left(\bigvee_{T(a\gamma b)(p\alpha q)\wedge x_1 \wedge x_2 \leq \mu(p\alpha q)} x_1 \wedge x_2 \right)$$

$$\leq \bigwedge_{r\in Y} \left(\bigvee_{T(a\gamma b)(r)\wedge x \leq \mu(r)} x \right) = \bigwedge_{r\in Y} \big(T(a\gamma b)(r)\mathfrak{I}\mu(r)\big) = \underline{T}(\mu)(a\gamma b).$$

Teorem 3.3.10: $T: X \to F(Y)$ tam ve kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathfrak{I}$, T_M t-normuyla üretilen bir $\mathfrak{R}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-sağ (sol veya iki yanlı) ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-sol (sağ veya iki yanlı) idealidir.

İspat. $a, b \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(a) = \bigwedge_{p \in Y} T(a)(p)\mathfrak{I}\mu(p) = \bigwedge_{p \in Y}\left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge x \leq \mu(p)} x\right) = \bigwedge_{p \in Y}\left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge 1 \wedge x \leq \mu(p)} x\right)$$

$$= \bigwedge_{p \in Y}\left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge T(b)(q)\wedge x \leq \mu(p)} x\right), \exists q \in Y$$

$$= \bigwedge_{p,q \in Y}\left(\bigvee_{T(a\gamma b)(p\alpha q)\wedge x \leq \mu(p)} x\right) \leq \bigwedge_{p\alpha q \in Y}\left(\bigvee_{T(a\gamma b)(p\alpha q)\wedge x \leq \mu(p\alpha q)} x\right)$$

$$= \bigwedge_{r \in Y}\left(\bigvee_{T(a\gamma b)(r)\wedge x \leq \mu(r)} x\right) = \bigwedge_{r \in Y} T(a\gamma b)(r)\mathfrak{I}\mu(r) = \underline{T}(\mu)(a\gamma b).$$

Benzer şekilde μ, Y nin bulanık LA-Γ-sol(veya iki yanlı) ideal ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-sol(veya iki yanlı) idealidir.

Teorem 3.3.11: $T: X \to F(Y)$ tam ve kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathfrak{I}$, T_M t-normuyla üretilen bir $\mathfrak{R}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık genelleştirilmiş LA-Γ-bi-ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık genelleştirilmiş LA-Γ-bi-idealidir.

İspat. $a, b, c \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(a) \wedge \underline{T}(\mu)(c) = \bigwedge_{p \in Y}\left(T(a)(p)\mathfrak{I}\mu(p)\right) \wedge \bigwedge_{q \in Y}\left(T(c)(q)\mathfrak{I}\mu(q)\right)$$

$$= \bigwedge_{p \in Y}\left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge x_1 \leq \mu(p)} x_1\right) \wedge \bigwedge_{q \in Y}\left(\bigvee_{T(c)(q)\wedge x_2 \leq \mu(q)} x_2\right)$$

$$= \bigwedge_{p\in Y}\left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge 1\wedge x_1\le\mu(p)} x_1\right)\wedge\bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{T(c)(q)\wedge x_2\le\mu(q)} x_2\right)$$

$$= \bigwedge_{p\in Y}\left(\bigvee_{T(a)(p)\wedge T(b)(r)\wedge x_1\le\mu(p)} x_1\right)\wedge\bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{T(c)(q)\wedge x_2\le\mu(q)} x_2\right), \exists r\in Y$$

$$= \bigwedge_{p\in Y}\left(\bigvee_{T(a\gamma b)(p\beta r)\wedge x_1\le\mu(p)} x_1\right)\wedge\bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{T(c)(q)\wedge x_2\le\mu(q)} x_2\right)$$

$$= \bigwedge_{p,q\in Y}\left(\bigvee_{T(a\gamma b)(p\beta r)\wedge x_1\le\mu(p)} x_1\wedge\bigvee_{T(c)(q)\wedge x_2\le\mu(q)} x_2\right)$$

$$= \bigwedge_{p,q\in Y}\left(\bigvee_{\substack{T(a\gamma b)(p\beta r)\wedge x_1\le\mu(p)\\ T(c)(q)\wedge x_2\le\mu(q)}} (x_1\wedge x_2)\right)$$

$$\le \bigwedge_{p,q\in Y}\left(\bigvee_{T((a\gamma b)\alpha c)((p\beta r)\delta q)\wedge(x_1\wedge x_2)\le\mu(p)\wedge\mu(q)} (x_1\wedge x_2)\right)$$

$$\le \bigwedge_{p,q\in Y}\left(\bigvee_{T((a\gamma b)\alpha c)((p\beta r)\delta q)\wedge(x_1\wedge x_2)\le\mu(p)\wedge\mu((p\beta r)\delta q)} (x_1\wedge x_2)\right)$$

$$= \bigwedge_{s\in Y}\left(\bigvee_{T((a\gamma b)\alpha c)(s)\wedge(x_1\wedge x_2)\le\mu(p)\wedge\mu(s)} (x_1\wedge x_2)\right)$$

$$= \bigwedge_{s\in Y}\left(T((a\gamma b)\alpha c)(s)\mathcal{J}\mu(s)\right) = \underline{T}(\mu)((a\gamma b)\alpha c).$$

Böylelikle $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık genelleştirilmiş LA-Γ-bi-idealdir. Ayrıca Teorem 3.3.9 ile $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-bi-ideal olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.3.12: $T: X\to F(Y)$ tam ve kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathcal{J}$, T_M t-normuyla üretilen bir $\mathfrak{R}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-interior ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-interior idealidir.

İspat. $a, b, c \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(b) = \bigwedge_{q\in Y}\big(T(b)(q)\mathcal{I}\mu(q)\big) = \bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{T(b)(q)\wedge x\leq\mu(q)} x\right)$$

$$= \bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{1\wedge T(b)(q)\wedge 1\wedge x\leq\mu(q)} x\right)$$

$$= \bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{\left(T(a)(p)\wedge T(b)(q)\right)\wedge T(c)(r)\wedge x\leq\mu(q)} x\right), \exists p, r \in Y$$

$$= \bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{T(a\gamma b)(p\beta q)\wedge T(c)(r)\wedge x\leq\mu(q)} x\right)$$

$$= \bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{T\left((a\gamma b)\alpha c\right)\left((p\beta q)\delta r\right)\wedge x\leq\mu(q)} x\right)$$

$$\leq \bigwedge_{q\in Y}\left(\bigvee_{T\left((a\gamma b)\alpha c\right)\left((p\beta q)\delta r\right)\wedge x\leq\mu\left((p\beta q)\delta r\right)} x\right)$$

$$= \bigwedge_{s\in Y}\left(\bigvee_{T\left((a\gamma b)\alpha c\right)(s)\wedge x\leq\mu(s)} x\right) = \bigwedge_{s\in Y}\Big(T\big((a\gamma b)\alpha c\big)(s)\mathcal{I}\mu(s)\Big)$$

$$= \underline{T}(\mu)\big((a\gamma b)\alpha c\big).$$

Teorem 3.3.13: $T: X \to F(Y)$ tam ve kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathcal{I}$, S_M t-conormu ve $\mathcal{N}_S$ standart negatörüyle üretilen bir $\mathcal{S}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-iyi yanlı ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-altyarıgrubudur.

İspat. $a, b \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(a) \wedge \underline{T}(\mu)(b) = \bigwedge_{p\in Y}\big(T(a)(p)\mathcal{I}\mu(p)\big) \wedge \bigwedge_{q\in Y}\big(T(b)(q)\mathcal{I}\mu(q)\big)$$

$$= \bigwedge_{p\in Y}\Big(\big(1 - T(a)(p)\big) \vee \mu(p)\Big) \wedge \bigwedge_{q\in Y}\Big(\big(1 - T(b)(q)\big) \vee \mu(q)\Big)$$

$$= \bigwedge_{p,q\in Y} \Big(\big((1 - T(a)(p)) \vee \mu(p)\big) \wedge \big((1 - T(b)(q)) \vee \mu(q)\big)\Big)$$

$$\leq \bigwedge_{p,q\in Y} \Big(\big((1 - T(a)(p)) \wedge (1 - T(b)(q))\big) \vee \big(\mu(p) \vee \mu(q)\big)\Big)$$

$$\leq \bigwedge_{p,q\in Y} \Big(\big(1 - (T(a)(p) \wedge T(b)(q))\big) \vee \big(\mu(p) \vee \mu(q)\big)\Big)$$

$$= \bigwedge_{p,q\in Y} \Big(\big(1 - (T(a\gamma b)(p\alpha q))\big) \vee \big(\mu(p) \vee \mu(q)\big)\Big)$$

$$\leq \bigwedge_{p,q\in Y} \Big(\big(1 - (T(a\gamma b)(p\alpha q))\big) \vee \mu(p\alpha q)\Big)$$

$$= \bigwedge_{r\in Y} \Big(\big(1 - (T(a\gamma b)(r))\big) \vee \mu(r)\Big) = \bigwedge_{r\in Y} \big(T(a\gamma b)(r)\mathcal{I}\mu(r)\big)$$

$$= \underline{T}(\mu)(a\gamma b).$$

Teorem 3.3.14: $T: X \to F(Y)$ tam ve kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathcal{I}$, S_M t-conormu ve $\mathcal{N}_S$ standart negatörüyle üretilen bir $\mathcal{S}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-sağ (sol veya iki yanlı) ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-sol (sağ veya iki yanlı) idealidir.

İspat. $a, b \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(a) = \bigwedge_{p\in Y} \big(T(a)(p)\mathcal{I}\mu(p)\big) = \bigwedge_{p\in Y} \big((1 - T(a)(p)) \vee \mu(p)\big)$$

$$= \bigwedge_{p\in Y} \big((1 - (T(a)(p) \wedge 1)) \vee \mu(p)\big)$$

$$= \bigwedge_{p\in Y} \Big(\big(1 - (T(a)(p) \wedge T(b)(q))\big) \vee \mu(p)\Big), \exists q \in Y$$

$$= \bigwedge_{p\in Y} \Big(\big(1 - (T(a\gamma b)(p\alpha q))\big) \vee \mu(p)\Big)$$

$$\leq \bigwedge_{p\in Y} \Big(\big(1 - (T(a\gamma b)(p\alpha q))\big) \vee \mu(p\alpha q)\Big)$$

$$= \bigwedge_{r\in Y} \Big(\big(1 - (T(a\gamma b)(r))\big) \vee \mu(r)\Big)$$

$$= \bigwedge_{r \in Y} \left(T(a\gamma b)(r) \mathcal{I} \mu(r)\right) = \underline{T}(\mu)(a\gamma b).$$

Benzer şekilde μ, Y nin bulanık LA-Γ-sol(veya iki yanlı) ideal ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-sol(veya iki yanlı) idealidir.

Teorem 3.3.15: $T: X \to F(Y)$ tam ve kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathcal{I}$, S_M t-conormu ve $\mathcal{N}_S$ standart negatörüyle üretilen bir $\mathcal{S}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-iki yanlı ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık genelleştirilmiş LA-Γ-bi-idealidir.

İspat. $a, b, c \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(a) \wedge \underline{T}(\mu)(c) = \bigwedge_{p \in Y} \left(T(a)(p) \mathcal{I} \mu(p)\right) \wedge \bigwedge_{q \in Y} \left(T(c)(q) \mathcal{I} \mu(q)\right)$$

$$= \bigwedge_{p \in Y} \left(\left(1 - T(a)(p)\right) \vee \mu(p)\right) \wedge \bigwedge_{q \in Y} \left(\left(1 - T(c)(q)\right) \vee \mu(q)\right)$$

$$= \bigwedge_{p,q \in Y} \left(\left(\left(1 - T(a)(p)\right) \vee \mu(p)\right) \wedge \left(\left(1 - T(c)(q)\right) \vee \mu(q)\right)\right)$$

$$\leq \bigwedge_{p,q \in Y} \left(\left(1 - \left(T(a)(p) \wedge T(c)(q)\right)\right) \vee \left(\mu(p) \vee \mu(q)\right)\right)$$

$$= \bigwedge_{p,q \in Y} \left(\left(1 - \left(T(a)(p) \wedge 1 \wedge T(c)(q)\right)\right) \vee \left(\mu(p) \vee \mu(q)\right)\right)$$

$$= \bigwedge_{p,q \in Y} \left(\left(1 - \left(T(a)(p) \wedge T(b)(r) \wedge T(c)(q)\right)\right) \vee \left(\mu(p) \vee \mu(q)\right)\right), \exists r \in Y$$

$$= \bigwedge_{p,q \in Y} \left(\left(1 - \left(T\left((a\gamma b)\alpha c\right)\left((p\beta r)\delta q\right)\right)\right) \vee \left(\mu(p) \vee \mu(q)\right)\right)$$

$$\leq \bigwedge_{p,q \in Y} \left(\left(1 - \left(T\left((a\gamma b)\alpha c\right)\left((p\beta r)\delta q\right)\right)\right) \vee \left(\mu(p) \vee \mu(r) \vee \mu(q)\right)\right)$$

$$\leq \bigwedge_{p,q \in Y} \left(\left(1 - \left(T\left((a\gamma b)\alpha c\right)\left((p\beta r)\delta q\right)\right)\right) \vee \mu\left((p\beta r)\delta q\right)\right)$$

$$= \bigwedge_{s \in Y} \left(\left(1 - \left(T\left((a\gamma b)\alpha c\right)(s)\right)\right) \vee \mu(s)\right)$$

$$= \bigwedge_{s\in Y}\left(T\big((a\gamma b)\alpha c\big)(s)\mathcal{I}\mu(s)\right) = \underline{T}(\mu)\big((a\gamma b)\alpha c\big).$$

Dolayısıyla Teorem 3.3.13 ile μ, Y nin bulanık LA-Γ-iyi yanlı ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-bi-idealidir.

Teorem 3.3.16: $T: X \to F(Y)$ tam ve kuvvetli bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfisi ve $\mathcal{I}$, S_M t-conormu ve $\mathcal{N}_S$ standart negatörüyle üretilen bir $\mathcal{S}$-implikasyon olsun. μ, Y nin bulanık LA-Γ-interior ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-interior idealidir.

İspat. $a, b, c \in X$ olsun.

$$\underline{T}(\mu)(b) = \bigwedge_{q\in Y}\big(T(b)(q)\mathcal{I}\mu(q)\big) = \bigwedge_{q\in Y}\Big(\big(1 - T(b)(q)\big) \vee \mu(q)\Big)$$

$$= \bigwedge_{q\in Y}\Big(\big(1 - (1 \wedge T(b)(q) \wedge 1)\big) \vee \mu(q)\Big)$$

$$= \bigwedge_{q\in Y}\Big(\Big(1 - \big(T(a)(p) \wedge T(b)(q) \wedge T(c)(r)\big)\Big) \vee \mu(q)\Big), \exists p, r \in Y$$

$$= \bigwedge_{q\in Y}\Big(\Big(1 - T\big((a\gamma b)\alpha c\big)\big((p\beta q)\delta r\big)\Big) \vee \mu(q)\Big)$$

$$\leq \bigwedge_{q\in Y}\Big(\Big(1 - T\big((a\gamma b)\alpha c\big)\big((p\beta q)\delta r\big)\Big) \vee \mu\big((p\beta q)\delta r\big)\Big)$$

$$= \bigwedge_{s\in Y}\left(\left(1 - \Big(T\big((a\gamma b)\alpha c\big)(s)\Big)\right) \vee \mu(s)\right)$$

$$= \bigwedge_{s\in Y}\left(T\big((a\gamma b)\alpha c\big)(s)\mathcal{I}\mu(s)\right) = \underline{T}(\mu)\big((a\gamma b)\alpha c\big).$$

Böylece μ, Y nin bulanık LA-Γ-interior ideali ise $\underline{T}(\mu)$, X in bulanık LA-Γ-interior idealidir.

3.4. Bulanık Küme Değerli LA-Γ-Yarı Hiper Grup Homomorfilerinin Oluşturduğu Genelleştirilmiş Bulanık Kaba Yaklaşım Uzayları

Bu bölümde LA-Γ-yarı hiper grupların bulanık küme değerli homomorfisi kavramı tanıtılmıştır ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bölüm boyunca S, H ve P aksi belirtilmediği sürece LA-Γ-yarı hiper grup olarak kabul edilir.

Tanım 3.4.1: μ ve υ, $(H,.)$ LA-Γ-yarı hiper grubunun iki bulanık kümesi olsun. O halde $\mu \star \upsilon$ şu şekilde tanımlansın:

$$(\mu \star \upsilon)(x) = \begin{cases} \bigvee_{x \in p\gamma t} (\mu(p) \wedge \nu(t)), & \exists p,t \in H, \gamma \in \Gamma: x \in p\gamma t; \\ 0, & diğer. \end{cases}$$

Tanım 3.4.2: $R: S \to F(H)$ bir fonksiyon her $a, b \in S$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $R(a) \star R(b) \leq \bigvee_{u \in a\gamma b} R(u)$ ise R ye bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisi denir. S den H ye bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfilerinin kümesi $\mathrm{Hom_H}(S, F(H))$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.3: $T: S \to F(H)$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisi olsun. Bu takdirde her $x \in S$ için $R(x) = (\alpha, \beta)_{T(x)}$ olarak tanımlanan $R: S \to F(H)$ fonksiyonu bir bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisidir.

İspat:

$$\big(R(x) \star R(y)\big)(a) = \bigvee_{a \in p.t} R(x)(p) \wedge R(y)(t) = \bigvee_{a \in p.t} (\alpha, \beta)_{T(x)}(p) \wedge (\alpha, \beta)_{T(y)}(t)$$

$a \in p.t$ olacak şekilde $p \in T(x)$ ve $t \in T(y)$ vardır. Dolayısıyla $\big(R(x) \star R(y)\big)(a) = \beta$. Ve ayrıca $a \in p.t \subseteq T(x).T(y) \subseteq T(x.y)$. Böylece $a \in T(x.y)$ ve burada $a \in T(u)$ olacak şekilde $u \in x.y$ vardır. $\big(\bigvee_{u \in x.y} R(u)\big)(a) = \bigvee_{u \in x.y} R(u)(a) = \bigvee_{u \in x.y} (\alpha, \beta)_{T(u)}(a)$.

Teorem 3.4.4: $R: H \to F(S)$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisidir ancak ve ancak $T: S \to \mathcal{P}(H)$, her $x \in S, \varphi \in [0,1]$ için tanımlanan $T(x) = R(x)_\varphi$ küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisidir.

İspat: $v \in T(a).T(b)$ olsun. Böylece $v \in p.t$ olacak şekilde $p \in T(a)$ ve $t \in T(b)$ vardır. Dolayısıyla $p \in R(a)_\alpha$ ve $t \in R(b)_\alpha$ dır. Bundan dolayı $R(a)(p) \geq \alpha$ ve $R(b)(t) \geq \alpha$ dır. Bu yüzden $R(a)(p) \wedge R(b)(t) \geq \alpha$ dır. Bu nedenle $\big(R(x) \star R(y)\big)(v) \geq \alpha$. R bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfi olduğundan $\bigvee_{u \in a \circ b} R(u)(v) \geq \alpha$. Böylece $R(u)(v) \geq \alpha$ olacak şekilde $u \in a \circ b$ vardır. Bu yüzden $v \in R(u)_\alpha$. $T(u) \subseteq T(a\gamma b)$ olduğundan $v \in T(a \circ b)$. Böylece $T(a).T(b) \subseteq T(a \circ b)$ elde ederiz. Dolayısıyla $T: S \to \mathcal{P}(H)$ küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisidir.

Teorem 3.4.5: $R_1 \in \mathrm{Hom_H}(S, F(H))$ ve $R_2 \in \mathrm{Hom_H}(H, F(P))$ ise $R_1 \circ R_2 \in \mathrm{Hom_H}(S, F(P))$ dir.

İspat: $a, b \in S$ ve herhangi bir $k \in P$ olsun.

$$\big((R_1 \circ R_2)(a) \star (R_1 \circ R_2)(b)\big)(k) = \bigvee_{k=k_1k_2} \big((R_1 \circ R_2)(a)(k_1) \wedge (R_1 \circ R_2)(b)(k_2)\big)$$

$$= \bigvee_{k=k_1k_2} \left(\left(\bigvee_{h_1 \in H} R_1(a)(h_1) \wedge R_2(h_1)(k_1) \right) \right.$$

$$\left. \wedge \left(\bigvee_{h_2 \in H} R_1(b)(h_2) \wedge R_2(h_2)(k_2) \right) \right)$$

$$= \bigvee_{\substack{k=k_1k_2 \\ h_1, h_2 \in H}} \big(R_1(a)(h_1) \wedge R_2(h_1)(k_1) \wedge R_1(b)(h_2) \wedge R_2(h_2)(k_2)\big)$$

$$= \bigvee_{h_1, h_2 \in H} \left(R_1(a)(h_1) \wedge R_1(b)(h_2) \wedge \left(\bigvee_{k=k_1k_2} R_2(h_1)(k_1) \wedge R_2(h_2)(k_2) \right) \right)$$

$$= \bigvee_{h_1,h_2\in H} \left(R_1(a)(h_1) \wedge R_1(b)(h_2) \wedge \left(R_2(h_1) \star R_2(h_2)\right)(k)\right)$$

$$\leq \bigvee_{h_1,h_2\in H} \left(R_1(a)(h_1) \wedge R_1(b)(h_2) \wedge \left(\bigvee_{v\in h_1h_2} R_2(v)\right)(k)\right)$$

$$\leq \bigvee_{h_1,h_2\in H} \left(\left(\bigvee_{v\in h_1h_2} R_1(a)(h_1) \wedge R_1(b)(h_2)\right) \wedge \left(\bigvee_{v\in h_1h_2} R_2(v)\right)(k)\right)$$

$$= \bigvee_{h_1,h_2\in H} \left(\left(R_1(a) \star R_1(b)\right)(v) \wedge \left(\bigvee_{v\in h_1h_2} R_2(v)\right)(k)\right)$$

$$\leq \bigvee_{h_1,h_2\in H} \left(\left(\bigvee_{u\in ab} R_1(u)\right)(v) \wedge \left(\bigvee_{v\in h_1h_2} R_2(v)\right)(k)\right)$$

$$= \bigvee_{u\in ab} \left(\bigvee_{v\in H} R_1(u)(v) \wedge R_2(v)(k)\right) = \bigvee_{u\in ab} (R_1 \circ R_2)(u)(k).$$

Böylece $\left((R_1 \circ R_2)(a) \star (R_1 \circ R_2)(b)\right)(k) \leq (R_1 \circ R_2)(u)(k)$ olduğundan $R_1 \circ R_2$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisidir.

Teorem 3.4.6: μ, Y nin bulanık LA-Γ-altyarıhipergrubu olsun. $R: S \to F(H)$ bulanık küme değerli LA-Γ-yarı hiper grup homomorfisi ise her $a, b \in S$ için $\overline{R}(\mu)(a) \wedge \overline{R}(\mu)(b) \leq \vee_{t\in a\circ b} \overline{R}(\mu)(t)$ dir.

İspat. $a, b \in S$ ve $t \in x \circ y$ olsun.

$$\overline{R}(\mu)(a) \wedge \overline{R}(v)(b) = \left(\bigvee_{x\in H} R(a)(x) \wedge \mu(x)\right) \wedge \left(\bigvee_{y\in H} R(b)(y) \wedge \mu(y)\right)$$

$$= \bigvee_{x,y\in H} \left(R(a)(x) \wedge R(b)(y) \wedge \mu(x) \wedge \mu(y)\right)$$

$$\leq \bigvee_{x,y\in H}\left(\bigvee_{m\in x\gamma y}\big(R(a)(x)\wedge R(b)(y)\big)\wedge\big(\mu(x)\wedge\mu(y)\big)\right)$$

$$\leq \bigvee_{\substack{x,y\in H\\ m\in x\gamma y}}\Big(\big(R(a)\star R(b)\big)(m)\wedge\mu(m)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{\substack{x,y\in H\\ m\in x\gamma y}}\left(\left(\bigvee_{t\in x\circ y}R(t)\right)(m)\wedge\mu(m)\right)$$

$$\leq \bigvee_{t\in x\circ y}\left(\bigvee_{m\in H}R(x)(m)\wedge\mu(m)\right)=\bigvee_{t\in x\circ y}\overline{R}(\mu)(t).$$

Böylece $\overline{R}(\mu)(a)\wedge\overline{R}(\nu)(b)\leq\bigvee_{t\in x\circ y}\overline{R}(\mu)(t)$ elde edilir.

BÖLÜM 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

LA-Γ-yarıgrup kavramı oldukça yeni ve ilginç bir cebirsel yapıdır. Bu tez çalışmasında bağıntısal, bulanık bağıntısal, küme değerli ve bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfileri tanımlanmış ve bunlar arasındaki bazı ilişkiler açıklanmıştır. Bu açıklamalar literatürdeki bazı çalışmaların yerinin daha iyi yorumlanması açısından oldukça önemlidir. Cebirsel yapılarla oluşturulmuş genelleştirilmiş bulanık kaba kümelerin özelliklerini çalışmak çok bilinen bir konudur. Bu tezde genelleştirilmiş bulanık kaba kümeler ile LA-Γ-yarıgrup cebirsel yapısı birlikte çalışılmıştır. Bu tez çalışması, bulanık küme değerli LA-Γ-yarıgrup homomorfileri ile tanımlanmış genelleştirilmiş bulanık kaba yaklaşımların bazı cebirsel özelliklerine odaklanmıştır. Burada özellikle bir LA-Γ-yarıgrubun bir bulanık alt kümesinin cebirsel özelliklerinin bulanık kaba yaklaşımlar altında korunduğuna dair teoremler elde edilmiştir. Daha özel olarak bazı özel durumlarda bulanık alt yaklaşımlarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Dahası son kısımda, diğer kısımlarda verilen kavramlar hiper yapılara genişletilerek bazı yeni tanım ve teoremler verilmiştir.

Bu tez çalışmasındaki bulgular, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisine araştırma makalesi olarak sunulmuş ve bu dergide yayına kabul edilmiştir (Bakınız [61])

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L. A., Fuzzy sets, Inform. and Control, 8, 338-353, 1965.

[2] Rosenfeld, A., Fuzzy groups, J.Math. Anal. Appl., 35, 512-517, 1971.

[3] Pawlak, Z., Rough sets, International Journal of Computer and Information Sciences, 11, 341-356, 1982.

[4] Biswas, R., Nanda S., Rough groups and rough subgroups, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 42, 2511-254, 1994.

[5] Dubois, H., Prade, H., Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets, International Journal of General System, 17, 191-208, 1990.

[6] Kuroki, N., Wang, P. P., The lower and upper approximations in a Fuzzy group, Information Sciences, 90, 203-220, 1996.

[7] Yao, Y. Y., Relational interpretations of neighborhood operatorsand rough set approximation operators, Informatin Sciences, 111, 239-259, 1998.

[8] Davvaz, B., A short note on algebraic T-rough sets, Information Sciences, vol. 178, no. 16, 3247-3252, 2008.

[9] Wu, W. Z., Zhang W. X., Constructive and Axiomatic Approaches of Fuzzy Approximation Operators, Information Sciences, 159, 233-254, 2004.

[10] Wu, W. Z, Leung, Y., Mi, J. S., On Characterizations of (φ,τ) $-$Fuzzy Rough Approximation Operators, Fuzzy Sets and Systems, 154, 76-102, 2005.

[11] Wu, W. Z., Mi, J. S., Zhang, W. X., Generalized fuzzy rough sets, Informatin Sciences, 151, 263-282, 2003.

[12] Ekiz, C., Ali, M.I., Yamak, S., $\mathcal{T}L$-Fuzzy set valued homomorphisms and generalized $(\mathcal{I},\mathcal{T})$-$L$-fuzzy rough sets on groups, Filomat, Vol 31, No:13, 4153-4166, 2017.

[13] Ekiz, C., Çelik, Y., Yamak, S., Generalized $\mathcal{T}L$-Fuzzy Rough Rings via $\mathcal{T}L$-Fuzzy Relational Morphisms, Journal of Inequalities and Applications, 1, 279, 2013.

[14] Ekiz, C., Çelik, Y., Yamak, S., Generalized (I,T)-L-Fuzzy Rough Sets Based on $\mathcal{T}L$-Fuzzy Relational morphisms on Semigroups, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 8, 571-592, 2014.

[15] Jun, Y. B., Lee C. Y., Fuzzy-Γ-rings, Pusan Kyongnam Math. J., 84, 264-269, 1981.

[16] Kazım, M. A., Naseeruddin, M., On almost semigroups, The Alig. Bull. Math. 2, 1-7, 1972.

[17] Sen M. K., On Γ-semigroups, Proceeding of International Symposium on Algebra and ıts applications, Decker Publication, Newyork, 30s, 1981.

[18] Shah, T., Rehman I., On Γ-ideals and Γ-bi-ideals in Γ-AG-groupoids, International Journal of Algebra 4, no.6, 267-276, 2010.

[19] Sen, M. K., Saha N. K., On Γ-semigroups I, Bull. Call. Math. Soc., 78, 180-186, 1986.

[20] Shah, T., Rehman I., Khan A., Fuzzy Γ-ideals in Γ-AG-groupoids, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 43(4), 625-634, 2010.

[21] Marty F., Sur une generalization de la Notion de group, 8th Congress Math. Scandinaves Stockholm (1934), 45-49.

[22] Sen, M. K., Ameri R., Chowdhury G., Fuzzy hypersemigroups, Soft Comput., 12, 891-900, 2007.

[23] Hila, K., Dine J., On hyperideals in left almost semihypergroups, ISRN Algebra, vol 2011, Article ID 953124, 2011.

[24] Heidari D., Dehkordi S. O., Davvaz B., Γ-Semihypergroups and their properties, U.P.B. Sci. Bull., Series A, 72 , 197-210, 2010.

[25] Anvariyeh S. M., Mirvakili S., Davvaz B., On Γ-hyperideals in Γ-semihypergroups, Carpathian J. Math. 26, No. 1, 11-23, 2010.

[26] Anvariyeh S. M., Mirvakili S., Davvaz B., Pawlak's approximations in Γ-semihypergroups, Computer and Mathematics with Applications, vol. 60, no 1, 45-53, 2010.

[27] Hungerford, T. W., Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

[28] Yao, Y.Y., Generalized rough set model, in: L. Polkovwski, A. Skowron (Eds.), Rough Sets in Knowladge Discovery 1. Methodology and Applications, Physica-Verlang, Heidelberg, 286-318, 1998a.

[29] Yao, Y.Y., Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators, Informatin Sciences, 111, 239-259, 1998b.

[30] Goguen, J.A., L-Fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl., 18, 145-174, 1967.

[31] Morsi, N.N. and Yakout M,M., Axiomatics for Fuzzy Rough Sets, Fuzzy Sets and Systems, 100, 327-342, 1998.

[32] Mi, J.-S., Leung, Y., Zhao, H.-Y., Feng T., Generalized Fuzzy Rough Sets Determined by a Triangular Norm, Information Sciences, 178, 3203-3213, 2008.

[33] Mordeson, J. N., Malik, D.S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing, 1998.

[34] Li, S., Yu, Y., Wang, Z., T-Congruence L-Relations on Groups and Rings, Fuzzy Sets and Systems, 92, 365-381, 1997.

[35] Xiao, Q. –M., Zhang, Z.-L, Rough Prime Ideals and Rough Fuzzy Prime Ideals in Semigroups, Information Sciences, 176, 726-733, 2006.

[36] Ekiz, C., Yarıgruplarda (I,T)-L-Fuzzy Kaba Kümeler, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2009.

[37] Li, T.-J, Rough Approximation Operators on Two Universes of Discourse and Their Fızzy Extensions, Fuzzy Sets and Systems, 159, 3033-3050, 2008.

[38] De Baets, B., Mesiar, R., Triangular norms on product lattices, Fuzzy Sets and Systems, 104, 61–75, 1999.

[39] Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E., Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London, 2000.

[40] Wang, Z. and Yu, Y., Pseudo-t-norms and implication operators on a complete Brouwerian lattice, FuzzySetsandSystems, 132, 113–124, 2002.

[41] Fodor, J., Roubens, M., Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[42] Baczynski, M., Jayaram, B.,QL-Implications: Some Properties and Intersections, Fuzzy Sets and Systems, dio: 10.1016/j.fss.2008.09.021.

[43] Baczynski, M., Jayaram, B.,(U,N)-implications and their Characterizations, Fuzzy Sets and Systems, 160 2049-2062, 2009.

[44] Baczynski, M., Jayaram, B., (S,N) and R-implications: A State of the Art Survey, Fuzzy Sets and Systems, 159, 1836-1859, 2008.

[45] Jayaram, B., Contrapositive Symmetrisation of Fuzzy Implications—Revisited, Fuzzy Sets and Systems,_157, 2291–2310, 2006.

[46] Jayaram, B., Mesiar R., On Special Fuzzy Implications, Fuzzy Sets and Systems, 160, 2063-2085, 2009.

[47] Mas M., Monserrat, M., Torrens, J., Trillas, E., A Survey on Fuzzy Implication Functions, IEEE Transactions On Fuzzy Systems, 15, 6, 2007.

[48] Jun, Y.B., Lee C. Y., Fuzzy Γ-rings, Pusan Kyngnam Math. J., 84, 264-269, 1981.

[49] Chakrabarty, K., Biswas, R., Nanda S., Fuzziness in Rough Sets, Fuzzy Sets and Systems, 110, 247-251, 2000.

[50] Davvaz, B., Roughness Bazed on Fuzzy ideals, Information Sciences, 176, 2417-2437, 2006.

[51] Kazancı, O. and Davvaz, B., On the structure of Rough Prime (Primary) Ideals and Rough Fuzzy Prime (Primary) Ideals in Commutative Rings, Information Sciences, 178, 1343-1354, 2008.

[52] Kuroki, N. and Wang, P.P., 1996, The Lower and Upper Approximations in a Fuzzy Group, *Information Sciences*, 90, 203-220.

[53] Mi, J.-S. and Zhang, W-X., An Axiomatic Characterization of a Fuzzy Generalization of Rough Sets, Information Sciences, 160, 235-249, 2004.

[54] Pei, D., A Generalized Model of Fuzzy Rough Sets, International Journal of General System, 34, 5, 603-613, 2005.

[55] Pei, D. and Fan, T., On Generalized Fuzzy Rough Sets, International Journal of General System, 1-17, 2007.

[56] Yeung, D.S., Chen, D., Tsang, E., Lee, J.W.T. and Wang, X., 2005, On The Generalization of Fuzzy Rough Sets, *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 13, 3, 343-361.

[57] Corsini, P., Leoreanu-Fotea, V., Applications of Hyperstructure Theory, Springer ABD, 2013.

[58] Yaqoob, N., Aslam, M., On bi-Γ-hyperideals in left almost Γ-semihypergroups, J. Adv. Res. Pure Math, 4(1), 130-143, 2012.

[59] Ignjatović, J. Ćirić, M., Bogdanović, S. Fuzzy homomorphisms of algebras, Fuzzy Sets and Systems 160, 2345-2365, 2009.

[60] Ekiz, C., Cebirsel Yapılarda (I, T)-L-Bulanık Kaba Kümeler, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2013.

[61] Akın, C., Eyüboğlu, K. Some Algebraic Properties of Generalized Fuzzy Rough Approximations Derived by Fuzzy Set-Valued Homomorphism of LA-Γ-Semigroups, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, yayın sürecinde.

ÖZGEÇMİŞ

Kübra EYÜBOĞLU, 18.10.1993 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İskenderpaşa İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini ise Maçka Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2011-2012 Eğitim-Öğretim yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2015'te mezun oldu. Yine aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi'nden Pedagojik Formasyon Sertifikası aldı. 2016-2017 Eğitim-Öğretim yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı.