GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK *p*-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

Tülin NAL KARADEMİR
20152110029

Haziran 2019

GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK p-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tülin NAL KARADEMİR

Enstitü Anabilim Dalı	:	**Matematik**
Tez Danışmanı	:	**Doç. Dr. İmdat İŞCAN**

Haziran 2019

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK *p*-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tülin NAL KARADEMİR

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 28/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Selahattin MADEN Jüri Başkanı	Prof. Dr. Mahir KADAKAL Üye	Doç. Dr. İmdat İŞCAN Üye

Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Tülin NAL KARADEMİR

28/06/2019

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ders döneminde ve tez çalışmamın hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. İmdat İŞCAN'a, tez yazım sürecinde değerli vaktini ve bilgisini benimle paylaşan hocam Prof. Dr. Mahir KADAKAL'a ve tüm ders aldığım matematik bölümü öğretim görevlilerine en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu tez çalışması boyunca desteklerini esirgemeyen eşime, dünyaya gelmek için beni sabırla bekleyen kızıma, aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\forall$	: Her
$L[a,b]$	: $[a,b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
f^{-1}	: f Fonksiyonunun Tersi

SİMETRİK *p*-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ÖZET

Bu tezde, özellikle p konveks fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler ve genelleştirmeler yapılmıştır. Birinci bölümde sırasıyla eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihçesi, konvekslik teorisi hakkında giriş niteliğinde bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde tezin kuramsal temelleri için gerekli temel kavramlar, tanımlar, teorem verilmiş ayrıca konveks fonksiyon sınıflarının birbiriyle olan ilişkisi literatür çalışmasıyla da desteklenerek aktarılmıştır. Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan klasik eşitsizlikleri içeren teoremler, ispatları ve bu çalışmaya kuramsal temel teşkil eden bazı eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise simetrik konveks fonksiyonlar sınıfının daha genel bir hali olan simetrik p-konveks fonksiyonların çarpımlarıyla ilgili yeni eşitsizliklere yer verilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerin literatürle uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, İntegral Eşitsizlikleri, *p*-Konveks *F*onksiyonlar, Simetrik Konvekslik, Harmonik Konvekslik

SOME INTEGRAL INEQUALITIES FOR SYMMETRIC *p*-CONVEX FUNCTIONS

SUMMARY

In this thesis, new inequalities and generalizations have been made especially for p convex functions. In the first part, the inequality theory, the history of convex functions, the theory of convexity are given. In the second part, the basic concepts, definitions, theorems and proofs for the theoretical foundations of the thesis are given and the relation of the convex function classes with each other is supported by the literature. In the third part, theorems which contain the classical inequalities used in the thesis study, the proofs and some inequalities which constitute the theoretical basis are given. In the fourth chapter, new inequalities related to products of functions which is a more general form of the class of symmetric convex functions are obtained. The inequalities obtained have been shown to be compatible with the literature.

Key Words: Convexity, Hermite-Hadamard Inequality, Integral Inequalities, p-Convex Functions, Symmetrized Convexity, Harmonic Convexity.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Matematikte eşitsizliklerin önemi büyüktür. Kısaca söylemek gerekirse iki değerin birbirlerine göre durumlarını ifade eden ilişkidir. Eşitsizlik "$\neq$" işaretini ilk bulan kişinin kim olduğu bilinmiyor; fakat ilk olarak 18. yüzyılda Leonhard Euler tarafından kullanıldığı düşünülüyor.

Büyüktür (>) ve küçüktür (<) işaretleri ise 1631 yılında, İngiliz matematikçi Thomas Harriot'un "Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas" başlıklı kitabında ilk olarak kullanılmıştır.

18. ve 19. yy da K.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Chebyshev gibi bilinen matematikçilerin eşitsizlik konusunda çalışmaları mevcut olsa da 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya[1] tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitap, bu alanda verilen ilk yapıttır. Bu çalışmayı takiben E.F. Beckenbach ve R. Belmann[2] tarafından yazılan adaş eser olarak "Inequalities" izler. Bu iki eser çoğu matematikçinin dikkatini çekmiş ve ilerleyen dönemlerde de bu anlamda fazlasıyla çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bir kısmı ''Differential Inequalities"[3], "Analitic Inequalities" [4], "Inequalities Involving Functions and Their Derivates"[5], "Classical and New Inequalities in Analysis"[6] dır.

"Neden Matematiksel Eşitsizlikler?" sorusunu 1978 yılında Richard Bellman şu şekilde cevaplamıştır: "Eşitsizlik çalışmak için bazı nedenler vardır. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizliklerde bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir."

Son yıllarda eşitsizlik konulu çalışmaların matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalarına katkıları büyüktür. Bunlardan bazıları; Hadamard, Ostrowski, Grüss, Cebysev, Yamuk ve Jensen şeklinde sıralanabilir. Eşitsizliklerde önemli bir yeri olan kavramlardan birisi de konveks fonksiyonlar kavramıdır. Kavram olarak konvekslik eşitsizliklerle tanımlandığından konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizlikler önemli bir yer tutmaktadır.

Konvekslik; kökeni π'nin değerini tahmin etmesi dolayısıyla, Arşimed'e dayanan basit ve doğal bir kavramdır. Bununla birlikte matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun yayınlanması ile ortaya çıkmıştır. Arşimed, konveks bir şeklin çevre uzunluğunun onu çevreleyen diğer bir konveks şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu fark etmiştir. Konvekslik, hayatımızın birçok evresinde karşımıza çıkmaktadır. Bunun en basit örneği ayakta dik duruş pozisyonumuzdur. Ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içinde, ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi korumaktayız.

Konveks fonksiyonların sistematik başlangıcı, Johan Ludwig William Valdemar Jensen'e (1859-1925) dayanmaktadır. Jensen'den öncede çalışmalar olmuştur, bunlar arasında Ch. Hermite, Hadamard, O. Hölder ve O. Stolz vardır. İlerleyen yıllarda Fejer (1880-1959) Hermite'in (1881-Mathesis) sonuçlarının genelleştirilmiş halini sunmuştur. 20. yüzyıl boyunca geometrik fonksiyonel analizde, matematiksel ekonomide, konveks analizde ve lineer olmayan optimizasyonda önemli araştırmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar neticesinde elde edilen konvekslik sınıfları için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin incelenmesi oldukça önemlidir. Bu doğrultuda pek çok sayıda araştırmalar yapılmıştır. Bunlar arasında, Godunova-Levin tipli fonksiyonlar[6], r-konveks fonksiyonlar[7] , p-fonksiyonlar[8], Zhang K.S., Wan S., p-konveks fonksiyonlar[9], İşcan, İ., Harmonik konveks fonksiyonlar[10] sayılabilir. Son yıllarda Hermite-Hadamard tipi eşitsizliklere ve integral eşitsizliklerine ilgi artmıştır. S.S. Dragomir, B.G. Pachpatte, G. Zabandan gibi araştırmacıların bu alanda yapılmış çalışmaları mevcuttur. B.G. Pachpatte[28] makalesinde elemanter işlemler kullanarak konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler vermiştir. M. Tunç [29] makalesinde, Pachpatte'nin sonuçlarına benzer eşitsizlikler vermiştir. S.S. Dragomir [30] makalesinde, konveks fonksiyonlar için var olan bir eşitsizliğin operatör konveks fonksiyonlar için de sağlandığı göstermiştir. G. Zabandan [31] makalesinde, Dragomir'in konveks fonksiyonlar için kullandığı eşitsizliğin bir genellemesini yapmıştır. Bu tezde yukarıda belirtilen araştırmacıların eşitsizliklerinden daha genel eşitsizlikler elde edilmiştir.

Konveks fonksiyonlar teorisi, matematiğin hemen hemen tüm dallarında önemlidir. Ayrıca endüstri, ticaret, tıp ve sanat gibi dalların nümerik uygulamalarında ve şans oyunlarının dengesinin sağlanmasında da kullanılmaktadır.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Ön Bilgiler

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar, teoremler ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun.

$$+: L \times L \to L$$

$$\cdot : F \times L \to L$$

işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye F cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L, + işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

G1. $\forall\, x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir.

G2. $\forall\, x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

G3. $\forall\, x \in L$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

G4. $\forall\, x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in L$ vardır.

G.5. $\forall\, x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha . x \in L$

L2. $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$

L3. $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . y$

L4. $1 . x = x$ (Burada 1 F'nin birim elemanıdır)

$F = \mathbb{R}$ ise L'ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L'ye kompleks lineer uzay adı verilir [11].

Tanım 2.1.2. (Lineer Operatör): F bir cisim ve V ve W, F cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $u, v \in V$ ve $c \in F$ olmak üzere $T: V \to W$ dönüşümü

(a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

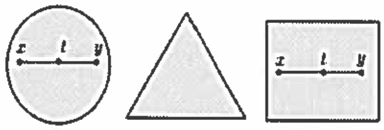
(b) $T(cu) = cT(u)$

şartlarını sağlıyorsa T'ye V üzerinde lineer dönüşüm denir. $V = W$ ise $T: V \to V$ lineer dönüşümüne bir lineer operatör denir [11].

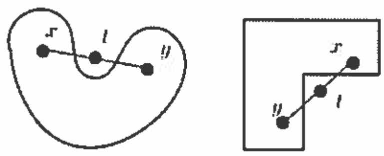
Tanım 2.1.3. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere;

$B = \{z \in L : z = tx + (1-t)y \ \ , 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A.$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1-\alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [12].



Şekil 2.1. Konveks kümeler



Şekil 2.2. Konveks olmayan kümeler

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu konveks fonksiyondur ancak ve ancak $\forall\, x, y \in I$ ve $\theta \in [0,1]$ için

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y). \tag{2.1}$$

Yukarıdaki formüle eş değer olarak her $x, y, z \in I$ için

$$\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ y & f(y) & 1 \\ z & f(z) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

determinantını verebiliriz.

Eğer eşitsizlik (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\theta \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [13].

Eğer $\theta \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartındaki "$\leq$" yerine "$<$" gelir, yani;

$$f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir.

Konveks fonksiyon diyebilmek için bazı gereklilikler aşağıda sıralanmıştır.

1. f'nin I aralığı üzerinde konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul seçilen herhangi bir $c \in I$ noktası için $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$'nin I aralığında artan bir fonksiyon olmasıdır.

2. $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $c,x \in (a,b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g:(a,b) \to \mathbb{R}$ artan fonksiyon olmasıdır.

3. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

4. f'', (a,b) aralığında mevcut olsun. Bu durumda f'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

5. $f:(a,b) \to R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir yardımcı doğruya sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \qquad \forall x \in (a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0'a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.

6. $f:(a,b) \to R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul P, Q ve R noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [13].

Tanım 2.1.5. (Harmonik Konvekslik): $I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ reel sayılarda bir aralık olmak üzere $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x) \qquad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Eğer eşitsizlikte "$\leq$" yerine "$\geq$" kullanılırsa, bu durumda f'ye harmonik konkav denir [14].

Özellik 2.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gerçek (reel) bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

i) Eğer $I \subseteq (0,\infty)$, f konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu harmonik konvekstir.

ii) Eğer $I \subseteq (0,\infty)$, f harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu konvekstir.

iii) Eğer $I \subseteq (-\infty,0)$, f harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu konvekstir.

iv) Eğer $I \subseteq (-\infty,0)$, f konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu harmonik konvekstir.

Teorem 2.1.1. (Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizliği): $f : I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3}$$

eşitsizliğine Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Eğer bu eşitsizlikte f fonksiyonu konkav ise eşitsizlik tersine döner [15, 16].

İspat: f fonksiyonu konveks olduğundan $[a,b]$ aralığında sürekli ve sınırlıdır. Bundan dolayı f, $[a,b]$'de integrallenebilir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı için konveksliğin geometrik yorumunu kullanarak $x = ta + (1-t)b, t \in [0,1]$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \\ &\leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned}$$

olup, eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir. Şimdi sol tarafını ispatlayalım. Bunun için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

biçiminde yazalım. Elde edilen birinci integralde $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$ ve ikinci integralde $x = b - \frac{t(b-a)}{2}$ değişken değiştirmeleri yapılırsa, buradan;

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

ve

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

yazılabilir. Elde edilen integral toplamında f'in konveksliğini kullanırsak;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt$$

$$\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.1.2. (Harmonik konveks Fonksiyonlarda H-H Eşitsizliği): $a, b \in I$ öyle ki $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.4}$$

Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği sunulmuştur.

İspat: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks olduğundan dolayı $\forall\, x, y \in I$ için ve $t = \frac{1}{2}$ için harmonik konveklsiğin $f\left(\frac{xy}{tx-(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$ şeklindeki tanımının yardımıyla

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f(y)+f(x)}{2}$$

olur. Eğer bu eşitsizlikte $x = \frac{ab}{ta+(1-t)b}$, $y = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$ olarak alırsak

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)}\right)}{2}$$

yazabiliriz. Daha sonra eşitsizliğin t değişkenine göre [0,1] aralığında integralini alırsak

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt + \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)}\right)dt\right]$$

elde ederiz. Köşeli parantezin içindeki her bir integral $\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$ ifadesine eşit olduğundan, eşitsizliğin sol tarafı ispatlanır.

Eşitsizliğin sağ tarafı için $x = a, y = b$ alıp, t değişkenine göre her iki tarafın [0,1] aralığı üzerinde integralini alalım.

Şimdi $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 1$ biçiminde tanımlansın. Böylelikle her $x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$$1 = f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1$$

olur. f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında harmonik konveks olduğundan,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = 1, \qquad \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx = 1 \text{ ve } \frac{f(a)+f(b)}{2} = 1$$

sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer f, $[a, b]$ üzerinde harmonik konveks ise o halde herhangi bir $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha + \beta = 1$ ile birlikte aşağıdaki elde edilir:

$$\breve{f}\left(\frac{xy}{\alpha x+\beta y}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{xy}{\alpha x+\beta y}\right) + f\left(\frac{abxy}{(a+b)xy-ab(\alpha x+\beta y)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{xy}{\alpha x+\beta y}\right) + f\left(\frac{\frac{abx}{(a+b)x-ab}\cdot\frac{aby}{(a+b)y-ab}}{\alpha\frac{abx}{(a+b)x-ab}\beta\frac{aby}{(a+b)y-ab}}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\alpha f(y) + \beta f(x) + \alpha f\left(\frac{aby}{(a+b)y-ab}\right) + \beta f\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right)\right]$$

$$= \alpha\breve{f}(y) + \beta\breve{f}(x).$$

Bu da bize $\breve{f}$ in $[a,b]$ aralığı üzerinde harmonik konveks olduğunu gösterir.

Karşı örnek; $x \in (0,\infty)$ için $f(x) = -lnx$ foksiyonunu ele alalım. Aşağıdaki şekilde almamız durumunda f fonksiyonu harmonik konveks olmayacaktır [25]:

$t = \frac{1}{2}$, $x = e$ ve $y = 2e$ için

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = -1 - \frac{1}{2}\ln(2) < f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = ln3 - ln4 - 1$$

$$\breve{f}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x - ab}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[ln\left(\frac{1}{x}\right) + ln\left(\frac{(a+b)x - ab}{ab}\right)\right]$$

$$F(x) := \breve{f}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(x) + ln\frac{a+b-abx}{abx}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b-abx}{abx}\right)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b-abx}$$

$$F''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+b-abx}\right)^2 > 0$$

olur. F konveks ise $\breve{f}$ fonksiyonu da harmonik konveksdir.

Teorem 2.1.3. (Fejér eşitsizliği): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks *f*onksiyon olsun. Bu taktirde $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$'ye göre simetrik olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx \le \int_a^b f(x)w(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)dx \qquad (2.5)$$

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genellemesi olan Fejér eşitsizliği verilir[17].

Teorem 2.1.4. (Harmonik Konveks Fonksiyonlarda Hermite-Hadamard-*F*ejér): $a,b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ve $w: [a,b] \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{2ab}{a+b}$'ye göre harmonik simetrik ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx \le \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2}dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^2}dx \qquad (2.6)$$

Chan F. ve Wu S. tarafından harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği sunulmuştur [18].

Tanım 2.1.6. (p-konvekslik): I, p-konveks küme olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f\left([\alpha x^p + (1-\alpha)y^p]^{1/p}\right) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \tag{2.7}$$

ise $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna p-konveks *f*onksiyon ya da $PC(I)$ sınıfına aittir denir [19].

Teorem 2.1.5. $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ p-konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $a < b$ olacak şekilde $a, b \in I$ olsun. Eğer $f \in L[a,b]$ ise

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Gerçekten, $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece her $x, y \in (0,\infty)$ ve $t \in [0,1]$ için

$1 = f\left([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}\right) = tf(y) + (1-t)f(x) = 1.$

dir. Böylece f, $(0,\infty)$ da p-konvekstir. Buradan

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) = 1$$

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx = 1$$

ve

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = 1$$

elde edilir.

Tanım 2.1.7. Eğer $P_{(f;p)}$ nin p-simetrik dönüşümü $[a,b]$ üzerinde p-konveks (p-konkav) ise $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to R$ *f*onksiyonunun $[a,b]$ üzerinde p-konveks (p-konkav) simetrik olduğu söylenir.

Örnek 2.1.1. $a, b \in R$ ile $0 < a < b$ ve $\alpha \geq 2$ olsun. Bu durumda $f: [a,b] \to R$, $f(x) = (x^p - a^p)^{\alpha-1}$, $p > 0$, (ya da $f(x) = (a^p - x^p)^{\alpha-1}$, $p < 0$) *f*onksiyonu $[a,b]$ üzerinde p-konvekstir. Gerçekten, herhangi bir $u, v \in [a,b]$ *ve* $t \in [0,1]$ için $g(\varsigma) = \varsigma^{\alpha-1}$ $\varsigma \geq 0$ *fonksiyonunun* konveksliği ile aşağıdaki elde edilir.

$$\begin{aligned}
f\left([tu^p + (1-t)v^p]^{1/p}\right) &= (tu^p + (1-t)v^p - a^p)^{\alpha-1} \\
&= (t[u^p - a^p] + (1-t)[v^p - a^p])^{\alpha-1} \\
&\leq t(u^p - a^p)^{\alpha-1} + (1-t)(v^p - a^p)^{\alpha-1} \\
&= tf(u) + (1-t)f(v)
\end{aligned}$$

Böylelikle, $P_{(f,p)}$ ayrıca $[a,b]$ üzerinde p-konveks olur. Dolayısıyla f simetrik p−konveks bir fonksiyondur.

Örnek 2.1.2. $\alpha \geq 2$ olsun. Bu durumda $f:[a,b] \subseteq (0,\infty) \to R$, $f(x) = (b^p - x^p)^{\alpha-1}$ $p > 0$, (ya da $f(x) = (x^p - b^p)^{\alpha-1}$, $p < 0$) fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde p-konvekstir. Dolayısıyla, f simetrik p−konveks bir $f$onksiyondur.

Örnek 2.1.3. $\alpha \geq 2$ olsun. Bu durumda $f:[a,b] \subseteq (0,\infty) \to R$,

$f(x) = (x^p - a^p)^{\alpha-1} + (b^p - x^p)^{\alpha-1}, p > 0,$

$f(x) = (a^p - x^p)^{\alpha-1} + (x^p - b^p)^{\alpha-1}, p < 0$

f, simetrik p−konveks bir fonksiyondur.

$P \subset [a,b]$, I üzerinde tanımlanan p-konveks fonksiyon sınıfı ve $SP \subset [a,b]$ de $[a,b]$ üzerindeki simetrik p-konveks fonksiyon sınıfı ise bu durumda

$$PC[a,b] \subsetneq SPC[a,b]$$

Ayrıca, eğer $[c,d] \subset [a,b]$ ve $f \in SP \subset [a,b]$ ise, o zaman bu genel olarak $f \in SP \subset [c,d]$ anlamına gelmez.

Önerme 2.1.1. $f:[a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun ve $g(x) = x^{1/p}x$, $x > 0$, $p \neq 0$ olsun. f ; $[a,b]$ aralığında simetrik p–konvekstir ancak ve ancak fog, $g^{-1}([a,b]) = [a^p, b^p]$ $(veya[b^p, a^p]$ aralığında simetrik konvekstir.

İspat: f, $[a,b]$ üzerinde simetrik p-konveks fonksiyon olsun. Eğer $x, y \in g^{-1}([a,b])$ olarak alırsak, bu durumda $u, v \in [a,b]$ ile $x = u^p$ ve $y = g(v)$ şeklinde olur.

$$(\widetilde{fog})(tx + (1-t)y) \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{2}[(fog)(tx + (1-t)y) + (fog)(a^p + b^p - tx - (1-t)y)]$$

$$= \frac{1}{2}[(fog)(tu^p + (1-t)v^p) + (fog)(a^p + b^p - [tu^p + (1-t)v^p])]$$

$$= P_{(f;p)}\left([tu^p + (1-t)v^p]^{1/p}\right)$$

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik p-konveks fonksiyonu olduğundan aşağıdaki elde edilir:

$$P_{(f;p)}\left([tu^p + (1-t)v^p]^{1/p}\right) \leq tP_{(f;p)}(u) + (1-t)P_{(f;p)}(v) \tag{2.9}$$

$$= t\frac{1}{2}\left[f(u) + f\left([(a^p + b^p - u^p]^{1/p}\right)\right] + (1-t)\frac{1}{2}\left[f(v) + f\left([(a^p + b^p - v^p]^{1/p}\right)\right]$$

$$= t\frac{1}{2}[(fog)(x) + (fog)(a^p + b^p - x)] + (1-t)\frac{1}{2}[(fog)(y) + (a^p + b^p - v^p)]$$

$= t(\widetilde{fog})(x) + (1-t)(\widetilde{fog})(y)$

(2.8) ve (2.9) ile fog, $[a^p, b^p]$ (veya $[b^p, a^p]$) aralığında simetrik konvekstir. Tersine fog, $[a^p, b^p]$ (veya $[b^p, a^p]$) aralığında simetrik konveks ise, o zaman benzer şekilde $[a.b]$ aralığında f'in simetrik p-konveks olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.1.8. (GA-Konveks): $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ = (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in I\ ve\ \forall t \in [0,1]$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna I üzerinde Geometrik-Aritmetik konveks (GA-Konveks) fonksiyon denir.

GA-konveks fonksiyonları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genelleştirilmesi aşağıdaki gibidir [20].

Teorem 2.1.6. $f: I \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir GA-konveks fonksiyon ve $a, b \in I$ elemanları $a < b$ olacak şekilde olsun. $g: [a,b] \to [0,\infty)$ sürekli ve $\sqrt{ab}$ ye göre geometrik olarak simetrik bir fonksiyon ise;

$$f(\sqrt{ab}) \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)g(x)}{x} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{g(x)}{x} dx$$

dir.

GA-konveks fonksiyonlar için kesirli integraller yardımıyla elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizlikleri aşağıdaki gibi verilebilir [21].

Teorem2.1.7. (GA-Konveks fonksiyonlar için H-H eşitsizliği): $f: I \subset (0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu GA-konveks fonksiyon ise $a < b$ olmak üzere $\forall a, b \in I$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{lnb - lna} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

İspat: $f(\sqrt{ab}) = f\left(\sqrt{a^t a^{1-t} b^t b^{1-t}}\right)$ ve f fonksiyonu GA-konveks fonksiyon olması ile

$$f\left(\sqrt{a^t a^{1-t} b^t b^{1-t}}\right) \leq \frac{f(a^t b^{1-t}) f(a^{1-t} b^t)}{2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğinin her iki tarafının (0,1) aralığında t değişkenine göre integralini alırsak

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(a^t b^{1-t}) dt + \int_0^1 f(a^{1-t} b^t) dt\right]$$

olur. Bu durumda

$$I_1 = \int_0^1 f(a^t b^{1-t})\,dt = \int_b^a \frac{1}{x}\frac{1}{ln\frac{a}{b}} f(x)dx$$

$$\begin{pmatrix} x = a^t b^{1-t} = b\left(\frac{a}{b}\right)^t \\ dx = b\left(\frac{a}{b}\right)^t ln\frac{a}{b}dt \\ dx = \frac{1}{x}\frac{1}{ln\frac{a}{b}}dx \end{pmatrix}, \qquad x_1 = b, \qquad x_2 = a$$

$$I_1 = \frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$$

bulunur ve benzer şekilde $I_1 = I_2$ olur. O halde

$$f(\sqrt{ab}) \leq \frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx$$

olacağından f fonksiyonu GA konveks olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için

$$f(a^t b^{1-t}) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

olur. Bu eşitsizliğin (0,1) aralığında integralini alırsak aşağıdaki elde edilir:

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t})dt \leq \int_0^1 [tf(a) + (1-t)f(b)]dt$$

$$\frac{1}{lnb - lna}\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Teorem 2.1.8. $f: I \subseteq \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler doğrudur [26].

i. $f(x)$ fonksiyonu I aralığında geometrik aritmetik konvekstir ancak ve ancak $f(e^x)$ fonksiyonu $ln0 = -\infty$ kabul edildiğinde $lnI = \{lnx \mid x \in I\}$ aralığında konvekstir.

ii. Eğer f fonksiyonu I aralığında azalan ve geometrik aritmetik konveks ise f fonksiyonu I aralığında konvekstir.

iii. Eğer f fonksiyonu I da artan ve konveks ise f fonksiyonu I aralığında geometrik aritmetik konvekstir.

İspat: i. $f(x)$ fonksiyonu I aralığında geometrik aritmetik konveks ise

$$\begin{aligned} f\left(e^{tlnx+(1-t)lny}\right) &= f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ &= tf(e^{lnx}) + (1-t)f(e^{lny}) \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında konvekstir. Diğer taraftan, tersine olarak $f(e^x)$ fonksiyonu I aralığında konveks olduğunda

$$f(x^t y^{1-t}) = f\left(e^{tlnx+(1-t)lny}\right)$$
$$\leq tf(e^{lnx}) + (1-t)f(e^{lny}) = tf(x) + (1-t)f(y)$$

olur ki bu $f(x)$ fonksiyonun I da geometrik aritmetik konveks olduğunu gösterir.

ii. Eğer f fonksiyonu I da azalan ve geometrik aritmetik konveks ise

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x^t y^{1-t}) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

dir. Bunun anlamı f fonksiyonu I da konvekstir.

iii. Eğer f fonksiyonu I da artan ve konveks ise

$$f(x^t y^{1-t}) \leq f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

dir. Buna göre f fonksiyonu I da geometrik aritmetik konvekstir.

Tanım 2.1.9. (p-simetrik): $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ olsun. Eğer aşağıdaki eşitlik her $x \in [a,b]$ için sağlanıyorsa $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre p-simetriktir denir.

$$w(x) = \left([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}}\right) \quad (2.9)$$

Tanım 2.1.10. (Simetrik Konvekslik): Eğer $\breve{f}$ fonksiyonunun simetrik dönüşümü $[a,b]$ üzerinde konveks (konkav) ise $f: [a.b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında simetrik konveks (konkav) olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi, eğer $Con[a,b]$ ve $SCon[a,b]$ ile sırasıyla $[a,b]$ üzerinde tanımlanan konveks fonksiyonların sınıfı ve simetrik konveks fonksiyonların sınıfı gösterilirse, yukarıdaki açıklamalardan şu söylenebilir [22,27]:

$$Con[a,b] \subsetneq SCon[a,b]. \quad (2.10)$$

Ayrıca, eğer $[c,d] \subset [a,b]$ ve $f \in SCon[a,b]$ ise; o zaman bu genel olarak $f \in SCon[c,d]$ belirtmez.

Aşağıda belirtilen sonuca ulaşılır [22]:

Teorem 2.1.9. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun simetrik konveks olduğunu *ve* $[a,b]$ aralığında integrallenebileceğini varsayalım. Bu durumda aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (2.11)$$

Aynı zamanda [22] de aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 2.1.10. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında simetrik konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda herhangi bir $x \in [a,b]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \breve{f}(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.12}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç 2.1.1. f : $[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu simetrik konveks ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ve w : $[a,b] \to [0,\infty)$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise, o halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(t)dt \leq \int_a^b w(t)\breve{f}(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(t)dt \tag{2.13}$$

dir. Üstelik eğer w, $[a,b]$ aralığı üzerinde hemen her yerde simetrik ise, yani $w(t) = w(a+b-t)$ eşitliği her $t \in [a,b]$ için sağlanıyorsa, o halde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(t)dt \leq \int_a^b w(t)f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(t)dt \tag{2.14}$$

Tanım 2.1.11. (Simetrik harmonik konvekslik): f : $[a,b] \subset R/\{0\} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için $[a,b]$ aralığında f fonksiyonunun $\breve{f}$ simetrik harmonik dönüşümünü değerlendiriyoruz.

$$\breve{f}_H(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) + f\left(\frac{abt}{(a+b)t-ab}\right)\right], t \in [a,b] \tag{2.15}$$

f 'in $[a, b]$ aralığındaki $\bar{f}$ anti-simetrik harmonik dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{f}_H(t) = \frac{1}{2}\left[f(t) - f\left(\frac{abt}{(a+b)t-ab}\right)\right], t \in [a,b] \tag{2.16}$$

Herhangi bir f fonksiyonu için $\breve{f} + \bar{f} = f$ olacağı açıktır.

Teorem 2.1.11. $f: [a,b] \subseteq R\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında simetrik harmonik konveks olduğunu varsayalım. O halde, herhangi bir $x \in [a.b]$ için aşağıdaki elde edilir [23].

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \breve{f}_H(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.17}$$

Tanım 2.1.12. (Simetrik p-konvekslik): $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için f'in $P_{(f,p)[a,b]}$ veya basitçe $P_{(f,p)}$aralığı üzerinde simetrik dönüşümünü$[a,b]$ aralığı kapalı olduğunda ve aşağıdaki gibi tanımlandığında değerlendiriyoruz [24].

$$P_{(f;p)}(x) := \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right], x \in [a,b] \tag{2.18}$$

f'in $[a,b]$ aralığı üzerindeki anti p-simetrik dönüşümü $AP_{(f,p)[a,b]}$ ya da basitçe $AP_{(f,p)}$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$AP_{(f,p)}(x) := \frac{1}{2}\left[f(x) - f\left([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}}\right)\right], x \in [a,b] \tag{2.19}$$

Herhangi bir f fonksiyonu için $P_{(f,p)} \neq AP_{(f,p)} = f$ elde edileceği açıktır. Ayrıca;

$$P_{(f;1)}(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(a+b-x)] = \check{f}(x)$$

ve

$$P_{(f;-1)}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x - ab}\right)\right] = \check{f}_H(x)$$

dir.

Teorem 2.1.12. $f: [a,b] \subseteq (0;\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik konveks olduğunu varsayalım. O halde, herhangi bir $x, y \in [a,b]$ için $x \neq y$ ile aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizlikleri elde edilir.

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right]$$
$$\leq \frac{1}{2(y-x)}\left[\int_x^y f(t)dt + \int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)dt\right]$$
$$\leq \frac{1}{4}[f(x) + f(y) + f(a+b-x) + f(a+b-y)] \tag{2.20}$$

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tez çalışmasının ana sonuçlarını bulmamıza yardımcı olan ve destekleyen literatürdeki bazı çalışmalara yer verilmiştir.

3.1. Simetrik Konvekslikle İlgili Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 'nin $[a,b]$ aralığında simetrikleştirilmiş konveks olduğu varsayıldığında Hermite-Hadamard eşitsizlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.1}$$

İspat: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında simetrik konveks olduğundan $\breve{f}$ fonksiyonu için yazılan Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$\breve{f}\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)dt\leq\frac{\breve{f}(a)+\breve{f}(b)}{2} \tag{3.2}$$

şeklindedir. Ancak

$\breve{f}\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $\quad \frac{\breve{f}(a)+\breve{f}(b)}{2}=\frac{f(a)+f(b)}{2}$,

ve

$$\int_a^b \breve{f}(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^b [f(t)+f(a+b-t)]dt=\int_a^b f(t)dt.$$

dir. Dolayısıyla (3.2.) eşitsizliğinden (3.1.) elde edilir.

Aşağıdaki sonuçlar sağlanır:

Teorem 3.1.2. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 'nin $[a,b]$ aralığında simetrik konveks olduğu varsayıldığında herhangi bir $x\in[a,b]$ için aşağıdaki sınırlar elde edilir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}[f(x)+f(a+b-x)]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.3}$$

İspat: $\breve{f}$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan herhangi bir $x\in[a,b]$ için

$$\frac{\breve{f}(x)+\breve{f}(a+b-x)}{2} \geq \breve{f}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\frac{\breve{f}(x)+\breve{f}(a+b-x)}{2} = \frac{1}{2}\,[f(x)+f(a+b-x)]$$

olduğundan

$$\breve{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitliğiyle birlikte (3.3.) deki ilk eşitsizlik elde edilir. Ayrıca, herhangi bir $x \in [a,b]$ için var olan $\breve{f}$ dışbükeydir;

$$\begin{aligned}\breve{f}(x) &\leq \frac{x-a}{b-a}\cdot\breve{f}(b) + \frac{b-x}{b-a}\cdot\breve{f}(a)\\ &= \frac{x-a}{b-a}\,\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{b-x}{b-a}\,\frac{f(a)+f(b)}{2}\\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2},\end{aligned}$$

ki bu (3.3.) eşitsizliğinin ikinci kısmını ispatlar.

Uyarı 3.1.1. $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ aralığında simetrik konveks ise, sınırlar:

$$\inf_{x\in[a,b]} \breve{f}(x) = \breve{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\sup_{x\in[a,b]} \breve{f}(x) = \breve{f}(a) = \breve{f}(b) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olur.

Sonuç 3.1.1. $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 'nin $[a,b]$aralığında simetrikleştirilmiş konveks olduğunda ve w: $w\colon[a,b]\to[0,\infty)$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirse o zaman eşitsizlik:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(t)dt &\leq \frac{1}{2}\int_a^b w(t)\,[f(t)+f(a+b-t)]dt\\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(t)dt. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, w, $[a,b]$ üzerinde hemen hemen her yerde simetrikleştirilmiş konveks ise yani hemen hemen her $t \in [a,b]$ için $w(t) = w(a+b-t)$ ise eşitsizlik

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(t)dt \leq \int_a^b w(t)f(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(t)dt \qquad (3.5)$$

şeklinde olur.

İspat: $x = t$ için yazılmış olan (3.3.) tarafından takip edilen (3.4.) eşitsizliği, $w(t) \geq 0$ ile çarpılarak ve $[a,b]$ aralığında t üzerinden integrali alınarak hesaplanır. Değişken değiştirdiğimizde

$$\int_a^b w(t)f(a+b-t)dt = \int_a^b w(a+b-t)f(t)dt.$$

bulunur. w hemen her yerde $[a,b]$ aralığında simetrik olduğundan;

$$\int_a^b w(a+b-t)f(t)dt = \int_a^b w(t)f(t)dt.$$

olur. Bundan dolayı

$$\frac{1}{2}\int_a^b w(t)[f(t)+f(a+b-t)]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b w(t)\,f(t)dt + \int_a^b w(t)f(a+b-t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b w(t)f(t)dt + \int_a^b w(t)f(t)dt\right] = \int_a^b w(t)f(t)dt$$

olur ve (3.4.) ile birlikte (3.5.) elde edilir.

Uyarı 3.1.2. (3.5.) de belirtilen eşitsizlik f konveks fonksiyonları ve w simetrik ağırlıkları 1906 yılında L. Fejér tarafından elde edildi. Bu eşitsizliğin $[a,b]$ aralığında f simetrikleştirilmiş konveks fonksiyonların daha büyük sınıfı için geçerli olduğu gösterilmiştir.

Aşağıdaki sonuçlar ayrıca göstermektedir ki:

Teorem 3.1.3. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında simetrikleştirilmiş konveks olduğu varsayıldığında herhangi bir $x,y \in [a,b]$ ve $x \neq y$ için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{2(y-x)}\left[\int_x^y f(t)dt + \int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{4}[f(x)+f(a+b-x)+f(y)+f(a+b-y)] \qquad (3.6)$$

İspat: $\breve{f}_{[a,b]}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan, $\breve{f}_{[a,b]}$fonksiyonu da herhangi bir $[x,y]$ (veya $[y,x]$) ve $x,y \in [a,b]$ alt-aralığında konvekstir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ile herhangi bir $x, y \in [a,b]$ ve $x \neq y$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\breve{f}_{[a,b]}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y \breve{f}_{[a,b]}(t)dt \leq \frac{\breve{f}_{[a,b]}(x) + \breve{f}_{[a,b]}(y)}{2}. \tag{3.7}$$

Ayrıca,

$$\breve{f}_{[a,b]}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right],$$

$$\begin{aligned}\int_x^y \breve{f}_{[a,b]}(t)dt &= \frac{1}{2}\int_x^y [f(t) + f(a+b-t)]dt \\ &= \frac{1}{2}\int_x^y f(t)dt + \frac{1}{2}\int_x^y f(a+b-t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_x^y f(t)dt + \frac{1}{2}\int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)dt\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\breve{f}_{[a,b]}(x) + \breve{f}_{[a,b]}(y)}{2} = \frac{1}{4}[f(x) + f(a+b-x) + f(y) + f(a+b-y)]$$

eşitlikleriyle (3.7.)'de belirtilen eşitsizliklerle birlikte elde edilmek istenen (3.6.)'daki sonuca varılır.

Uyarı 3.1.3. (3.6.) da $x = a$ ve $y = b$ olarak alındığında (3.1.) elde edilir. Verilen herhangi bir $x \in [a,b]$ için $y = a + b - x$ alındığında (3.6.) daki ifadeden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2\left(\frac{a+b}{2} - x\right)}\int_x^{a+b-x} f(t)dt \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(a+b-x)], \tag{3.8}$$

burada $x \neq \frac{a+b}{2}$ ve $f: [a,b] \to \mathbb{R}$'nin $[a,b]$ aralığında simetrik konveks olması şartıyla geçerlidir. Bu eşitsizliğin x'e göre integrali alındığında, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$'nin $[a,b]$ aralığında simetrik konveks olması şartıyla (3.1.)'in ilk kısmının sadeleşmiş hali elde edilir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \left[\frac{1}{\left(\frac{a+b}{2} - x\right)}\int_x^{a+b-x} f(t)dt\right] dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \tag{3.9}$$

Fonksiyon konveks olduğunda aşağıdaki eşitsizlikler de geçerlidir:

Uyarı 3.1.4. Eğer $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında simetrik konveks ise, herhangi bir $x, y \in [a,b]$ ve $x \neq y$ olduğunda (3.6) yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)\right] \tag{3.10}$$
$$\leq \frac{1}{2(y-x)}\left[\int_x^y f(t)dt + \int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)dt\right]$$
$$\leq \frac{1}{4}[f(x)+f(a+b-x)+f(y)+f(a+b-y)]$$

(3.10) ifadesinin $[a,b]$ aralığı üzerinde (x,y) değişkenlerine göre integrali alındığında ve $(b-a)^2$ ile bölündüğünde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin ilk kısmı elde edilir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\left[\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy + \int_a^b\int_a^b f\left(a+b-\frac{x+y}{2}\right)dxdy\right] \tag{3.11}$$
$$\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \frac{1}{y-x}\left[\int_x^y f(t)dt + \int_{a+b-y}^{a+b-x} f(t)dt\right]dxdy$$
$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Teorem 3.1.4. Hem f hem de $g:[a,b]\rightarrow \mathbb{R}$ simetrik konveks olduğunu ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)\breve{g}(t)dt + f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.12}$$
$$\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt,$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)\breve{g}(t)dt + \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{3.13}$$
$$\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + \frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \tag{3.14}$$

$$\geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)\breve{g}(t)dt + \frac{f(a)+f(b)}{2}g\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

ve

$$\frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \tag{3.15}$$

$$\geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \check{f}(t)\check{g}(t)dt + \frac{g(a)+g(b)}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir.

İspat: Her ikisinin simetrik konveks olduğu varsayılsın, o halde herhangi bir $t \in [a,b]$ için (2.12)'den

$$\left(\check{f}(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\left(\check{g}(t) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq 0$$

olur. Bu da herhangi bir $t \in [a,b]$ için aşağıdakine eşittir:

$$\check{f}(t)\check{g}(t) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\check{g}(t) + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\check{f}(t) \tag{3.16}$$

(3.16) 'da integral ortalaması alınarak $\frac{1}{b-a}\int_a^b$ in aşağıdaki elde edilir.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \check{f}(t)\check{g}(t)dt + f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b \check{g}(t)dt + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b \check{f}(t)dt.$$

Aşağıdaki eşitlik yukarıda yerine yazılırsa (3.12) eşitsizliği elde edilir.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \check{f}(t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Aynı yöntemle, (2.12) eşitsizliğinden herhangi bir $t \in [a,b]$ için

$$\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} - \check{f}(t)\right)\left(\frac{g(a)+g(b)}{2} - \check{g}(t)\right) \geq 0$$

yazılabilir, böylece (3.13) eşitsizliği elde edilir. Tekrar (2.12) ile herhangi bir $t \in [a,b]$ için

$$\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} - \check{f}(t)\right)\left(\check{g}(t) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq 0$$

dır, buradan da herhangi bir $t \in [a,b]$ için

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\check{g}(t) + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\check{f}(t) \geq \check{g}(t)\check{f}(t) + \frac{f(a)+f(b)}{2} g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitsizlikte $\frac{1}{b-a}\int_a^b$ integral ortalaması alınarak istenilen (3.14) sonucu elde edilir. (3.14) de f ile g yer değiştirilirse (3.15) elde edilir.

Uyarı 3.1.5.

$$\int_a^b \breve{f}(t)\breve{g}(t)dt = \frac{1}{4}\int_a^b [f(t) + f(a+b-t)][g(t) + g(a+b-t)]dt \tag{3.17}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_a^b [f(t)g(t) + f(a+b-t)g(t)\right.$$

$$\left. + f(t)g(a+b-t) + f(a+b-t)g(a+b-t)]dt\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_a^b [f(t)g(t) + \int_a^b f(a+b-t)g\,(t)dt\right.$$

$$\left. + \int_a^b f(a+b-t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f(a+b-t)g(t)dt\right]$$

$$= \int_a^b \breve{f}(t)g(t)dt$$

$s = a + b - t$ değişkenini değiştirerek $t \in [a, b]$ aşağıdaki elde edilir

$$\int_a^b f(a+b-t)g(t)dt = \int_a^b f(s)g(a+b-s)ds,$$

ve

$$\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)dt = \int_a^b f(s)g(s)ds \tag{3.18}$$

(3.12)-(3.15)'den

$$\{H_{mix}(f, g; a, b), H_{mix}(g, f; a, b)\} \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)g(t)d \tag{3.19}$$

$$\geq max\{H_{mid}(f, g; a, b), H_{tra}(f, g; a, b)\}$$

elde edilir. Burada;

$$H_{mix}(f, g; a, b) = \frac{f(a) + f(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$-\frac{f(a) + f(b)}{2}g\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.20}$$

$$H_{mid}(f, g; a, b) := f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$-f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.21}$$

ve

$$H_{tra}(f,g;a,b) := \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt + \frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$
$$-\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{3.22}$$

fonksiyonlardan biri $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik olduğunda aşağıdaki özel durum ortaya çıkar:

Sonuç 3.1.2. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 'nin konveks(konkav) ve simetrik olduğunu varsayalım yani herhangi bir $t \in [a,b]$ için $f(a+b-t) = f(t)$.

Eğer $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ simetrik konveks (simetrik konkav) ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise,

$$min\{H_{mix}(f,g;a,b), H_{mix}(g,f;a,b)\} \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$$
$$\geq max\{H_{mid}(f,g;a,b), H_{tra}(f,g;a,b)\} \tag{3.23}$$

dır. Bu eşitsizlik, ağırlığın simetrik olması durumunda birçok ilginç ağırlıklı eşitsizliği sağlamak için kullanılabilir.

Uyarı 3.1.6. Ayrıca, (3.12)-(3.15) eşitsizlikleri aşağıdaki formda da yazılabilmektedir:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)g(t)dt$$
$$\leq \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)g(t)dt$$
$$\leq \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right]\left[\frac{g(a)+g(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right] \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)g(t)dt$$
$$\geq -\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right]\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \tag{3.26}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)g(t)dt$$

$$\geq -\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\left[\frac{g(a)+g(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right] \quad (3.27)$$

Fonksiyonların pozitif olması durumunda, aşağıdaki gibi daha basit eşitsizlikler sağlanır:

Teorem 3.1.5. $f,g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonlarının simetrik konveks ve $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olduklarını varsayalım. O halde;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \quad (3.28)$$

$$\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)g(t)dt$$

$$\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$$

$$\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \quad (3.29)$$

$$\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)g(t)dt$$

$$\leq\frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

$$\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

elde edilir.

İspat: Eğer $f,g:[a,b]\to(0,\infty)$ simetrik konveks ise, (2.12) ile $\forall t\in[a,b]$ için;

$$0\leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\breve{f}(t)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (3.30)$$

ve

$$0\leq g\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\breve{g}(t)\leq\frac{g(a)+g(b)}{2} \quad (3.31)$$

dir. Eğer (3.30), $\breve{g}(t)$ ile çarpılırsa herhangi bir $t\in[a,b]$ için

$$0 \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\breve{g}(t) \le \breve{f}(t)\breve{g}(t) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\breve{g}(t)$$

olur. Eğer bu eşitsizliğin integral ortalamasını alırsak, o halde;

$$0 \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{g}(t)dt \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)\breve{g}(t)dt$$

$$\le \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{g}(t)dt$$

yani

$$0 \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \breve{f}(t)\breve{g}(t)dt \tag{3.32}$$

$$\le \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$$

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \le \frac{g(a)+g(b)}{2}$$

sonra

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \tag{3.33}$$

ve

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{3.34}$$

olur. (3.32)-(3.34) kullanarak (3.19) elde edilir. (3.19) eşitsizliği için, (3.21)'in kullanımına paralel bir yol ve benzer bir prosedür izlenmiştir.

3.2. Bazı Örnekler

$f(t) = \left|t - \frac{a+b}{2}\right|$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ simetrik konveks fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda $f(a) = f(b) = \frac{b-a}{2}$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ ve $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{4}$ dir. Dolayısıyla $l(t) = t$, $t \in [a,b]$ için aşağıdakini elde ederiz.

$$H_{mix}\left(\left|l - \frac{a+b}{2}\right|, g; a, b\right) = \frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt - \frac{b-a}{4}g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$H_{mix}\left(g, \left|l - \frac{a+b}{2}\right|; a, b\right) = \frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)$$

$$H_{mid}\left(\left|l-\frac{a+b}{2}\right|,g;a,b\right)=g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{4}$$

ve

$$H_{tra}\left(\left|l-\frac{a+b}{2}\right|,g;a,b\right)=\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)$$

(3.13)'den hareketle

$$min\left\{\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{b-a}{4}g\left(\frac{a+b}{2}\right),\frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)\right\} \tag{3.35}$$

$$\geq\int_a^b\left|t-\frac{a+b}{2}\right|g(t)dt$$

$$\geq max\left\{g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{4},\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)\right\}$$

olur. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ nin simetrik dışbükey olması ve $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması koşulu ile aşağıdakine ulaşılır. Eğer h, $[a,b]$üzerinde simetrik konveks ise, o zaman literatürde Bullen eşitsizliği olarak bilinen denklem elde edilir:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)dt\leq\frac{1}{2}\left[h\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{h(a)+h(b)}{2}\right]$$

Eğer $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konveks, o halde

$$\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{b-a}{4}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)$$

dır. Buradan

$$min\left\{\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{b-a}{4}g\left(\frac{a+b}{2}\right),\frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)\right\}$$

$$\frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt-\frac{1}{2}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

yazılabilir. Ayrıca

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{4}\geq\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)$$

eşitsizliği aşağıdakini verir

$$max\left\{g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{4},\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{g(a)+g(b)}{8}(b-a)\right\}=g\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{4}$$

Dolayısıyla, eğer $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde konveks ise, o halde

$$\frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt-\frac{1}{2}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|t-\frac{a+b}{2}\right|g(t)dt\geq\frac{b-a}{4}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\qquad(3.36)$$

olur. $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $[a,b]$ üzerinde konveks olması durumunda, bu eşitsizlik aşağıdakine eşdeğerdir:

$$\frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt-g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$\geq\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|t-\frac{a+b}{2}\right|g(t)dt-\frac{b-a}{4}g\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq 0\quad(3.37)$$

$f(t)=\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2$ ile tanımlanan simetrik konveks $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$f(a)=f(b)=\frac{(b-a)^2}{4},\qquad f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2dt=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Dolayısıyla

$$H_{mix}\left(\left(l-\frac{a+b}{2}\right)^2,g;a,b\right)=\frac{1}{2}(b-a)\left[\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{1}{3}(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$H_{mix}\left(g,\left(l-\frac{a+b}{2}\right)^2;a,b\right)=\frac{(b-a)^2}{24}[g(a)+g(b)]$$

$$H_{mid}\left(\left(l-\frac{a+b}{2}\right)^2,g;a,b\right)=\frac{(b-a)^2}{12}g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$H_{tra}\left(\left(l-\frac{a+b}{2}\right)^2,g;a,b\right)=\frac{1}{4}(b-a)\left[\int_a^b g(t)dt-\frac{(b-a)}{3}[g(a)+g(b)]\right]$$

dir. (3.23)'den $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun simetrik konveks olması ve $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması koşulu ile

$$\frac{1}{2}(b-a)min\left\{\frac{1}{2}\int_a^b g(t)dt-\frac{1}{3}(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right),\frac{(b-a)}{12}[g(a)+g(b)]\right\}$$

$$\geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 g(t)dt \tag{3.38}$$

$$\geq \frac{1}{4}(b-a)max\left\{\frac{b-a}{3}g\left(\frac{a+b}{2}\right), \int_a^b g(t)dt - \frac{b-a}{3}[g(a)+g(b)]\right\},$$

yazılabilir. $f(t)=(b-t)(t-a)$ ile tanımlanan simetrik konkav fonksiyonunu $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ele alalım. O halde

$$f(a)=f(b)=0, \qquad f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^2}{4}$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)(t-a)dt = \frac{(b-a)^2}{6}.$$

Dolayısıyla

$$H_{mix}\big((b-l)(l-a),g;a,b\big) := \frac{(b-a)^2}{6}g\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$H_{mix}(g,(b-l)(l-a);a,b) = \frac{1}{4}(b-a)\left[\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{6}(b-a)[g(a)+g(b)]\right]$$

$$H_{mid}\big((b-l)(l-a),g;a,b\big) = \frac{1}{4}(b-a)\left[\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{3}(b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

ve

$$H_{tra}\big((b-l)(l-a),g;a,b\big) = \frac{(b-a)^2}{12}[g(a)+g(b)]$$

dir. (3.23) ile aşağıdakini elde ederiz.

$$\frac{1}{2}(b-a)x\, min\left\{\frac{b-a}{3}g\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{1}{2}\left[\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{6}(b-a)[g(a)+g(b)]\right]\right\}$$

$$\geq \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-t)(t-a)g(t)dt \tag{3.39}$$

$$\geq \frac{1}{4}(b-a)\times max\left\{\int_a^b g(t)dt - \frac{1}{3}(b-a)g\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{3}[g(a)+g(b)]\right\},$$

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ simetrik konkav ve $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması koşulu ile

Şimdi, pozitif, konveks ve simetrik fonksiyon $f(t)=exp\left[k\left|t-\frac{a+b}{2}\right|\right], k>0$ ele alalım. O halde, (2.17) ile herhangi bir integrallenebilir simetrik konveks fonksiyonu $g:[a,b]\subset\mathbb{R}\to[0,\infty)$ için

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b exp\left[k\left|t-\frac{a+b}{2}\right|\right]g(t)dt \qquad (3.40)$$

$$\leq \frac{1}{2}exp\left[k\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt$$

$$\leq \frac{1}{2}exp\left[k\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

elde edilir.

3.3. Simetrik Harmonik Konvekslikle İlgili Eşitsizlikler

Teorem 3.3.1. $f:[a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ 'nin simetrik harmonik konveks olduğunu ve$[a.b]$ aralığı üzerinde integrallenebilir olduğunu varsayalım. $\breve{f}_H(x)$ simetrik harmonik konveks olarak gösterilsin.

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3.41)$$

İspat: $f:[a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ simetrik harmonik konveks olduğundan, Hermite-Hadamard tipi İşcan Eşitsizliğini yazarak $\breve{f}$ için aşağıdaki elde edilir:

$$\breve{f}_H\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\breve{f}_H(x)}{x^2}dx \leq \frac{\breve{f}_H(a)+\breve{f}_H(b)}{2} \qquad (3.42)$$

Bununla birlikte,

$$\breve{f}_H\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = f\left(\frac{2ab}{a+b}\right), \qquad \frac{\breve{f}_H(a)+\breve{f}_H(b)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ve

$$\int_a^b \frac{\breve{f}_H(x)}{x^2}dx = \int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$$

dir. Bu durumda (3.42) ile istenilen eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 3.3.2. $f:[a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$'nin $[a,b]$ üzerinde simetrik harmonik konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda, herhangi bir $x \in [a.b]$ için aşağıdaki elde edilir.

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \breve{f}_H(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (3.43)$$

İspat: $\breve{f}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde harmonik konveks olduğundan, herhangi bir $x \in [a,b]$ için aşağıdaki elde edilir,

$$\breve{f}_H\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{\breve{f}_H(x) + \breve{f}_H\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right)}{2}.$$

Ayrıca

$$\frac{\breve{f}_H(x) + \breve{f}_H\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right)}{2} = \frac{f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right)}{2}$$

ve

$$\breve{f}_H\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa (3.43) deki ilk eşitsizlik elde edilir. Ayrıca, $\breve{f}_H$ nin harmonik konveks olması ile herhangi bir $x \in [a,b]$ aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}\breve{f}_H(x) &\leq \frac{b(a-x)}{x(a-b)}\breve{f}_H(b) + \frac{a(x-b)}{x(a-b)}\breve{f}_H(a)\\ &= \frac{b(a-x)}{x(a-b)}\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{a(x-b)}{x(a-b)}\frac{f(a)+f(b)}{2}\\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Bu ise bize (3.43) deki ikinci eşitsizliği verir.

Açıklama 3.3.1. Eğer $f: [a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde simetrik konveks ise, o halde aşağıdaki elde edilir:

$$\inf_{x\in[a,b]} \breve{f}_H(x) = \breve{f}_H\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

ve

$$\sup_{x\in[a,b]} \breve{f}_H(x) = \breve{f}_H(a) = \breve{f}_H(b) = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Teorem 3.3.3. $f: [a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik harmonik konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \neq y$ ile birlikte herhangi bir $x, y \in [a,b]$ için aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) + f\left(\frac{2abxy}{2xy(a+b)-ab(x+y)}\right)\right]\\ &\leq \frac{xy}{2(y-x)}\left[\int_x^y \frac{f(t)}{t^2}dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{aby}{(a+b)y-ab}}^{\frac{abx}{(a+b)x-ab}} \frac{f(t)}{t^2}dt\right]\\ &\leq \frac{1}{4}\left[f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right) + f(y) + f\left(\frac{aby}{(a+b)y-ab}\right)\right] \qquad (3.44)\end{aligned}$$

İspat: $\breve{f}_H$, $[a,b]$ üzerinde harmonik konveks olduğundan o halde $\breve{f}$ aynı zamanda $x,y \in [a,b]$ olduğu yerde herhangi bir $[x,y]$ (veya $[y,x]$), alt aralığı üzerinde harmonik konvekstir. Harmonik konveks fonksiyonlar için yazılan Hermite-Hadamard tipi İşcan eşitsizlikleri ile $x \neq y$ olan herhangi bir $x,y \in [a,b]$ için

$$\breve{f}_H\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \frac{xy}{y-x}\int_x^y \frac{\breve{f}_H(t)}{t^2}dt \leq \frac{\breve{f}_H(x)+\breve{f}_H(y)}{2} \tag{3.45}$$

şeklindedir. Gerekli tanımlar kullanılırsa

$$\breve{f}\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) + f\left(\frac{2abxy}{2xy(a+b)-ab(x+y)}\right)\right]$$

$$\int_x^y \frac{\breve{f}_H(t)}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_x^y \left[\frac{f(t)}{t^2} + \frac{f\left(\frac{abt}{(a+b)t-ab}\right)}{t^2}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^y \frac{f(t)}{t^2}dt + \frac{1}{2}\int_x^y \frac{f\left(\frac{abt}{(a+b)t-ab}\right)}{t^2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^y \frac{f(t)}{t^2}dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{aby}{(a+b)y-ab}}^{\frac{abx}{(a+b)x-ab}} \frac{f(t)}{t^2}dt$$

ve

$$\frac{\breve{f}_H(x)+\breve{f}_H(y)}{2} = \frac{1}{4}\left[f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right) + f(y) + f\left(\frac{aby}{(a+b)y-ab}\right)\right]$$

olur ki bu bize (3.45) kullanılması ile istenilen sonucu verir.

Açıklama 3.3.2. Eğer (3.44)'de $x = a$ ve $y = b$ alırsak, o halde (3.43) elde edilir. Eğer $x \in [a,b]$, $y = \frac{abx}{(a+b)x-ab}$ alırsak, bu durumda (3.44)'den aşağıdaki elde edilir:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2}\frac{abx}{2ab-(a+b)x}\int_x^{\frac{abx}{(a+b)x-ab}} \frac{f(t)}{t^2}dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f(x) + f\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right)\right].$$

$x \neq \frac{a+b}{2}$, olduğunda ve $f\colon [a,b] \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik harmonik konveks olması koşulu ile. Bu eşitsizliğin x üzerinden integrali alınırsa (3.43)'ün ilk kısmının aşağıdaki geliştirilmiş hali elde edilir

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \left[\frac{abx}{2ab-(a+b)x}\int_x^{\frac{abx}{(a+b)x-ab}} \frac{f(t)}{t^2}dt\right]dx \leq \frac{1}{b-a}\breve{f}_H(x)dx$$

$f:[a,b]\subset\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik harmonik konveks olması koşulu ile Fonksiyon harmonik konveks olduğunda, aşağıdaki eşitsizlikleri de elde edilir.

Açıklama 3.3.3. $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ fonskiyonu harmonik konveks ise, o halde herhangi bir x, y ∈ [a, b], x≠ y için (3.44) den aşağıdaki eşitsizlikleri elde edilir:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)+f\left(\frac{2abxy}{2xy(a+b)-ab(x+y)}\right)\right]$$

$$\leq\frac{xy}{2(y-x)}\left[\int_x^y\frac{f(t)}{t^2}+\frac{1}{2}\int_{\frac{aby}{(a+b)y-ab}}^{\frac{abx}{(a+b)x-ab}}\frac{f(t)}{t^2}dt\right]$$

$$\leq\frac{1}{4}\left[f(x)+f\left(\frac{abx}{(a+b)x-ab}\right)+f(y)+f\left(\frac{aby}{(a+b)y-ab}\right)\right].$$

3.4. Biri Harmonik ve Diğeri Simetrik Harmonik Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler

Bu bölümde, klasik anlamda harmonik konveks (konkav) olan bir fonksiyonu ve diğer fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında simetrik harmonik konveks (konkav) olduğu durumları analiz ediyoruz.

Teorem 3.4.1. $g:[a,b]\subset\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ harmonik konveks (konkav) ve $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ harmonik konveks (konkav) ve [a, b] aralığında integrallenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki elde edilir.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{g(t)}{t^2}dt+\frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt$$
$$-\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}\leq\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\breve{f}(t)g(t)}{t^2}dt, \qquad (3.46)$$

ve

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\breve{f}_H(t)g(t)}{t^2}dt\leq f\left(\frac{2ab}{(a+b)}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt$$
$$+f\left(\frac{2ab}{(a+b)}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{g(t)}{t^2}dt-f\left(\frac{2ab}{(a+b)}\right)\frac{g(a)+g(b)}{2} \qquad (3.47)$$

İspat: g 'nin harmonik konveks ve f'nin $[a,b]$ üzerinde simetrik harmonik konveks olduğunu varsayalım, bu durumda herhangi bir $\lambda\in[0,1]$ için

$$(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)\geq g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) \tag{3.48}$$

ve

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geq \check{f}\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\geq f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \tag{3.49}$$

$$\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)+f\left(\frac{ab}{(1-\lambda)a+\lambda b}\right)\right], \lambda\in[0,1]$$

dir. (3.49) ile aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}0&\leq\left[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)-g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\right]\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}-\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\right]\\
&=[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(a)+f(b)}{2}g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\\
&\quad-[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\\
&\quad+\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\end{aligned} \tag{3.50}$$

Bu da aşağıdakine eşdeğerdir:

$$\begin{aligned}&[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\frac{f(a)+f(b)}{2}+\check{f}\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\\
&\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)+[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\end{aligned}$$

λ ya göre $[0,1]$ aralığı üzerinden integral alınırsa

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_0^1[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]d\lambda\\
&+\int_0^1\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)d\lambda\\
&\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_0^1 g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)d\lambda\\
&+\int_0^1[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)d\lambda\end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\int_0^1[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]d\lambda=\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

$$\int_0^1 g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)d\lambda=\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{g(t)}{t^2}dt$$

ve

$$\int_0^1 \breve{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) d\lambda = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\breve{f}_H g(t)}{t^2}dt$$

eşitlikleri kullanılırsa ve

$$\int_0^1 [(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\breve{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) d\lambda$$

$$= g(a)\int_0^1 (1-\lambda)\breve{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) d\lambda + g(b)\int_0^1 \lambda\breve{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) d\lambda \quad (3.52)$$

eşitliğinde $\breve{f}$ simetrik olduğundan

$$\int_0^1 (1-\lambda)\breve{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) d\lambda = \int_0^1 (1-\lambda)\breve{f}_H\left(\frac{ab}{(1-\lambda)a+\lambda b}\right) d\lambda$$

$s = 1-\lambda, \lambda \in [0,1]$ değişkenini değiştirerek, aşağıdaki elde edilir:

$$\int_0^1 (1-\lambda)\breve{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) d\lambda = \int_0^1 s\breve{f}_H\left(\frac{ab}{(1-s)a+sb}\right) ds.$$

Böylece (3.52) ile

$$\int_0^1 [(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)] + \breve{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right) d\lambda$$

$$= g(a)\int_0^1 s\breve{f}_H\left(\frac{ab}{(1-s)a+sb}\right) ds + g(b)\int_0^1 \lambda\breve{f}_H\left(\frac{ab}{(1-\lambda)a+\lambda b}\right) d\lambda$$

$$= [g(a)+g(b)]\int_0^1 \lambda\breve{f}_H\left(\frac{ab}{(1-\lambda)a+\lambda b}\right) d\lambda \quad (3.53)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\int_0^1 \lambda\breve{f}_H\left(\frac{ab}{(1-\lambda)a+\lambda b}\right) d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^1 \lambda\left[f\left(\frac{ab}{(1-\lambda)a+\lambda b}\right) + f\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\right] d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(t)}{t^2}dt \quad (3.54)$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} + \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\breve{f}_H(t)g(t)}{t^2}dt$$

$$\geq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{g(t)}{t^2}dt + \frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(t)}{t^2}dt \quad (3.55)$$

(3.48) ve (3.49) ile

$$0 \leq \left[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b) - g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)\right]$$

$$\times\left[\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)-f\left(\frac{ab}{2(a+b)}\right)\right]$$

$$=f\left(\frac{ab}{2(a+b)}\right)g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)-[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]f\left(\frac{ab}{2(a+b)}\right)$$

$$+[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)$$

$$-\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)$$

elde edilir. Bu ise $\lambda\in[0,1]$ için aşağıdakine eşdeğerdir:

$$[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]f\left(\frac{ab}{2(a+b)}\right)+\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)$$

$$\leq f\left(\frac{ab}{2(a+b)}\right)g\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)+[(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b)]\check{f}_H\left(\frac{ab}{\lambda a+(1-\lambda)b}\right)$$

Buradan $\lambda\in[0,1]$ için integral alırsak,

$$f\left(\frac{2ab}{(a+b)}\right)\frac{g(a)+g(b)}{2}+\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{\check{f}_H(t)g(t)}{t^2}dt$$

$$\leq f\left(\frac{2ab}{(a+b)}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(t)}{t^2}dt+f\left(\frac{2ab}{(a+b)}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{g(t)}{t^2}dt \qquad (3.56)$$

elde edilir ve (3.47) ispatlanmış olur.

3.5. Simetrik p-konvekslikle İlgili Eşitsizlikler

Önerme 3.5.1. $f:[a,b]\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun ve $g(x)=x^{1/p}x$, $x>0$, $p\neq 0$ olsun. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında simetrik p-konvekstir ancak ve ancak fog, $g^{-1}([a,b])=[a^p,b^p]$ $(veya[b^p,a^p]$ aralığında simetrik konvekstir.

İspat: f, $[a,b]$ üzerinde simetrik p-konveks fonksiyon olsun. $x,y\in g^{-1}([a,b])$ olarak alırsak, $x=u^p$ ve $y=v^p$ olacak şekilde $u,v\in[a,b]$ elemanları mevcut olup,

$$(\widetilde{fog})(tx+(1-t)y)$$

$$=\frac{1}{2}[(fog)(tx+(1-t)y)+(fog)(a^p+b^p-tx-(1-t)y)] \qquad (3.57)$$

$$=\frac{1}{2}[(fog)(tu^p+(1-t)v^p)+(fog)(a^p+b^p-[tu^p+(1-t)v^p])] \qquad (3.58)$$

$$=P_{(f;p)}\left([tu^p+(1-t)v^p]^{1/p}\right)$$

yazılabilir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde simetrik p-konveks fonksiyonu olduğundan aşağıdaki elde edilir:

$$P_{(f;p)}\left([tu^p+(1-t)v^p]^{1/p}\right) \le tP_{(f;p)}(u)+(1-t)P_{(f;p)}(v)$$
$$= t\frac{1}{2}\left[f(u)+f\left([(a^p+b^p-u^p]^{1/p}\right)\right]+(1-t)\frac{1}{2}\left[f(v)+f\left([(a^p+b^p-v^p]^{1/p}\right)\right]$$
$$= t\frac{1}{2}[(fog)(x)+(fog)(a^p+b^p-x)]+(1-t)\frac{1}{2}[(fog)(y)+(a^p+b^p-v^p)]$$
$$= t(\widetilde{fog})(x)+(1-t)(\widetilde{fog})(y) \tag{3.59}$$

(3.58) ve (3.59) ile fog, $[a^p,b^p]$ (veya $[b^p,a^p]$) aralığında simetrik konvekstir. Tersine fog, $[a^p,b^p]$ (or $[b^p,a^p]$) aralığında simetrik konveks ise, o zaman benzer şekilde $[a,b]$ aralığında f'in simetrik p-konveks olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.5.1. $f:[a,b]\subseteq(0,\infty)\to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında simetrik - konveks ise o halde Hermite–Hadamard eşitsizliklerin olduğunu söyleyebiliriz [24].

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\le\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.60}$$

İspat: $f:[a,b]\subseteq(0,\infty)\to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında simetrik p-konveks olduğundan o halde $P_{(f,p)}(x)$ fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliğini yazarak aşağıdaki elde edilir:

$$P_{(f;p)}\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\le\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{P_{(f;p)}(x)}{x^{1-p}}dx\le\frac{P_{(f;p)}(a)+P_{(f;p)}(b)}{2} \tag{3.61}$$

Aşağıdaki şekilde açıkça görülür ki

$$P_{(f;p)}\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)=f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right),\frac{P_{(f;p)}(a)+P_{(f;p)}(b)}{2}=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ve

$$\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{P_{(f;p)}(x)}{x^{1-p}}dx=\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b\frac{f(x)}{x^{1-p}}dx$$

dir. Bu durumda(3.61) ile aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

Uyarı 3.5.1. Teorem 3.5.1'de,

Eğer $p=1$ seçilirse (3.62) eşitsizlikleri Teorem (2.1.1)'teki (2.3) eşitsizliklerine indirgenir.

Eğer $p=-1$ seçilirse (3.62) eşitsizlikleri Teorem (2.1.2)'teki (2.4) eşitsizliklerine indirgenir.

Uyarı 3.5.2. Teorem 2.1.1'e yardımcı olarak, Teorem 3.5.1'in ispatı aşağıdaki gibi verilebilir [24]:

$f:[a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında simetrik p-konveks ise fog; $[a^p, b^p]$ (veya $[b^p, a^p]$) aralığında $g(x) = x^{1/p}, x > 0, p \neq 0$ simetrik konvekstir. Böylece,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$(fog)\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right) \leq \frac{1}{b^p-a^p}\int_{a^p}^{b^p} (fog)(x)dx \leq \frac{(fog)(a^p)+(fog)(b^p)}{2}$$

yani;

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir.

Teorem 3.5.2. Eğer $f:[a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında simetrik p–konveks ise bu durumda herhangi bir $x \in [a,b]$ aşağıdaki elde edilir

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq P_{(f;p)}(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.62}$$

İspat: $P_{(f.p)}$; $[a,b]$ üzerinde ise p-konveks olduğundan bu durumda herhangi bir $x \in [a,b]$ için aşağıdaki elde edilir.

$$\begin{aligned} f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right) &= P_{(f;p)}\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \\ &\leq \frac{P_{(f;p)}(x) + P_{(f;p)}\left([a^p+b^p-x^p]^{1/p}\right)}{2} \\ &= P_{(f;p)}(x) \end{aligned}$$

Bu da bize (3.62)'teki ilk eşitsizliği verir. Ayrıca, herhangi bir $x \in [a.b]$ için $t_0 \in [a.b]$ olursa

$$x = [t_0 a^p + (1-t_0)b^p]^{1/p}$$

olur. $P_{(f,p)}$ ne ait p-konvekslik ile aşağıdaki elde edilir:

$$P_{(f;p)}(x) \leq t_0 P_{(f;p)}(a) + (1-t_0)P_{(f;p)}(b) = P_{(f;p)}(a) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Bu da bize (3.62)'deki ikinci eşitsizliği verir.

Uyarı 3.5.3. Teorem 3.5.2'de;

Eğer $p = 1$ seçersek, bu durumda (3.62) eşitsizlikleri Teorem 2.1.10'da belirtildiği üzere (2.12) eşitsizliklerine indirgenir.

Eğer $p = -1$ seçersek, bu durumda (3.62) eşitsizlikleri Teorem 2.1.11'de belirtildiği üzere (2.17) eşitsizliklerine indirgenir.

Uyarı 3.5.4. Eğer $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında simetrik p–konveks ise, o halde

$$\inf_{x\in[a,b]} P_{(f;p)}(x) = f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right)$$

ve

$$\sup_{x\in[a,b]} P_{(f;p)}(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

elde edilir.

Sonuç 3.5.1. Eğer $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında simetrik p–konveks ve $w: [a,b] \to [0,\infty)$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir ise, o halde

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}}dx \leq \int_a^b \frac{w(x)P_{(f;p)}(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}}dx \quad (3.63)$$

dir. Dahası eğer w fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$ e göre tüm $x \in [a,b]$ için

$$w(x) = w([a^p + b^p - x^p]^{1/p})$$

ise o halde

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} \leq \int_a^b \frac{w(x)f(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}}dx \quad (3.64)$$

dir.

İspat. (3.63) eşitsizliği, (3.62) 'nin $w(x)/x^{1-p} \geq 0$ ile çarpılıp ve $[a,b]$ aralığındaki x üzerinden integrali alınmasıyla bulunur. Değişkeni değiştirerek aşağıdaki elde edilir:

$$\int_a^b \frac{w(x)f\left([a^p + b^p - x^p]^{1/p}\right)}{x^{1-p}}dx = \int_a^b \frac{w\left([a^p + b^p - x^p]^{1/p}\right)f(x)}{x^{1-p}}dx$$

w fonksiyonu $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$'e göre simetrik olduğundan, o halde

$$\int_a^b \frac{w\left([a^p + b^p - x^p]^{1/p}\right)f(x)}{x^{1-p}}dx = \int_a^b \frac{w(x)f(x)}{x^{1-p}}dx$$

dir. Böylece

$$\int_a^b \frac{w(x)P_{(f;p)}(x)}{x^{1-p}}dx = \frac{1}{2}\left[\int_a^b \frac{w(x)f(x)}{x^{1-p}}dx + \int_a^b \frac{w(x)\left([a^p+b^p-x^p]^{1/p}\right)}{x^{1-p}}dx\right]$$

$$= \int_a^b \frac{w(x)f(x)}{x^{1-p}}dx$$

olur. Dolayısıyla (3.63) ile (3.64) elde edilir.

Uyarı 3.5.5. (3.64) eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin p–konveks fonksiyonlar için ağırlıklı genellemesi olarak bilinir. (bu aynı zamanda Teorem 3'te gösterilmiştir). Böylece gösterildi ki, $[a,b]$ aralığında daha büyük simetrikleştirilmiş $p-$ konveks fonksiyon sınıfı için eşitsizlik geçerlidir.

Uyarı 3.5.6. $a,b,\alpha \in \mathbb{R}$ $0 < a < b$ *ve* $\alpha \geq 2$ olsun. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^p - a^p)^{\alpha-1}$, p > 0, $[a,b]$ aralığında simetrik p-konvekstir.

i.) Eğer (2.6)'da belirtilen eşitsizlikte $[a,b]$ arasındaki simetrik p-konveks *f*onksiyonunu ele alırsak

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}}\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}}dx \leq \frac{\tau(\alpha)}{2p(b^p-a^p)^{\alpha-1}}[J_{a^p}^{\alpha}+(wog)(b^p)+J_{a^p}^{\alpha}-(wog)(a^p)]$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}}dx$$

olur.

Teorem 3.5.3. $f:[a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonun $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ile $[a,b]$ aralığında simetrik p–konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda, $x \neq y$ olan herhangi bir $x,y \in [a,b]$ ile aşağıdaki Hermite–Hadamard eşitsizlikleri elde edilir:

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)+f\left(\left[a^p+b^p-\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)\right] \tag{3.65}$$

$$\leq \frac{p}{2(y^p-x^p)}\left[\int_x^y \frac{f(t)}{t^{1-p}}dt + \int_{[a^p+b^p-y^p]^{1/p}}^{[a^p+b^p-x^p]^{1/p}} \frac{f(t)}{t^{1-p}}dt\right]$$

$$\leq \frac{1}{4}\left[f(x)+f(y)+f\left([a^p+b^p-x^p]^{1/p}\right)+f\left([a^p+b^p-y^p]^{1/p}\right)\right].$$

İspat: $P_{(f;p),[a,b]}$ $[a,b]$ üzerinde p-konveks olduğundan, o halde $P_{(f;p),[a,b]}$ aynı zamanda $x,y \in [a,b]$ olduğunda herhangi bir $[x,y]$ (veya $[y,x]$) alt aralığında da p-konvekstir. Konveks *f*onksiyonların için olan Hermite-Hadamard eşitsizlikleri ile aşağıdaki elde edilir

$$P_{(f;p),[a,b]}\left(\left[\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)\le\frac{p}{y^p-x^p}\int_x^y\frac{P_{(f;p),[a,b]}(t)}{t^{1-p}}dt$$
$$\le\frac{P_{(f;p),[a,b]}(x)+P_{(f;p),[a,b]}(y)}{2} \tag{3.66}$$

$f, x\neq y$ olan herhangi bir $x,y\in[a,b]$ için $P_{(f;p)}$ tanımı ile

$$P_{(f;p),[a,b]}\left(\left[\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)+f\left(\left[a^p+b^p-\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)\right]$$

$$\int_x^y\frac{P_{(f;p),[a,b]}(t)}{t^{1-p}}dt=\frac{1}{2}\int_x^y\frac{1}{t^{1-p}}\left[f(t)+f\left([a^p+b^p-t^p]^{1/p}\right)\right]dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_x^y\frac{f(t)}{t^{1-p}}dt+\frac{1}{2}\int_x^y\frac{f\left([a^p+b^p-t^p]^{1/p}\right)}{t^{1-p}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_x^y\frac{f(t)}{t^{1-p}}dt+\frac{1}{2}\int_{[a^p+b^p-y^p]^{1/p}}^{[a^p+b^p-x^p]^{1/p}}\frac{f(t)}{t^{1-p}}dt$$

ve

$$\frac{P_{(f;p),[a,b]}(x)+P_{(f;p),[a,b]}(y)}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\left[f(x)+f(y)+f\left([a^p+b^p-x^p]^{1/p}\right)\right]+f\left([a^p+b^p-y^p]^{1/p}\right)$$

elde edilir. Böylece, (3.66) ile istenilen (3.65) sonucuna ulaşırız.

Uyarı 3.5.7. (3.65)'deki $x=a$ ve $y=b$ alırsak, bu durumda (3.60) elde edilir. Eğer verilmiş bir $[a,b]$ için $y=[a^p+b^p-x^p]^{1/p}$, bu durumda (3.65)'den elde edilir:

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\le\frac{p}{a^p+b^p-2x^p}\frac{1}{2}\int_x^{[a^p+b^p-x^p]^{1/p}}\frac{f(t)}{t^{1-p}}dt$$
$$\le\frac{1}{2}\left[f(x)+f\left([a^p+b^p-x^p]^{1/p}\right)\right] \tag{3.67}$$

$x\neq\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$, olduğunda $f:[a,b]\subseteq(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında simetrik $p-$konveks olması koşulu ile (3.67)'teki eşitsizlikleri $\frac{1}{x^{1-p}}$ ile çarptığımızda x üzerinden elde edilen eşitsizlik ile aşağıda belirtilen (3.60)'in ilk kısmının geliştirilmişi elde edilir.

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)\le\frac{p^2}{(b^p-a^p)}\int_a^b\left[\frac{1}{x^{1-p}(a^p+b^p-2x^p)}\int_x^{[a^p+b^p-x^p]^{1/p}}\frac{f(t)}{t^{1-p}}dt\right]dx$$

$$\le \frac{p^2}{(b^p - a^p)} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dt$$

$f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında simetrik p-konveks olması koşulu ile fonksiyon p-konveks olduğunda, aynı zamanda aşağıdaki eşitsizlikleri elde edilir:

Uyarı 3.5.8. Eğer $f: [a,b] \subseteq (0,\infty) \to R$ $p-$konveks ise, o halde (3.65) yolu ile aşağıda belirtilen eşitsizlikleri elde edilir:

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \le \frac{1}{2}\left[f\left(\left[\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right) + f\left(\left[a^p+b^p-\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)\right]$$

$$\le \frac{p}{2(y^p-x^p)}\left[\int_x^y \frac{f(t)}{t^{1-p}} dt + \int_{[a^p+b^p-y^p]^{1/p}}^{[a^p+b^p-x^p]^{1/p}} \frac{f(t)}{t^{1-p}} dt\right]$$

$$\le \frac{1}{4}\left[f(x)+f(y)+f\left([a^p+b^p-x^p]^{1/p}\right)+f\left([a^p+b^p-y^p]^{1/p}\right)\right] \quad (3.68)$$

$x \ne y$ olan herhangi bir $x,y \in [a,b]$ için (3.68) eşitsizliklerini $\frac{1}{(xy)^{1-p}}$ ile çarparsak ve (3.68)'i (x,y)'e entegre edip $[a,b]^2$ üzerinden integralini alır ve $\frac{p^2}{(b^p-a^p)^2}$ 'e bölersek, bu durumda, p-konveks fonksiyonlar için ilk Hermite-Hadamard eşitsizliğini şu şekilde inceleriz

$$f\left(\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}\right)$$

$$\le \frac{p^2}{2(b^p-a^p)^2}\left[\int_a^b\int_a^b \frac{f\left(\left[\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)}{(xy)^{1-p}} dxdy\right.$$

$$\left. + \int_a^b\int_a^b \frac{f\left(\left[a^p+b^p-\frac{x^p+y^p}{2}\right]^{1/p}\right)}{(xy)^{1-p}} dxdy\right]$$

$$\le \frac{p^2}{2(b^p-a^p)^2}\int_a^b\int_a^b \frac{1}{(xy)^{1-p}(y^p-x^p)}\left[\int_x^y \frac{f(t)}{t^{1-p}} dt + \int_{[a^p+b^p-y^p]^{1/p}}^{[a^p+b^p-x^p]^{1/p}} \frac{f(t)}{t^{1-p}} dt\right] dxdy$$

$$\le \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{1}{x^{1-p}} dx$$

Uyarı 3.5.9. Teorem 3.5.3'te

i.) eğer $p = 1$ seçersek, o zaman (3.65) eşitsizlikleri teorem (2.1.12)'deki (2.20) eşitsizliklerine indirgenir.

ii.) eğer $p = 1$ seçersek, o zaman (3.65) eşitsizlikleri eşitsizlikleri teorem (3.3.3)'deki (3.44) eşitsizliklerine indirgenir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde 3. Bölümdeki teorem 3.1.4 ve teorem 3.1.5 teki sonuçların bir genellemesi simetrik p konveks fonksiyonlar için elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar simetrik p konveks fonksiyonlar için yeni olup,

$p = 1$ alındığında; Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.5 teki sonuçlar elde edilmektedir.

$p = -1$ alındığında; simetrik harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1. $f, g: [a, b] \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ iki simetrik p-konveks ve integrallenebilir olsun. Bu taktirde

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x).P_{(g,p)}(x)}{x^{1-p}}dx + f(M_p)g(M_p) \tag{4.1}$$
$$\geq f(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} + g(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^{1-p}}$$

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x).P_{(g,p)}(x)}{x^{1-p}}dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{4.2}$$
$$\geq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} + \frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^{1-p}}$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} + g(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^{1-p}} \tag{4.3}$$
$$\geq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x)P_{(g,p)}(x)}{x^{1-p}}dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}g(M_p)$$

ve

$$\frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^{1-p}} + f(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} \tag{4.4}$$
$$\geq \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x)P_{(g,p)}(x)}{x^{1-p}}dx + \frac{g(a)+g(b)}{2}f(M_p)$$

elde edilir.

İspat: $f, g: [a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ iki simetrik p-konveks ve integrallenebilir olsun. Bu durumda (3.8) ve (3.62) den

$$\left[P_{(f;p)}(x) - f(M_p)\right]\left[P_{(g;p)}(x) - g(M_p)\right] \geq 0$$

olur. Burada; $M_{p=} \left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$ olarak alınırsa;

$$P_{(f;p)}(x)P_{(g;p)}(x) + f(M_p)g(M_p) \geq P_{(f;p)}(x)g(M_p) + P_{(g;p)}(x).(M_p)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\frac{1}{x^{1-p}}$ ile çarpılıp x'e göre $[a,b]$ üzerinde integral alınırsa ve eşitsizlik tekrar $\frac{p}{b^p-a^p}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f;p)}(x)P_{(g;p)}(x)}{x^{1-p}}dx + f(M_p).g(M_p)$$

$$\geq g(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f;p)}(x)}{x^{1-p}}dx + f(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_{aa}^b \frac{P_{(g;p)}(x)}{x^{1-p}}dx$$

olur. Aynı zamanda $P_{(f;p)}$ nin tanımından;

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f;p)}(x)}{x^{1-p}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx + \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}})}{x^{1-p}}dx\right] \quad (4.5)$$

yazabiliriz. İkinci integralde $u = [a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}}$ değişken değişimi yapılırsa;

$$u^p = a^p + b^p - x^p \Rightarrow pu^{p-1}du = -px^{p-1}dx$$

$$\frac{du}{u^{1-p}} = -\frac{dx}{x^{1-p}}$$

$$x = a \text{ için } u_1 = b$$

$$x = b \text{ için } u_2 = a$$

$$\int_a^b \frac{f([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}})}{x^{1-p}}dx = -\int_b^a \frac{f(u)}{u^{1-p}}du = \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}}du$$

olup

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f;p)}(x)}{x^{1-p}}dx = \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx \quad (4.6)$$

dir. Benzer şekilde

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(g;p)}(x)}{x^{1-p}}dx = \frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{g(x)}{x^{1-p}}dx \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) ile bulunanlar (4.5) de yerine yazılırsa;

$$\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{P_{(f;p)}(x).P_{(g;p)}(x)}{x^{1-p}}dx + f(M_p).g(M_p)$$

$$\geq g(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}}dx + f(M_p)\frac{p}{b^p - a^p}\int_a^b \frac{g(x)}{x^{1-p}}dx$$

elde edilir ki bu bize 4.1 eşitsizliği elde edilir. f, g simetrik p konveks olduğundan ve (3.8)'ten $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} - P_{(f,p)}(x)\right)\left(\frac{g(a)+g(b)}{2} - P_{(g,p)}(x)\right) \geq 0$$

olup (4.1) in ispatındaki benzer yol takip edilerek (4.2.)'de aynı şekilde elde edilir. Son olarak (3.8) ten $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} - P_{(f,p)}(x)\right)\left(P_{(g,p)}(x) - g(M_p)\right) \geq 0$$

dır. Bu da $\forall x \in [a,b]$ için

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}P_{(g,p)}(x) + g(M_p)P_{(f,p)}(x)$$

$$\geq P_{(f,p)}(x).P_{(g,p)}(x) + \frac{f(a)+f(b)}{2}g(M_p)$$

ifadesine eş değerdir. f ile g fonksiyonlarının yerlerini değiştirirsek; (4.3) ve (4.4) elde edilir.

Uyarı 4.1. Yukarıdaki teoremde p = 1 alınırsa; simetrik konveks fonksiyonlar için Teorem 3.1.4'te verilen sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1. "Yukarıdaki teoremde p= -1 alınırsa; simetrik harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f_H(x)g_H(x)}{x^2}dx + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)g\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \tag{4.8}$$

$$\geq f(\frac{2ab}{a+b})\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^2} + g(\frac{2ab}{a+b})\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^2}$$

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\breve{f}_H(x)\breve{g}_H(x)}{x^2}dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{4.9}$$

$$\geq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^2} + \frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\breve{f}_H(x)dx}{x^2}$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^2}+g\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^2} \tag{4.10}$$

ve

$$\frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^2}+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^2} \tag{4.11}$$

$$\geq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x)P_{(g,p)}(x)}{x^2}dx+\frac{g(a)+g(b)}{2}f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

elde edilir.

Teorem 4.2. $f,g:[a.b]\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonlarının simetrik p- konveks ve integrallenebilir olduğunu varsayalım. O halde

$$f(M_p)g(M_p)\leq f(M_p)\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} \tag{4.12}$$

$$\leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x).\,g(x)dx}{x^{1-p}}$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}}$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

ve

$$f(M_p)g(M_p)\leq g(M_p)\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^{1-p}} \tag{4.13}$$

$$\leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x)g(x)dx}{x^{1-p}}$$

1. $\leq \frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{f(x)dx}{x^{1-p}}$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

elde edilir.

İspat: Eğer $f,g:[a,b]\rightarrow(0,\infty)$ simetrik p-konveks ise, (3.8) ile $\forall x\in[a,b]$ için;

$$0\leq f(M_p)\leq P_{(f,p)}(x)\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.14}$$

ve

$$0\leq g(M_p)\leq P_{(g,p)}(x)\leq \frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{4.15}$$

dir. Eğer (4.14.)'ü $P_{(g,p)}(x)$ ile çarpar isek, o halde herhangi bir $x\in[a,b]$ için

$$0 \leq f(M_p)P_{(g,p)}(x) \leq P_{(f,p)}(x)P_{(g,p)}(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}P_{(g,p)}(x)$$

olur. Eğer bu eşitsizlik $\frac{1}{x^{1-p}}$ ile çarpılıp x'e göre $[a,b]$ üzerinde integral alınırsa ve eşitsizlik tekrar $\frac{p}{b^p-a^p}$ ile çarpılırsa;

$$0 \leq f(M_p)\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{P_{(g,p)}(x)dx}{x^{1-p}} \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x).P_{(g,p)}(x)dx}{x^{1-p}}$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{P_{(g,p)}(x)dx}{x^{1-p}}$$

bulunur. Yani (4.7) kullanılırsa

$$0 \leq f(M_p)\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{P_{(f,p)}(x).P_{(g,p)}(x)dx}{x^{1-p}} \tag{4.16}$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}}.$$

olur. (3.60) ile

$$g(M_p) \leq \frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} \leq \frac{g(a)+g(b)}{2},$$

sonra ilk eşitsizlik $f(M_p)$ ile çarpılırsa;

$$f(M_p)g(M_p) \leq f(M_p)\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} \tag{4.17}$$

bulunur ve ikinci eşitsizlik $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{p}{b^p-a^p}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^{1-p}} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2} \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.16.)-(4.18.) kullanarak (4.12) elde edilir. (4.13) eşitsizliği için, (4.15)'in kullanımına paralel bir yol izlenmiştir.

Uyarı 4.2. Yukarıdaki teoremde $p = 1$ alınırsa; simetrik konveks fonksiyonlar için Teorem 3.1.5'te verilen sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2. Yukarıdaki teoremde $p = -1$ alınırsa; simetrik harmonik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonuçlar elde edilir;

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)g\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^2} \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\check{f}_H(x)g(x)dx}{x^2} \tag{4.19}$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{g(x)dx}{x^2}$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}$$

ve

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)g\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq g\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\check{f}_H(x)dx}{x^2} \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\check{f}_H(x)g(x)dx}{x^2} \quad (4.20)$$

$$\leq \frac{g(a)+g(b)}{2}\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\check{f}_H(x)dx}{x^2}$$

$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\frac{g(a)+g(b)}{2}.$$

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında; simetrik konveks, simetrik harmonik konveks ve simetrik p-konveks ile ilgili literatürde olan çalışmalar incelenmiş olup, simetrik konveks fonksiyonların çarpımlarıyla ilgili integral eşitsizliklerinin bir genellemesi olan sonuçlar burada simetrik p-konveks fonksiyonlar için verilmiştir. Kullanılan ispat yöntemi simetrik konveks fonksiyonlarla ilgili daha önceki çalışmalara benzer olarak yapılmıştır. Bulgular kısmında elde edilen sonuçlar yeni olup özel durumlarda simetrik konveks fonksiyonlarla ilgili sonuçlara inmektedir. Ayrıca yine özel durumlarda simetrik harmonik konveks fonksiyonlar için yeni sonuçlar elde edilmektedir.

Bu tez çalışmasından yola çıkarak aynı zamanda simetrik p-konveks ve p-konveks fonksiyonların çarpımlarıyla ilgili yeni sonuçlar da elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., Inequalities. 2nd Edition, Cambridge University Press, United Kingdom, 1952.

[2] Beckenbach, E.F. and Bellman, R., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

[3] Szarski,J.1965. Differentiall Inequalities. Instytut Matematyczny Polskieej Akademi, Warszawa, 1965.

[4] Mitrinović, D.S., Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[5] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587pp,Dordrecht/Boston/London, 1991.

[6] Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A.M. Classical and new inequalities in analysis (Vol. 61). Springer Science & Business Media. Dordrecht/Boston/London, 1993.

[7] Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pecaric, J.E., Hadamard's Inequalities for rconvex Functions, J. Mathematical Analysis and Applications, 215, 461-470, 1997.

[8] Pearce, C.E.M. and Rubinov, A.M., P-functions, quasiconvex functions and Hadamard-type inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 240, 92-104, 1999.

[9] Zhang, K.S., Wan, S., p-convex functions and their properties, Pure Applied. Math. 23 (1) ,130-133, 2007.

[10] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex funtions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43 (6), 935-942, 2014.

[11] Anton, H., Elementary Linear Algebra, Jhon Wiley and Sons, Inc, 1994.

[12] Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara, 2000.

[13] Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc., Boston, 1992.

[14] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(6), 935-942, 2014.

[15] Hadamard, J., Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en paticular d' une fonction consideree par Riemann, J.math. Pures Appl., 171-215, 1893 .

[16] Hermite, Ch. Sur deux limites d' une integrale, Mathesis, 3, 82-83, 1883.

[17] Fejér, L., Uber die Fourierreihen, 2, Mathematical, Natuwise. Anz Ungar.Akad., Wiss, 24, 369-390, 1906.

[18] Chen, F. and Wu S. Fejér and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex funtions, Jurnal of Applied Mathematics, 2014, 1-6, 2014.

[19] Zhang, K.S., Wan, S., p-convex functions and their properties, Pure Application Mathematical, 23 (1) ,130-133, 2007.

[20] Latif, M.A., Dragomir, S.S. and Momaniat, E., Some Fejer type integral inequalities for geometrically-arithmetically-convex functions with applications, Research Report Collection, Article 25, 18, 2015

[21] İşcan, İ., New general integral inequalities for quasi-geometrically convex functions via fractional integrals Journal of Inequalities and Applications 2013 (491), 1-15, 2013.

[22] S. Dragomir, Symmetrized convexity and Hermite-Hadamard type inequalities, J. Math. Ineq. 10(4), 901-918, 2016.

[23] S., Wu, B. R. Ali, I.A. Baloch, A.U. Haq, Inequalities related to symmetrized harmonic convex functions, arxiv:1711.08051v1 [math.CA], 4 Nov 2017.

[24] İşcan, İ. Symmetrized P-Convexity And Related Some Integral Inequalities, arXiv:1901.09907, 2019.

[25] Shanhe, Wu, Basharat R. A., Baloch, I. A., Absar Ul Haq, Inequalities Related To Symmetrized Harmonic Convex Functions, arXiv: 1711.08051, 2017.

[26] Hua, J., Yan Xi B., Qi F. Hermite-Hadamard Type Inequalities For Geometric- Arithmetically s-Convex Functions, Communication of the Korean Mathematical Society, 29(1), 51–63, 2014,

[27] El Farissi, A., Benbachir, M. and Dahmane, M. An extension of the Hermite-Hadamard inequality for convex symmetrized functions. Real Analysis Exchange Editors, 38 (2), 467-474, 2012.

[28] Pachpatte, B.G. On some inequalities for convex functions, Research Repeat Collection, 6(E), 2003.

[29] Tunç, M., On some new inequalities for convex functions, Turk J Math, 36, 245-251, 2012.

[30] Dragomir, S.S., Hermite–Hadamard's type inequalities for operator convex functions, Applied Mathematics and Computation, 218, 766-772, 2011

[31] Zabandan, G., A new refinement of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions,Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 1(2), 1-7, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Tülin NAL KARADEMİR 1987 yılında Şebinkarahisar'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Yalova'da tamamladı. 2004 yılında Yalova Fatih Sultan Mehmet YDA Lisesi'nden mezun oldu. 2006 yılında başladığı Uludağ Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2012 yılında bitirdi. 2008 yılında başladığı Anadolu Üniversitesi İktisat bölümünü 2013 yılında bitirdi.2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Pedagojik Formasyon Eğitimini iki dönemde başarıyla tamamladı. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Aynı yıl Giresun Üniversitesi İşletme Anabilim Dalı tezli yüksek lisans eğitimini tamamlayarak 2018 yılında işletme doktora programına başladı. Halen Giresun Üniversitesi İşletme Anabilim dalında doktora öğrencisi olarak devam etmektedir.