T.C.
UNIVERSITE GALATASARAY
INSTITUT DES SCIENCES SOCIALES
DEPARTEMENT DE PHILOSOPHIE

UNE RECHERCHE PRELIMINAIRE POUR LA CONSTRUCTION D'ESPACE A PARTIR DES TROIS CLASSES DES PROPOSITIONS QUI SYSTEMATISENT L'ORDRE DES DEMONSTRATIONS CHEZ LES ELEMENTS LIVRE I D'EUCLIDE

MEMOIRE DE MASTER RECHERCHE

Yusuf TURHALLI

Directeur de recherche : Dr. Öğr. Üyesi Tarık Necati ILGICIOĞLU

SEPTEMBRE 2019

REMERCIEMENTS

J'adresse tous mes remerciements à ceux qui m'ont encouragé à écrire ce mémoire. Particulièrement, je remercie Tarık Necati ILGICIOĞLU d'accepter d'être le directeur de cette recherche et de m'accorder du temps pendant toutes ces années et à Aliye KOVANLIKAYA et à Ruhi TUNCER pour leurs précieux conseils. Je remercie également à Ahmet YENİSEY, à Görkem PINAR, à Cansu AKARSU, et à Ebru KAPLAN pour la rédaction.

TABLE DES MATIÈRES

RESUMÉ

Ce mémoire traite la construction de l'espace par les trois classes des propositions qui systématisent l'ordre des démonstrations, à partir des Notions Communes chez les *Éléments* livre I d'Euclide. Le motif qui nous conduit à écrire un tel mémoire est le fait que l'on découvre une possibilité d'examiner les propositions données dans l'œuvre d'Euclide, en ne pas s'adressant hors du texte. On voit qu'il est possible d'étudier les trois classes des propositions posées par Euclide au début du livre I, qui ont un rôle central pour la construction de l'espace et pour l'aboutissement des démonstrations, en changeant leur ordre installé. Dans le texte ces trois classes des propositions ; à savoir les Définitions, les Demandes, et les Notions Communes, sont ordonnées dans l'ordre qu'on les mentionne. Nous les traitons en déplaçant les propositions qui se trouvent sous le titre de Notions Communes au début de notre recherche ; car on pense qu'elles sont logiquement antérieures aux autres propositions. Ensuite, on examine les Définitions et les Demandes en partant des conclusions qu'on tire des Notions Communes.

Afin de saisir le contexte des *Éléments*, cette recherche commence par l'examen des *Seconds analytiques* où Aristote traite les fondements des sciences démonstratives. A la suite de cette investigation, on considère les propositions divisées en trois classes qui systématisent l'ordre des connaissances fournîtes par les démonstrations, à partir des Notions Communes. Cette recherche consiste en quatre parties, sauf l'introduction et la conclusion. Pourtant, il est obligatoire d'expliquer les raisons qui nous amènent à diriger une telle recherche, avant la revue de ces quatre parties.

D'abord, les *Éléments* consistent en treize livres où les livres suivants s'appuient sur des conclusions des livres précédents. Tous les livres, sauf VIII, IX, XII, et XIII, commencent par une section nommée « Définitions » qui énonce les propositions décrivant les propriétés des éléments et ces propositions sont employées en démonstrations des livres concernés. Puis, les livres qui ne commencent pas par

les Définitions emploient celles de précédents pour de démontrer ses propositions, s'il est exigé. Notons que les « Demandes (ou Postulats) » qui contiennent les propositions propres de la Géométrie, et les « Notions Communes (ou Axiomes) » qui contiennent les propositions au sujet d'un domaine plus large commun à toutes les sciences, sont seulement données au début du livre I qui est au centre de notre recherche. Il faut, donc, remarquer que toutes les démonstrations dépendent des trois classes des propositions.

Par ailleurs, non seulement les livres suivent les conclusions de leurs précédents mais aussi les démonstrations dans chaque livre suivent leurs précédents. En examinant l'œuvre d'Euclide, on peut remarquer que les propositions démontrées au début du livre, sont employées afin de démontrer des propositions suivantes. De plus, cette structure des *Éléments* nous conduit à penser sur le chemin qu'Euclide suit afin de démontrer des propositions et sur des éléments qu'il emploie lorsqu'il démontre une proposition et enfin sur son système ou sa méthode. On vient d'indiquer que les démonstrations dépendent des démonstrations précédentes et des propositions, qui systématisent l'ordre des démonstrations, contenues sous les titres de « Définitions », de « Demandes », de « Notions Communes ». A cet égard, on peut dire qu'il existe un enchaînement entre des démonstrations. De plus, il en est ainsi pour les autres livres des *Éléments* dans leurs totalités ; c'est-à-dire chaque démonstration suit soit des démonstrations précédentes soit des trois classes des propositions systématisant.

Dans ce contexte par la première classe des propositions systématisant, Euclide pose premièrement les définitions des éléments qui énoncent leurs essences et les sept premières définitions du livre I nous permettent à construire l'espace où ces éléments se trouvent. Par rapport à cela, les définitions données au début du livre I des *Éléments* sont celles qui ont des rôles dans la construction de l'espace et celle des autres éléments. Ensuite, par la deuxième classe ; à savoir les Demandes, il donne les règles des déterminations des éléments constructifs de l'espace et de quelques figures. En particulier, les deux premières propositions des Demandes donnent les règles pour la détermination de la droite et pour les opérations qui sont valables sur elle. Les autres propositions de cette classe sont postulées pour des éléments dont la détermination et les définitions dépendent des éléments constructifs de l'espace ; c'est-à-dire le point, la ligne et la surface. En dernier lieu, Euclide pose la troisième classe des propositions, nommées les Notions Communes, qui concernent à la fois, les éléments de la géométrie et les éléments de l'arithmétique. Des propositions qui se trouvent sous ce titre, posent les règles (ou les propriétés) des relations que tous les éléments suivent par rapport à leurs espèces. Ces relations sont l'égalité, d'être plus ou moins grande.

On atteint, voilà, à un système qu'Euclide forme dans le domaine géométrique. Il fonde son système sur ces trois classes des éléments données au début du livre I. Il pose, d'abord, les définitions des éléments primitifs jouant un rôle central pour la construction de l'espace (le point, la ligne, la surface) et de celles qui dépendent de ces éléments primitifs (l'angle, la figure, les droites parallèles), et puis, il donne les règles de détermination pour eux, et enfin, il donne les relations concernant le domaine géométrique. Il aboutit aux conclusions dans les preuves des propositions à partir de ces trois classes des propositions systématisant. En fait, on les appelle en tant que trois classes des propositions systématisant en référant à leur rôle dans le système et la méthode d'Euclide.

D'autre part, on peut observer qu'il emploie le terme « δεῖξαι », qui est une forme du verbe « δείκνυμι » connotant « montrer » à la troisième personne du singulier. Ce verbe constitue également la racine du terme « ἀπόδειξις » signifiant « la démonstration » qui est employé à la fin des démonstrations. De même, tandis qu'on examine les démonstrations on remarque que les propositions systématisant sont utilisées pour l'aboutissement aux conclusions, et par suite ils ont un rôle central pour les démonstrations, car leur vérité et leur validité dépendent de ces propositions. Enfin, en continuant à étudier les *Éléments*, on constate que les démonstrations qui se trouvent au début du texte sont employées dans les démonstrations qui s'ensuivent. En cela, il existe un enchainement entre les démonstrations.

Dans ce cadre, il parait convenable de chercher les réponses des questions posées au sujet de la méthode et du chemin des *Éléments*, dans les *Seconds analytiques* où Aristote examine les fondements et les conditions des sciences démonstratives. Il examine, en premier lieu, la relation entre les connaissances reçues au moyen du raisonnement et des connaissances préexistantes. Puis, il traite le lien entre la science et la démonstration. Après avoir révélée cette relation il expose les prémisses (ou comme il les identifie : les principes) de la démonstration en traitant leurs conditions. Et plus, il les divise en thèse et axiome et alors, il donne les définitions de ces deux. Puis, il divise la thèse en la définition et l'hypothèse et il les définit. De plus, il s'efforce de définir la nature des prémisses en partant du caractère nécessaire et universel de la démonstration. Puis, il explique les termes « attribué à tous », « par soi » et « universellement » comme un préliminaire de la recherche des conditions de la nécessité. Dès qu'il montre la nature nécessaire et universelle des principes, il montre qu'il n'est pas possible de démontrer les principes d'une science démonstrative au moyen d'elle. Enfin, il considère des principes différents et il donne les trois classes des principes : les axiomes, les postulats, les définitions. C'est pour cela qu'on peut dire qu'Euclide suit le chemin posé par Aristote pour les sciences démonstratives, car les éléments employés par Euclide afin de démontrer les propositions sont ceux qui sont examinés dans les *Seconds analytiques*. De plus, il les emploie de même manière dont Aristote les pose dans les *Seconds analytiques*.

Enfin il faut noter que non seulement la découverte des rôles des trois classes des propositions qui systématisent l'œuvre d'Euclide, mais aussi la compréhension des significations de ces propositions sont essentielles. Parce que leurs significations portent une grande importance pour la présentation des connaissances dans les *Éléments*. Remarquons que lorsqu'on étudie les propositions systématisant dans l'ordre posé par Euclide, on est confronté aux problèmes concernant la compréhension du texte étant donné la présence des définitions dans lesquelles des termes indéfinis sont employés. Dans ce cadre on a deux options pour l'examen du texte : ou bien on fait recours aux philosophes qui donnent les définitions pour ces termes indéfinis, ou bien on considère le système posé par Euclide en tant que fermé et on essaie de trouver les descriptions des éléments sans faire attention à l'ordre des propositions données par l'auteur. On considère que le système d'Euclide peut être étudié comme un système fermé. C'est pourquoi, on essaye de comprendre le texte par les propositions données dans lui et on pense qu'il est possible de changer l'ordre des propositions posé par Euclide. A cet égard, comme les termes indéfinis sont utilisés dans les Définitions, et comme il y a les descriptions de ces termes qui se trouvent dans les Notions Communes, on change l'ordre donné des propositions se trouvant sous ces titres pour une compréhension plus rigoureuse. Pour cela, on déplace l'examen des propositions sous le titre de Notions Communes au début de notre recherche. De plus, à partir des implications des Notions Communes, on traitera seulement les sept premières Définitions et les deux premières Demandes afin d'exposer leur rôle dans la construction de l'espace[1]. Au demeurant, on doit traiter la construction de l'espace, car les Définitions et les Demandes contiennent les propositions qui décrivent les éléments primitifs où les autres éléments se trouvent et qui donnent les règles de détermination de ces éléments. A cet égard, on peut assumer cet examen comme une recherche préliminaire pour la construction de l'espace en partant de notre méthode.

Première partie : Les principes nécessaires et universels des sciences démonstratives

Dans cette partie, on a traité les parties des *Seconds analytiques* concernant la démonstration et ses principes, afin d'identifie la méthode des *Éléments*. Dans ce cadre, on a examiné la définition et les conditions de la science chez *Seconds Analytiques*. On a vu que la science est la connaissance nécessaire et vraie des choses, et la démonstration, qui est un genre du syllogisme, nous la fournit. En outre, la démonstration est un enchaînement (ou une suite) des propositions où elles sont liées les uns aux autres par la nécessité, et les premières (i.e. principes) de ces propositions sont indémontrables et immédiates, alors que la dernière proposition résulte nécessairement des précédents. Ensuite il faut remarquer que comme les démonstrations nous constituent la science et comme l'objet de la science est marqué par la nécessité, la connaissance scientifique devrait être un enchaînement des démonstrations où les suivantes sont nécessairement liées aux précédents.

Au demeurant, les principes de la démonstration se divisent en trois : les définitions, les postulats, les axiomes. Les définitions sont les propositions décrivant les éléments du domaine de la science. Les axiomes sont des propositions déclarant les vérités sans lesquels on ne peut pas apprendre. De plus, ils sont nécessaires par soi. Les postulats sont les propositions qui énoncent que les éléments primitifs de cette science existent. Ils ne sont pas nécessaires par soi. Notons, tandis que les postulats semblent démontrables, ils sont assumés et employés sans démonstration. Ces trois classes des propositions sont les principes de démonstration à partir desquelles elle s'enchaine. De même, ces propositions systématisent l'enchainement des propositions.

[1] Il faut indiquer qu'on entend les règles de détermination des éléments primitifs et les relations entre eux par la construction de l'espace.

Finalement, on a montré qu'Euclide suit le chemin établit par Aristote. Lorsqu'on traite les *Éléments*, on note que les démonstrations aboutissent aux conclusions en partant des trois classes des propositions données au début du premier livre. Euclide emploie les inférences des trois classes des propositions dans toutes les démonstrations, malgré le fait qu'il ne les démontre pas.

Deuxième partie : L'examen des contenus des notions communes

Dans cette partie, on a premièrement exposé une discussion historique sur l'authenticité de Notions Communes. On a traité les arguments de Paul Tannery sur l'interpolation de ce titre et les contre arguments posés par Thomas L. Heath. On a montré que les Notions Communes doivent être dans le texte original des *Éléments*, car en l'absence de cette section non seulement on doit comprendre les significations des autres classes des propositions en référant au hors du texte, mais aussi les démonstrations deviennent invalides.

Ensuite, on a discuté les connotations des Notions Communes. Ils sont les propositions qui posent les relations et les opérations primitives du domaine dont Euclide s'occupe. Dans ce cadre on a analysé les relations connotées par les propositions : l'égalité, l'addition, le retranchement, la substitution, et l'inégalité. On a montré que la relation d'égalité, qui est posée par la première notion commune, possède les propriétés de la relation d'équivalence. Cette relation possède la réflexivité, la symétrie et la transitivité.

Par la suite, on a traité l'opération d'ajouter et de retrancher qui sont posées par la deuxième et la troisième notions communes. On a montré que ces opérations fonctionnent sur les éléments qui appartiennent au même genre. Ensuite on a considéré la connotation du fait de « s'ajuster », qui est posée par la septième notion commune, pour les éléments de la géométrie et de l'arithmétique. On a mentionné que la notion commune qui énonce que l'ajustement des égales est accepté en tant que proposition permettant la superposition. Par suite, il est considéré comme un axiome de congruence. En revanche, on a donné les raisons à partir desquelles il faut admettre que cette proposition n'est pas seulement posée dans un contexte géométrique : si l'on prend cette notion commune en tant qu'axiome de congruence, les démonstrations où la substitution des égales se trouve deviennent invalides ; car il n'y a aucune expression, sauf cette notion commune, dans le texte qui permet la substitution des égales.

Dans la suite, on a discuté la relation d'inégalité et les termes « partie » et « tout » dans l'examen de la huitième notion commune. On a montré que la relation d'inégalité possède la propriété d'antisymétrie et celle de transitivité. Enfin nous avons exposé les relations entre le tout et la partie.

Troisième partie : L'examen des définitions à partir des implications des notions communes

Dans cette partie, on a traité les sept premières définitions du livre I des *Éléments* par les conclusions tirées au sujet de la partie et du tout. On a traité le point en tant qu'élément « dont il n y a aucune partie » et on a montré en partant de la première définition que la première différence spécifique entre les genres est le fait de posséder des parties. Ensuite, on a vu que les parties du tout doivent appartenir au même genre que le tout, et que le point n'est pas le tout qui possède les parties ni peut-il être partie d'un tout. En outre, on a exposé par rapport à la deuxième et la cinquième définition, que la ligne et la surface appartiennent au genre des choses possédant des parties, et qu'elles sont divisées par le fait d'avoir largeur. En cela, le fait d'avoir largeur est la deuxième différence spécifique qui divise les genres. De plus, on a révélé les conditions de limitation pour ces espèces, dans l'examen de la troisième et de la sixième définition. Le point est la limite de la ligne, et la ligne est celle de la surface. Enfin, dans l'analyse de la quatrième et septième définition, nous avons marqué les propriétés de la ligne droite et celle de la surface plane, à partir de la relation d'égalité et la relation de la partie-tout.

Quatrième partie : La construction de l'espace par rapport aux trois classes de propositions systématisant

Dans cette partie, on a traité les propositions se trouvant sous le titre de Demandes et la construction d'espace, en partant des inférences qu'on a obtenu de Notion Communes et de Définitions. En premier lieu, on a considéré la structure de la première demande et les mots clés en tant qu'ils s'emploient en grec ancien. En deuxième lieu, on a discuté des relations posées par elle. Puis, en référant aux implications des définitions, on a examiné l'ordre des éléments postulés. Alors, on a considéré la séparation des points les uns des autres par rapport à la condition de la limitation. Et puis, on a mentionné des certains attributs essentiels des points en partant de ladite relation entre le point et la ligne. Ensuite, on a exposé une relation nommée « d'être entre » pour des points en référant à la relation partie-tout. Enfin, on a étudié des implications de la première demande sur la construction d'espace en soulignant des conclusions des définitions de la ligne droite et la surface plane. Ensuite, on a considéré la deuxième demande, en partant des significations des mots employés en grec ancien. Puis, on a discuté le terme « prolonger » par les conclusions obtenues des Notions Communes.

ABSTRACT

This thesis deals with the construction of space by the three classes of propositions which systematize the order of demonstrations, starting from the Common Notions in Book I of Euclid's *Elements*. The reason that leads us to make such a research is the fact that we discover an opportunity to examine the propositions given in Euclid's work, by not addressing ourselves outside the text. We see that it is possible to study the three classes of propositions being posited by Euclid at the beginning of Book I, which have a central role for the construction of space and for the outcomes of demonstrations, by changing their present order. In the text these three classes of propositions; namely Definitions, Postulates, and Common Notions, are installed in the order we mention them. We treat them by moving the Notions Communes at the beginning of our research. Then we examine the Definitions and Postulates based on the conclusions we draw from the Common Notions.

In order to grasp the context of the *Elements*, we begin this research by examining the *Posterior Analytics* where Aristotle deals with the foundations of the demonstrative sciences. As a result of this investigation, we consider the propositions posed in the three classes which systematize the order of the knowledge provided by the demonstrations, starting from the Common Notions. Our research consists of four parts except the introduction and the conclusion. However, it is obligatory to explain the reasons that conduct us to lead such a research, before the review of these four parts.

First, the *Elements* consists of thirteen books where the following books assume conclusions of the previous ones. All books, except VIII, IX, XII, and XIII, begin with the sections named "Definitions" which are the propositions describing the properties of the elements and which are used in demonstrations in these books. Then, the books which do not start with the Definitions use those of precedents to demonstrate its propositions, if it is required. Let us note that the "Postulates" which

contain the proper propositions of Geometry, and the "Common Notions (or Axioms)" which contain the propositions of a wider domain, are only given at the beginning of the Book I which will be at the center of our research. It must also be noted that all the demonstrations depend on the three classes of propositions.

Moreover, not only do the books follow the conclusions of the preceding ones, but also the conclusions of the demonstrations follow those of the preceding ones. In examining Euclid's work, we can notice that the propositions shown at the beginning of the book can be used to demonstrate the following propositions. Moreover, this structure of *Elements* leads us to think about the path Euclid follows in order to demonstrate propositions, and about elements that he uses when he demonstrates a proposition, and finally, about his system or method. We have just indicated that the demonstrations depend on the already demonstrated propositions and the propositions contained under the titles of "Definitions", "Postulates", and “Common Notions. In this respect, we can say that there is a sequence of the demonstrations. Moreover, this is same for the other books of *Elements* in their totalities; that is to say, they employ in demonstrations, either the demonstrations of the books which precede them or demonstrations of their preceding propositions or the three classes of propositions.

In this context, by the first class he posits firstly the definitions of the elements, which state their essences and which allow us to construct the space where these elements are found. In this regard, definitions given at the beginning of Book I of *Elements* are those that have roles in the construction of space and that of other elements. Then, by the second class of these systematizing propositions; namely the Postulates, Euclid gives the rules of determinations of the constructive elements of the space and some figures. Indeed, the first two propositions of the Postulates give the rules for the determination of the straight line and for the operations which are possible on it. Other propositions of this class are of for elements whose determination and definitions depend on the constructive elements of space; these are, the point, the line and the surface. In the last place, Euclid posits the third class of propositions, called the Common Notions, which concern at the same time both the elements of geometry and those of arithmetic. Propositions under this heading, lay down the rules (or properties) of relationships that all elements follow in relation to their species. These relations are equality, to be lesser or greater.

We reach, here, the system that Euclid forms in the geometrical domain. He bases his system on these three classes of propositions given at the beginning of the Book I. He poses, first, definitions of primitive elements playing a central role for the construction of space (the point, the line, the surface) and those of depend on them (the angle, the figure, the parallel lines), and then, he gives rules of determination for them, and finally, he gives the relations concerning the geometrical domain. He leads to conclusions in the proofs of propositions from these three classes of systematizing propositions. In fact, we call them as three classes of systematizing propositions by referring to their role in his system and method.

On the other hand, we can observe that he uses the term "δεῖξαι", which is a mode of the verb "δείκνυμι" signifying "to show". And this verbe is the root of the term "ἀπόδειξις" which signifies "the demonstration". The verb is used frequently in the end of numerous demonstrations. In the same way, while we examine the demonstrations we notice that the systematizing propositions are used for the outcomes of the conclusions, and they have a central role for the demonstrations, because the validity of them depend on these propositions. Finally, continuing to study *Elements*, we find that the demonstrations at the beginning of the text are used in the ensuing demonstrations. In this, there is a sequence of the demonstrations.

In this context, it seems appropriate to look for the answers in the *Second Analytics* where Aristotle examines the foundations and conditions of the demonstrative sciences. First, he examines the relationship between pre-existing knowledge and the knowledge received through reasoning. Then, he deals with the link between science and demonstration. After revealing this relation he exposes the premises (or as he identifies them, the principles) of the demonstration by treating their conditions. And more, he divides them into thesis and axiom and then, he gives the definitions of those two. Then, he divides the thesis into the definition and the hypothesis and defines them. Moreover, he strives to the nature of the premises starting from the necessary and universal character of demonstration. Then, he explains the terms "attributed to all", "by itself", and "universally" as a preliminary of the search for the conditions of necessity. As soon as he shows the necessary and universal nature of the principles, he shows that it is not possible to demonstrate the principles of a demonstrative science by means of it. Finally, he considers different principles and gives the three classes of principles: axioms, postulates, definitions. For this reason, we can say that Euclid follows the path laid down by Aristotle for demonstrative sciences, because the elements used by Euclid to demonstrate the propositions are those examined in the *Posterior Analytics*. Moreover, he uses them in the same way that Aristotle poses in the *Posterior Analytics*.

Finally, it should be noted that not only the discovery of the roles of the three classes of propositions systematizing Euclid's work, but also the understanding of the implications of these propositions are essential, because their implications are of great importance for the presentation of knowledge in *Elements*. Note that when we study the systematizing propositions in the order posed by Euclid, we face problems in the understanding of the text. Because there are definitions in which indefinite terms are used. In this context we have two options for examining the text: either we postulate to the philosophers who give the definitions for these indefinite terms, in his works, or we consider the system posed by Euclid as closed and we try to find the descriptions of the elements by not paying attention to the order of the propositions given by the author. We are of the opinion that Euclid's system can be studied as a closed system. This is why we try to understand the text by the propositions given in it and we think that it is possible to change the order of the propositions posited by Euclid. In this respect, as the undefined terms are used in the Definitions, and as there are descriptions of these terms found in the Common Notions, we change the given order of these titles by Euclid for a detailed understanding. For this, we start from the propositions given by Euclid under the title of the Common Notions. Moreover, from the implications of the propositions given under the title of Common Notions, we will only deal with the first seven Definitions in order to expose their role in the construction of space. In this respect, we can assume this research as a preliminary for the construction of space.

First part

In this part, we have treated the parts of the *Posterior Analytics* concerned with the proof and its principles, in order to identify the method of *Elements*. In this framework, we examined the definition and conditions of science as found in *Posterior Analytics*. We have seen that science is the necessary and true knowledge of things, and demonstration, which is a kind of syllogism, furnishes it to us. Moreover, the proof is a sequence (or a continuation) of the propositions where they are linked to each other by necessity, firsts of which (i.e. principles) are indemonstrable and immediate, the last of which necessarily results from the preceding ones. Then it should be noted that as the demonstrations construct science and the object of the science is marked by necessity, scientific knowledge should be a sequence of demonstrations where the succeeding ones are necessarily related to the previous ones.

Moreover, the principles of the demonstration are divided into three: the definitions, the postulates, the axioms. Definitions are propositions describing elements of the domain of science. Axioms are propositions declaring the truths without which nothing can be learned. Plus, they are necessary by themselves. The postulates are the propositions stating that the primitive elements of the science exist. They are not necessary by themselves. Note, while the postulates seem demonstrable, they are assumed and used without demonstration. These three classes of propositions, being the principles, are the first, indemonstrable and immediate elements of a demonstration from which it is linked, as they systematize this sequence of propositions.

Finally, we have shown that Euclid follows the path established by Aristotle. When dealing with *Elements*, we differentiate that the demonstrations lead to the conclusions starting from the three classes of the propositions given at the beginning of the first book. Euclid uses the implications of the three classes of propositions in all demonstrations, however, he does not demonstrate them.

Second part

In this part, we first presented a historical discussion on the authenticity of Common Notions. We have discussed Paul Tannery's arguments on the interpolation of this title and the counter arguments put forward by Thomas L. Heath. We have shown that the Common Notions must be in the original text of *Elements*, because in the absence of this section the demonstrations become invalid.

Then we discussed the implications of Common Notions. They are the propositions which give the relations and the primitive operations of the domain that Euclid deals with. In this framework we have analyzed the relations that the propositions imply: equality, addition, substraction, substitution, and inequality. We have shown that the relation of equality, which is posited by the first common notion, possesses the properties of the relation of equivalence. This relation possesses reflexivity, symmetry and transitivity.

After having analyzed the relation of equality, we have treated the operation of adding and subtracting which are posed by the second and the third common notions. We have shown that these operations work on the elements that belong to the same genre. Then we considered the signification of "fit in", which is posited by the seventh common notion, for the elements of geometry and arithmetic. We have mentioned that the common notion which states the adjustment of equals is accepted as a proposition permitting superposition, therefore it is considered as a congruence axiom. On the other hand, we gave the reasons from which it must be admitted that this proposition is not only posited in a geometrical context: if we take this common notion as congruence axiom, the demonstrations where the substitution of equal is found to become invalid; for there is no expression, except this common notion, in the text which allowed the substitution of equals.

In the following, we have discussed the relation of inequality and the terms "part" and "whole" in the discussion of the eighth common notion. We have shown that the inequality relation has the properties of anti-symmetry and transitivity. Finally we exposed the relations between the whole and the part.

Third part

In this part, we have treated the first seven definitions of Book I of *Elements* by the conclusions we drew about the part and the whole. We treated the point as an element without parts and we have shown from the first definition that the first difference between genuses is having parts. Then we have seen that the parts of the whole must belong to the same kind as the whole and that the point is not the whole that has the parts nor can it be a part of a whole. Besides, we have expounded, in the second and the fifth definitions, that the line and the surface belong to the genus of things having parts, and that they are separated by having width. In this, having width is the second difference for dividing the genus. In addition, we have revealed the boundary conditions for these species in consideration of the third and sixth definitions. The point is the limit of the line and the line is that of the surface. Finally, in the analysis of the fourth and seventh definition, we have marked the properties of the straight line and that of the plane surface, from the relation of equality and the relation of the part-whole.

Fourth part

In this part, we have dealt with the propositions found under the title of Postulats and the construction of space, starting from the conclusions obtained from Common Notions and Definitions. In the first place, we considered the structure of the first postulate and the key words which are used in ancient Greek. In the second place, the relations given by it were discussed. Then, referring to the implications of the definitions, the order of the postulated elements was examined. Then, we considered the separation of the points from each other with respect to the condition of limitation. And then, we have mentioned some essential attributes of the points starting from the relation between the point and the line. Then, we exposed a relation named "to be between" for points by referring to the part-all relation. Finally, implications of the first postulate on construction of space have been investigated by highlighting the conclusions of the definitions of the straight line and the plane surface. Then, we considered the second postulate, starting from the meanings of the words used in ancient Greek. Then, we analyzed the terme "produce" with the conclusions obtained from the Common Notions.

ÖZET

Bu tezde, Öklid'in *Elemanlar'*ının birinci kitabındaki Ortak Mefhumlardan yola çıkarak ispatların sırasını sistemleştiren üç önerme sınıfı aracılığıyla uzayın kurulumu ele alınır. Bizi bu çalışmaya Öklid'in metni dışında hiçbir yere başvurmadan, *Elemanlar'*da verilen önermelerin incelenebilmesi ihtimali sürükledi. Bu üç önerme sınıfıyla, metindeki yerleşim düzenlerini değiştirerek çalışmanın mümkün olduğunu gördük. Metinde bu üç önerme sınıfı, yani Tanımlar, Postulatlar ve Ortak Mefhumlar, adlarını zikrettiğimiz sırayla verilmiştir. Fakat biz, kendi çalışmamızda bunları değerlendirirken Ortak Mefhumlar başlığında yer alan önermelerin incelemesini öne alarak başlıyoruz, ardından Tanımları ve Postulatları, Ortak Mefhumlardan çıkardığımız sonuçlardan hareketle inceliyoruz.

Araştırmamıza, Aristoteles'in ispata dayanan bilimlerin temelini ele aldığı *İkinci Analitikler'*in incelemesiyle başlıyoruz. Bunu yapmaktaki amacımız, *Elemanlar'*ı bir bağlama oturtmaktan başka bir şey değildir. Sorgulamamızın devamında, ispat yolu ile elde edilen bilgilerin sırasını sistemleştiren bu üç önerme sınıfında ortaya konan önermeleri ele alıyoruz. Araştırmamız, giriş ve sonuç hariç dört bölümden oluşuuyor. Ancak, bu dört bölümden önce böyle bir araştırmaya bizi iten sebepleri açıklamamız yerindedir.

Elemanlar on üç kitaptan oluşur. VII, IX, XII ve XII. kitaplar ki bunlar dışındaki tüm kitaplar "Tanımlar" başlığıyla başlar, kendilerinden önceki kitapların sonuçlarını kabul ederek ispatları sonuçlandırır. Tanımlar kısmı ile başlamayan kitaplar, eğer gerekli ise, kendilerinden öncekilerin tanımlarını kullanır. Geometriye has önermeleri içeren "Postulatlar" ve daha geniş bir alanda geçerliliği olan "Ortak Mefhumlar" (Aksiyomlar) sadece araştırmamızın merkezinde yer alacak olan birinci kitabın başında verilmişlerdir. Ayrıca vurgulanmalıdır ki bütün ispatlar bu üç önerme sınıfına dayanır.

Dahası, her kitap sadece kendinden öncekilerin sonuçlarını takip etmekle kalmaz, aynı zamanda bu sayede her kitapta yer alan önermeler de kendilerinden önceki önermelerin ispatlarının sonuçlarını takip eder. Öklid'in eseri incelenirken, en başta ispatlanan önermelerin, takip eden önermelerin ispatlarında kullanıldığı fark edilebilir. *Elemanlar'*ın bu yapısı da bizi, ispatlar için Öklid'in, ispatlarda kullandığı unsurları, kurduğu sistemi ya da kullandığı yöntemi düşünmeye iter. İspatların, daha önce ispatlanmış önermelere ve "Tanımlar", "Postulatlar" ve "Ortak Mefhumlar" başlığı altına düşen önermelere bağımlı olduğunu daha önce belirttik. Bu bağlamda diyebiliriz ki ispatlar arasında bir zincir vardır. Ayrıca bu, bütünlükleri içinde *Elemanlar'*ın diğer kitapları içinde böyledir.

Bu bağlamda, ilk sınıftaki önermeler ile öncelikle elemanların özünü veren ve bunların bulunduğu uzayı kurmamıza izin veren tanımları verilir. Bu açıdan *Elemanlar'*ın başında verilen tanımlar, uzayın ve diğer elemanların kurulumunda rol oynar. Bu sistemleştirici önermelerin "Postulatlar" olarak adlandırılan ikinci sınıfı aracılığıyla Öklid, uzayın ve bazı şekillerin kurucu öğelerinin belirlenim kurallarını verir. Aslında, postulatların ilk iki önermesi, doğrunun belirlenimi ve doğru üzerinde geçerli işlemler için kuralları verir. Bu sınıftan diğer önermeler, belirlenimleri ve tanımları uzayın kurucu unsurlarını, yani nokta, çizgi ve yüzeye bağımlı unsurları hedef alır. Son olarak, Öklid hem geometrinin hem de aritmetiğin unsurlarıyla alakalı olan Ortak Mefhumlar adındaki önerme sınıfını verir. Bu başlık altında bulunan önermeler, bütün unsurların cinslerine göre takip ettiği ilişkilerin kurallarını (ya da özelliklerini) verir. Bu bağıntılar eşitlik, büyüklük ya da küçüklüktür.

Nihayet Öklid'in geometri alanında kurduğu sisteme ulaşmış bulunuyoruz. Öklid, sistemini *Elemanlar'*ın birinci kitabının başında verilen üç önerme sınıfı üzerinde inşa eder. Öncelikle uzayın inşasında merkezi bir öneme sahip elemanların (nokta, çizgi ve yüzey) ve bu elemanlara dayanan (açı, şekil, paralel doğrular gibi) elemanların tanımlarını verir. Ardından tanımlanan elemanların belirlenim kurallarını verdikten sonra incelediği alanı ilgilendiren temel bağıntıları verir. Önermelerin ispatlarını sistemleştiren üç önerme sınıfına dayanarak yapar bunu. Açıkçası bu üç önerme sınıfının Öklid'in sisteminde ve yönteminde oynadığı rolden dolayı bunları sistemleştiren önermeler olarak adlandırıyoruz.

Öte yandan, Öklid'in ispatların sonlarında "göstermek" anlamına gelen ve "δείκνυμι" fiilinin çekimli hali olan "δεῖξαι" ifadesini kullandığını görebiliriz. Bu fiil aynı zamanda “ispat” teriminin eski Yunancasının kendisinden türetildiği köktür. Aynı şekilde metin incelenirken, sistemleştiren önermelerin, ispatlarda kullanıldığı ve dolayısıyla bahse konu önermelerin ispatlarda merkezi bir rolü haiz oldukları fark edilebilir. Çünkü ispatların geçerliliği bu önermelere dayanır. Dahası, metnin başında yapılan ispatların, takip eden önermelerin de ispatlarında kullanıldığı görülebilir. Bu bakımdan, ispatlar kendi aralarında bir zincir oluşturur.

Bu bağlamda, aradığımız cevapları bulmak için Aristoteles’in ispata dayanan bilimlerin temellerini ve koşullarını incelediği *İkinci Analitikler’*e bakmak uygun olabilir. Aristoteles bu kitapta, ispat aracılığıyla elde edilen bilgilerle önceden elde olan bilgiler arasındaki ilişkiyi inceler. Bahse konu ilişkiyi inceledikten sonra bilimle ispat arasındaki bağlantıya odaklanır. Ardından ispatın öncüllerinin (ya da ilkelerinin) sağlaması gereken koşulların tahlilini yapar. Mevzubahis ilkeleri tez ve aksiyom olmak üzere ikiye ayırır ve bunların tanımlarını verir. Buna müteakip, tezin de tanım ve hipotez şeklinde ikiye ayrıldığının belirterek bunları tanımlar. Bununla birlikte, ispatın zorunlu ve evrensel doğasından yola çıkarak ilkelerin özelliklerini analiz eder. Bu bağlamda, ilkelerin zorunlu ve evrensel doğalarını açıklamaya bir giriş olarak, “hepsi bakımından”, “kendi başına” ve “tümel” terimlerini açıklar. İlkelerin zorunlu ve evrensel doğalarını ortaya koyduktan sonra bu ilkelerin ispata dayanan bilimler tarafından ispat edilemeyeceklerini gösterir. Son olarak farklı ilke türlerini gözden geçirerek üç ilke sınıfını verir: aksiyomlar, postulatlar, tanımlar. Bu nedenle Öklid’in Aristoteles’in ispata dayanan bilimlerin takip ettiğini ifade ettiği yolu izlediğini söyleyebiliriz. Çünkü Öklid yaptığı ispatlarda sadece *İkinci Analitikler’*de verilen önermeleri kullanmakla kalmaz bunları Aristoteles’in belirttiği tarzda kullanır.

Dahası, yalnızca sistemleştiren üç önerme sınıfının Öklid’in çalışmasında oynadığı rolün keşfi değil, bunların işaret ettikleri anlamların da incelenmesi gerekmektedir. Çünkü bu önermelerin anlamları *Elemanlar’*da, bilgilerin sunumu için büyük önem arz etmektedir. Bununla birlikte, bu üç önerme sınıfı Öklid’in metinde verdiği sıralamayla incelendiğinde, metnin anlaşılmasında problemler ortaya çıkar, çünkü Tanımlar başlığı altındaki önermelerde tanımlanmamış terimler kullanılır. Bu bağlamda metni incelerken önümüzde iki seçenek vardır: ya metinde tanımlanmamış terimler için bunları tanımlayan filozofların tanımlarına müracaat etmek ya da Öklid’in ortaya koyduğu sistem kapalı kabul edip tanımı verilmeyen elemanların tarifleri metnin sıralanışı göz önünde bulundurmaksızın araştırmak. Bu bağlamda biz ikinci yolu seçerek Öklid'in kurduğu sistemin kapalı bir sistem olduğunu düşünüyoruz. Bu yüzden metni, orada verilen önermeler aracılığıyla anlamaya çalışıyoruz ve üç önerme sınıfının sıralamasının değiştirilebileceğini öne sürüyoruz. Bu bakımdan, metnin kuruluşu açısından birinci sırada verilen önerme sınıfında kullanılan tanımlanmamış terimlerin tariflerini üçüncü sırada verilen önerme sınıfında bulduğumuz için, metni incelerken Öklid'in yaptığı sıralamayı değiştiriyoruz. Ortak Mefhumlar başlığı altındaki önermelerin incelemesini araştırmamızın başına taşıyoruz. Dahası, Ortak Mefhumlar başlığı altındaki önermelerden yaptığımız çıkarımlarla ilk yedi tanımın uzayın kuruluşundaki rollerini inceliyoruz. Bu bağlamda, bu çalışma uzayın kuruluşu için bir ön hazırlık olarak kabul edilebilir.

Birinci bölüm:

Bu bölümde, *Elemanlar'*ın genel yapısını ve yöntemini daha anlaşılır kılmak için, *İkinci Analitikler'*in ispat ve onun ilkelerinin incelendiği bölümlerine odaklanacağız. Bu çerçevede, söz konusu metinde bilimin tanımı ve sağlaması gereken koşulları inceliyoruz. Bilimin, şeyler hakkındaki doğru ve zorunlu bilgilerden oluştuğunu ve bir tür tasım olan ispatın da bize bilimsel bilgi sağladığını görüyoruz. Dahası, ispatın birbirlerine zorunlulukla bağlanan önermelerden müteşekkil bir zincir olduğunu görüyoruz. Bu zincirde ilk önermelerin ispatlanamadığını ve dolaysız olduklarını ve bunları takip eden önermelerin de ilk önermelerin zorunlu sonuçları olduğunu görüyoruz. Sonuç olarak, ispatın bilimi inşa ettiğini ve bilimin nesnesinin zorunluluk üzerinden tanınmasına istinaden bilimsel bilginin birbirlerini zorunlulukla takip eden ispat zinciri olduğunu gördük.

Bununla birlikte, ispatın ilkeleri *İkinci Analitikler'*de üçe ayrılır: tanımlar, postulatlar, aksiyomlar. Tanımlar, bilimin kapsadığı alandaki unsurları tanımlayan önermelerdir. Aksiyomlar, onlar olmadan hiçbir şeyin öğrenilemeyeceği doğruları ifade eden önermelerdir. Ayrıca kendi başlarına zorunlu bilgilerdir. Postulatlarsa bilimin temel unsurlarının varlığını bildiren önermelerdir. Bunlar kendi başlarına zorunlu bilgiler değildir. Postulatlar, kanıtlanabilir gibi görünmelerine rağmen, bilimlerde ispatlanmaksızın kullanılırlar. Bu üç önerme sınıfı ilke olmaları itibariyle ispatın ilk, ispatlanamaz ve dolaysız unsurlarıdır ve ispat bunlara dayanarak yapılır. Ayrıca bu önermeler diğer önerme zincirlerini de sistemleştirir.

Nihayet, Öklid’in bilim için Aristoteles tarafından gösterilen yolu takip ettiği öne sürülebilir. *Elemanlar* üzerine çalışma yürütürken, ispatların ilk kitabın başında verilen üç önerme sınıfına istinaden yapıldığını ayırt edebiliriz. Öklid, bütün ispatlarda bu üç önerme sınıfının işaret ettiklerini bunların ispatlarını vermeden kullanır.

İkinci bölüm:

Bu bölümde öncelikle Ortak Mefhumlar başlığının metnin orijinalinde olup olmadığını tartışıyoruz. Paul Tannery’nin bu başlığın metne sonradan eklenmesiyle ilgili iddialarını ve Thomas L. Heath’in bunlara karşı argümanlarını inceliyoruz. Ardından Ortak Mefhumlar başlığındaki önermelerin metnin orijinalinde yer alması gerektiğini bahse konu bölümün asıl metinde olmaması durumunda ortaya çıkacak sorunlar üzerinden gösterdik.

Ardından Ortak Mefhumlar başlığı altındaki önermeleri analiz ettik. Mevzubahis önermeler, Öklid’in incelediği alandaki elemanlar arasındaki temel ilişkileri ve bu elemanlar üzerinde geçerli işlemleri tarif eder. Bu çerçevede önermelerde adı geçen bağıntıları inceliyoruz: eşitlik, ekleme, çıkarma ve eşitsizlik. Adı eşitlik olarak geçen ilişkinin matematikteki eşitlik bağıntısının özelliklerini taşıdığını gösterdik. Bu bağıntı, yansıma, simetri ve geçişkenlik özelliklerini haizdir.

Eşitlik ilişkisini analiz ettikten sonra, ikinci ve üçüncü ortak mefhumların ortaya koyduğu ekleme ve çıkarma işlemlerini ele aldık. Bu işlemlerin aynı cinse ait olan unsurlar üzerinde çalıştığını gösterdik. Ardından, yedinci ortak mefhum tarafından ortaya konan ve eşitler arasında olduğu söylenen “eşleşim” ilişkisini inceledik. Bu ortak mefhumun eşitlerin birbirlerine uymasına işaret etmesine istinaden örtüşmeye mahal veren bir önerme olarak kabul edildiğini ve dolayısıyla da örtüşme aksiyomu olarak ele alındığını belirttik. Öte yandan, bu önermenin sadece geometrik bir bağlamda verilmemiş olması gerektiğini gösterdik: Şayet bu ortak mefhum örtüşme aksiyomu olarak tutulursa yerine koyma metodunun kullanıldığı birçok ispat geçersiz hale gelir. Çünkü metinde, bu önerme haricinde eşitlerin birbirlerinin yerine koyulmasına izin verecek hiçbir önerme bulunmamaktadır.

Ardından sekizinci ortak mefhum tarafından ortaya koyduğu eşitsizlik ilişkisini ve tanımlar için büyük bir önem arz eden “parça” ve “bütün” terimlerini inceliyoruz. Eşitsizlik ilişkisinin anti-simetri ve geçişkenlik özelliklerini haiz olduğunu gösteriyoruz. Son olarak da bütün ve parça arasındaki ilişkileri ele alıyoruz.

Üçüncü bölüm:

Bu bölümde *Elemanlar'*ın birinci kitabında verilen ilk yedi önermeyi parça ve bütün ilişkilerine istinaden inceliyoruz. Noktanın parçasız bir eleman olduğunu ve birinci tanıma istinaden cinsler arasındaki ilk farkın parçalı olma üzerinden verildiğini gösteriyoruz. Ardından bütünün parçalarının bütünle aynı cinse ait olması gerektiğini ve noktanın da ne parçalardan müteşekkil bir bütün ne de bir bütünün herhangi bir parçası olabileceğini gösteriyoruz. Bununla birlikte, ikinci ve yedinci tanımlarda tarifleri verilen çizgi ve yüzeyin parçayı sahip olanlar cinsine ait olduklarını ve bunların ene sahip olmak üzerinden ayrıldıklarını tartışıyoruz. Bu bakımdan, ene sahip olmak cinsler arasındaki ikinci ayrım olarak karşımıza çıkar. Bunlara ek olarak, üçüncü ve altıncı tanımlarda türler için sınır koşullarını inceliyoruz. Noktanın, çizgiyi, çizginin de yüzeyi sınırladığını gösteriyoruz. Son olarak da dördüncü ve yedinci tanımlarda doğru çizgi ve düzlem yüzeyin özelliklerini eşitlik ve parça-bütün ilişkilerine istinaden inceliyoruz.

Dördüncü bölüm:

Bu bölümde, önceki bölümlerde incelediğimiz önermelerin sonuçlarından yola çıkarak Postulatlar başlığı altında yer alan önermeleri ve uzayın inşasını inceliyoruz. Öncelikle birinci postulatı ve postulatta kullanılan önemli terimlerin Eski Yunanca anlamlarını ele alıyoruz. Ardından postulatta verilen ilişkileri tartışıyoruz. İncelediğimiz tanımlardan yaptığımız çıkarımlara istinaden verilen elemanların sırasını gözden geçiriyoruz. Sonra, sınır koşullarından hareketle noktaların birbirlerinden nasıl ayrılacağını irdeliyoruz. Noktayla çizgi arasında olduğu söylenen bağıntıya istinaden noktanın temel özelliklerini tartışıyoruz. Ardından parça bütün ilişkisinden yola çıkarak "arasında" bağıntısını inceliyoruz. Nihayet, doğru çizgi ve düzlem yüzey tanımlarından elde ettiğimiz sonuçlardan hareketle birinci postulatın uzayın inşasında oynadığı rolü irdeliyoruz. Ardından birinci postulatı ve postulatta kullanılan önemli terimlerin Eski Yunanca anlamlarını ele alıyoruz. Sonra "uzatma" teriminin neye işaret edebileceğini Ortak Mefhumlar başlığında yer alan önermelerin incelemelerinden elde ettiğimiz sonuçlara istinaden gözden geçiriyoruz.

1. INTRODUCTION

Les *Eléments* d'Euclide est l'un de textes scientifiques qui jouent un rôle central, à la fois pour le champ de la science et ce de la philosophie. Cette grande importance provient, d'une part, du fait qu'il est l'un des livres premiers qui a compilé et systématisé la géométrie d'une manière rigoureuse et complète ; d'autre part, la méthode du texte devient pendant les siècles une source d'inspiration non seulement pour des scientifiques mais aussi pour des philosophes. On peut tirer l'exemple, pour cette dernière, du cas d'Isaac Newton de la sphère de la science et ce de Baruch Spinoza (*Ethica*) dans la philosophie. Les deux emploient la méthode, que nous traiterons ci-dessous, utilisée par Euclide dans les *Eléments.* Newton, en *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, donne premièrement les définitions des objets qui concernent le champ de la mécanique et après avoir donné les définitions il pose les axiomes (ou les lois) de mécanique et alors il part de ces principes afin de démontrer les propositions. De même, dans *Ethica,* poursuive Spinoza le même chemin. Voire, on peut probablement tracer cette méthode jusqu'aux systèmes axiomatiques car ils donnent d'abord les éléments et relations indéfinis et posent des axiomes, puis ils démontrent les propositions et les relations secondaires en partant de ces principes.

Ensuite, en ce qui concerne la composition et la méthode du texte, les *Eléments* consiste en treize livres où les livres suivants supposent des conclusions ceux de précédents. Maurice Caveing, en l'introduction d'*Euclide d'Alexandrie, les Eléments*[2], indique que les quatre premiers livres des *Eléments* traitent la Géométrie plan. Le cinquième et le sixième examinent la théorie des propositions entre les grandeurs et de l'application de cette théorie à la Géométrie plan. Les livres de septième à neuvième considèrent la théorie des nombres. Le dixième envisage l'incommensurabilité des lignes droites. L'onzième étudie les propriétés des solides élémentaires. Le douzième porte sur des résultats concernant la mesure du cercle, de

[2] Bernard Vitrac, **Euclide d'Alexandrie, les éléments Vol. I**, Paris : Presses Universitaires de France, 1990, p. 18-19.

la pyramide, du cône et de la sphère. Et le dernière livre est sur la construction des cinq polyèdres réguliers dans la sphère. Ainsi, le livre X qui « présuppose les acquis de la Géométrie plane, de la théorie des proportions, et des Livres arithmétiques »[3] peut être tiré comme un exemple de l'enchaînement des livres.

En outre, tous les livres, sauf VIII, IX, XII, et XIII, commencent par les sections nommées « Définitions » qui sont les énoncées décrivant les propriétés des éléments et qui sont employées en démonstrations des livres concernés. Puis, les livres qui ne commencent pas par les Définitions emploient celles de précédents pour de démontrer ses propositions, s'il est exigé. Notons que les « Demandes (ou Postulats) » qui contiennent les propositions propres de la géométrie, et les « Notions Communes (ou Axiomes) » qui contiennent les propositions au sujet d'un domaine plus large, sont seulement données au début du livre I qui sera au centre de notre recherche. Il faut, de même, remarquer que toutes les démonstrations des propositions dépendent de ladite trois classes des énoncées.

Par ailleurs, non seulement les livres suivent les conclusions des précédents, mais aussi les conclusions des démonstrations, au moyen desquelles les propositions de chaque livre sont démontrées, suivent celles des précédents. En examinant l'œuvre d'Euclide, on peut remarquer que les propositions démontrées au début du livre, peuvent être employées afin de démontrer des propositions suivantes. Par exemple, dans le livre I des *Eléments*, Euclide emploi la première proposition pour la démonstration de la seconde, et la seconde pour celle de la troisième et ainsi de suite, sauf le quatrième. Il, donc, emploie la première proposition pour la démonstration du reste des propositions du livre I, sauf la démonstration de la proposition 4 qui est de même utilisée dans les démonstrations suivantes.

De plus, cette structure des *Eléments* nous conduit à penser sur le chemin qu'Euclide suit afin de démontrer des propositions, et sur des éléments qu'il emploie lorsqu'il démontre une proposition, et enfin, sur son système ou sa méthode. D'abord, nous venons d'indiquer que les démonstrations des propositions dépendent des propositions démontrées et des énoncés contenus sous les titres de « Définitions », de « Demandes », de « Notion Communes ». Par exemple, dans la démonstration de deuxième proposition du livre I, Euclide emploi les Demandes 1, 2, et 3 et Notion Commune 1 et Définition 15 du livre I et la démonstration de la

[3] **Ibid.** p. 19.

première proposition[4]. Puis, en autre exemple sera la démonstration de troisième proposition[5]. Euclide, en cette démonstration emploie la Définition 15 du livre I, la Demande 3, la Notion Commune 1, et la démonstration de la première proposition. A cet égard on peut, donc, penser qu'il existe un enchaînement entre des démonstrations. De plus, il en est ainsi pour les autres livres des *Eléments* dans leurs totalités ; c'est-à-dire ils emploient soit les démonstrations des propositions des livres ou de ses propositions précédentes soit des trois classes des énoncés.

Il faut, encore, ajouter un point concernant la contenue des propositions, lié au système qu'Euclide construit. Comme on vient de dire plus haut, les *Eléments*, traite la géométrie et à l'arithmétique. En ce qui concerne la géométrie, Euclide démontre des attributs essentiels des éléments appartenant au domaine de la géométrie et des relations se trouvant entre eux. Pour le faire, comme déjà indiqué il emploie les trois classes des propositions qui systématisent leur organisation[6].

Dans ce contexte, par la première classe il donne premièrement les définitions des éléments, qui énoncent leurs essences et qui nous permettent à construire l'espace[7] où ces éléments se trouvent. Au ce sujet, des définitions données au début de livre I des *Eléments* sont celles qui ont des rôles dans la construction de l'espace et celle des autres éléments. Il existe 23 définitions qui peuvent être divisées en quatre groupes[8]. Le premier groupe, qui contient les sept premières définitions,

---

[4] **Ibid.** p. 197-198.
[5] **Ibid.** p. 199-200.
[6] Nous utilisions le terme « systématisant » dans notre recherche afin de marquer les trois classes des propositions qui systématise l'ordre des propositions.
[7] Il faut noter que nous employons le terme « construction » pour signaler « l'ordre » des éléments. Euclide pose les Définitions en commençant du « point », et les éléments qui sont précédemment définis, déterminent les éléments qui sont subséquemment définis. Cette relation ayant lieu entre les éléments indique un ordre d'antériorité-postériorité où les antérieures déterminent les postérieures. Nous entendons, par « la construction » cette relation de détermination. Nous la traiterons dans notre recherche.
[8] En effet, Euclide ne divise pas ses définitions en quatre groupes, il seulement les pose dans un ordre. Toutefois, quand on examine étroitement ces définitions on peut constater qu'il y a une division entre les définitions des éléments. Les sept premières définitions posent indépendamment les éléments primitifs d'espace. Ni le point ni la ligne ni la surface ne sont définis en référant aux autres éléments. Par contre, la définition de l'angle et des espèces de l'angle sont posées à partir des éléments du premier groupe. L'angle est posé en tant que l'intersection de deux lignes dans une même surface plane. De même, la figure et les espèces de la figure, qui sont indépendamment définies de la définition de l'angle, sont définies à partir de la ligne droite et de la surface plane. Les figures sont les éléments qui sont contenues par les droites dans une surface plane. En cela, malgré les figures sont indépendants de l'angle, elles sont dépendants au premier groupe des éléments. Enfin, le quatrième groupe des définitions, à savoir la définition des lignes droites parallèles, est indépendamment posée des définitions de l'angle et de la figure. Pourtant, puisque cette définition est posée à partir des deux lignes droites dans une même surface plane qui n'ont aucune intersection, cette définition dépend en le premier groupe des éléments. Par suite, nous pouvons constater qu'il y a les quatre groupes des

énonce des éléments primitifs[9] de l'espace ; à savoir le point, la ligne et la surface. Le deuxième contient les définitions, de huitième à douzième, décrivant l'angle étant définit par deux lignes dans même surface plan, et les espèces de l'angle. Le troisième, qui contient les définitions de treizième à vingt-deuxième, est les définitions posant la figure, qui est une espèce dans le domaine de la géométrie, et les espèces de la figure. La figure est définit comme la chose contenue par des frontières. Puis des figures planes, qui sont des espèces de la figure, contenues par d'une ligne ou par des lignes. Bien que le quatrième groupe ne soit consisté qu'une définition ; à savoir vingt-treizième, comme elle ne peut pas être posée sous les titres précédents, nous pouvons la considérer sous un nouveau groupe.

Ensuite, par la deuxième classe de ces propositions systématisant ; à savoir les Demandes, Euclide donne les règles des déterminations des éléments constructifs de l'espace et quelques figures. En effet, les deux premières propositions des Demandes donnent les règles pour la construction de la droite et pour les opérations qui sont valables sur elle. Les autres propositions de cette classe sont dites pour des éléments dont la construction et les définitions dépendent des éléments constructifs de l'espace ; c'est-à-dire le point, la ligne et la surface.

Au dernier lieu, Euclide donne la troisième classe des propositions, nommées les Notions Communes, qui concernent à la fois, les éléments de la géométrie et ceux de l'arithmétique. Les propositions qui se trouvent sous ce titre, donne les règles (ou les propriétés) des relations que toutes les éléments suivent. Ces relations sont l'égalité, d'être plus ou moins grande. De plus, remarquons que les propositions de ce titre sont étroitement liées aux définitions. Parce que dans les définitions, les termes indéfinis sont utilisés. Puis, on peut donner les définitions de ces termes à partir des implications des ces propositions[10].

Nous atteignons, voilà, au système qu'Euclide forme dans le domaine géométrique. Il fonde son système sur ces trois classes des éléments données au début du livre I. Il pose, d'abord, des définitions des éléments primitifs jouant un rôle

---

éléments dont le premier est indépendant des autres groupes. Malgré du fait que les groupes suivants sont indépendant les uns des autres, ils sont dépendants au premier groupe. Voir : **ibid.** p. 151-166.

[9] Remarquons que les éléments nous appelons primitifs sont non seulement les éléments qui ont un rôle pour la construction de l'espace mais aussi les éléments irréductibles dans les définitions des autres éléments.

[10] Par exemple, le point est défini comme l'élément sans-partie, cependant, le fait d'être sans-partie n'est pas défini dans le texte. D'autre côté on trouve les relations et les propriétés que la partie possède dans les Notions Communes.

central pour la construction de l'espace (le point, la ligne, la surface) et celles d'en dépendent (l'angle, la figure, les droites parallèles), et puis, il donne des règles de détermination pour eux, et enfin, il donne les relations concernant le domaine géométrique. Il aboutit aux conclusions dans les preuves des propositions à partir de ces trois classes des propositions systématisant. En fait, nous les appelons en tant que systématisantes en se référant à leur rôle dans son système et dans sa méthode.

Finalement, dans ce contexte des questions se présentent, tandis que le système construit et la méthode employée par Euclide, ne sont pas confus. On peut observer qu'il emploie le terme « δεῖξαι », qui est un mode du verbe « δείκνυμι » connotant « montrer » et étant la racine du terme « ἀπόδειξις » qui signifie « la démonstration », à la fin des démonstrations. Dans ce cadre, on se demande : Que signifie une démonstration ? De même, tandis qu'on examine les démonstrations on remarque que les propositions systématisant sont utilisées pour l'aboutissement aux conclusions, et par suite ils ont un rôle central pour les démonstrations, car la validité d'elles dépendent en ces propositions. Dans ces conditions, on s'interroge pareillement la relation entre les propositions systématisant et les démonstrations : Quelle est la relation entre eux. Enfin, en continuant à étudier les *Eléments*, on constate que les démonstrations qui se trouvent au début du texte sont employées dans les démonstrations qui s'ensuivent. En cela, il existe un enchainement entre les démonstrations. Par suite, on se demande encore : Comment est-il possible un tel enchaînement pour les démonstrations ?

Il parait convenable de chercher les réponses dans les *Seconds analytiques* où Aristote examine les sciences démonstratives. Les *Eléments* est d'abord composé de treize livres dans lesquels les théorèmes et les problèmes de la géométrie sont démontrées par une manière rigoureuse et systématisé. En plus, Euclide emploi les trois classes des propositions systématisant mentionnées au-dessus, afin de découler les démonstrations. Il aboutit aux conclusions en partant de ces propositions ou des conclusions déjà démontrées. En fait, la méthode employée par Euclide correspond à la méthode donnée pour la démonstration dans les *Seconds analytiques*.

Aristote examine dans les *Seconds analytiques*, en premier lieu, la relation entre les connaissances reçues au moyen du raisonnement et les connaissances préexistantes. Puis, il traite le lien entre la science et la démonstration. Après avoir révélé cette relation il expose les prémisses (ou comme il les identifie les principes) de la démonstration en traitant leurs conditions. Et plus, il les divise en thèse et en axiome et alors, il donne les définitions de ceux deux. Puis, il divise la thèse en la définition et l'hypothèse et il les définit. De plus, il s'efforce à la nature des prémisses en partant du caractère nécessaire et universel de démonstration[11]. Puis, il explique les termes « attribué à tous », « par soi », et « universellement » comme un préliminaire de la recherche des conditions de la nécessité. Dès qu'il montre la nature nécessaire et universelle des principes, il montre qu'il n'est pas possible de démontrer les principes d'une science démonstrative au moyen de celle-ci. Enfin, il considère des principes différents et donne les trois classes des principes : les axiomes, les postulats, les définitions.

Néanmoins, il faut traiter une question qui se pose tandis qu'on parcourt les *Seconds analytiques* : Que puisse-t-on comprendre par ces trois classes des propositions ? En effet, Aristote nous donne des conditions que la science démonstrative doit satisfaire. Il expose les relations entre la démonstration et ses principes. Ainsi, leur rôle est très clair pour la démonstration : La nécessité de la conclusion leur dépend. Leur nature nécessaire (ou quasi-nécessaire[12]) et universel rend la conclusion à la fois nécessaire et universel. Toutefois, la nécessité et l'universalité de la démonstration viennent non seulement de l'arrangement de ses principes, mais encore de leur vérité ainsi que la nécessité et l'universalité de leurs natures propres. De plus, cette nécessité des principes ne vient pas seulement de leur priorité. Leurs contenus, aussi, sont la raison de ladite situation. Par exemple, les définitions sont des propositions nécessaires car ils expriment des essences des choses appartenues au domaine de la science. C'est pourquoi, ce qu'ils expriment au sujet des éléments de leur domaine, devient important pour ceux qui veulent étudier dans ce domaine. Il en est ainsi pour les autres classes des principes.

[11] Il est obligatoire de remarquer qu'Euclide ne réfère pas explicitement à la nécessite et à l'universalité dans les *Eléments*. Néanmoins, on trouve chez Aristote que la connaissance obtenue par le moyen de la démonstration est nécessaire et universelle. Pour cela, si dans les *Eléments*, les connaissances sont obtenues à partir des démonstrations, les conclusions de démonstrations devraient être nécessaires et universelles. C'est pourquoi, il faut traiter comment les démonstrations d'Euclide satisfont la condition de nécessité. En effet, nous pensons que les démonstrations, qu'Euclide conclue, satisfont premièrement la condition de nécessité par les trois lois de la logique ; c'est-à-dire, l'identité, le tiers exclu, et la non-contradiction. Malgré le fait qu'il ne donne explicitement les trois lois de la logique, il les emploie dans les démonstrations. Indiquons qu'Aristote dit dans les *Seconds analytiques* qu'il y a les scientifiques qui emploient quelques axiomes, mais ils ne les mentionnent pas dans les axiomes qu'ils posent.

[12] On dit « quasi-nécessaire » car dans les *Seconds analytiques* Aristote marque que les Demandes, qui sont l'un des trois classes des propositions systématisant, ne sont pas nécessaires par soi, comme les axiomes. Pourtant, les scientifiques posent les Demandes et les utilisent sans démonstration.

D'autre côté, on peut exprimer qu'Euclide emploie la méthode examinée en *Seconds analytiques* car les éléments employés par Euclide afin de démontrer les propositions sont ceux qui sont examinés dans les *Seconds analytiques.* Par exemple, Aristote emploi les mots grec anciens « ὅρος » et « ὁρισμὸς » pour la Définition et Euclide utilise le premier. En plus, ils emploient le mot « αἴτηματα » pour les Demandes (ou Postulats). Ils donnent un nom qui est presque identique pour les Notions Communes[13].

De plus, Euclide les emploie dans la manière posée par Aristote. Dans les *Secondes Analytiques*, pose-t-il des principes en tant que les causes des conclusions démontrées. Ils sont les raisons à partir desquelles la conclusion est nécessaire. Dans les *Eléments*, les démonstrations sont conclues continuellement en faisant référence aux trois classes des propositions. Ils sont les causes des conclusions aboutit par Euclide. On peut connaitre la raison de la conclusion en partant des propositions systématisant. Dans ce cadre, la méthode posée en *Secondes Analytiques* peut nous conduire à apprendre la méthode et le système des *Eléments.*

Indiquons, en dernier lieu, que malgré du fait qu'Euclide use une méthode distinctive et fonde un système rigoureux, presque tous les commentateurs du texte sont en accord entre eux sur la multiplicité d'usage de cette méthode dans les études scientifiques de cette époque-là. Dans *The Thirteen Books Of Euclid's Elements*[14], Heath mentionne un certain nombre des philosophes s'efforçant à la collection des éléments d'une manière rigoureuse en référençant au sommaire de Proclus au sujet de l'histoire de la géométrie. Par exemple, Léon qui a découvrit *diorismi,* a mis ensemble une collection où des plus de propositions sont prouvées, ainsi qu'ils sont plus utilisable que ses précédents[15].

Au demeurant, au début du 4ème chapitre de l'introduction d'*Euclide d'Alexandrie, les éléments*, Maurice Caveing avance que « la forme euclidienne, c'est la forme démonstrative qui expose les raisons pour lesquelles les résultats de la science son nécessairement vrais … se distingue d'autres formes d'exposition …

---

[13] Nous disons « presque » car il existe des différends à ce sujet. Nous le verrons dans le premier chapitre. Pourtant, il faut indiquer qu'Euclide emploi le mot grec ancien « κοιναὶ ἔννοιαι » pour les Notion Communes tandis qu'Aristote emploi « κοινός », quand il explique les Axiomes.

[14] Thomas Little Heath, **The Thirteen Books of Euclid's Elements, Volume I,** Cambridge, Cambridge University Press, 1908.

[15] **Ibid.** p. 116. Voir : « ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον. » dans, Proclus, Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementoru Librum, éd. Friedlein, Leipzig, 1873, p. 66, 20.

dans lesquelles ces raisons ne sont pas données, mais résultats commentés de divers point de vue ». En revanche, sur l'unicité du livre il ajoute : « Mais une question historique se présente la première : y-a-t-il eu avant Euclide des traités scientifiques revêtant cette forme ? Or c'est le cas effectivement dans deux traités d'Autolycos de Pitane, *La sphère en mouvement et Levers et couchers héliaques*, alors que la critique le considère comme l'ainé d'Euclide d'une vingtaine d'années. Ce fait incline à penser que la forme trouvée dans le Corpus euclidienne était canonique pour les sciences mathématiques »[16]. Sur ce sujet, nous sommes en accord avec des commentateurs qui nous précèdent : Nous pensons qu'il était un canon pendant des siècles où les *Eléments* est apparu.

En outre, nous connaissons qu'Aristote expose les règles des sciences démonstratives dans les *Seconds analytiques*. Il s'occupe des fondements et des principes des sciences démonstratives. A partir de ses études sur les sciences démonstratives, des commentateurs[17] admettent les œuvres d'Aristote comme une référence dans leurs traitées. En effet, il est probablement légitime de postuler à un philosophe qui fait des études sur des fondements et des règles d'une science que l'on s'attache, particulièrement si les fondements de celle-ci ne sont pas mentionnés par l'auteur.

Enfin, il faut noter que non seulement la découverte des rôles des trois classes des propositions systématisant l'œuvre d'Euclide, mais aussi la compréhension des significations de ces propositions sont essentielles. Parce que leurs connotations portent une grande importance pour la présentation des connaissances dans les *Eléments*. Remarquons que lorsqu'on étudie les propositions systématisant dans l'ordre posé par Euclide, on face aux problèmes pour la compréhension du texte. Comme on a déjà indiqué, il existe les définitions dans lesquelles les termes indéfinis sont employés. Dans ce cadre on a deux options pour l'examen du texte : ou bien on

[16] Vitrac, **ibid.** p. 114-115. Autolycos de Pitane, **La Sphère en mouvement. Levers et couchers héliaques**, éd., trad. par Aujac G., avec la collaboration de Brunet J.P. et Nadal R., Paris, Les Belles-Lettres, 1979. Germaine Aujac écrit « Ce n'est donc pas simple hasard si la première traite scientifique conserve (c. 330 av. J.-C.) s'intitule précisément *La Sphère en mouvement.* Son auteur, Autolycos de Pitane, de peu antérieurs à Euclide, y fait des démonstrations de type strictement géométrique » dans Autolycos, **La Sphère, instrument au service de la découverte du monde,** trad. par Germaine Aujac, Caen, Paradigme, 1993, p. 10. Aujac en référant à Proclus, indique qu'Autolycos est l'un des géomètres qui ont compilé les éléments de la géométrie avant Euclide dans **ibid.** p. 139. Proclus, **ibid.** p. 65. Voir aussi : J. Mogenet, **Autolycos de Pitane, histoire du texte, suivi de l'édition critique**, Louvain, 1950. Voir aussi : Autolycos, **De Sphaera quae movetur liber de ortibus et occasibus libri duo**, éd. Fridericus Hultsch, Leipzig, Tobner, 1885.

[17] Parmi ces commentateurs nous pouvons mentionner Heath et Vitrac.

postule aux philosophes qui donnent les définitions pour ces termes indéfinis, dans ses œuvres, ou bien on considère le système posé par Euclide en tant que fermé et on essaie à trouver les descriptions des éléments en ne pas faisant attention à l'ordre des propositions données par l'auteur. Nous prétendons que le système d'Euclide peut être étudié comme un système fermé. C'est pourquoi, nous essayerons à comprendre le texte par les propositions données dans lui et nous pensons qu'il est possible de changer l'ordre des propositions posé par Euclide. A cet égard, comme les termes indéfinis sont utilisés dans les Définitions, et comme il y a les descriptions de ces termes se trouvent dans les Notions Communes, nous changeons l'ordre donné de ces titres par Euclide pour une compréhension détaillé. Pour cela, nous déplaçons les propositions qui se trouvent sous le titre de Notions Communes au début de notre recherche. De plus, à partir des implications des propositions données sous le titre de Notions Communes, nous traiterons seulement les sept premières Définitions afin d'exposer leur rôle dans la construction de l'espace. A cet égard, nous pouvons assumer cette recherche comme une étude préliminaire pour la construction de l'espace en partant de notre méthode.

Pour commencer, il faut encore expliquer quelques points décrivant notre approche. Avant tout, notons que dans l'analyse historique du texte, ces trois classes de propositions sont comprises dans l'ordre donné par Euclide : En premier lieu, sont examinées les Définitions étant des déclarations exprimant les essences des éléments ou les relations qui ont lieu entre ceux-ci. En second lieu, sont examinées les Demandes qui sont les propositions posant les règles de la détermination des éléments ou les relations entre d'eux. Et en dernier lieu, la troisième classe des propositions, les Notions Communes ne sont généralement considérées comme des propositions employées que dans les démonstrations. Dans notre étude, nous envisagerons comment les relations entre les Définitions et les Demandes seraient établies si le titre de Notions Communes était examiné en premier.

Nous allons maintenant expliquer les raisons qui nous ont amenés à conduire une telle étude. Tout d'abord, les descriptions de certains termes, comme « être égale », « être plus ou moins grande », « la partie », mentionnées sous les titres des Définitions et des Demandes ne sont pas données en texte. Lorsqu'on essai à saisir des significations de ces termes on les trouve sous le titre de Notions Communes sous lequel il existe des déclarations sur les relations « être égale », « être plus ou moins grandes ». Par exemple, la première définition décrit le point comme « ce dont il n'y a aucune partie »[18]. Pour de saisir la signification de la définition il faut comprendre les termes « partie » et « être sans partie ». Sinon, rien ne sera compris par la définition. Cependant, la seule expression à propos de « partie » se trouve sous le titre de Notions Communes donnée à la troisième place dans les *Eléments*. Un autre exemple en est la quatrième et la septième définition, où deux éléments d'importance critique pour la géométrie euclidienne sont décrits ; c'est-à-dire la ligne droite et la surface plane. La quatrième définition donne la relation « de manière égale (ἐξ ἴσου) »[19] dite pour des points d'une ligne mais cette relation n'est définie nulle part dans le texte, à l'exception de Notions Communes. Par conséquent, afin de comprendre la relation « de manière égale » qui est dépendamment donné à la relation « égale (ἶσος) », on doit d'abord examiner les Notions Communes où il existe des propositions décrivant cette relation-là.

De surcroit, la première et la deuxième demandes sont étroitement liées à la quatrième définition, car la première Demande exprime que la ligne droite passe « de tout point à tout point ». Dans la seconde Demande, un prolongement continu d'une ligne droite limitée est mentionné. Par conséquent, ce qu'on comprend de la relation « égale » est directement lié aux quatrième et septième définitions et, par suite, aux premier et deuxième demandes.

Ensuite, dans d'autres livres, de nombreuses définitions sont basées sur « l'égalité » ou « d'être plus ou moins grandes ». Par exemple, la troisième, la quatrième et la cinquième définitions dans le septième livre où commence la théorie des nombres, sont données par les relations « d'être plus ou moins grandes ».

Ce qui est important pour nous, bien que les Notions Communes soient données à la dernière place des trois classes des propositions systématisant dans les *Eléments*, afin de comprendre les implications des deux autres classes, il est nécessaire de comprendre les significations des Notions Communes. En saisissant les sens des propositions données sous le titre de Notions Communes, les significations de deux autres classes et de nombreuses propositions, seront presque éclairées en termes de cohérence. Dans cette étude, nous nous efforcerons d'avancer sur cette voie. Même s'il n'est pas possible de lire le texte avec ses termes définis, au moins les

---

[18] **Ibid.** p.150.
[19] **Ibid.** p.154.

limites qu'on rencontre ici peuvent également donner des idées importantes sur la mesure dans laquelle ce projet peut être réalisé.

Dans ce contexte, dans un premier chapitre on traitera les *Secondes analytiques*, où des conditions des sciences démonstratives données, comme un préliminaire de notre sujet. En premier lieu on examinera la construction de la relation entre la science et la démonstration. On discute l'objet de la science, posée par Aristote comme « la chose qui ne peut pas être autre qu'il n'est », et la nature de la science. Puis, on considèrera la démonstration, en tant que productrice de la connaissance scientifique, et la nature de ses prémisses premières dont on parte pour d'aboutir la démonstration. Ensuite, on traitera les définitions des espèces des principes (ou des prémisses premières) : l'axiome, la définition, le postulat (comme une espèce de l'hypothèse). A la suite d'examen des principes on considère le caractère nécessaire de la démonstration et des conditions de cette nécessité. De surcroit, en partant d'incommunicabilité des genres des sciences, on examinera l'impossibilité de démontrer les principes par le moyen de la science démonstrative qui les emploie pour d'atteindre les conclusions. Enfin, on traitera les principes de la démonstration divisée en trois : les axiomes, les postulats et les définitions.

Dans le second chapitre, comme on a indiqué, on traitera les significations des propositions données sous le titre de Notions Communes en employant les termes définis par Euclide. On examinera les relations comme « être égale », « être plus grande que », et « être moins grande que ». A partir des implications de ces relations on étudiera les termes « partie » et « tout », et leurs relations qui occupent une place centrale pour des définitions, et donc, pour des demandes. Dans ce contexte, notons que nous nous adresserons aux propositions démontrées ou aux définitions données par Aristote pour la compréhension des termes, s'il est exigé[20]. Ensuite, on donnera les similarités entre les propositions et les relations de la mathématique contemporaine.

Dans le troisième chapitre, on examinera les Définitions en partant des conclusions tirées du second chapitre. En effet dans cette recherche nous nous efforcerons aux énoncées de première groupe des définitions ; à savoir les définitions

[20] Notons que nous nous sommes adressés à Aristote, pour l'analyse de la structure du texte. Nous avons indiqué que les termes comme « la démonstration », « la nécessité », « l'universalité » ne sont pas décris par Euclide. Pourtant, ils ont une grande importance pour la structure du système. En revanche, nous examinerons les connotations des propositions par les propositions données dans le texte.

du point, de la ligne et ses espèces, et de la surface et ses espèces. Comme ils ont un rôle dans la construction de l'espace et comme ils sont les primitifs des autres éléments, ils auront un lieu central pour notre étude, ainsi que pour la totalité des *Eléments*. Il est nécessaire de mentionner, en outre, qu'on essayera à donner les définitions ou les descriptions des termes indéfinis, mais employées fréquemment, comme « sur », « limiter », « de manière égale » etc. Il est important de noter pour conclure que nous nous concentrerons sur le premier groupe des définitions, car ils concernent la construction de l'espace.

Dans le quatrième chapitre, on examinera les Demandes en essayant à faire une synthèse des conclusions de ce chapitre avec ceux des précédents. On traitera la première et la deuxième demande, car ils sont liés à la construction de l'espace, comme on y montrera. En outre, on considérera la construction d'espace par les implications des deux premières classes des propositions systématisant. On recherchera les connotations des termes posés comme « mener », prolonger » en partant de certains démonstrations des propositions où ils sont employés afin d'aboutir aux conclusions.

Avant de commencer, il faut encore indiquer quelques autres points qu'on emploiera dans notre recherche. Premièrement, dans cette recherche on assumera qu'Euclide suive les trois lois de la logique ; à savoir identité, tiers-exclu et non-contradiction, afin de conclure les démonstrations et donner les définitions. En outre, on utilisera, le texte original des *Eléments*[21] (et on essayera à suivre les propositions données par Euclide en grec ancien), et la traduction et le commentaire du texte fait par Bernard Vitrac.

[21] Euclid, **Euclidis Elementa**, trad. par J. L. Heiberg, Leipzig, B. G. Teubner, 1883.

2. LES PRINCIPES NECESSAIRES ET UNIVERSELLES DES SCIENCES DEMONSTRATIVES

« Tout enseignement donné ou reçu par la voie du raisonnement[22] », dit Aristote au début des *Seconds analytiques*, où il scrute les fondements des sciences démonstratives, « vient d'une connaissance préexistante »[23]. Il prétend que les sciences mathématiques et les autres arts obtiennent la connaissance de cette manière, ainsi que les raisonnements dialectiques se faisant soit par syllogisme ou par induction. Le syllogisme produit la connaissance « en prenant les prémisses comme comprise par l'adversaire » et l'induction l'acquière « en prouvant l'universel par le fait que le particulière est évident »[24].

En outre, il existe deux manières que la pré-connaissance est nécessaire : « ce qu'on doit présupposer, c'est que la chose est », et « c'est que signifie le terme employé qu'il faut comprendre »[25]. En effet, on songe que cette nécessité porte sur les choses qu'on connaît, car pour qu'on puisse connaitre une chose, d'une parte elle doit exister ou on doit supposer qu'il existe, étant donné qu'autrement on connaitra une chose qui n'existe pas, ce qui est absurde. D'autre part, on doit entendre la signifiacation de la définition de la chose, puisque sinon on ne pourra pas déterminer si les conclusions obtenues sont à propos de la chose qu'on considère.

---

[22] διανοητική : dianoetica

[23] Aristote, **Seconds Analytiques,** trad. Jules Tricot, Paris, Libraire Philosophique J. VRIN, 2012, p. 13. Voir : « Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. » 71a.

[24] **Ibid.** p. 14. Voir : « ὁμοίως δὲ καὶ περὶ τοὺς λόγους οἵ τε διὰ συλλογισμῶν καὶ οἱ δι᾽ ἐπαγωγῆς·· ἀμφότεροι γὰρ διὰ προγινωσκομένων ποιοῦνται τὴν διδασκαλίαν, οἱ μὲν λαμβάνοντες ὡς παρὰ ξυνιέντων, οἱ δὲ δεικνύντες τὸ καθόλου διὰ τοῦ δῆλον εἶναι τὸ καθ᾽ ἕκαστον » 71a 5-9.

[25] **Ibid.** Voir : « διχῶς δ' ἀναγκαῖον προγινώσκειν· τὰ μὲν γάρ, ὅτι ἔστι, προϋπολαμβάνειν ἀναγκαῖον, τὰ δέ, τί τὸ λεγόμενόν ἐστι, ξυνιέναι δεῖ, τὰ δ' ἄμφω, οἷον ὅτι μὲν ἅπαν ἢ φῆσαι ἢ ἀποφῆσαι ἀληθές, ὅτι ἔστι, τὸ δὲ τρίγωνον, ὅτι τοδὶ σημαίνει, τὴν δὲ μονάδα ἄμφω, καὶ τί σημαίνει καὶ ὅτι ἔστιν· οὐ γὰρ ὁμοίως τούτων ἕκαστον δῆλον ἡμῖν. » 71a 11.

2.1. L'objet des sciences démonstratives et les prémisses de la démonstration

A la suite de l'investigation des manières dont on possède les connaissances préexistantes, il regarde la relation entre la science et la démonstration. Puis, pour de s'occuper cette relation, il donne les conditions de la possession de la science d'une manière absolue. « …Quand nous croyons que nous connaissons la cause par laquelle la chose est, que nous savons que cette cause est celle de la chose », dit-il, « … il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est »[26]. Et puis, il remarque que tel est la nature de la science. On peut, alors, dire que la nature de la science, c'est la connaissance de la cause, ou le *pourquoi*, par laquelle on peut, au sujet de la chose, avancer qu'il est impossible d'être autre qu'elle n'est[27]. De plus, cette chose et des conclusions de ce genre sont l'objet de la science.

Par ailleurs, il indique que le *savoir* (pour la totalité des *Seconds analytiques*) « c'est connaître par le moyen de la démonstration »[28]. De plus, il remarque que la démonstration est le syllogisme scientifique dont la possession nous construit la science. On peut, par suite, asserter que le syllogisme scientifique nous fournit la cause, ou le *pourquoi*, d'impossibilité d'être autre que ce que la chose n'est. En outre, il annonce que si la connaissance scientifique consiste en ladite condition, la démonstration doit partir des prémisses (des connaissances préexistantes) « qui soient vraies, premières, immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elle, et dont elles sont les causes. C'est à ces conditions, en effet, que les principes de ce qui est démontré seront aussi appropriés à la conclusion »[29]. Notons que l'auteur accepte qu'un syllogisme puisse exister sans ces conditions, mais il ne sera pas une démonstration car il ne produira pas science. On a, donc, les connaissances préexistantes d'une démonstration pour Aristote.

---

[26] **Ibid.** p.19. Voir : « ὅταν τήν τ' αἰτίαν οἰώμεθα γινώσκειν δι' ἣν τὸ πρᾶγμά ἐστιν, ὅτι ἐκείνου αἰτία ἐστί, καὶ μὴ ἐνδέχεσθαι τοῦτ' ἄλλως ἔχειν. » 71b 11-13.

[27] Soulignons que dans une note de bas de page de la traduction de *Les secondes analytiques*, Tricot explique que par cette expression il est possible de poser des trois conditions de la connaissance scientifique : « il faut d'abord connaitre la cause de la chose », « établir une relation entre la cause et l'effet », que la conclusion soit « nécessaire et ne pouvoir être autrement ». Voir la 3ème note dans Aristote, **ibid**.

[28] **Ibid.** p.20. Voir : « φαμὲν δὲ καὶ δι' ἀποδείξεως εἰδέναι. » 71b 17.

[29] **Ibid.** Voir : « ἀνάγκη καὶ τὴν ἀποδεικτικὴν ἐπιστήμην ἐξ ἀληθῶν τ' εἶναι καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων καὶ γνωριμωτέρων καὶ προτέρων καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος· οὕτω γὰρ ἔσονται καὶ αἱ ἀρχαὶ οἰκεῖαι τοῦ δεικνυμένου. »71b 20-23.

Les raisons de ces conditions sont comme suivante : comme il n’est pas possible de connaître ceux qui ne sont pas vrais, ils doivent être vraies. Et elles doivent être indémontrables puisqu’ils sont premiers, car autrement comme il est possible de les démontrer, ils ne seront pas premiers pour la démonstration[30]. Il est nécessaire de ponctuer qu’Aristote emploie le terme « indémontrable » pour le terme « immédiat ». On pense que cet usage concerne la définition du « *savoir* ». Comme le savoir est la connaissance obtenue par le moyen de la démonstration, la connaissance première et immédiate devrait être indémontrable par le moyen de cette science[31]. De plus, il prononce que comme on possède la science quand on possède la cause de la chose, les prémisses doivent être la cause de la conclusion de la démonstration. Puis, comme ils sont les causes, ils devraient être antérieurs à la conclusion. Et enfin, il exprime que comme la connaissance de la chose, consiste en la possession de la démonstration dont la raison est constituée par les prémisses ; il est, par conséquent, « nécessaire, non seulement de connaître avant la conclusion les prémisses premières, soit toutes, soit du moins certains d’entre elles, mais encore de les connaître mieux que la conclusion »[32].

Au surplus, par la suite d’examen des conditions de prémisses premières, il continue à traiter ce que d’être première signifie pour les prémisses. Il formule que les prémisses premières doivent être les principes car le principe et les prémisses premières sont identiques. Alors, il ajoute que « un principe de démonstration est une proposition immédiate. Est immédiate une proposition à laquelle aucune autre n’est antérieure »[33].

---

[30] Il est obligatoire de signaler que cette expression employée par Aristote n’est pas suffisante, car il dit que les prémisses doivent être indémontrables parce qu’ils sont les premiers et les premiers sont indémontrables. En effet, il donne la raison d’impossibilité de démontrer les prémisses premières à partir de l’incommunicabilité des genres des sciences.

[31] Il faut, indiquer que l’immédiateté et l’impossibilité de donner une démonstration pour des prémisses ont une grande importance en *Seconds Analytiques*, car si les prémisses étaient démontrables il y aurait une régression infinie pour toutes les démonstrations. Dans secondes analytiques il indique : « Notre doctrine, à nous, est que toute science n’est pas démonstrative, mais que celle des propositions immédiates est, au contraire, indépendante de la démonstration. (Que ce soit là une nécessité, c’est évident. S’il faut, en effet, connaître les prémisses antérieures d’où la démonstration est tirée, et si la régression doit s’arrêter au moment où l’on atteint les vérités immédiates, ces vérités sont nécessairement indémontrables.) Telle est donc notre doctrine ; et nous disons, en outre, qu’en dehors de la connaissance scientifique, il existe encore un principe de science qui nous rend capable de connaître les définitions ». **Ibid.**, p. 28. Puis, il démontre le caractère indémontrable de prémisses dans les chapitres suivants.

[32] **Ibid.** p. 24. Voir : « ἀνάγκη μὴ μόνον προγινώσκειν τὰ πρῶτα, ἢ πάντα ἢ ἔνια, ἀλλὰ καὶ μᾶλλον· » 72 27-28.

[33] **Ibid.** p. 22. Voir : « ἀρχὴ δ' ἐστὶν ἀποδείξεως πρότασις ἄμεσος, ἄμεσος δὲ ἧς μὴ ἔστιν ἄλλη προτέρα. » 72a 7-8.

Aristote donne une suite des définitions afin d'expliquer la division des principes en deux espèces : la thèse et l'axiome. Il décrit la proposition, qui est l'une des parties d'une énonciation, en tant qu'attribution d'un prédicat à un sujet. Puis, une proposition démonstrative toujours prend la partie qui est déterminée[34] comme vrai[35]. Il définit alors l'énonciation comme l'une des parties d'une contradiction qui est une opposition ne pas admettant par soi aucune intermédiaire. La partie de la contradiction est appelée affirmation si elle unit un prédicat à un sujet, et si elle nie un prédicat d'un sujet, on l'appelle la négation. En effet, on peut en premier lieu distinguer que la définition de la proposition est posée à partir de celle de la contradiction qui à la fois affirme et nie l'attribution d'un prédicat à un sujet. A cet égard, une contradiction n'admit par soi aucune intermédiaire ; à savoir elle est indémontrable, car il viole la loi de non-contradiction[36]. Tandis que l'énonciation est l'ensemble de l'affirmation et de la négation, et la proposition est l'un des deux. Puis, elle est démonstrative si elle prend une partie déterminée comme vrai[37]. Par suite nous pouvons dire que le principe est une proposition qui attribue un seul prédicat à un seul sujet, et qui est déterminée comme vrai.

Dans ce contexte, l'axiome est posé en tant que proposition dont « la possession est indispensable à qui veut apprendre n'importe quoi »[38]. La thèse est une proposition qui « n'est pas indispensable à qui veut apprendre quelque chose »[39]. Il, ensuite, divise la thèse en deux espèces : hypothèse et définition. La thèse prend « l'une quelconque des parties de l'énonciation, » quand on dit, « qu'une chose est ou qu'une chose n'est pas, c'est hypothèse ; sinon, c'est une définition »[40]. On peut dire que les hypothèses sont les propositions qui énoncent l'existence ou la non-

---

[34] Notons qu'il n'explique pas la règle pour de déterminer une énonciation comme vrai ou fausse.
[35] **Ibid.** p. 23. Voir : « Ἡμεῖς δέ φαμεν οὔτε πᾶσαν ἐπιστήμην ἀποδεικτικὴν εἶναι, ἀλλὰ τὴν τῶν ἀμέσων ἀναπόδεικτον (καὶ τοῦθ' ὅτι ἀναγκαῖον, φανερόν· εἰ γὰρ ἀνάγκη μὲν ἐπίστασθαι τὰ πρότερα καὶ ἐξ ὧν ἡ ἀπόδειξις, ἵσταται δέ ποτε τὰ ἄμεσα, ταῦτ' ἀναπόδεικτα ἀνάγκη εἶναι)- ταῦτά τ' οὖν οὕτω λέγομεν, καὶ οὐ μόνον ἐπιστήμην ἀλλὰ καὶ ἀρχὴν ἐπιστήμης εἶναί τινά φαμεν, ᾗ τοὺς ὅρους γνωρίζομεν. » 72b 18-25.
[36] Nous disons « indémontrable » car on ne peut pas démontrer une contradiction.
[37] En effet, il est difficile de décider si la proposition signifie une partie déterminée d'une énonciation ou non pas. En revanche, il est évident que la proposition démonstrative est déterminée en tant que vrai.
[38] **Ibid.** p. 23. Pour « sa possession est indispensable à qui veut apprendre n'importe quoi », voir : « Ἀμέσου δ' ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι, μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι· ἣν δ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, ἀξίωμα·» 72a 14-17.
[39] **Ibid.**
[40] **Ibid.** p.13. Voir : « θέσεως δ' ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀντιφάσεως λαμβάνουσα, οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι, ὑπόθεσις, ἡ δ' ἄνευ τούτου ὁρισμός. » 72a 18-21.

existence[41] des choses et les définitions ne déclarent ni l'existence ni la non-existence des choses. « Les définitions », il indique, « requièrent seulement d'être comprises »[42]. Quant aux postulats (ou demandes), il dit qu'ils ne sont pas nécessaires par leur même mais on doit les accepter sans démonstration. Cette propriété les sépare directement des axiomes.

On a donc, les espèces des principes de la démonstration. L'axiome est posé dans un premier lieu comme la proposition indispensable pour toutes les sciences, la thèse est posée comme la proposition qui est propre au domaine d'une science quelconque. On dit que l'axiome précède la thèse car sans de l'axiome l'appréhension est impossible, tandis que l'on besoin la thèse par rapport à la science qu'on étudie. Ensuite, la définition étant une espèce de la thèse se diffère de l'hypothèse, en ne pas connotant ni l'existence ni la non-existence d'une chose. Elle pose seulement ce que la chose est, par contre l'hypothèse pose que la chose est. La Demande semble à l'hypothèse par rapport à sa forme, tandis qu'il est employé sans démonstration.

2.2. La nature nécessaire des principes de la démonstration

L'auteur des *Seconds analytiques,* de surcroît, après avoir exposée la nécessité des connaissances préexistantes pour la démonstration, traite le caractère nécessaire de la démonstration, i.e. la nécessité de la démonstration. « Puisqu'il est impossible que soit autre qu'il n'est objet de la science prise au sens absolue », dit-il, « ce qui est connu par la science démonstrative sera nécessaire ; mais la science démonstrative est celle que nous avons par le fait même que nous sommes en possession de la démonstration : par conséquent, la démonstration est un syllogisme constitué à partir de prémisses nécessaires »[43].

---

[41] Il est nécessaire à déceler que la proposition est posée comme une énoncé qui attribue un prédicat à un sujet. Dans le cas de l'hypothèse, comme il attribue un prédicat à un sujet, il attribut l'existence à une chose, ce qui est extraordinaire. En effet, dans le texte original Aristote dire pour l'hypothèse « οἷον λέγω τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι » où « τὸ εἶναί » est le mode infinitif du verbe « εἰμί » qui signifie « être », « exister ». A cet effet il dit implicitement que « l'existence » est prédicable, ainsi que « la non-existence » ou « le non être » qui est, encore, plus extraordinaire que la première. L'attribution du prédicat « non-existence » n'est pas claire. Si un sujet est attribué par « non-existence », il est non-existent. Toutefois, il faut expliquer la raison qui permit une telle attribution sur une chose qui n'existe par ou qui n'est pas. Nous pensons, il est probable que les expressions que nous traitons connotent un autre sens que nous ne pouvons pas distinguer.

[42] **Ibid.** p. 25. Voir : « τοὺς δ' ὅρους μόνον ξυνίεσθαι δεῖ· » 76b 36-37.

[43] **Ibid.** p. 33. Voir : « Ἐπεὶ δ' ἀδύνατον ἄλλως ἔχειν οὗ ἔστιν ἐπιστήμη ἁπλῶς, ἀναγκαῖον ἂν εἴη τὸ ἐπιστητὸν τὸ κατὰ τὴν ἀποδεικτικὴν ἐπιστήμην· ἀποδεικτικὴ δ' ἐστὶν ἣν ἔχομεν τῷ ἔχειν ἀπόδειξιν. ἐξ ἀναγκαίων ἄρα συλλογισμός ἐστιν ἡ ἀπόδειξις » 73a 21-24.

Ensuite, afin d'exposer les conditions de la nécessité de la démonstration, il définit les termes « attribué à tout le sujet », « par soi » et « universellement » comme un commencement. Une attribution est affirmée de la totalité du sujet si elle « n'est ni attribué à quelque cas de ce sujet à l'exclusion de quelque autre, ni attribué à un certain moment à l'exclusion de tel autre »[44].

Les attributs par soi ou bien « appartiennent à l'essence du sujet » ou bien « sont contenus dans des sujets qui sont eux-mêmes compris dans la définition exprimant la nature de ces attributs »[45]. Les attributs se divisent en deux : les attributs qui appartiennent l'un des deux manières sont les attributs par soi et qui n'appartiennent d'aucune des deux manières sont les accidents. De plus, il indique que « ce qui n'est pas dit de quelque autre chose » est de même par soi[46]. A cet égard, « les attributs qui ne sont pas affirmés d'un sujet » sont par soi et « ceux qui sont affirmés » sont accidents[47]. Ensuite, « une chose qui appartient par elle-même à une chose est dite par soi, et une chose qui n'appartient pas par elle-même à une chose, accident »[48]. Puis, il avance que les attributs par soi sont « à la foi par soi et nécessairement »[49], car il est impossible pour eux de ne pas appartenir à leurs sujets. « Par conséquent », dit-il, « s'il est nécessaire ou d'affirmer ou de nier un prédicat d'un sujet, les attributs par soi doivent aussi nécessairement appartenir à leurs sujets »[50]. Il décrit, enfin, l'attribut universel comme un attribut appartenant à tout sujet par soi. Dans ces conditions, l'attribut universel appartient à son sujet par nécessité.

---

[44] **Ibid.** Voir : « Κατὰ παντὸς μὲν οὖν τοῦτο λέγω ὃ ἂν ᾖ μὴ ἐπὶ τινὸς μὲν τινὸς δὲ μή, μηδὲ ποτὲ μὲν ποτὲ δὲ μή, » 73a 28-29.

[45] **Ibid.** p. 34-35. Voir : « Καθ' αὑτὰ δ' ὅσα ὑπάρχει τε ἐν τῷ τί ἐστιν » 73a34-35, « καὶ ὅσοις τῶν ὑπαρχόντων αὐτοῖς αὐτὰ ἐν τῷ λόγῳ ἐνυπάρχουσι τῷ τί ἐστι δηλοῦντι, » 73a37-38. Pour tout le passage où la première expression se trouve, voir : « Καθ' αὑτὰ δ' ὅσα ὑπάρχει τε ἐν τῷ τί ἐστιν, οἷον τριγώνῳ γραμμὴ καὶ γραμμῇ στιγμή (γὰρ οὐσία αὐτῶν ἐκ τούτων ἐστί, καὶ ἐν τῷ λόγῳ τῷ λέγοντι τί ἐστιν ἐνυπάρχει), καὶ ὅσοις τῶν ὑπαρχόντων αὐτοῖς αὐτὰ ἐν τῷ λόγῳ ἐνυπάρχουσι τῷ τί ἐστι δηλοῦντι, οἷον τὸ εὐθὺ ὑπάρχει γραμμῇ καὶ τὸ περιφερές, καὶ τὸ περιττὸν καὶ ἄρτιον ἀριθμῷ, καὶ τὸ πρῶτον καὶ σύνθετον, καὶ ἰσόπλερον καὶ ἑτερόμηκες· καὶ πᾶσι τούτοις ἐνυπάρχουσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ τί ἐστι λέγοντι ἔνθα μὲν γραμμὴ ἔνθα δ' ἀριθμός » 73a 34-73b3.

[46] **Ibid.** p. 36. « ἔτι ὃ μὴ καθ' ὑποκειμένου λέγεται ἄλλου τινός, » 73b 5-6.

[47] **Ibid.** Voir : « τὰ μὲν δὴ μὴ καθ' ὑποκειμένου καθ' αὑτὰ λέγω, τὰ δὲ καθ' ὑποκειμένου συμβεβηκότα » 73b 8-10.

[48] **Ibid.** Voir : « ἔτι δ' ἄλλον τρόπον τὸ μὲν δι' αὑτὸ ὑπάρχον ἑκάστῳ καθ' αὑτό, τὸ δὲ μὴ δι' αὑτὸ συμβεβηκός » 73b10-11.

[49] **Ibid.** p. 37. Voir : « δι' αὑτά τέ ἐστι καὶ ἐξ ἀνάγκης » 73b 18. Pour la totalité du passage, voir : « τὰ ἄρα λεγόμενα ἐπὶ τῶν ἁπλῶς ἐπιστητῶν καθ' αὑτὰ οὕτως ὡς ἐνυπάρχειν τοῖς κατηγορουμένοις ἢ ἐνυπάρχεσθαι δι' αὑτά τέ ἐστι καὶ ἐξ ἀνάγκης. » 73b16-18.

[50] **Ibid.** p. 38. Voir : « ὥστ' εἰ ἀνάγκη φάναι ἢ ἀποφάναι, ἀνάγκη καὶ τὰ καθ' αὑτὰ ὑπάρχειν. » 73b 23-24.

Par ailleurs, comme ou bien les attributs essentiels sont les éléments de l'essence de sujets dont ils appartiennent ou bien ils contiennent leurs sujets comme les éléments de leurs natures propres, les attributs essentiels appartiennent nécessairement à leurs sujets. Par suite, les prémisses dont la science démonstrative part doivent être de ce genre, car « tout attribut, ou bien appartient de cette façon à son sujet, ou bien accidentel ; mais les accidents ne sont pas nécessaires »[51]. Pour ces raisons, il indique qu'il faut accepter que la conclusion de la démonstration soit nécessaire et une conclusion démontrée ne peut être autre qu'elle n'est, par suite, « que le syllogisme doit partir de prémisses nécessaires »[52]. En effet, il dit que lorsqu'on part des prémisses nécessaires, on aboutit à démonstration car la nécessité de celles-là est déjà le caractère de démonstration. D'un autre côté, pour Aristote il est possible de tirer les conclusions nécessaires celles des non-nécessaires, mais dans ces circonstances la cause, le *pourquoi*, de la démonstration peut ne pas être, et par suite, on ne la connaîtra pas en termes de la science démonstrative. En conséquence, comme la science démonstrative doit être la connaissance des conclusions nécessaires, elle doit être obtenue par un moyen (la cause, le pourquoi) nécessaire, sinon « on ne connaîtra ni pourquoi la conclusion est nécessaire, ni même qu'elle n'est »[53].

Avant tout, on a besoin d'expliquer la nature nécessaire de la connaissance scientifique. En effet, Aristote pose la connaissance scientifique en tant que la connaissance d'impossibilité d'être autre qu'une chose n'est. S'il était possible que la chose soit autre qu'elle n'est, on ne pourrait pas parle d'une nécessité, car la chose ne serait pas nécessairement dans le cas connu par n'importe quel moyen. On pense que la nécessité de la connaissance vient de cette impossibilité.

En outre, puisque la connaissance d'une chose est nécessaire, et la démonstration nous fournit la cause de cette connaissance ; c'est-à-dire, la cause de cette nécessité, la démonstration doit partir des principes nécessaires. Parce que, sinon comme la cause n'est pas nécessaire ; à savoir elle est possible, la connaissance obtenue au moyen de cette cause possible, devient possible ; car on ne peut pas nécessairement dire que la conclusion est nécessairement en tant que telle. C'est pour

[51] **Ibid.** p. 46. Voir : « ἅπαν γὰρ ἢ οὕτως ὑπάρχει ἢ κατὰ συμβεβηκός, τὰ δὲ συμβεβηκότα οὐκ ἀναγκαῖα » 74b 11-12.
[52] **Ibid.** p. 47. Voir : « ἐξ ἀναγκαίων ἄρα δεῖ εἶναι τὸν συλλογισμόν » 74b 15.
[53] **Ibid.** p. 51. Voir : « ἢ οὐκ ἐπιστήσεται οὔτε διότι οὔτε ὅτι ἀνάγκη ἐκεῖνο εἶναι, » 75a 14-15.

cela les principes doivent être nécessaires pour qu'ils soient les causes de la démonstration.

On a vu que les principes de la démonstration sont les propositions attribuant un seul prédicat à un seul objet, qui sont déterminées comme vrai. S'ils sont, de même, nécessaires alors cette attribution doit être nécessaire. Dans ce cadre, *attribué à tout le sujet* ou *affirmé de totalité du sujet* signifient les prédications qui sont vrai dans tous les cas. Les attributs par soi sont nécessairement prédiqués aux leurs sujets ; à savoir ils ne sont prédiqués qu'aux leurs sujets. Telle est la différence de *attribué à tout le sujet* et *par soi* : tandis que ce qui est attribué à la totalité de sujet n'est pas nécessairement appartient à son sujet, attribut par soi l'appartient nécessairement. L'attribut par soi ne peut pas être dite pour un sujet qui se diffère du sujet propre de l'attribut par soi, tandis que l'*attribué à tout le sujet* peut être dite pour les plusieurs sujets. Enfin, les attributs universels sont nécessairement prédiqués à la totalité de leurs sujets. En cela, la connaissance scientifique s'occupe aux attributs universels.

2.3. L'impossibilité de démontrer les principes de la démonstration

De plus, il exprime, dans ce contexte, qu'il n'est pas possible de passer d'un genre de science à un autre lorsqu'on démontre n'importe quoi. Comme les objets sur lesquels la science opère sont des différents genres, les attributs essentiels des objets des différentes sciences doivent se différer. En outre, comme les démonstrations scientifiques portent sur « le genre au sujet duquel » elles ont lieu, « le genre doit nécessairement être le même, soit d'une façon absolue, soit tout au moins d'une certaine façon, si la démonstration doit se transporter d'une science à une autre » [54]. C'est la raison pour laquelle il est impossible de transférer les démonstrations entres les sciences qui s'occupent des champs entièrement différents. Remarquons-nous, d'ailleurs, qu'Aristote accepte seulement un passage entre les sciences s'il existe une relation de l'infériorité-supériorité entre elles. Un tel passage peut seulement avoir lieu de la science supérieure à l'une inférieure.

En outre, au sujet des principes propres ou indémontrables des choses, il indique qu'ils ne sont pas les sujets à démonstration, « car les principes dont ils seraient déduits seraient les principes de toutes choses, et la science de laquelle ils

[54] **Ibid.** p. 55. Voir : « ἡ δ' ἀριθμητικὴ ἀπόδειξις ἀεὶ ἔχει τὸ γένος περὶ ὃ ἡ ἀπόδειξις, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ὥστ' ἢν ἁπλῶς ἀνάγκη τὸ αὐτὸ εἶναι γένος ἢ πῇ, εἰ μέλλει ἡ ἀπόδειξις μεταβαίνειν » 75b 7-9.

relèveraient, la science de toutes choses par excellence »[55]. Il ajoute qu'on connaît mieux lorsque sa connaissance est dérivée des causes plus élevées car sa connaissance est tirée de causes « qui ne sont pas elles-mêmes causées »[56], d'où cette connaissance sera une « science à un degré plus élevé, ou même au plus haut degré »[57]. Par contre, comme les démonstrations ne se transportent pas d'une science inférieure à une supérieure, il n'est pas possible de démontrer les principes d'une science par démonstrations employées par cette science. Donc, les principes propres d'une science démonstrative doivent être indémontrables au moyen de la démonstration.

2.4. Les trois classes des principes nécessaires et indémontrables des sciences démonstratives

Après avoir exposé les natures nécessaires et indémontrables des principes, Aristote considère les principes différents. D'abord, il pose la définition du principe, c'est l'élément dont l'existence est indémontrable. C'est pourquoi l'existence des principes doivent être posées, « mais s'il s'agit du reste, il faut la démontrer »[58]. Puis, il divise les principes en deux : les principes propres et les principes communs. Les principes propres de chaque domaine sont les définitions et les postulats ; et les communs sont les axiomes. Les propositions qui sont nécessairement par soi et « qu'on doit nécessairement croire »[59], ce sont les axiomes. Les propositions qui ne sont pas nécessairement par soi, mais qu'on pose et emploie sans démonstration, ce sont les postulats. Les définitions sont les propositions qui « requièrent seulement d'être comprises »[60]. On a, donc, les trois classes de principes qui sont à la fois les propositions premières et indémontrables de chaque science démonstrative.

[55] **Ibid.** p. 62. Voir : « ἔσονται γὰρ ἐκεῖναι ἁπάντων ἀρχαί, καὶ ἐπιστήμη ἡ ἐκείνων κυρία πάντων » 76a 17-18. Pour tout le passage, voir : « Εἰ δὲ φανερὸν τοῦτο, φανερὸν καὶ ὅτι οὐκ ἔστι τὰς ἑκάστου ἰδίας ἀρχὰς ἀποδεῖξαι· ἔσονται γὰρ ἐκεῖναι ἁπάντων ἀρχαί, καὶ ἐπιστήμη ἡ ἐκείνων κυρία πάντων » 76a 16-18.

[56] Il dit : « ὅταν ἐκ μὴ αἰτιατῶν εἰδῇ αἰτίων » 76a 20.

[57] **Ibid.** Voir : « ὥστ' εἰ μᾶλλον οἶδε καὶ μάλιστα, κἂν ἐπιστήμη ἐκείνη εἴη καὶ μᾶλλον καὶ μάλιστα » 76a 20-22. Pour tout le passage, voir : « καὶ γὰρ ἐπίσταται μᾶλλον ὁ ἐκ τῶν ἀνώτερον αἰτίων εἰδώς· ἐκ τῶν προτέρων γὰρ οἶδεν, ὅταν ἐκ μὴ αἰτιατῶν εἰδῇ αἰτίων. ὥστ' εἰ μᾶλλον οἶδε καὶ μάλιστα, κἂν ἐπιστήμη ἐκείνη εἴη καὶ μᾶλλον καὶ μάλιστα » 76a 18-22.

[58] **Ibid.** Voir : « τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι· » 76a 34. Pour tout le passage, voir : « τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων, λαμβάνεται, ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι » 76a 32-34.

[59] **Ibid.** p. 66. Voir : « δοκεῖν ἀνάγκη » 76b 24. Pour tout le passage, voir : « Οὐκ ἔστι δ' ὑπόθεσις οὐδ' αἴτημα, ὃ ἀνάγκη εἶναι δι' αὑτὸ καὶ δοκεῖν ἀνάγκη » 76b 23-24.

[60] **Ibid.** p. 67. Voir : « τοὺς δ' ὅρους μόνον ξυνίεσθαι δεῖ » 76b 36-37.

Pour ce qui est des chapitres où Aristote examine la démonstration et ses principes, pose-t-il, encore une fois, l'objet de la science comme la chose qui ne peut pas être autre qu'elle n'est. La connaissance scientifique porte sur la cause de cet état de l'objet scientifique. C'est pourquoi, la connaissance scientifique est nécessaire.

Au surcroit, cette connaissance nous arrive au moyen de la démonstration qui est un type du syllogisme appelé scientifique. En outre, la démonstration nous fournit des connaissances nécessaires, d'où la conclusion de la démonstration doit être nécessaire.

De plus, les prémisses de la démonstration sont les propositions qui doivent être vraies, premières (i.e. principes), immédiates, indémontrables, et nécessaires. Puis, il faut que les prémisses doivent être la cause de la conclusion et antérieur à elle. Ensuite, la démonstration doit concerner les attributs universels car les attributs universels appartiennent nécessairement à la totalité de leurs sujets.

Partant de ces faits, on peut dire qu'une démonstration est un enchaînement (ou une suite) des propositions où elles sont liées les uns aux autres par nécessité, dont les premières sont indémontrables et immédiates, dont la dernière résulte nécessairement des précédents. Ensuite il faut remarquer que comme les démonstrations nous construisent la science et l'objet de la science est marqué par la nécessité, la connaissance scientifique devrait être un enchaînement des démonstrations où les suivantes sont nécessairement liées aux précédents.

Au demeurant, les principes de la démonstration se divisent en trois : les définitions, les postulats, les axiomes. Les définitions sont les propositions décrivant les éléments du domaine de la science. Les axiomes sont des propositions déclarant les vérités sans lesquels on ne peut apprendre. Plus, l'axiome est une proposition qui est nécessaire par soi. Les postulats sont les propositions énonçant que les éléments primitifs de cette science existent. Le postulat n'est pas nécessaire par soi. Notons, tandis que les postulats semblent démontrables, ils sont assumés et employés sans démonstration. Ces trois classes des propositions, étant les principes, sont les éléments premiers, indémontrables et immédiats, d'une démonstration à partir desquelles elle s'enchaîne, ainsi qu'ils systématisent cet enchainement des propositions.

Alors, on a traité les parties des *Seconds analytiques* concernées la démonstration et ses principes, afin d'identifier la méthode des *Éléments*. Dans ce cadre, on a examiné la définition et les conditions de la science chez *Seconds analytiques*. On a vu que la science est la connaissance nécessaire et vraie des choses, et la démonstration qui est un genre du syllogisme, nous la fournit. La démonstration est une suite des énonces où les propositions sont liées par la nécessité, et la conclusion est de même nécessaire. Puis, la science est l'enchainement des démonstrations.

Ensuite, comme tout enseignement vient des connaissances préexistantes, la démonstration qui nous donne la cause d'une connaissance scientifique, vient des connaissances préexistantes appelées les principes de la démonstration. Les principes sont les propositions qui systématisent la connaissance scientifique, car toutes les démonstrations aboutissent aux conclusions à partir d'eux. Ils sont, en étant à la fois nécessaire et vrais, la cause de la nécessité et vérité de la démonstration. De plus ils sont les propositions qui sont, premières, immédiates et indémontrables.

Par ailleurs, comme la conclusion de la démonstration est nécessaire, elle doit partir des principes nécessaires. A cet égard, les principes sont les attributs universels, car l'universel connote pour un attribut le fait d'appartenir à tout son sujet par soi. Il est nécessairement vrai pour son sujet.

En outre, les principes de la démonstration sont indémontrables par le moyen de la démonstration. Comme la démonstration est le moyen de posséder des causes des choses causées, et comme les principes sont les choses qui ne sont pas causées, le domaine de la démonstration se diffère celle de la science qui étude les fondements des principes. D'où la démonstration des principes est impossible.

Enfin, on a trois classes des principes : les axiomes en tant que propositions qui sont nécessairement par eux mêmes, les postulats (ou les demandes) en tant que propositions qui ne sont pas nécessairement par eux-mêmes, malgré du fait qu'ils sont posés et utilisé sans démonstration, et les définitions en tant que propositions qui expriment les essences des choses. Les axiomes sont les propositions dont la possession est essentielle pour tous ceux qui veulent avoir n'importe quelle connaissance scientifique. Les postulats et les définitions dépendent du genre de la science qui est étudiée.

Finalement, il est évident qu'Euclide suive le chemin établit par Aristote. Lorsqu'on traite les *Éléments*, on différencie que les démonstrations aboutissent aux conclusions en partant des trois classes des propositions données au début du premier livre. Euclide emploie les inférences des trois classes des propositions dans toutes les démonstrations, cependant, il ne les démontre pas, il les donne seulement comme les Définitions, les Demandes, Les Notions Communes. Les Définitions posent les nommes et les propriétés propres des éléments. Les Demandes posent les règles pour des déterminations des éléments. Les Notions Communes posent les propositions concernant la totalité du livre où la géométrie plane et la théorie des nombres qui ont les domaines différentes (dans une manière) sont examinées.

Dans ce contexte, il faut constater que non seulement l'usage de ces trois classes des propositions s'ajuste avec l'usage exposé dans les *Seconds analytiques*, mais encore les propositions qu'ils contiennent sont construites de même manière que celles de posées par Aristote. Il est nécessaire de mentionner que le titre d'Axiomes se transforme à Notions Communes où il existe les propositions données par Aristote comme exemples des Axiomes.

En outre, Aristote indique que les scientifiques ne postulent pas parfois certains axiomes s'ils sont avec clarté évidents. Dans les *Éléments*, la loi de non-contradiction et la loi de tiers exclue de la logique sont employées sans démonstration, pourtant ils ne sont pas données sous le titre de Notions Communes ni ceux des deux autres classes. En ce sens, il existe une similarité de plus entre la méthode des *Éléments* et celle des *Secondes analytiques*.

Au surcroit, les propositions sont démontrées dans le texte d'Euclide, ou bien par les implications des trois classes des propositions, ou bien par la réduction à l'absurde. Dans ce sens, on peut dire que les conclusions des démonstrations sont nécessaires, car dans le premier cas la conclusion nécessairement suit les implications des propositions systématisant, et dans le deuxième la démonstration a lieu à partir de la loi de non-contradiction, par suite sa conséquence est nécessaire. Les démonstrations possèdent, donc, un caractère nécessaire, néanmoins au sujet de la nécessité des principes, ils ne sont pas démontrés dans les *Éléments*.

3. L'EXAMEN DES CONTENUS DES NOTIONS COMMUNES

Tout d'abord, on a souligné l'importance des propositions sous le titre de Notions Communes à propos de constituer la connaissance systématique avec les autres deux classes de propositions. On a également traité la nécessité de saisir la signifiance de ceux trois classe systématisant afin d'examiner la validité des propositions. On examinera la dernière classe de propositions qu'on les a prises au début de notre recherche. Mais en première lieu on veut discuter quelques débats historiques sur ces trois classes. Ensuite, on fera quelques observations sur la manière d'examiner ces trois classes. Enfin, on tirera des conclusions des cinq propositions présentées sous ce titre.

3.1. L'authenticité de Notions Communes

En première lieu, on doit attirer l'attention sur le fait que le texte a été transféré des différents manuscrits à nos jours. Ici, on n'examinera pas en détail les relations entre les manuscrits et ce transfert complexe. Mais mentionnons simplement quelques différences dans les éditions modernes pour illustrer à quel point la transmission desdites parties constitutives du texte est problématique. Par exemple, dans l'édition 1814[61] de François Peyrard, six Demandes et neuf Notions

[61] Notons qu'il y a deux versions du texte qui sont éditées par François Peyrard. La première édition qui est publiée en 1804 contient seulement la traduction française du texte. La deuxième édition qui est publiée en 1814 contient la traduction française et latine du texte avec le texte original en grec ancien. Dans la première édition, il donne trois propositions sous le titre de Demandes :
« 1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque et avec un intervalle quelconque décrire une circonférence de cercle. »
Peyrard donne douze propositions sous le titre de Notions Communes ou Axiomes :
« 1. Les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entr'elles.
2. Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les tous seront égaux.
3. Si de quantités égales on retranche des quantités égales, les restes seront égaux.
4. Si à des quantités inégales on ajoute des quantités égales, les tous seront inégaux.
5. Si de quantités inégales on retranche des quantités égales, les restes seront inégaux.
6. Les quantités qui sont doubles d'une même quantité son égales entr'elles.
7. Les quantités qui sont les moitiés d'une même quantité sont égales entr'elles.
8. Les choses qui se conviennent mutuellement sont égales entr'elles.
9. Le tout est plus grand que sa partie.
10. Tous les angles droits sont égaux.

Communes sont donnés.[62] En plus, dans le texte 1883[63] de Johan Ludvig Heiberg, il existe cinq Demandes et cinq Notions Communes[64]. Pareillement, la position, même l’existence de la demande qui suggère que les deux droites ne renferment pas un espace et dont la présence ou l’absence sous la forme de Demande ou de Notion Commune, est vitale pour l’espèce de la géométrie, est controversée. Heiberg a placé cette proposition tenue par Peyrard comme sixième Demande, sous le titre de Notions Communes. Il ne l’a même pas traduit en latin[65].

Ensuite, on veut attirer l'attention non seulement sur les manuscrits et la complexité des différentes éditions, mais également sur les interventions des éditeurs dans la structure du système en raison de la logique qu'ils voient dans le système. En

---

11. Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droites, les deux droites prolongées à l’infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droites.

12. Deux droites ne renferment point un espace ». Euclide, **Les éléments de géométrie d’Euclide**, trad. par F. Peyrard, Paris, F Louis, 1804, p. 5-6.
Dans la deuxième édition datée de la 1814, il place les trois dernières propositions sous le titre de Demandes (en grec ancien « Αἰτήματα », en latin « Postulata »).

[62] Euclide, **Les œuvres d’Euclide, en grec, en latin, en français, d’après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu’à nos jours**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1814, p. 5.

[63] Le texte 1883 d’Heiberg contient le texte original des *Eléments* et sa traduction en latin. Dans cette traduction, Heiberg donne cinq propositions sous le titre de Postulata, qui est traduit comme Demande par Peyrard, et neuf propositions sous le titre de Communes animi conceptiones, qui est traduit comme Notions Communes ou Axiomes par Peyrard :
« 1. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
3. καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
4. καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. ».
Heiberg donne neuf propositions sous le titre de Communes animi conceptiones, qui est traduit comme Notions Communes ou Axiomes par Peyrard :
« 1. τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
2. καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
3. καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
4. καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.
5. καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
6. καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
7. καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
8. καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν.
9. καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I**, trad. par J. L. Heiberg, Leipzig, B. G. Teubner, 1883, p. 8-10.

[64] **Ibid.**

[65] En effet, comme on peut l’observer dans les notes de bas de page 60 et 62 la seul différence entre le texte de Peyrard et celle d’Heiberg n’est pas le lieu de cette notion commune. Tout d’abord les nombres des propositions contenues sous ces titres se différent. Il y a quinze propositions sous les titres de Demandes et de Notions Communes ou Axiomes dans le texte de Peyrard et il y en a quatorze dans celle d’Heiberg. En outre, cinquième notion commune de Peyrard n’est pas inclue dans le texte d’Heiberg. De plus Heiberg traduit cinq des propositions contenues dans le texte grec ancien sous le titre de « κοιναί ἔννοια ». Il traduit seulement les 1ère, 2ème, 3ème, 7ème, et 8ème propositions de ce titre en latin ; à savoir, il ne traduit pas les 4ème, 6ème, 7ème propositions qui sont sous le titre de Notions Communes dans l’édition 1814 de Peyrard.

fait, ces différents arrangements de texte ne sont pas simplement le résultat des problèmes éditoriaux. Cela souligne l'essence du texte et les problèmes auxquels Euclid est confronté. Dans ce contexte, la question de savoir comment créer le texte à partir de différents manuscrits et la question de savoir ce qui devrait être logiquement couvert sous les différents titres du texte semblent être étroitement liées. Quels sont les Demandes et comment fonctionnent-ils ? Comment les Notions Communes sont-ils séparés des Demandes et quelles sont leurs rôles dans le texte ? La quête pour rétablir l'ordre qui doit être dans l'ancien parchemin est discutable sans demander et répondre à ces questions.

De plus, l'un des points de vues extrêmes sur cette question va jusqu'à dire que ce qui est exprimé sous le titre de Notions Communes ne figure pas dans le texte original. Selon le chercheur français Paul Tannery, le titre de Notions Communes ainsi que les propositions citées dans ce titre ont ensuite été intégrés au texte. Puis, Heath, l'auteur de *The thirteen books of Euclid's elements*[66], traite ce point de vue de Tannery. Il conduit sa discussion sur l'article de l'auteur intitulé « Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide »[67].

Selon Heath, les objections de Tannery peuvent être classées en trois catégories. La première objection de Tannery découle de la notion selon laquelle le titre Notions Communes s'applique non seulement à la géométrie, mais à toutes les sciences. Selon lui, si ces propositions ont une généralité qui peut être appliquée à toutes les sciences, les Notions Communs devraient être donnés avant, pas après des Demandes.[68] La deuxième objection de Tannery concerne le nom de cette section. Selon lui, si ce chapitre est présent dans le texte original, le titre du chapitre devrait être donné par Euclid. Parce qu'il devra séparer cette partie des demandes. Dans ce cas, il serait plus plausible qu'il utilise le terme axiome plutôt qu'un terme non utilisé techniquement chez Platon et Aristote. Cependant, même si Euclide a utilisé le terme axiome, Tannery mentionne qu'il est impossible de comprendre le remplacement de ce terme par la Notion Commune qui est moins appropriée que le terme axiome. Parce que le terme « *ἔννοια* » fait référence à la notion d'un objet de pensée plutôt

---

[66] Thomas L. Heath, **Euclid: The Thirteen Books of the Elements**, Oxford: Cambridge University Press, 1968

[67] Paul Tannery, « Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide », **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques** 2e série, Tome 8, No 1 (1884), p. 162-175.

[68] Heath, **ibid.** p. 221.

qu'à une proposition[69]. En conséquence, Tannery pense que si l'on disait que l'axiome était facilement accepté par tous à cette époque, ce titre resterait.[70] C'est la raison pour laquelle, d'après Tannery, le titre Notions Communes ne pouvait être interpolé au texte que lorsqu'Apollonius de Pergé étudiait les *Éléments*. La preuve qu'il suggère en ce sens est que le terme « notion » est mentionné dans une citation de Proclus : « Nous serons d'accord avec Apollonius lorsqu'il dit que nous avons la notion de ligne lorsque nous ordonnons les longueurs, uniquement, de routes ou de murs à mesurer »[71].

Les contres arguments de Heath sont les suivants. Premièrement, en réponse à l'opinion de Tannery sur l'étrangeté de fait de mettre en fin des principes les plus généraux, Heath souligne qu'il serait encore plus absurde de placer ces principes généraux entre les Définitions et les Demandes qui concerne la géométrie.[72] De plus, il n'est pas vrai non plus, selon Heath, qu'Aristote comprend le concept de « notion » limité à une notion de pensée. Pour illustrer cela, il cite des passages[73] d'Aristote où le terme « notion » possède des autres significations d'une notion de pensée. Par conséquent, selon Heath, Euclid pourrait bien avoir créé un nouveau terme technique basé sur ces utilisations.[74]

On est en accord avec Heath que les Notions Communes se trouvent dans le texte original mais la raison de notre convention porte sur les relations dans les *Éléments*. Parce qu'il est impossible de comprendre le sens des propositions posées sous le titre de Définitions et de Demandes sans l'aide des propositions déclarées sous le Notions Communes. Puis, en l'absence de la section Notions Communes, les problèmes ne finiront pas avec cela. Comme nous le verrons, les énoncés sous le titre de Notions Communes à partir de la démonstration de la première prémisse seront inclus dans les preuves des propositions. Et puis, si les propositions sous ce titre ne figurent pas dans le texte original, comme le dit Tannery, les propositions nécessitant une démonstration, seront employées dans les preuves. Parce que s'il n'y a pas de

---

[69] Heath dit que « The word « *ἔννοια* (notion) », says Tannery, never signified a notion in the sense of a *proposition*, but a notion of some object, ». **Ibid.** p. 221. Voir : « Le mot *ἔννοια*, de fait n'a jamais signifié proposition, mais bien perception et notion ». Paul Tannery, **ibid**, p. 172.
[70] Heath, **ibid.** p. 221.
[71] Heath, cite Proclus : « we shall agree with Apollonius when he says that we have a *notion* of a line when we order the lengths, only, of roads or walls to be measured ». **Ibid.** Voir aussi : « ἀποδεξώμεθα δὲ καὶ τοὺς περὶ Ἀπολλώνιον λέγοντας, ὅτι γραμμῆς ἔννοιαν μὲν ἔχομεν, ὅταν τὰ μήκη μόνον ἢ τῶν ὁδῶν ἢ τῶν τοίχων ἀναμετρεῖν κελεύωμεν· ». Proclus, **ibid.** p. 100,6.
[72] **Ibid.** p. 222.
[73] Aristote, **Ethique à Nicomaque IX. II**, 1171 a32 et b14.
[74] Heath, **Ibid.** p. 221.

section qui donne ces propositions comme axiomes, elles doivent être démontrées avant d'être utilisées dans les preuves mais on ne voit pas de telles preuves dans le texte. En bref, si les propositions énoncées sous le titre de Notions Communes ne sont pas explicitement dites comme axiomes, la validité de toutes les preuves est éclipsée. Par conséquent, cette section devrait être inclue dans le texte original.

3.2. Les problèmes se posant en l'absence de Notions Communes

Signalons maintenant quelques points qui seraient ambigus en absence du titre de Notions Communes. Les problèmes se manifestent dès la première définition. Si cette partie ne figure pas dans le texte, la signification du terme « point » qui est définit comme « ce dont il n'y a aucune partie » devient floue[75]. Parce que le terme « partie (μέρος) » auquel la définition du point fait référence, est seulement mentionné dans les propositions de Notions Communes[76].

De plus, comme on le verra dans la section de Définitions, sans avoir les propositions qui sont sous le titre des Notions Communes, on ne comprend pas ce que sont comprises la quatrième et la septième définition du premier livre, qui revêtent une grande importance pour toute la géométrie euclidienne. Dans ces définitions ils existent des transitions de la ligne à la droite et de la surface au plan. La ligne droite est une espèce régulière de la ligne, de même, le plan est celle de la surface. Ainsi, Euclide définit la ligne droite comme « celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle »[77]. Et puis, il définit la surface plane comme « celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle »[78]. Dans ces définitions, le terme « de manière égale (ἐξ ἴσου) » qui est employé afin de décrire des propriétés de la ligne droite et la surface plane, est seulement référé sous le titre de Notions Communes[79]. De même, il est difficile à comprendre des significations de la neuvième définition[80] où l'angle droite est décrit et de la

---

[75] Bernard Vitrac, **Euclide d'Alexandrie, les éléments**, Paris, Presses Universitaires de France, 1990, p.151

[76] La notion commune 8 qui est posée comme « καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I**, p. 10.

[77] Vitrac, **ibid.** p. 154. Voir : « δ΄. εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν , ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I**, p. 2.

[78] Vitrac, **ibid.** p. 156. Voir : « ζ΄. ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν , ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I**, p. 2.

[79] Voir la note de bas de page 62. 1ère, 2ème, 3ème, et 7ème notions communes.

[80] « ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία ». **Ibid.**

quatrième demande[81] où l'égalité des angles droites est mentionnée, qui fait référence à concept d'égalité.

Encore de plus, sans cette partie, des problèmes se posent pour toutes les démonstrations des propositions à partir de première, car ces propositions sont prouvées en référence aux propositions contenues sous le titre de Notions Communes. Notamment, Euclide, dans la première démonstration, fait référence à la définition du cercle qui est comme « un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieure de la figure, sont {jusqu'à la circonférence du cercle} égales entre elles »[82]. De même, « être égale » n'est mentionné que sous de Notions Communes. Et plus, cette proposition est prouvée faisant référence à première Notion Commune[83].

Par ailleurs, non seulement l'existence du titre Notions Communes mais également sa place dans les *Éléments*, est contestable. Cependant, lorsqu'on considère les arguments que Heath avance contre Tannery, il existe un manque extraordinaire. Évidemment, Heath pense que le titre de Notions Communes se trouvent dans le texte original mais quand il répond l'argument de Tannery qui avance l'absurdité du fait de mettre à la fin du texte une partie très générale, Heath exprime l'absurdité de la mettre entre les Définitions et les Demandes qui sont étroitement lié. D'après lui, tandis qu'il sera absurde de mettre cette partie entre les deux titres qui se complètent, ce ne créera pas d'absurdité de le mettre en fin de ces trois classes[84]. Néanmoins, il ne considère pas la possibilité que les Notions Communes soient placées au début de cette trilogie, or il est possible de considérer les Notions Communes comme la première de ces trois classes de propositions

---

[81] « καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι ». **Ibid.** p. 8.

[82] Vitrac, **ibid.** p. 162. Voir : « κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I**, p. 4.

[83] Voir la note de bas de page 78.

[84] Au ce sujet, Heath dit : « In reply to argument (I) that it is an unnatural order to place the purely geometrical Postulates first, and the Common Notions, which are not peculiar to geometry, last, it may be pointed out that it would surely have been a still more awkward arrangement to give the Definitions first and then to separate from them, by the interposition of the Common Notions, the Postulates, which are so closely connected with the Definitions in that they proceed to postulate the existence of certain of the things defined, namely straight lines and circles. ». Heath, **ibid.** p. 221.

systématisant l'ordre des démonstrations. En outre, dans ce cas, les propositions sous des titres suivants seront comprises dans un ordre logique. Maintenant, on en parlera.

Avant tout, commençons par une observation sur toutes les livres des *Éléments*. Chaque nouveau livre dans l'œuvre d'Euclide, commence par de nouvelles définitions qui sont employées en démonstrations des propositions dans ce livre. Cependant, les titres de Demandes et de Notions Communes ne se trouvent qu'au début du premier livre. Parmi ceux-ci, les Demandes semblent être les principes qui posent les règles de la détermination des objets géométriques. Bien que les Notions Communes figurent dans le premier livre, ils sont applicables non seulement aux objets géométriques, mais également à tous les objets des treize livres, ainsi qu'aux définitions et autres propositions systématisant, comme on l'a vu plus haut. Dans d'autres livres, de nombreuses définitions sont basées sur l'égalité, sur le fait d'être plus grande ou plus petite. Par exemple, la troisième, la quatrième et la cinquième définitions du septième livre, où commence la théorie des nombres, sont données par les relations celles-là.[85] Autre exemple, lorsqu'on arrive à la dix-huitième définition du même livre, on voit que la définition est énoncée en référant à l'égalité.[86]

3.3. L'analyse des propositions de Notions Communes

Alors, quelle est la nature des déclarations données en tant que Notions Communes qui sont étroitement lié non seulement avec des objets géométriques, mais avec des objets arithmétiques et même avec le système formel d'Euclide dans son ensemble ? Il semble difficile à faire une grande revendication sur ce point, mais ces expressions peuvent probablement être considérées comme des primitives couramment présentes dans l'esprit de tous et qui permettent l'inférence dans des

[85] Euclide pose ces définitions comme suivante :
« γ΄. μέρος ἐστιν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.
δ΄. μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.
ε΄. πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol II**, Leipzig, B. G. Teubner, 1970, p. 103.
Peyrard les traduit comme :
« 3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.
4. Un nombre est parti d'un nombre, quand il ne le mesure pas.
5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit. » Euclide, **Les œuvres d'Euclid, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit…**, p. 381-382.

[86] La définition est posée comme « τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol II**, p. 104. Peyrard la traduit comme « Le nombre quarré est celui qui est également égale, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux. ». Euclide, **Les œuvres d'Euclid, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit…**, p. 383.

domaines mathématiques, comme on les appelle Notions Communes. Mentionnons que Proclus a écrit à propos de ces propositions comme suivant : « Il y a des choses qui, de l'avis de tous les hommes, s'appellent des axiomes indémontrables, pour autant que leur certitude soit acceptée par tous et que personne ne conteste leurs preuves ».[87]

Ce qui est important, c'est que si le titre de Notions Communes doit être déplacé, l'endroit le plus approprié est peut-être le début du texte. Déplacer ce titre au début du texte peut donner l'opportunité d'approcher le texte autant que possible de l'intérieur tout en le lisant. Les significations de tous les autres types de propositions constitutives et de nombreuses propositions, ainsi que les domaines de recherche généraux dans les *Éléments*, seront presque éclairées du point de vue de leur cohérence avec le déplacement du titre Notions Communes au début du texte. Dans cette étude, nous nous efforcerons d'avancer sur cette voie. Même s'il n'est pas possible de lire le texte de cette façon, au moins les limites qu'on rencontre ici peuvent également donner des idées importantes sur la mesure dans laquelle ce projet peut être réalisé. Pour ces raisons, on commencera par une analyse de Notions Communes.

Les expressions ayant lieu sous le titre de Notions Communes sont comme suivante :

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

---

[87] « There are the things which, according to the opinion of all men, are called indemonstrable axioms, so far as their certainty is admitted by all, and no one disputes their evidence. For propositions also are often simply called axioms, of whatever kind they may be, whether they are immediately propre, or require some declaration; and the Stoics, indeed, are accustomed to call every simple enunciative speech an axiom: and when they write on dialectic arts, they say that they discourse on axioms. But some, distinguishing more accurately axioms from other propositions, give this appellation to a proposition immediate, and producing credibility of itself, on accoount of its evidence: as also Aristotle and geometricians themselves affirm. For, according to the opinion of these, an axiom is the same as a common notion. ». Proclus, **The Philosophical and Mathematical Commentaries of Proclus, on The First Book of Euclid's Elements. To which are added A History of the Restoration of Platonic Theology, By the Latter Platonists : And a Translation from the Greek of Proclus's Theological Elements. In Two Volumes Vol. 2**, trad. et éd. par T. Taylor, Londres, Publié pour l'auteur, 1792, p. 13.
« Ταῦτ' ἐστὶ τὰ κατὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλούμενα ἀξιώματα, καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιοῦται, καὶ διαμφισβητεῖ καὶ πρὸς ταῦτα οὐδείς. πολλάκις μὲν γὰρ καὶ τὰς προτάσεις ἁπλῶς ἀξιώματα καλοῦσιν, ὁποῖαί ποτε ἄν ὦσιν εἴτε ἄμεσοι κυρίως εἴτε καὶ δεομεναί τινος ὑπομνήσεως, καὶ οἵ γε ἀπὸ τῆς Στοᾶς ἅπαντα λόγον ἁπλοῦν ἀποφαντικὸν ἀξίωμα προσαγορεύειν εἰώθασιν. καὶ ὅταν διαλεκτικὰς ἡμῖν γράφωσι τέχνας περὶ ἀξιωμάτων, τοῦτο διὰ τῶν ἐπιγραμμάτων δηλοῦν ἐθέλουσιν. ἀκριβέστερον δέ τινες ἀπὸ τῶν ἄλλων προτάσεων διακρίνοντες τὸ ἀξίωμα τὴν ἄμεσον καὶ αὐτόπισθον δι' ἐνάργειαν πρότασιν οὕτως ὀνομάζουσιν, ὥσπερ καὶ ὁ Ἀριστοτέλης καὶ οἱ γεωμέτραι λέγουσιν. ταὐτὸν γάρ ἐστιν κατὰ τούτους ἀξίωμα καὶ ἔννοια κοινή. » Proclus, **Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementoru Librum**, éd Friedlein, Leipzig, 1873, p. 193, 15- 194, 9.

2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

4. {Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.

5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.

6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.}

7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

8. Et le tout {est} plus grand que la partie.

9. {Et deux droites ne contiennent pas une aire.}[88]

Les expressions entre les accolades sont ignorées par Heiberg dans son édition, car il les accepte comme interpolées[89]. Par exemple Vitrac avance que la NC9[90] est directement une demande (ou postulat) ou une hypothèse qui est propre à

---

[88] Vitrac, **ibid.** p. 178. Voir :
α΄. τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
β΄. καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
γ΄. καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
[δ΄. καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.
ε΄. καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
ς΄. καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]
ζ΄. καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
η΄. καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν.
[θ΄. καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.] Euclid, **Euclidis Elementa Vol I**, p. 5-6.

[89] Notons qu'il y a un certain nombre des discussions sur l'interpolation des propositions qui se trouvent sous le titre de Notions Communes. Nous venons d'indiquer que le texte des *Eléments* est construit des certains manuscrits. Dans les différents manuscrits il y a différent nombres des propositions se trouvant sous les titres de Notions Communes et de Demandes. Ces différences ont conduit les commentateurs à penser que certaines propositions sont ajoutées au texte quand il est transféré aux manuscrits. Par exemple, comme nous avons vu dans le chapitre 3.1 il y a les commentateurs comme Tannery qui avance que toutes les propositions qui se trouvent sous le titre de Notions Communes sont ajoutées (ou interpolées) au texte. De plus, il y a les commentateurs comme Heath qui pensent que le titre de Notions Communes était dans le texte original, mais il y a les propositions qui sont interpolées. Au demeurant, on peut observer qu'Heiberg omit les N.C. 4, 5, 6 et 9 et il ne les traduit pas en latin. Malgré du fait que ces propositions sont dans le manuscrit qu'il utilise, il ne les traduit pas. Dans ce cadre nous pouvons dire qu'il les accepte en tant qu'interpolées. Comme nous la verrons dans l'examen de la N.C. 1, 2 et 3 nous pouvons dire que les N.C. 4, 5 et 6 sont interpolés car on peut les déduire de N.C 2 et 3. D'où ils ne peuvent pas être les notions communes car ils ne sont pas premières. En effet, puisque les Notions Communes sont dites pour les éléments qui appartiennent à un domaine plus large que celle de la géométrie et comme le caractère géométrique de la N.C. 9 est évident, cette proposition ne peut pas être sous le titre de Notions Communes.

[90] Nous écrivons NC pour les Notions Communes et Dem pour les Demandes. Nous écrivons Déf pour les définitions et Prop pour les propositions démontrées dans les *Eléments.* Les nombres suivant

la géométrie[91]. C'est pourquoi, on peut l'accepter comme interpolée. Si elle était dans le texte original, il devrait être sous le titre de Demandes. En outre, la NC4, NC5, et NC6 sont acceptées comme interpolées, car on peut les déduire de la NC1, de la NC2, et de la NC3[92]. Alors, on peut commencer à la traitée des propositions ayant lieu sous le titre de Notions Communes.

3.3.1. La relation d'égalité

La NC1 énonce : « Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles »[93]. Dans le texte original l'expression : « τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα ». Avant tout, il faut constater que la NC1 est la première proposition où le terme « égale (ἴσος) » occure. Ce terme se trouve dans les définitions critiques comme la DéfI-4 et la DéfI-7 ou les demandes comme la Dem4[94]. C'est pourquoi, il faut soigneusement l'examiner.

En première lieu, il est utile de voir que cette proposition ne mentionne pas ce que « être égale » est ; à savoir ce n'est pas la définition « d'être égale », car la signification d'être égale à une chose n'est pas définit dans cette expression. Il est seulement précisé que ceux qui sont égaux à la même chose sont égaux entre eux. C'est pourquoi, même si la définition d'être égale n'est pas donné par la proposition, les conditions d'égalité des choses sont précisées : (1) « Les choses en étant égales à

Déf ou Prop font référence aux livres où ils se trouvent et les nombres qui suivent premiers nombres signifient l'ordre de définition ou proposition. Par exemple, DéfI-4 signifie la 4ème définition du livre I et PropI-1 signifie la première proposition du livre I.

[91] Il dit : « Si l'on excepte le dernier énoncé, de caractère géométrique et très certainement interpolé, tous ces axiomes portent sur l'égalité (et l'inégalité pour les 4 et 8) et son comportement vis-à-vis de certaines « opérations » : adjonction, retranchement, doublement, dichotomie, ajustement. ». Vitrac, **ibid**, 179.
Dans la deuxième note de bas de page il indique : « L'énoncé a sans doute été extrait de la démonstration de la Prop. 4. Si l'on considère avec Proclus qu'une droite est entièrement déterminée par deux de ses points (soit par la Df. 1. 4, v. notre comm., soit à partir de la Dem. 1 comme le pense Proclus (239. 16-20)), il était de surcroît inutile. Certains Mss. (dont P) ont cet énoncé comme 6e Dem. ; c'était aussi le cas du texte d'an-Nayrīzī, mais Simplicius déclare qu'il ne figure pas dans les anciennes copies (Anar.} 35). Il apparaît une seconde fois dans an-Nayrīzī comme dernier des axiomes (Anar.) 36) ». **ibid.**

[92] Nous traiterons les Notions Communes 1, 2, 3, 7, et 8 à partir des discussions nous avons mentionné dans la note de bas de page 88. De plus, nous commençons à traiter les Notions Communes à partir de NC1 car cette proposition précède logiquement celles qui suivent. Nous disons que la NC1 précède les autres notions communes, car dans cette proposition les conditions d'être égales sont données; à savoir les propriétés de la relation d'égalité. La NC2 et la NC3 donnent les propriétés des opérations qui fonctionnent sur les égales. En outre, comme dans la NC2 les conditions d'obtenir « le tout » est donné, et comme la NC8 donne les conditions que le tout et la partie remplissent, la NC2 précède logiquement la NC8. Voir : la note de bas de page 88.

[93] Vitrac, **ibid.** p.178.

[94] Pour les Déf. I-4 et I-7 voir les notes de bas de page 76 et 77. La Dem. 4 est posée comme « δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I,** 1883, p. 8. « Et que tous les angles droits soient égaux entre eux. ». Vitrac, **ibid.** p. 173.

une même chose sont égales entre elles » ou (2) (qui est converse de (1)) « les choses étant égales entre elles sont égales à la même chose ». Par conséquente, on peut affirmer que l'égalité est donné par une relation. Parce que l'égalité des choses est comprise au sujet de la relation entre des choses. L'égalité, donc, est une relation telle que si quelque élément « a » est lié à un élément « c » et si un autre élément « b » est lié au même élément « c » par égalité, « a » et « b » sont liés par égalité. En d'autres termes, si les deux éléments « a » et « b » ont la relation d'égalité, il existe un élément « c » qui est lié aux éléments « a » et « b » par égalité.

De cette manière, on peut dire que la NC1 ressemble à la relation d'équivalence au sens moderne. Une relation d'équivalence sur un ensemble *E* possède les propriétés suivantes :

- Réflexivité : pour tout a ∈ E, aRa.
- Symétrie : pour tout a, b ∈ E, si aRb alors bRa.
- Transitivité : pour tous a, b, c ∈ E, si aRb et bRc alors aRc.

Lorsqu'on examine la relation d'égalité qu'Euclide pose, on voit que cette relation possède les propriétés de symétrie, de transitivité, et de réflexivité.

La relation qui est postulé par la NC1 possède la propriété de symétrie. Supposons que relation n'est pas symétrique. Alors, (i) il existe au moins un élément « b » bien que la relation d'égalité existe entre « a » et « b », la même relation n'existe pas pour « b » et « a » par la définition de symétrie. Si (ii) la relation d'égalité existe entre « a » et « b » alors il doit exister un troisième élément « c » qui a respectivement la relation d'égalité avec « a » et « b » par la N.C. 1. Par contre, si (iii) la relation d'égalité n'existe pas entre les éléments « b » et « a » alors il n'existe aucun élément « c » qui a la relation d'égalité avec « b » et « a ». Comme (ii) et (iii) sont contradictoires, (i) n'est pas le cas. Et comme, (i) n'est pas le cas, l'expression qui avance que la relation d'égalité n'est pas symétrique n'est pas le cas. Donc la relation d'égalité est symétrique.

De plus, égalité d'Euclide possède la propriété de transitivité. Parce que l'expression elle-même avance que ceux qui sont égaux à la même chose, la portent aussi entre eux. En d'autres termes, la proposition dit que (iv) si la relation d'égalité existe entre les éléments « a » et « c », de même entre les éléments « b » et « c » alors cette relation existe entre « a » et « b ». Et puis, on a montré que la relation d'égalité possède la propriété de symétrie. Alors, comme la relation d'égalité existe entre « b » et « c », elle existe aussi entre « c » et « b ». Par conséquent, l'expression (iv) devient « si la relation d'égalité existe entre les éléments « a » et « c », de même entre les éléments « c » et « b » alors elle existe entre les éléments « a » et « b ». On peut, donc, insister que la relation d'égalité possède la propriété de transitivité.

Enfin, on peut démontrer que la relation possède la propriété de réflexivité. Supposons que (b) cette relation ne possède pas cette propriété. Alors, (v) il existe au moins un élément « a » tel que la relation d'égalité n'est pas valable avec lui-même. Cependant, si la relation d'égalité n'existe pas entre l'élément « a » et « a » alors il n'existera aucun élément « b » tel que l'élément « a » a la relation d'égalité avec lui. Puisque, s'il existe un élément « b » tel que l'élément « a » a la relation d'égalité avec lui alors l'élément « b » aura cette relation avec l'élément « a » comme la relation d'égalité est symétrique. Dans ce cas, (vi) il existe la relation d'égalité entre « a » et « a » comme la relation est transitive. Comme (v) et (vi) sont contradictoires, (b) n'est pas le cas. Et, donc, la relation d'égalité possède la propriété de réflexivité. En d'autres termes la relation d'égalité est seulement valable sur les éléments qui sont égaux aux eux-mêmes[95].

En conclusion, on peut asserter que la relation d'égalité chez Euclide possède les mêmes propriétés avec la relation d'équivalence. En d'autres termes, la relation qu'Euclide la propose comme une Notion Commune possède les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité. Dans ces conditions, cette relation est valable au moins pour les éléments du domaine sur laquelle la Géométrie et la Théorie des Nombres portent. De même elle est valable pour les autres domaines de la science, car elle est donnée sous le titre de Notions Communes.

[95] Notons que cette proposition n'exprime rien sur « l'égalité à lui-même ». On peut seulement asserter par cette notion commune que la relation d'égalité n'est pas valable pour les éléments qui ne sont pas égaux aux eux-mêmes, c'est-à-dire que si un élément n'est pas égal à lui-même, il ne peut pas égale à un autre élément. Dans ce cadre la N.C. 1 ne nécessite pas le fait d'être égaux aux eux-mêmes pour tous les éléments du domaine. La nécessité d'être égale à lui-même vient de la N.C. 8. Comme nous le verrons dans la discussion de la N.C. 8, il existe deux relations entre les éléments : ils sont ou bien égales ou bien ne sont pas égales. Si un élément n'est pas égal à lui-même, il est plus grand que lui-même ; c'est-à-dire il possède les parties qu'il ne possède pas ce qui est absurde. Par suite, tous les éléments du domaine doivent être égaux aux eux-mêmes. Voir : l'examen de la N.C. 8.

3.3.2. Les opérations « ajouter » et « retrancher » et les Notions Communes interpolées

Les deux propositions suivantes posent les propriétés des opérations nommées « ajouter (προστίθημι) » et « retrancher (ἀφαιρέω) » quand ils opèrent sur les égales. La NC2 pose : « Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux »[96]. Et la NC3 exprime : « Et si, à partir de choses égales, des choses égales retranchées, les restes sont égaux »[97]. En premier lieu on peut inférer que ces opérations sont valables pour tous les genres des éléments, sauf les points[98], qu'Euclide traite dans les *Eléments*.

Il faut, ensuite, indiquer que « le tout » est obtenu en ajoutant des choses aux choses ou en d'autres termes, l'opération nommée « ajouter » nous donne « le tout ». Alors, on a la première expression au sujet du « tout » qui aura une grande importance d'abord pour la NC8, et puis, pour les définitions. En revanche, notons que des choses qui sont ajoutées l'une à l'autre ne sont pas mentionné.

Au demeurant, l'addition est valable sur les éléments qui appartiennent aux mêmes genres, car les éléments appartenant aux différents genres ne peuvent pas former un tout[99]. D'autre part, indiquons que l'opération « d'addition » est utilisée comme elle est valable pour les éléments qui appartiennent au même genre. Les utilisations « d'ajouter » se trouvent dans le texte comme une opération qui est valable pour les éléments du même genre. Par exemple, dans la PropII-6[100] et la PropII-10[101], Euclide emploi le terme pour deux lignes droites où l'une est ajoutée à l'autre[102].

---

[96] **Ibid.** p.178.

[97] **Ibid.** p.178.

[98] Sauf les points, car on ne peut pas ajouter les points comme nous le verrons dans la discussion de la Def. I-1.

[99] En outre, il est aussi nécessaire d'énoncer que comme nous le verrons dans l'examen de Définitions, le tout ne peut pas être composé des parties qui appartiennent aux genres différents

[100] PropII-6 : « Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, est, pris avec le carré sur sa moitié, égal au carré sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée. » Vitrac, **ibid.**, p. 335. En grec ancien : ς΄. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθόγώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετγαγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I,** 1969**,** p. 75.

[101] PropII-10 : « Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement les carrés décrits l'un sur la droite entière avec la droite ajoutée, l'autre sur la droite ajoutée, sont, tous les deux ensemble, doubles des carrés décrits l'un sur sa moitié l'autre sur la droite composée de sa moitié et de la droite ajoutée comme sur une seule droite. » Vitrac, **ibid.** p. 346.

Par ailleurs, l'opération nommée « retrancher » opère, de même, sur tous les genres des éléments du domaine que les *Eléments* s'occupe. On pense que ce retranchement a lieu sur « le tout », car « le tout » est obtenu en ajoutant les choses[103]. Puisqu'il est obtenu par addition, l'opération de retranchement est valable sur le tout. Et comme le tout est composé les éléments appartenant au même genre, l'opération de « soustraction » est valable pour des éléments du même genre. D'ailleurs, signalons que cette opération est employée à propos des éléments appartenant au même genre. Par exemple, dans la Prop. VI-26[104], cette opération est employée sur un tout et l'élément retranché est partie du même genre que le tout[105].

En grec ancien : « ι΄. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I**, 1969, p. 83.

[102] Euclide use « προστίθημι » avec la même connotation dans la Prop. V-25 (pour les magnitudes) et la Prop. XII-5. Cependant, il faut aussi indiquer qu'il existe les autres verbes qui sont employés pour de signifier l'opération « ajouter ».

Prop. V-25 : « Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande et la plus petite sont plus grandes que les deux autres. » Euclide, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome I**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1814, p. 287. En grec ancien : « κε΄. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol II**, 1970, p. 37.

Prop. XII-5 : « Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leurs bases. ». Euclide, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome III**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1818, p. 139. En grec ancien : « ε΄ Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol IV**, 1973, p. 92.

[103] Dans ce cadre, nous supposons que « addition » est « soustraction » sont les opérations inverses.

[104] Prop. VI-26 : « Si d'un parallélogramme on retranche un parallélogramme, semblable au parallélogramme entier, et semblablement placé, et ayant avec lui un angle commun, ces parallélogrammes seront autour de la même diagonale.» Euclide, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome I**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1814, p.354. En grec ancien : « κϛ΄. Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. II**, 1970, p. 87.

[105] Il en est ainsi pour les nombreuses démonstrations. Voir : Prop. IX-24, X-1 etc.

Prop. IX-24 : « Si d'un nombre pair on retranche un nombre pair, le reste sera pair. » Euclide, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome II**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1816, p. 94. En grec ancien : « κδ΄. Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. ». Euclid, **Euclidis Elementa Vol. II**, 1970, p. 216.

Prop. X-1 : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. ». Euclide, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome II**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1816, p. 113. En grec ancien : « α΄. Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ το ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειμομένου μεῖζον ἢ το ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. III**, 1972, p. 2.

Au demeurant, comme Vitrac l'indique, il faut « éviter de parler « d'addition » et de « soustraction » qui ont une connotation arithmétique marquée », car ces énoncés sont les notions communes qui sont applicable un domaine plus étendu qu'Arithmétique[106]. C'est pourquoi, il faut compter les opérations données par ces énoncés sont communes « aux différentes espèces de la science mathématique »[107]. On utilise « addition » et « soustraction » dans le contexte que Vitrac mentionne. On les utilise pour un domaine plus étendu.

Ensuite, on peut faire inférences de ces propositions. Pour la NC2 on peut dire que comme la NC2 est le cas, la contraposé de la NC2 est le cas. Si nous considérons la contraposé de la NC2 posée comme « à des égales, des égales sont ajoutées, les touts sont égales »[108], on a l'énoncée « si les touts ne sont pas égales, à des égales, des égales ne sont pas ajoutées ». Et comme à des égales, des égales ne sont pas ajoutées, ou bien (i) à des égales, des inégales sont ajoutées, ou bien (ii) à des inégales, des égales sont ajoutées. On a, donc, deux autres expressions qui sont déduites de la NC1[109]. De plus, il en est ainsi pour la NC3. Si l'on considère la contraposé de cette expression, on aura « si les restes ne sont pas égales, ou bien (iii) à des égales, des inégales sont ajoutées, ou bien (iv) à des inégales, des égales sont ajoutées ». Enfin, on a quatre conséquences de la NC2 et la NC3 qui peuvent être appliquées aux démonstrations[110].

3.3.3. La superposition

En ce qui concerne la NC7, notons, d'abord, qu'elle est acceptée comme un axiome propre (ou demande) de la géométrie ; car l'usage du terme « s'ajuster (ἐφαρμόζω) » employé dans la proposition semble être utilisé comme un axiome qui permet la superposition des figures ; à savoir le déplacement ou l'application des objets géométriques l'un sur l'autre. Rappelons l'expression : « Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles »[111].

---

[106] Vitrac, **ibid.** p. 179.
[107] Vitrac, **ibid.** p. 179.
[108] Vitrac, **ibid.** p. 178.
[109] Il faut remarquer que (i) et (ii) est contenues comme les notions communes dans les manuscrits utilisés par Heiberg et Peyrard. En plus, Heiberg tient neuf notions communes mais il traduit en latin cinq qui sont de même accepté par Proclus. Si l'on suivi la définition d'axiome chez Aristote, comme (i) et (ii) sont déduit de C.N. 2 ils ne peuvent pas être les axiomes.
[110] On peut, de même, démontrer les autres propositions ignorées par Heiberg. Pourtant, dans notre recherche nous traiterons la construction de l'espace. C'est pourquoi, nous nous concentrerons sur les expressions liées à la construction de l'espace.
[111] Voir la note de bas de page 88.

Avant tout notons, le sens du verbe « ἐφαρμόζω », qui est traduit par Vitrac comme « s'ajuster », se diffère par rapport à son usage modal (c'est-à-dire en active ou en passive) en grec ancien. Heath remarque qu'en usage passive « il signifie *« être appliqué à »* sans impliquer que la figure appliquée s'adaptera exactement ou coïncidera avec la figure à laquelle elle est appliquée »[112].

De l'autre côté, en usage active « il est intransitivement employé et signifie *« s'adapter exactement », « coïncider avec »* »[113]. Pour notre cas, le verbe est employé en usage active. D'où, il faut considérer qu'on traite le deuxième sens du verbe ; c'est-à-dire « s'adapter exactement (ou s'ajuster) » ou « coïncider avec ». Dans ce cas, les commentateurs sont presque d'accord que cette notion commune possède un caractère géométrique, ou elle est propre de la géométrie, car Euclide l'emploi pour la superposition.

En effet, toutes les occurrences du verbe se trouvent dans les démonstrations de PropI-4[114], PropI-8[115], et PropIII-24[116]. Cette situation amène certains commentateurs à penser que NC7 est interpolée, car comme elle est un axiome lié seulement à la géométrie, elle ne peut pas avoir lieu sous le titre de Notions Communes. Par exemple, Heath remarque l'observation de Tannery sur ce sujet.

---

[112] Voir : « Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν
Things which coincide with one another are equal to one another.
The word *ἐφαρμόζειν*, as a geometrical term, has a different meaning according as it is used in the active or in the passive. In the passive, *ἐφαρμόζεσθαι*, it means " to be applied to" without any implication that the applied figure will exactly fit, or coincide with, the figure to which it is applied; on the other hand the active *ἐφαρμόζειν* is used intransitively and means "to fit exactly," " to coincide with." In Euclid and Archimedes *ἐφαρμόζειν* is constructed with *ἐπί* and the accusative, in Pappus with the dative. » Sir Thomas L. Heath, **The Thirteen Books of The Elements Volume I**, Cambridge, Presse Universitaire, 1908, p. 224.

[113] **Ibid.** p. 225.

[114] PropI-4 : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. ». Vitrac, **ibid.** p. 200. En grec ancien : « δ΄. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατερᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνὶᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγονον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἅς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, 1969, p. 10.

[115] PropI-8 : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, s'ils ont, de plus, la base égale à la base, ils auront aussi un angle égal, à savoir celui qui est contenu par les droites égales. » Vitrac, **ibid.** p. 212. En grec ancien : « η΄. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατερᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνὶᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, 1969, p. 15.

[116] PropIII-24 : « Les segments de cercles semblables sur des droites égales sont égaux entre eux. » Vitrac, **ibid.** p. 438. En grec ancien : « κδ΄. Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, 1969, p. 126.

Tannery avance que comme elle possède un caractère incontestablement géométrique, elle doit être exclue de Notions Communes[117].

D'autre côté, il existe les commentateurs qui acceptent l'originalité de NC7. On peut tirer l'exemple de Proclus qui avance qu'il faut ne pas réduire les axiomes au minimum, comme Héron le fait en donnant seulement trois axiomes. Pourtant, Heath note que la conclusion de Proclus compte sur une supposition qu'Euclide donnerait tous les axiomes employés subséquemment et non réductibles à d'autres indiscutablement inclus[118].

De plus, Heath, lui-même indique qu'elle a lieu dans le texte original car autrement, puisqu'elle est employée en démonstration de la PropI-4, sur laquelle la totalité des *Eléments* dépend soit directement soit indirectement, serait discutable. C'est pourquoi, il devrait être dans le texte original.

Cependant, Heath constate que la superposition est une méthode légitimée pour la démonstration de l'égalité des figures, ou en d'autres termes la NC7 sert en tant qu'axiome *de congruence*[119] ; c'est-à-dire qu'elle est employée comme un axiome propre de la géométrie. Parce qu'elle est employée en preuve de la PropI-4 dans le contexte de la superposition des choses qui sont égaux entre elles. Heath met

[117] Voir : « On Common Notion 4 Tannery observes that it is incontestably geometrical in character, and should therefore have been excluded from the Common Notions; again, it is difficult to see why it is not accompanied by its converse, at all events for straight lines (and, it might be added, angles also), which Euclid makes use of in I, 4. As it is, says Tannery, we have here a definition of geometrical equality more or less sufficient, but not a real axiom ». Heath, **ibid.** p. 225. Pour les expressions de Tannery voir : « Quant aux notions communes 7 et 8, elles me paraissent également ne pas davantage appartenir à Euclide, malgré l'autorité de Proclus. L'énoncé 7 a un caractère géométrique incontestable qui aurait dû le faire exclure des notions communes ; d'autre part, il est difficile de voir pourquoi il n'est pas accompagné de sa réciproque, au moins pour les lignes droites, réciproque dont Euclide doit user en premier lieu. En fait, il y a là une définition de l'égalité géométrique, définition plus ou moins suffisante, mais il n'y a pas d'axiome véritable ». Tannery, **ibid.** p. 167.

[118] Voir : « It is true that Proclus seems to recognize this Common Notion and the next as proper axioms in the passage (p. 196, 15-21) where he says that we should not cut down the axioms to the minimum, as Heron does in giving only three axioms; but the statement seems to rest, not upon authority, but upon an assumption that Euclid would state explicitly at the beginning all axioms subsequently used and not reducible to others unquestionably included. Now in 1. 4 this Common Notion is not quoted; it is simply inferred that "the base BC will coincide with EF, and will be equal to it." The position is therefore the same as it is in regard to the statement in the same proposition that, "if...the base BC does not coincide with EF, two straight lines will enclose a space: which is impossible"; and, if we do not admit that Euclid had the axiom that "two straight lines cannot enclose a space," neither need we infer that he had Common Notion 4. I am therefore inclined to think that the latter is more likely than not to be an interpolation ». Heath, **ibid.** p. 225.

[119] Voir : « It seems clear that the Common Notion, as here formulated, is intended to assert that superposition is a legitimate way of proving the equality of two figures which have the necessary parts respectively equal, or, in other words, to serve as an axiom of congruence. ». **Ibid.**

accent sur la démonstration de la PropI-4 fait par Euclide[120]. Dans ce preuve Euclide démontre l'égalité des côté de quels que soient triangles quand ils ont deux côtés, étant différent de premiers, sont égaux chacun à chacun et les angles contenus par ces côtés sont égales. Euclid suppose d'abord deux triangles ABC et DEF, comme AB est égale à DE et de même AC à DF. Et puis, Euclide applique le triangle ABC sur le triangle DEF. Ensuite, Heath cite le passage où la démonstration de la PropI-4 commence : « le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE »[121]. C'est pourquoi, Heath infère qu'Euclide emploi ladite méthode et il considère une figure comme *mouvée* et *placé sur* autre.

On est encore une fois en accord avec Heath que la NC7 devrait être sous le titre de Notions Communes. Pourtant, nous avons quelques réserves sur son inférence au sujet de la congruence. En premier lieu nous pensons que la NC7 n'est pas seulement une proposition géométrique car elle est donnée sur les quantités ; c'est-à-dire, la NC7 n'exprime pas seulement une propriété des éléments de la géométrie. Il ne déclare des propriétés propres des points ni des lignes ni quelque autre espèce de ce genre. Il faut indiquer que comme la proposition s'agit seulement des choses qui s'ajustent entre elles, il ne peut pas être regardé en tant que Demande. Pour qu'on puisse l'envisager comme un axiome géométrique (ou Demande), il doit exprimer seulement sur les éléments propres de la géométrie.

D'autre part, malgré du fait que le terme « ἐφαρμόζω » est directement employé par Euclide dans un sens lié à la superposition dans les démonstrations des propositions mentionnées, il faut qu'on puisse de même considérer « ἐφαρμόζω » comme un terme qui permit la substitution des égaux, car si l'on acceptait la NC7 en tant qu'axiome de congruence ; à savoir en tant qu'axiome propre de la géométrie, la méthode de substitution qui est employée dans certaines preuves devient invalide.

---

[120] « The phraseology of the propositions, e.g. 1. 4 and 1. 8, in which Euclid employs the method indicated, leaves no room for doubt that he regarded one figure as actually moved and placed upon the other. Thus in 1. 4 he says, "The triangle ABC being applied (*ἐφαρμοζομένου*) to the triangle DEF, and the point A being placed (*τιθεμένου*) upon the point D, and the straight line AB on DE, the point B will also coincide with E because AB is equal to DE"; and in 1. 8, " If the sides BA, AC do not coincide with ED, DF, but fall beside them (take a different position, *παραλλάξουσιν*) then" etc ». **Ibid.**

[121] Vitrac, **ibid.** p. 201.

Notamment, il emploi la méthode de substitution dans la preuve de la PropV-25[122] où il démontre pour quatre magnitudes proportionnelles, l'addition de la plus grand et la plus petite est plus grand que l'addition des autres magnitudes. Il échange les égales entre elles. Afin de la démontrer il ordonne les magnitudes, et il accepte que la plus grande soit proportionnelle avec la deuxième et la troisième soit proportionnelle avec la plus petit. Alors, il retranche deux magnitudes plus grandes, les parties qui sont égales à troisième et la plus grand respectivement ; à savoir de la plus grand il retranche celle qui égale à troisième, ainsi que de la deuxième, celle qui égale à la plus petit. Puis il dit que la proportion est valable pour les retranchées. Cependant, la substitution des égaux devrait être possible si un tel changement est légitime.

A cet égard on peut tirer l'exemple de la PropI-7[123]. Euclide démontre l'impossibilité de construire de deux triangles congruente du même côté de la droite donnée. Il conduit la démonstration par l'absurde. Il accepte, d'abord, qu'il est possible de construire un tel triangle et puis il montre l'impossibilité de celle-ci par les contradictions. Il avance :

« Car si c'est possible, que sur la même droite AB, soient construites, égales chacune à chacune aux deux mêmes droites AC, CB, deux autres droites AD, DB en un point quelconque D, différent de C mais du même côté, et ayant les mêmes limites, de sorte que, d'une part, CA soit égale à DA en ayant même limite qu'elle en A, d'autre part, CB soit égale à DB en ayant même limite qu'elle en B et que CD soit jointe. Or puisque AC est égal à AD, l'angle sous ACD est aussi égal à celui sous ADC. Donc celui sous ADC est plus grand que celui sous DCB (NC8) ».[124]

Dans la démonstration il continue comme suivant :

Comme AC = AD, l'angle ACD = l'angle ADC. Par suite, l'angle ADC est plus grand que l'angle DCB. En effet il est évident qu'il emploie NC8, pour de démontrer la petitesse de DCB de ADC. Pourtant, l'usage de la NC8 peut être décevant, car l'angle DCB n'est pas une partie de l'angle ADC, il est une partie de

---

[122] Voir la note de bas de page 100.

[123] PropI-7 « Sur la même ligne droite, ne seront pas construites, égales chacune à chacune aux deux mêmes droites, deux autres droites, en un point quelconque, différent mais du même côté, et ayant les mêmes limites que les premières. » Vitrac, **ibid.** p.209. En grec ancien : « ζʹ. ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, 1969, p. 14.

[124] Vitrac, **ibid.** p. 210.

l'angle ACD qui est égale à ADC. En revanche, si substitution des angles n'est pas permit par Notions Communes ou par Demandes, l'angle ADC ne peut pas être plus grand que l'angle DCB, car DCB n'est pas une partie d'ADC. DCB est une partie d'ACD. Si une telle substitution a lieu, ACD et ADC doivent être substituables.

Par suite, on peut dire qu'il accepte qu'il soit légitime de penser les égaux en tant que substituables. Néanmoins, une telle substitution n'est pas possible si les axiomes ou les preuves précédentes ne la permettent pas. Comme on vient de remarquer les autres notions communes ne donnent pas une telle opportunité ni des preuves précédentes. Dans ce cas, on peut constater que malgré du fait qu'Euclide n'emploie pas le terme « ἐφαρμόζω », il substitue les égaux. Par suite, on peut dire que comme un tel changement entre les égaux aurait lieu, il faut accepter que le terme « ἐφαρμόζω » nous donne la légitimité de penser l'un des égaux à la place de l'autre. En d'autres termes il nous permet considérer les égaux comme interchangeables.

De plus, dans ces conditions, en ce qui concerne la superposition, on pense qu'elle ne s'agit pas de déplacer des choses. Bertrand Russell remarque sur ce sujet : « L'apparent usage du mouvement est ici décevant ; ce qui, en géométrie est nommé mouvement est bien plutôt le déplacement de notre attention, d'une figure à une autre ». Pourtant, il faut indiquer que Russell, comme Heath, envisage qu'Euclide emploie explicitement la superposition d'une manière actuelle. « … Tout ce dont on a besoin est », continue Russell, « ce déplacement d'attention de la figure originale, vers une nouvelle, définie par la position de certains de ses éléments et par certaines propriétés qu'elle a en commun avec la figure originale » [125]. Dans ce cadre, on dit

[125] « The apparent use of motion is deceptive; what, in Geometry, is called a motion, is merely the transference of our attention from one figure or set of elements to another. Actual superposition, which is nominally employed by Euclid, is not required; all that is required is the transference of attention from the original figure to a new one, defined by the position of some of its elements and by certain properties which it shares with the original figure ». « Geometry, Non-Euclidean » [1902], in Bertrand Russell Toward the "Principles of Mathematics" 1900-02, Edited by Gregory H. Moore, (Collected Papers of Bertrand Russell; Vol. 3), Routledge, London, 1993, p. 474-504. Voir la note d'éditeur dans la p. 470: « This paper appeared in the tenth edition of the Encyclopaedia Britannica (1902) 28: 664-74, an edition that constituted a supplement of several volumes to the ninth edition of 1890. ». Pour la totalité du passage où cette citation se trouve voir :
« *Rigid bodies unnecessary in Geometry.*
A third confusion remains as regards the relation of the axiom of congruence to rigid bodies. The axiom of congruence is the axiom in virtue of which superposition may be used (as in Euclid's fourth proposition) to prove the equality of two figures. But there is some difficulty in stating precisely the requisite axiom. Helmholtz maintained (e.g. *Wiss. Abh.*, Bd. ii, pp. 614, 616) that it asserts the actual existence of rigid bodies, and thence inferred that Geometry is dependent upon Mechanics. He supported his view by reference to the process of measurement, in which the measure must be, at least approximately, a rigid body. In so far as it is not rigid our results are inaccurate - unless, indeed, we

qu'Euclide emploi la superposition dans la manière que Russell mentionne, c'est-à-dire que la superposition employée par Euclide, c'est le déplacement d'attention de la figure original, vers une nouvelle qui possède les mêmes propriétés avec celle de première.

Pour conclure la discussion sur la NC7, on pense qu'il doit être génuine car autrement, un certain nombre des démonstrations deviennent invalides. De même les difficultés se trouvent en compréhension des certaines définitions qui ont un rôle important pour la construction de l'espace. En outre, on réclame que la NC7 ne peut pas être seulement considéré comme un axiome de la congruence ; à savoir en tant que Demande, car sinon on affronte l'invalidité des certaines démonstrations.

3.3.4. Relation d'inégalité

La NC8 est l'une des notions communes qui a une grande importance pour les définitions car les termes (le « tout » et la « partie ») données par cette proposition sont utilisées à partir de la première définition. La NC8 déclare que le tout est plus grand que la partie. Comme on le verra quand on examinera la première définition, le fait d'avoir parti sera la première différence entre les éléments de la géométrie. En effet, Euclide emploi aussi la relation donnée par cette expression pour la distinction

---

know how to allow for its changes of shape, which would imply some still more rigid body by which our measure is itself measured. Thus, in so far as measurement is trustworthy, it implies the existence of bodies which, during the motion required for superposition, do not greatly change in shape. But this is not an analysis of what is *meant* by spatial equality, and is not relevant to Geometry. The definition of a rigid body, like the definition of geometrical motion, presupposes what is really meant by the axiom of congruence. A rigid body is one which, at different times, occupies equal spaces. Thus equality of spaces is logically prior to rigidity of bodies. How we discover two actual spaces to be equal is no concern of the geometer; all that concerns him is the existence of equal spaces, the fact that two spatial quantities may be equal or unequal. And this is indeed the true meaning of the axiom. Given two points at a certain distance apart, and any third point, the axiom asserts that there are, on any straight line through the third point, two points whose distance from the third point is equal to the given distance; it makes also similar assertions as regards areas and volumes. This is all that metrical Geometry requires as regards an axiom of spatial equality. The apparent use of motion is deceptive; what, in Geometry, is called a motion, is merely the transference of our attention from one figure or set of elements to another. Actual superposition, which is nominally employed by Euclid, is not required; all that is required is the transference of attention from the original figure to a new one, defined by the position of some of its elements and by certain properties which it shares with the original figure. This may be enforced by two simple considerations: (1) what is purely spatial cannot move: a given point, line, or plane is what it is in virtue of its place, and can never change that place. It is only what *occupies* space, i.e. matter that can move. (2) If rigid bodies formed any part of the *meaning* of congruence, it would be self-contradictory to assert, as science does assert, that no body is perfectly rigid. For before we can discuss whether or not a body is rigid, we must be able to decide as to its dimensions at different times; and if this means a comparison with a standard body, then it is a logical impossibility that the standard body should itself be supposed changeable. The standard body would be itself the unit, and could no more suffer change than any other absolute unit. The whole confusion appears to be due to not distinguishing between the process of measurement, which is of purely practical interest, and the meaning of equality, which is essential to all metrical Geometry. »

des espèces de l'angle. Il définit l'angle obtus comme plus grand que l'angle droit et l'angle aigu comme plus petit que l'angle droit.

En premier lieu, lorsqu'on traite étroitement la proposition on voit qu'il avance une relation entre le tout et la partie : « Le tout est plus grand que la partie » (καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστιν). « ὅλος » est le terme qui signifie le « tout » et « μέρος » signifie la « partie ». Il faut indiquer que les définitions de ces termes n'existent pas dans les *Eléments*[126]. Comme cette relation se trouve entre le tout et la partie, on doit traiter ce qu'ils signifient. Dans ce cas, on traitera d'abord ceux dont Heath et Vitrac disent autour de ce sujet.

Heath cite premièrement la réflexion de Proclus sur ce sujet. D'après lui, Proclus inclus cet « axiome » parmi les Notions Communes par les mêmes causes que ce de la NC7[127]. Comme il est employé dans les démonstrations des propositions, il faut qu'il soit sous le titre de Notions Communes. Par contre, d'après Heath, Tannery avance que cet énoncé est interpolé en partant du fait qu'il remplace une expression différente en PropI-6, où « le triangle DBC sera égal au triangle ACB, le plus petit au plus grand. Ce qui est absurde »[128] est déclaré[129]. En effet, Heath semble être en accord avec Tannery, car il indique que l'axiome ressemble une abstraction ou une généralisation substituées pour une inférence immédiate d'une figure géométrique, mais il prend la forme d'une sorte de définition du tout et de la partie[130].

En ce qui touche l'interprétation de Vitrac, il interprète la NC8 plus détaillé que Heath. Il pose les points controversés sur l'interpolation de la proposition et puis il trait les propositions où les occurrences ou dérivées de la NC8 sont employés. En effet, Vitrac conduit son débat sur les énoncés stéréotypés, avec lesquelles Proclus fait la liaison entre la NC8, qui sont fréquemment employés dans les preuves des

[126] Les occurrences de terme la « partie » se trouve dans quelques définitions comme DefI-1,V-1, VII-3, VII-20. Cependant, les occurrences de terme le « tout » ne se trouvent que propositions.
[127] Voir : « Axiom. I-V. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα, καὶ ἐὰν ἴσα ἴσοις προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα ἐστίν, καὶ ἐὰν ἴσων ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἴσα ἐστιν, καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον, καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν ». Proclus, **ibid.** p. 193.
[128] Voir : « ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζοντι· ὅπερ ἄτοπον· ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol I,** p. 14.
[129] Voir : « Enfin l'énoncé 8 remplace une expression différente d'Euclide : la prop. VI : « Le moindre sera égal au plus grand, ce qui est absurde ». C'est une abstraction substituée à l'intuition de la figure géométrique ; abstraction qui, d'ailleurs, se réduit à une définition plus ou moins insuffisante du tout et de la partie, si l'on veut là dégager de sa spécialité géométrique et en faire réellement une notion commune ». Tannery, **ibid.** p. 167.
[130] Heath, **ibid.** p. 232.

propositions. L'énoncé est comme suivant : « donc, le plus petit est égale au plus grand, ce qui est absurde ».

Afin d'exposer cette liaison il examine l'usage de l'inégalité dans les propositions car l'égalité et l'inégalité ne sont pas définies dans les *Eléments*. Il donne la PropI-6 comme exemple où, d'après lui, l'ordre part de l'adjonction. « A est plus grand que B s'il existe dans A une partie C, égale à B, partie qui peut être B elle-même » [131]. De plus il mentionne l'utilisation d'une sorte de transitivité comme « si A est plus grand que B et B que C, alors A est plus grand que C (il ajoute même de « beaucoup »). Il utilise la substitution d'égaux dans les inégalités : si A < B, B = C, et C < D, alors A < D. D'après lui, ceci permet Euclide, alors, de comparer des choses qui ne sont pas nécessairement dans un rapport de « tout » à « partie » »[132]. Après avoir posé cet usage de l'inégalité, il fait une distinction entre les propositions pour lesquelles les éditeurs modernes retournent à la NC7 : des références « directes » et références « indirectes ». Les directes sont les références où Euclide compare « deux objets A et B tels que A est une vrai partie de B »[133] et les indirectes sont les références où Euclide démontre les propositions par l'absurde « où la contradiction est établie quand on a montré à la fois A > B et A = B car l'ordre envisagé est un ordre strict»[134].

---

[131] En effet on peut donner cet usage comme un autre exemple qui montre que la N.C. 7 nous permit la substitution. Vitrac, **ibid.** p. 208-209.
[132] **Ibid.** p. 183.
[133] Dans les preuves des Prop. I, 16, 18, 20, 24.
PropI -16 :
« Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés. » Vitrac, **ibid. Vol. I**, p. 226.
« ις΄. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 24-25.
PropI-18 :
« Dans tout triangle, le côté le plus grand sous-tend l'angle le plus grand. » Vitrac, **ibid. Vol. I**, p. 230.
« ιη΄. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 26-27.
PropI-20 :
« Dans tout triangle, deux côtés; pris ensemble de quelque façon que ce soit, sont plus grands que le côté restant. » Vitrac, **ibid. Vol. I**, p. 233.
« κ΄. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 28-29.
PropI-24 :
« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si l'angle [de l'un] - celui qui est contenu par les droites égales - est plus grand que l'angle [de l'autre] sa base sera aussi plus grande que la base [de l'autre]. » Vitrac, **ibid. Vol. I**, p. 240.
« κδ΄. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρῃ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 33-34.
[134] Vitrac, **Ibid.** p. 183.
Voir les preuves des PropIII. 2, 14, 16, 18 :

Vitrac, remarque que 15 raisonnements de ce type s’accompagnent de la formule « donc le plus petit est égale au plus grand ; ce qui est absurde » ou la formule symétrique de celle-ci. Dans ces cases, il s’agit de deux objets tels que l’un est une partie de l’autre. Par suite, il conclue que « La notion commune 8, interpolée ou non, paraît donc bien être en rapport avec les formules stéréotypées qui rappellent l’incompatibilité des trois cas possibles : <, =, >. Si, dans ce que on appelle les références « directes », l’inégalité est aussi intuitivement évidente que le rapport de « tout » à « partie », il faut remarquer que celui-ci est plus immédiat et donc plus « primitif » que l’inégalité prise en générale et obtenue à partir de diverses substitutions »[135].

En effet, on est en accord avec Vitrac en ce sujet car il faut ajouter que la NC8 devrait être parmi des Notions Communes non seulement à cause de son utilisation dans les preuves des propositions, mais aussi à cause de son usage dans les définitions des éléments, ainsi que son rôle pour les Notions Communes. En premier lieu, sauf cette énonciation des nombreux problèmes apparaissent s’il s’agit de la compréhension des définitions à partir de la DefI-1. En outre, on n’a pas de règle pour le cas d’inégalité en absence de cette notion commune. En d’autres termes, si les choses ne sont pas égales à une même chose, on ne peut pas déterminer la relation

---

PropIII-2 :
« Si deux points sont pris au hasard sur la circonférence d'un cercle, la droite joignant ces points tombera à l'intérieur du cercle. » Vitrac, **ibid. Vol. I**, p. 394.
« β΄. Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς πειφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπί τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κὺκλου ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 95.
PropIII-14 :
« Dans un cercle les droites égales sont à égale distance du centre et celles qui sont à égale distance du centre sont égales entre elles. » Vitrac, **ibid. Vol. I**, p. 419
« ιδ΄. Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 115.
PropIII-16 :
« La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d’une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée ; en outre, d’une part l'angle du demi-cercle est plus grand, d'autre part l'angle restant plus petit, que tout angle rectiligne aigu. » Vitrac, **ibid. Vol.** I, p. 424.
« ις΄. Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ’ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 117.
PropIII-18
« Si une certaine droite est tangente à un cercle, et si une certaine droite est jointe à partir du centre jusqu ' au point de contact, la [droite] jointe sera perpendiculaire à la tangente. » Vitrac, **ibid. Vol. I**, p. 428.
« ιη΄. Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 120.
[135] **Ibid.** p. 183-184.

entre elles. En conséquence, cette proposition doit se trouver sous le titre de Notions Communes.

Ensuite, puisque la nécessité d'être sous le titre de Notions Communes est démontrée pour la NC8, il faut traiter les implications de cet énoncé. Afin de terminer notre tâche, on s'efforcera à la connotation de cette proposition.

Les propositions se trouvant sous le titre de Notions Communes sont à propos d'égalité, sauf NC8. Puisqu'ils sont exhaustifs pour le domaine dont ils expliquent les relations primitives, ils signifient le cas d'inégalité ; à savoir le cas où les choses ne sont pas égales à une même chose. En cela, les choses qui ne sont pas dans la relation d'égalité, sont dans la relation indiqué par cette proposition ; c'est-à-dire, la relation entre le tout et la partie.

Ladite relation, ensuite, est donnée en tant que « plus grand que ». Le tout est plus grand que la partie. Alors, le tout et la partie ne sont pas égaux. Souvenons que le tout est composé des choses ajoutées. En cela, il ne peut pas être égal aux choses ajoutées, car les choses ajoutées donnent le tout après une opération. En d'autres termes, les ajoutées nécessitent une opération pour le fait de devenir le tout. Par suite, puisque le tout et les ajoutées ne sont pas égaux, il existe une autre relation entre eux ; à savoir, l'inégalité qui est dite pour le tout et la partie. Dans ces conditions on peut dire que les ajoutées sont les parties du tout.

Par ailleurs, puisque le tout est le résultat de l'addition des parties, les parties sont le résultat de la soustraction, car ils sont les opérations inverses[136]. En cela, le tout est l'assemblage de ses parties. L'intégrité du tout vient de cette coexistence, et cette intégrité séparent ses parties des autres toutes. Dans ce cadre, le tout est la coexistence, ou l'ensemble de ses parties. Il tient ou possède, ses parties en ensemble.

En outre, à partir de nos conclusions on peut dire que comme les touts égaux sont interchangeables[137], l'un des deux peut être considéré comme plus grand que les parties de l'autre. Cette possibilité de substitution donne Euclide l'opportunité que Vitrac signal.

---

[136] Nous supposons que l'addition est la considération des parties dans une manière collecté, et que la soustraction est la considération de la séparation de cette collection.

[137] Notons que nous utilisons le terme « interchangeable » pour de signaler les expressions de Russell sur ce sujet. Nous voulons indiquer le déplacement de notre attention de l'un de deux choses qui possèdent les mêmes propriétés, à l'autre.

Partant de nos inférences, on peut asserter que chaque élément du domaine a la relation d'égalité entre soi-même ; car si l'on ne l'accepte pas, les contradictions se produisent. Supposons qu'il existe un élément « a » qui n'est pas égal à lui-même, d'où il est plus grand que lui-même. En cela « a » est partie de lui-même. Si « a » est partie de lui-même on obtient « a » qui est le tout, en ajoutant les autres parties à « a » qui est la partie. Par la suite de cette addition « a » qui est partie, devient « a » qui tient les parties que « a » ne tient pas. Ce qui est absurde. Donc, il n'existe aucun élément qui n'est pas égale à lui-même. Par suite, on peut démontrer que l'inégalité ne possède pas « réflexivité », par les mêmes raisons.

Au surplus, l'inégalité ne possède pas la propriété de la symétrie ; à savoir elle est antisymétrique[138]. Supposons que la relation est symétrique. Alors, il existe au moins deux éléments « a » et « b » tels quels (i) « a » est plus grand que « b » et « b » est plus grand que « a ». Comme (i), « a » possède « b » et « a » possède les parties que « b » ne possède pas. Comme (ii) « b » possède « a » et « b » possède les parties que « a » ne possède pas. Et comme « b » possède « a », « b » possède les parties qu'il ne possède pas, ce qui est impossible. Par suite, (i) et (ii) sont contradictoires. D'où il n'existe aucune éléments tels qu'ils Alors, l'inégalité est antisymétrique.

En outre, ajoutons que par l'antisymétrie on peut définir la relation de « la petitesse ». Comme le tout est plus grand que la partie, la partie n'est pas plus grande que le tout. Cependant la partie n'est pas égale au tout. On peut assigner à « ne pas être plus grand », « être plus petit ». Par suite, la partie est plus petite que le tout. Dans ce cadre on ne doit pas poser cette relation comme un axiome.

On a, donc, les trois relations se trouvant entre les éléments de notre domaine. Les choses, d'abord, sont ou bien égales ou bien inégales. Puis, les deux choses qui ne sont pas égales ou bien l'une de deux est plus grande que l'autre ou bien l'autre est plus petite que l'une. Comme les propositions de Notions Communes sont exhaustives pour le domaine que les *Eléments* s'occupe, d'autre relation n'est pas possible pour les éléments de ce domaine.

Enfin, l'inégalité possède la transitivité. Supposons que l'inégalité ne possède pas la symétrie. Alors, il existe au moins trois éléments tels quels « a » est plus grand

138 Une relation sur un ensemble E est antisymétrique si (a,b) appartient à R alors (b,a) n'appartient pas à R.

que « b » et « b » est plus grand que « c », mais « a » n'est pas plus grand que « c ». Comme « a » n'est pas plus grand que « c », il est ou bien égal à « c » ou bien plus petit que « c ». Cependant, si « a » est égal à « c », alors « c » est plus grand que « b ». Ce qui est contradictoire avec la supposition. Alors, « a » est plus petit que « c ». On a donc trois propositions :

1. « a » est plus grand que « b ».

2. « b » est plus grand que « c ».

3. « c » est plus grand que « a ».

(i) Comme 1, on obtient « a » en ajoutant des parties à « b ».

(ii) Comme 2, on obtient « b » en ajoutant des parties à « c ».

(iii) Comme 3, on obtient « c » en ajoutant des parties à « a ».

Comme (i), « a » possède toutes les parties de « b » et les parties que « b » ne possède pas. Comme (ii) « b » possède toutes les parties de « c » et les parties que « c » ne possède pas. Par suite, « a » possède toutes les parties de « c » et les parties que « c » ne possède pas. Et comme (iii), « c » possède toutes les parties de « a » et les parties que « a » ne possède pas. Et comme « c » possède toutes les parties de « a », « c » possède les parties que « c » ne possède pas. Ce qui est absurde. C'est pourquoi, l'inégalité possède la transitivité.

4. L'EXAMEN DES DEFINITONS A PARTIR DES IMPLICATIONS DES NOTIONS COMMUNES

4.1. Le point en tant que sans-partie

Pour commencer, Euclide définit le point comme « ce dont il n'y a aucune partie »[139]. La première remarque pour cette définition est son caractère négatif. Pourtant, il faut spécifier que cette négativité ne vient des éléments qui sont subséquemment définit. Il le pose comme qui n'a pas de partie ; c'est-à-dire, sans-partie, en tant que premier élément de géométrie. Dans ce cadre, on voit la première division des genres de la géométrie. La première différence entre des éléments, c'est « avoir partie ». On a, donc, les deux genres que les éléments de la géométrie se divisent les uns qui possèdent les parties et les autres qui ne possèdent pas de partie. Le point appartient au genre sans-partie.

En outre, le point ne peut pas être considéré dans la relation du tout et partie, car il est défini comme sans-partie. D'où il est impossible de retrancher ses parties. Par suite, comme on ne peut pas retrancher ses parties, il est indivisible. Dans ce cadre, le point est le seul élément de géométrie qui est indivisible. De plus il n'est pas possible de l'examiner comme un tout qui est composé de ses parties. Par suite, il n'est pas composé.

De plus, en étant sans-partie le point ne peut pas être une partie d'un élément quelconque. Lorsqu'on examine la relation de partie et de tout, la relation de tout avec ses parties, il est clair que le tout possède des parties appartenant son genre ou un outre. On dit que le tout ne possède que des parties appartenant son genre.

Supposons, d'abord, que le tout possède seulement des parties appartenant à un autre genre. Comme il possède des parties d'un autre genre, il est un tout composé des parties qui n'appartiennent pas à son genre. Et comme des parties du tout appartiennent à un autre genre, le tout est composé des parties qui possèdent des différences d'un autre genre. Cependant, on a déjà divisé les éléments de notre

[139] Vitrac, **ibid.** p. 151.

domaine en termes de la méthode de la division ; c'est-à-dire on a les divisé en fonction de leurs différences qui distinguent les uns des autres. Par conséquent, aucun genre et aucune espèce ne peut pas posséder les différences qui les distinguent des autres genres et des autres espèces. Toutefois, si un tout est composé de parties qui appartiennent à un autre genre, il devient un tout possédant des différences qui distinguent son genre des autres genres. Dans ce cas, la séparation des choses par la méthode de la division devient inutile. En d'autres termes, puisque le tout est seulement composé des parties qui appartiennent à un autre genre, le tout devient une chose qui ne possède pas de différences de son genre. Ce qui est absurde. Par suite, le tout ne peut pas seulement posséder des parties d'un genre qui se diffère de son genre.

Deuxièmement, le tout ne peut pas être composé des parties qui appartiennent à son genre et qui ne l'appartiennent pas. Assumons que le tout est composé des parties comme on vient d'indiquer. Comme il est composé de telles parties, il possède des parties qui appartiennent à son genre et qui ne l'appartiennent pas. Cependant, comme on vient de montrer, le tout ne peut pas posséder des parties qui n'appartiennent pas à son genre. Par conséquent, on peut dire que toutes les parties du tout n'appartiennent que son genre. Alors le point ne peut pas être partie d'un tout, car il appartient au genre sans-partie et le tout appartient au genre des éléments qui possèdent des parties.

4.2. La ligne et ses espèces

La deuxième définition des *Eléments* décrit la ligne. Il dit que « une ligne est une longueur sans largeur »[140]. Il est nécessaire, avant tout, remarquer que cette définition porte sur les termes qui ne sont pas définit. Ni longueur ni largeur sont définit dans les *Eléments*. De plus la définition nous donne l'élément qui appartient au genre des choses ayant parties, car autrement il faut poser la ligne sous la définition du point. Comme la ligne possède des parties, il peut les avoir relatif à sa longueur ; c'est-à-dire, elle est divisible selon la longueur, car elle ne possède que la longueur. Néanmoins, la signifiance d'être une longueur sans largeur n'est pas claire[141]. Peut-être on peut la tenir comme une grandeur étendue selon une seule

---

[140] **Ibid.** p. 152.

[141] Il faut mentionner la définition d'Aristote qui est « une grandeur divisible continûment d'une seul manière » ou celle de Proclus qui est « la grandeur étendu sur une direction ». Pourtant, les deux

dimension, en termes modernes, c'est-à-dire, unidimensionnelle, la signifiance de celle-ci n'est pas plus claire que la précédente.

Au demeurant, si la ligne est dans le genre de ceux qui ont des parties alors il faut l'examiner à partir de la relation de partie-tout. Parce que, on a accepté que le tout est composé des parties. Par conséquent, la ligne est un toute qui est constitué de parties. Puis, s'il s'agit d'un tout, il n'a pas de partie en dehors d'elle-même.

Par ailleurs, la ligne en étant un tout possède et entoure ses parties, et elle peut être divisée à ses propres parties. Comme on vient de montrer, ses parties n'appartiennent que de son genre. C'est la raison pour laquelle, la ligne possède seulement les parties en tant que longueur sans largeur ; i.e. lignes. Le point n'est pas une partie de la ligne, car il appartient à un genre différent.

De plus, comme la ligne possède une partie, elle devrait posséder une autre partie, car le tout qui possède des parties ne peut pas être composé d'une partie, sinon, la séparation du tout de la partie serait inutile. Donc, on peut asserter que la ligne possède au moins deux parties. Puisque ces deux parties sont les toutes, ils sont composés au moins de deux parties et comme ce processus de la division se répète pour toutes les parties, la ligne est infiniment divisible. C'est pourquoi, on peut dire que la ligne possède un nombre indéfini des parties.

La troisième définition énonçant que « les limites d'une ligne sont des points » fait référence à la relation ayant lieu entre le point et la ligne qui appartiennent aux genres différents. La relation de ceux deux est appelée « limite » et comme la longueur et la largeur, ce terme n'est pas définit dans le texte. Notons qu'Euclide n'emploie pas principalement le terme « πέρας (limite) » dans les définitions. Le terme est seulement utilisé dans les trois propositions[142]. En outre, le

---

contiennent des termes indéfinis comme « continûment » ou comme « direction ». De même ce n'est pas clair que signifie « être divisible d'une seul manière ».
Pour Aristote voir : Méta. Δ 1020a11-12 « μεγέθους δὲ τὸ μὲν ἐφ᾽ ἓν συνεχὲς μῆκος ».
Pour totalité du passage voir : Aristote Méta. Δ 1020a7-12 « ποσὸν λέγεται τὸ διαιρετὸν εἰς ἐνυπάρχοντα ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἕν τι καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι. πλῆθος μὲν οὖν ποσόν τι ἐὰν ἀριθμητὸν ᾖ, μέγεθος δὲ ἂν μετρητὸν [10] ᾖ. λέγεται δὲ πλῆθος μὲν τὸ διαιρετὸν δυνάμει εἰς μὴ συνεχῆ, μέγεθος δὲ τὸ εἰς συνεχῆ: μεγέθους δὲ τὸ μὲν ἐφ᾽ ἓν συνεχὲς μῆκος τὸ δ᾽ ἐπὶ δύο πλάτος τὸ δ᾽ ἐπὶ τρία βάθος ». Aristote Méta. Δ 1020a7-12.
Pour Proclus voir : « οἱ δὲ μέγεθος ἐφ' ἕν διαστάτον ». Proclus, **ibid.** p. 97.

[142] Dans la Prop. I-7, I-8 pour des lignes, I-21, XI-2 pour les triangles. Pour la Prop. I-7, voir la note de bas de page 121.
Prop. I-8 :

terme « πεπερασμένος (limité) » qui est un mode du verbe « πέρας », est employé pour des segments des droites. Afin de définir les limites des lignes droites, il emploie plus souvent le terme « ἄκρος » qui signifie « au point le plus éloigné »[143]. Il faut indiquer qu'Euclide nomme des lignes droites limitées par les points ayant lieu sur ses limites d'après lesquelles il n'existe aucune partie des lignes droites. Constatons que dans *La Métaphysique* Aristote la définit comme « l'extrémité de chaque chose, du premier point en dehors duquel il n'y a rien à prendre et du premier point à l'intérieur duquel il y a tout à prendre ». Il emploie le terme, aussi, comme « tout ce qui est forme d'une grandeur ou de ce qui a une grandeur et de l'accomplissement de chaque chose »[144]. Dans ce contexte, on peut dire que la limite est pareillement employée chez Aristote et chez Euclide.

De plus, dans la Def. I-6, la même relation est postulée pour la relation entre la surface et la ligne ; c'est-à-dire, quelle que soit la relation entre la ligne et le point,

---

« η΄. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατερᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 15.
Pour les triangles, Prop. I-21 :
« κα΄. Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μῖας τῶν πλειρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 29.
Prop. XI-2 :
« β΄. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. IV**, p. 4.
143 Dans la Prop. III-16, 17, 33, 37, IV-8, 13 etc. Pour les propositions, voir :
Prop. III-16 :
« ις΄. Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 117.
Prop. III-17 :
« ιζ΄. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 119.
Prop. III-33 :
« λγ΄. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 140.
Prop. III-37 :
« λζ΄. Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 149.
Prop. IV-8 :
« η΄. Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 162.
Prop. IV-13 :
« ιγ΄. Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι ». Euclide, **Euclidis Elementa Vol. I**, p. 171.
144 Aristote, **La Métaphysique**, trad. par Marie-Paule Duminil et Annick Jaulin, GF Flammarion, Paris, 2008, p. 210.

la même relation existe entre la surface et la ligne. Ainsi, quelle que soit cette relation, elle est identique ou du moins fournit une analogie pour deux définitions.

De surcroît, on peut avancer que la relation entre le point et la ligne est que les points sont des limites de la ligne (si la ligne est limitée). C'est pourquoi, si la ligne est limitée, le point correspond aux limites de la ligne. La ligne limitée ne contient aucune partie hors de ses points limites et toutes ses parties sont parmi de celles-ci.

Alors, comment la ligne sera-t-elle limitée ? Comme il n'existe pas de description de « limitation » dans le texte, il faut ajouter une hypothèse. On vient de dire que comme la ligne appartient au genre des choses qui ont des parties, elle peut être divisée en ses parties. Et comme la ligne peut être divisée en ses parties, toutes ses parties sont limitées par les autres parties et, chaque partie est une ligne limitée. Puisque chaque partie est une ligne limitée, les limites de chaque partie sont également des points.

En outre, comme la ligne possède un nombre indéfini de parties, il possède, de même, un nombre indéfini de points. En effet, il est clair que les parties de la ligne possèdent ses limites (ou elles sont définies en partant de ses limites). Comme les parties de la ligne possède des parties et comme des parties de ces parties possède des points comme leurs limites, les parties mentionnées au début possèdent des limites de ses parties. Par suite, comme ces parties possèdent un nombre indéfini des parties, ils possèdent un nombre indéfini des points. La ligne, donc, possède un nombre indéfini des points.

D'autre part, il faut noter que par cette définition on ne peut pas dire que le point est seulement des extrémités de la ligne. C'est la raison pour laquelle, on pense qu'il faut ajouter que les points ne sont des extrémités que la ligne. On peut mettre l'accent sur le fait d'être limité n'est pas une propriété essentielle de la ligne, car « d'être limité » n'est pas enveloppée dans sa définition, mais si la ligne est limitée, ces limites sont des points. Et plus, même s'il n'est pas nécessaire d'être limité pour d'être la ligne, ses parties seront limitées à cause de son genre car elle est une espèce du genre des choses qui possèdent des parties.

Enfin, il faut ajouter qu'il est possible d'exposer la relation entre les limites des parties qui se limitent. Comme la ligne étant tout peut être divisée en ses parties et comme ses parties se limitent, toutes les parties qui se limitent possèdent une limite commune ; c'est-à-dire un point commun. Notons que la définition de la limite touche à un sujet principal. Le point est la limite de la ligne non seulement par rapport à sa longueur mais aussi par rapport à sa largeur. D'une part, il limite l'élongation (longueur) de la ligne ; d'autre part, il limite son expansion (largeur).

Pour ce qui est de la DefI-4, elle est, avec la DéfI-7 où la surface plane est définite, est probablement l'une des définitions les plus importantes de la géométrie euclidienne. Parce que, ces définitions sont étroitement liées à toutes les définitions qui suivent la septième définition. Par exemple, les définitions de l'angle plan et de l'angle rectiligne sont respectivement décrivent en relation de la surface plane et la ligne droite. De même, à partir de la DefI-15, les figures planes sont décrites en référence aux droites et aux plans. De plus, les propositions qu'on traitera sous du titre de Demandes sont postulées directement par rapport à ce qu'on comprend de la définition de la ligne droite et de la surface plan. Ainsi, le premier postulat en énonçant « une ligne droite peut être conduire de tous les points à tous points », réfère à quatrième définition. D'ailleurs, toutes les propositions, après avoir donnée les trois classes des propositions constitutives, sont prouvées en référant aux définitions qui sont directement lié à la quatrième et septième définition. C'est la raison pour laquelle, la compréhension de ces définitions possède une grande importance pour le système d'Euclide. Dans ce contexte, on examinera cette définition en termes de contenu et de forme. On examinera d'abord la définition en termes de contenu, puis en termes de forme.

Tout d'abord, la signification de la ligne droite est donnée par cette définition. La ligne droite est définie comme « celle qui est placée[145] de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle »[146]. D'abord, deux espèces de la ligne sont identifiées par cette définition : « la ligne droite et la ligne qui n'est pas droite ». La ligne qui remplit la condition donné est la ligne droite et l'autre est la ligne non-droite. Afin de déterminer la différence entre ces deux espèces de ligne, il faut examiner la condition que la ligne droite doit remplir.

[145] Dans sa traduction Vitrac emploi le terme « posé » pour « κεῖται » qui est conjugaison du verbe « κεῖμαι » pour 3ème singulier. Le verbe « κεῖμαι » signifie « s'étendre » parmi des autres sens. Comme nous examinons des choses qui étend, peut être un autre terme sera plus approprié. Dans ce contexte, dans une note en bas de page il avance : « κεῖται est ici, comme dans les nombreuses occurrences qui suivent, dans son emploi supplétif de parfait passif de τιθέναι (« placer »).

[146] Vitrac, **ibid.** p. 154.

D'autre côté, notons que cette description se trouve dans la DefI-7 avec les autres termes. La DefI-7, où la surface plane est décrite, est postulée comme « une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle »[147]. Les relations sont données pour les éléments différents ; au lieu du point, la droite est remplacée, et au lieu de la droite, la surface plane est employée. C'est pourquoi, ils fournissent une analogie pour les deux définitions, comme la définition de la limite. Dans ce contexte, les relations données entre le point et la ligne est analogue à celle d'entre la ligne et la surface.

Ensuite, la définition qu'on examine est une définition relationnelle en signalant la relation entre la ligne et ses points. Pour de comprendre la signification de ces relations, il faut examiner la signification des termes en grec ancien. La définition est donnée comme « εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται » par Euclide. La ligne droite (εὐθεῖα γραμμή) est installée comme « ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται ». En effet, l'expression « ἐξ ἴσου (de manière égale) » et l'expression « τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις (par rapport aux points qui sont sur elle) sont les conditions d'être droite pour une ligne[148]. On pense que la deuxième expression conforme à (ou suit) la première, c'est pourquoi on traitera d'abord, la deuxième.

L'expression « par rapport aux points qui sont sur elle » est constituée de deux structures en grec ancien : « ἐφ᾽ ἑαυτῆς (sur elle) » et « τοῖς σημείοις (par rapport aux points ». Dans ce cadre, on trouve trois relation données en définition : (i) les points sont « sur » la ligne, (ii) la ligne est placée « par rapport aux points qui sont sur elle », et (iii) la ligne est placée « de manière égale par rapport aux point qui sont sur elle ». Comme il est clair, l'expression dernière décrit la ligne droite. (i) et (ii) ne sont pas définis dans les *Eléments*, c'est pourquoi ces relations sont ou bien des implications des définitions précédentes, ou bien des concepts sur lesquels des philosophes et des géomètres de cette époque sont en consensus[149]. On pense que ces relations sont des implications des définitions précédentes.

---

[147] Vitrac, **ibid.** p. 156.

[148] Dans ce cadre, remarquons que les commentateurs modernes sont en consensus sur l'importance de l'expression « de manière égale », car la relation des points qui sont sur la ligne, dépend en manière égale, donc, cette expression pose exactement ce que signifie la ligne droite. Voire : Vitrac, **ibid.** p. 154. Voire : Heath, **ibid.** p. 167.

[149] Notons qu'il n'existe un consensus sur des définitions des éléments de la géométrie. Il existe des différences entre des écoles différentes.

Avant tout, la première relation (i) installée comme « d'être sur (ἐπί) » ne signifie rien lorsqu'on l'isole des autres éléments, car il réfère à une relation entre ces éléments. Il réfère à la relation qui a lieu à la fois entre le point et la ligne, et entre la ligne et la surface. Dans ce cadre, la signifiance de la relation donnée entre le point et la ligne est analogue à celle d'entre la ligne et la surface. Il faut ne pas oublier ce point qui a une grande importance, car les implications de la DefI-4 doivent être applicables à la DefI-7.

Ensuite, on vient de montrer que la ligne (en étant tout) est divisible en ses parties et que ses parties se limitent et, par suite, que les limites de ses parties sont des points. On a, de même, indiqué que ces parties possèdent des points en tant que limites. Dans ce contexte, au moins s'il s'agit des définitions, on réclame que le terme « sur » est employé pour de faire référence à cette relation de la possession. Par suite, les points seront « sur » la ligne, comme ses parties les possèdent en tant que limites[150]. Et puis, comme la ligne possède ses parties, ses parties sont sur elle.

Par ailleurs, la deuxième relation placée comme « par rapport aux points » est construit par le cas datif dans le grec ancien. Le cas datif donne aussi le sens « par le moyen de ». En cela, que peut-on comprendre de cette relation ? Comment une ligne peut placée (ou étend) par rapport aux (ou au moyen de) points ? Sur ce sujet, on pense que cet usage est lié à la relation entre les parties de la ligne et leurs points en tant que limites de ses parties. Comme la ligne est la totalité de ses parties, et comme ses parties sont limitées par des points, la ligne devrait être placée par rapport aux

---

[150] En effet, dans *Les principes fondamentaux de la géométrie*, David Hilbert donne cinq groupes des axiomes dont le premier est nommé Axiomes d'association où il pose les relations premières entre des éléments primitifs de la géométrie ; c'est-à-dire, les relations entre le point, la ligne, et la surface. Le premier axiome est posé comme suivant : « Deux points distincts, A, B, déterminent toujours une droite *a* ; nous poserons AB = *a* ou BA = *a* ». Puis, il dit que « Au lieu de « déterminent », nous emploierons aussi d'autres tournures de phrase ; par exemple : A « est situé sur » *a*, A « est un point de » *a*… ». David Hilbert, **Les principes fondamentaux de la géométrie**, trad. par L. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1900, p. 7. Dans ce contexte, nous pouvons dire qu'Euclide accepter la deuxième expression de Hilbert en tant qu'implication des définitions.
Voir : Die Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung.
I I. *Zwei voneinander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a.* Statt „bestimmen" werden wir auch andere Wendungen gebrauchen, z. B. *a* „geht durch" *A* „und durch" *B*, *a* „verbindet" *A* „und" oder „mit" *B*. Wenn *A* ein Punkt ist, der mit einem anderen Punkte zusammen die Gerade *a* bestimmt, so gebrauchen wir auch die Wendungen: *A* „liegt auf" *a*, *A* „ist ein Punkt von" *a*, „es gibt den Punkt" *A* „auf" *a* usw. Wenn *A* auf der Geraden *a* und außerdem auf einer anderen Geraden *b* liegt, so gebrauchen wir auch die Wendung: „die Geraden" *a* „und" *b* „haben den Punkt *A* gemein" usw.
Grundlagen der Geometrie von Dr. David Hilbert, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Ursprünglich erschienen bei B.G. Teubner in Leipzig 1922, p.3.

points qu'elle possède. Dans ce cadre, on peut fournir l'analogie mentionnée, comme on le verra, dans l'examen de la DefI-7[151].

A cet égard, une autre propriété déterminera les différences des espèces de la ligne : de manière égale. Il faut, d'abord, noter que cette expression, comme « sur », n'a aucune sens si l'on l'isole des autres éléments de la géométrie, car il dénote une relation entre ces éléments. En d'autres termes, cette relation désigne la relation entre le tout et des limites de ses parties. En cela, elle nous fournira ladite analogie entre la DefI-4 et la DefI-7. L'indication d'elle au point de la ligne et ses points seront analogues ce de la surface et ses droites.

En outre, la signification de « de manière égale » n'est pas donnée dans les *Eléments*. C'est pourquoi, il existe un certain nombre de discussion sur cet usage. Pourtant, il existe en consensus dans les traductions, l'expression généralement considère en tant que marque du fait de ne pas avoir courbature. Par exemple, dans la traduction de Heath elle se trouve comme « evenly », dans celle de Peyrard comme « également ». Dans ce cadre il n'y a pas de différence concernant l'obscurité entre l'expression originale et les traductions, car ni la signification de « evenly » est claire ni celle de « également ». Dans ces conditions il faut traiter les significations de cet usage en grec ancien et comme on vient d'indiquer dans le deuxième chapitre, il faut approcher cette expression en partant de Notions Communes.

Avant de traiter « de manière égale », on donnera l'examen de Heath sur ce sujet. Après avoir exposé les définitions posées par des philosophes précédentes, Heath considère l'interprétation de Proclus[152]. Et puis, il examine les usages différents de « de manière égale » chez Platon et chez Aristote. Il avance que « de manière égale » se trouve communément chez eux comme « sur un base d'égalité »,

---

[151] Nous verrons dans l'examen de la DefI-7, qu'on peut considérer la même relation pour des parties de la surface et les limites de ces parties.

[152] Heath critique l'interprétation de Proclus de deux côtés. D'abord il cite le passage où Proclus dit qu'Euclide « définit la ligne droite en tant que ligne occupant une distance égale à celle d'entre des points sur elle. Parce que, dans la mesure où l'un des points est éloigné d'un autre, la longueur de la ligne droite dont ils sont les limites est égale à cette distance ; et c'est le sens d'étendre « de manière égale » aux (ou avec) points sur elle. Pourtant, si l'on examine les deux points sur la circonférence (d'un cercle) ou l'autre espèce de la ligne, la distance entre eux est plus grande qu'intervalle qui les sépare. Et c'est le cas pour toutes espèces de la ligne sauf la droite ». S'oppose Heath à cette interprétation, car, selon lui, Proclus tient apparemment « de manière égale » comme être « à (ou sur) égale distance » et explique la définition en partant de l'*assomption* d'Archimède comme « de toute lignes ayant les mêmes limites, celle de la ligne droit est la moins ». D'autre part, l'application de cette interprétation à la DefI-7 est impossible, car bien que la surface est définit par rapport à longueur et largeur, une tel définition qui porte sur la distance sera inutile pour la surface. Heath, **ibid.** p. 166-167, trad. par l'auteur.

« être placé également », « dans une distance égale », « indifféremment ». Puis, il traite la relation de datif « par rapport aux points sur elle » avec « de manière égale » et « placé ».

Heath dit que si le datif est construit avec « de manière égale », la définition signifie « celle qui est également placée avec (ou par rapport à) les points qui sont sur elle ». Si elle est construit avec « être placé », la définition signifie « celle qui est également (ou uniformément) placée, en (ou par) points qui sont sur elle ». Il dit que Max Simon approche à l'expression comme elle donne la « dans la même manière avec ses point »[153]. Toutefois, il s'oppose à ce perspectif, car il pense que Max Simon attache les sens distance aux mots. Et puis, il dit que Simon tient la deuxième expression comme « la ligne droit est symétriquement placée pour (ou à travers) ses points ». A cet égard, dit Heath, Simon ajoute que la direction et la distance seront les notions irréductibles primaires.

En conséquence, Heath indique : « Donc, alors que le langage, comme on voit, est désespérément obscur, on peut affirmer sans risque que l'idée qu'Euclide souhaitait exprimer était celui d'une ligne qui présente la même forme en tous points et relativement à tous, sans aucune caractéristique irrégulière ou asymétrique, qui distingue une partie ou un côté de celui-ci d'une autre »[154].

En partant des inférences de Heath, on peut dire que les commentateurs interprètent l'expression en faisant références au de hors du texte d'Euclide. Ils emploient les termes comme « distance », « direction » qui ne sont pas définis dans le texte. Par contre, comme on l'a indiqué au début de notre recherche, on réclame qu'on peut interpréter la DefI-4 (de même la DefI-7) en référant aux énoncés qui se trouvent sous le titre de Notions Communes. On pense que la signification de ces définitions est liée aux fonctions de « tout », de « partie », et de « égale ». Souvenons qu'ils sont posés comme des relations des choses appartenant au domaine de la

---

[153] « Max Simon takes the first construction to give the sense "die Gerade liegt in gleicher Weise wie ihre Punkte." If the last words mean "in the same way as (or in like manner as) its points," I cannot see that they tell us anything, although Simon attaches to the words the notion of *distance* (Abstand) like Proclus. The second 'construction he takes as giving "die Gerade liegt fur (durch) ihre Punkte gleichmässig," "the straight line lies symmetrically for (or through) its points"; or, if *κεῖται* is taken as the passive of *τιθήμι*, "die Gerade ist durch ihre Punkte gleichmässig gegeben worden," "the straight line is symmetrically determined by its points." He adds that the idea is here direction, and that both direction and distance (as between two different given points simply) would be to Euclid, as later to Bolzano (*Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*, 1804, quoted by Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts, II. p. 16), primary irreducible notions. ». **Ibid.**
[154] Heath, **ibid.** p. 167, trad. Par l'auteur.

géométrie. En cela on suivra les implications de Notions Communes pour d'interpréter ces définitions. Pour de traiter « ἐξ ἴσου », on séparera « ἐξ » et « ἴσου », et puis, on les examinera.

Enfin, il faut ajouter que dans le contexte du problème que Heath indique, on pense que « τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις » est construit avec « ἐξ ἴσου », car « ἴσος » est donné relatif aux relations entre les choses. Par suite, quoi qu'il signifie, il doit être postulé pour des choses qui peuvent être liées. La signification de « par rapport aux points qui sont sur elle » est tenue comme soit « en les points qui sont sur elle » soit « par les points qui sont sur elle », on tient « des points » qui doivent être examiné relativement les uns aux autres. Comme des points sont les limites de parties de ligne, l'expression réfère à la relation entre ces parties. « Par rapport aux points qui sont sur elle », donc, devrait être construit avec « ἐξ ἴσου ».

Avant tout, « ἐκ » est employé en grec ancien comme une préposition, et il a plusieurs sens relatif à son usage. En étant proposition lorsqu'on le tient séparément des autres mots, il ne signifie rien. Il utilisé généralement pour de référer à « un départ », « le lieu » d'une chose, ou bien il signifie « le temps » ou « l'origine » du sujet. Au sujet d'usage spatial, il signifie, de même, « hors » ou « au-delà » d'un lieu (ou chose). Lorsqu'il s'agit d'usage temporal, il signifie « dès », « après » d'un incident ou d'une époque. Quand il est utilisé dans le contexte « d'origine », il signifie « la matière», « origine (le père) » ou « cause » d'une chose, ou bien « agent » d'une action. Dans notre cas, il est évident qu'il n'est pas employée dans le contexte spatial ni ce de temporal, car il est construit par « ἴσος (égale) ». De même, comme « égale » ne connote pas « la matière » ni « l'origine » d'une chose ni « agent » d'une action, il n'est pas employé dans ces sens. Par suite, il est utilisé pour de signifier la cause d'une chose. C'est la cause qui détermine la relation des points (ou des parties limitées par ces points).

Au demeurant, notons que l'utilisation de « ἐκ » dans les *Seconds analytiques* semble un usage qui signifie la cause d'une énonciation. Aristote emploi le terme pour de signaler la cause d'une conclusion. En d'autres termes les démonstrations aboutissent aux conclusions à partir des ou à cause des (ἐκ) principes. (Donc si l'on tient « ἐξ ἴσου » dans son ensemble, l'expression connote « à cause », « en raison », « en conséquence » d'égale. Par suite, « de manière égale » peut être tenir comme des conséquences des connotations de l'égale.

En outre, on a démontré que la relation de l'égalité possède les propriétés suivantes : réflexivité, symétrie, transitivité, et coïncidence (ou s'ajuster). Puis, on a exposé les significations de ces propriétés. A cet égard, comme la relation « égale » possède ces propriétés, des choses à propos desquelles on dit « de manière égale » devraient remplir ces conditions. Puis, comme « d'une manière égale » est postulé pour « des points sur une ligne », cette égalité marque une relation entre des points.

Cependant, une question très importante se pose dans ce cas. Comment peut-on lier des points par l'égalité ? Souvenons l'analogie entre la DefI-4 et DefI-7. « De manière égale » est employé dans les deux définitions. En cela, si « de manière égale » est donné pour des limites alors des espèces de la ligne est déterminé en partant de ces limites, i.e. des points sur elle. De même, des espèces de la surface plane est déterminé en partant de droites sur elle. En effet, il n'est pas clair de manière de détermination en partant des limites. Que signifie l'égalité pour des points ? On peut avancer qu'on peut séparer des points du fait qu'ils sont des limites différentes d'une partie d'une ligne. Quant à l'égalité, il n'est pas clair dans le contexte des *Eléments*, si l'on peut dire « égale » pour des points. En outre, cette approche cause des problèmes pour la DefI-7, presque les mêmes problèmes se poseront pour des limites de la surface.

En revanche, on pense que cette relation d'égalité est donné pour des parties, non pas pour des limites. Les deux définitions déterminent des espèces d'éléments en posant une relation d'égalité, ou une relation qui en dépend, entre des parties de ces éléments. De plus, « de manière égale » fait référence aux propriétés de la relation d'égalité : la réflexivité, la symétrie, la transitivité, et la coïncidence. Puis, comme on le verra dans l'examen des Demandes, la transitivité et la coïncidence ont une grande importance pour la construction d'espace. Enfin, on peut dire, par la DefI-4, que la relation entre des parties d'une ligne remplit des propriétés de l'égalité. Il en est ainsi pour la surface plane, par la DefI-7.

Finalement il est obligatoire d'éclairer la connotation de la transitivité et de la coïncidence pour cette définition. On a vu que la coïncidence permit à considérer les égaux en tant qu'interchangeables. En cela, les parties d'une ligne (les segments) ou d'une surface plane étendent dans la même manière. En ce qui concerne la transitivité, si un segment quelconque étend dans la même manière avec un segment d’une droite, le segment (quelconque) étend dans la même manière avec les autres parties de cette ligne, par suite il appartient à cette ligne droite.

Pour conclure, remarquons que la satisfaction de la relation ayant lieu entre des parties de la ligne, ne peut pas éclairer tout l’obscurité des deux définitions. On vient d’indiquer que cette relation est donnée pour des parties des lignes ou celles de surfaces. Pourtant, il n’est pas clair à quelle partie réfère cette relation. On peut sans doute avance qu’elle n’est pas dite pour toutes les parties, car si elle est dite pour toutes les parties alors elle serait dite pour des parties et des parties de ces parties. A cet égard, on est confrontés à un problème : Comment la partie et le tout s’ajusteront ? La partie est toujours plus petite que le tout. Alors cette relation est dite pour des certains parties. Si c’est le cas, pour quelle parties est cette relation valable ? Dans ce cadre, on peut supposer que cette relation est donnée pour les parties qui sont égales ; c’est-à-dire, les parties qui sont égales en termes de genre auquel le tout appartient. Il faut traiter la signification d’être égale pour la ligne qui est longueur sans largeur, et pour la surface qui est longueur et largeur. Toutefois, puisqu’on traitera les objets géométriques par la relation de tout-partie, cette étude est sujette d’une autre recherche.

Finalement, on est en accord avec ce que Heath avance : « Donc, alors que le langage, comme on voit, est désespérément obscur, on peut affirmer sans risque que l’idée qu’Euclide souhaitait exprimer était celui d’une ligne qui présente la même forme en tous points et relativement à tous, sans aucune caractéristique irrégulière ou asymétrique, qui distingue une partie ou un côté de celui-ci d'une autre ».

4.3. La surface et la surface plane

Les trois définitions dernières qui sont en relation avec la construction d’espace sont celles de la surface. La DefI-5[155] est la définition du genre de la surface, la DefI-6[156] est celle de sa relation avec le genre ligne, et la DefI-7[157] est celle des espèces de la surface. Puisque on a auparavant indiqué, nous examinerons ces définitions en partant des inférences on a obtenue en tant que conclusions des définitions analogues.

---

155 « Une surface est ce qui a seulement longuetlr et largeur ». Vitrac, **ibid.** p. 156.

156 « Les limites d'une surface sont des lignes ». **Ibid.**

157 « Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elle ». **Ibid.**

La DefI-5 décrit la surface comme « ce qui a seulement longueur et largeur »[158]. Comme on a remarqué dans l'examen de la DefI-2, cette définition porte sur des termes qui ne sont pas définit : « longueur » et « largeur ». De plus la définition nous donne l'élément qui appartient au genre des choses ayant parties, car autrement il serait nécessaire de la poser sous la DefI-1. En outre, la surface est un élément qui possède des différences de genre de ligne. Tandis que, la ligne est posée comme « longueur sans largeur », la surface est posée comme « ce qui a longueur et largeur », et par suite, elle appartient à un genre des choses qui ont des parties, mais elle se diffère l'espèce de la ligne.

Par ailleurs, comme la surface possède des parties, elle peut les avoir relatif à sa longueur et sa largeur ; à savoir, elle est divisible selon sa longueur et sa largeur. Néanmoins, la signification d'être une chose ayant longueur et largeur n'est pas claire. Probablement, on peut la tenir, comme le cas de la ligne, en tant que grandeur étendue selon deux dimensions, en termes modernes, bidimensionnelle, malgré tout, sa signification ne sera pas plus claire.

En outre, comme la surface appartient au genre qui possède des parties, elle doit être examinée par la relation de partie-tout. Par suite, la surface est un tout constitué des parties et elle peut être en divisé. De plus, comme la surface est un tout, elle n'a pas de partie en dehors de lui-même.

De surcroît, puisque on a déjà démontré, la surface appartient à même genre que ses parties. D'où, elle possède seulement les parties en tant que longueur et largeur ; à savoir, surfaces. Le point et la ligne ne peut pas être des parties de surface, car ils appartiennent aux genres différents. De même, la surface ne peut pas être la partie de la ligne.

Au demeurant, comme on a montré que la chose qui possède parties, est indéfiniment divisible dans l'examen de la DefI-3, la surface est infiniment divisible. D'où, elle possède un nombre indéfini des parties.

En ce qui concerne la DefI-6, on a mentionné qu'elle est analogue à la DefI-3. A cet égard on suivra des inférences qu'on a fait de la DefI-3. Comme I-3, elle nous donne une relation se trouvant entre des genres différents : la surface et la ligne. Les lignes sont les limites de la surface quand elle est limitée. La surface limitée ne

[158] Vitrac, **ibid.** p. 156.

contient aucune partie hors de ses limites et toutes ses parties sont parmi de celles-ci. De plus, des parties de la surface se limitent et toutes ses parties sont des surfaces limitées. La surface possède un nombre indéfini des lignes. De plus, il n'est pas nécessaire d'être limité pour d'être la surface, mais ses parties sont limitées à cause de son genre. De plus la ligne est la limite de la surface par rapport non seulement à l'élargissement superficiel, mais encore à l'élargissement volumétrique.

Au sujet de la DefI-7, on l'appliquera les inférences tirées de la DefI-4. Il est nécessaire d'indique qu'il existe une différence entre la DefI-7 et la DefI-4. La DefI-7 est posée comme « celle qui est placée d'une manière égale par rapport aux droites sur elle »[159]. En effet, la DefI-4 est postulée à partir de la relation de ses limites. En revanche, la surface plane n'est pas définie à partir des limites d'une surface quelconque. La surface plane est formulée par rapport aux droites sur elle. C'est pourquoi, la première condition de la surface plane est le fait de posséder les droites ; à savoir les limites de ses parties sont des droites. Si l'on pense réciproquement, si une surface est plane alors les limites de ses parties sont des droites.

Les autres propriétés de la surface plane semblent à la ligne droite. Il existe la relation « de manière égale » entre ses parties. D'où ses parties sont interchangeables et étendent dans la même manière. De plus, si une partie de la surface quelconque étend dans la même manière avec une partie d'une surface plane, ladite partie étend dans la même manière avec les autres parties de cette surface, par suite il appartient à cette surface plane.

---

[159] Vitrac, **ibid.** p. 156.

5. LA CONSTRUCTION DE L'ESPACE PAR RAPPORT AUX TROIS CLASSES DE PROPOSITIONS SYSTEMATISANTES

Dans ce chapitre, on traitera les propositions se trouvant sous le titre de Demandes et la construction d'espace, en partant des inférences on vient d'obtenir de Notion Communes et de Définitions. En premier lieu, on considère la structure de la Dem1 et les mots clés qu'elle emploie en grec ancien. En deuxième lieu, on considérera des relations posées par cette déclaration. Puis, on discutera l'ordre des éléments postulés en référant aux implications des définitions. Alors, on examinera la séparation des points les uns des autres par rapport à la condition de la limite. Et puis, on mentionnera des certains attributs essentiels des points en partant de ladite relation entre le point et la ligne. Ensuite, on exposera une relation nommée « entre » pour des points en référant à la relation partie-tout. Enfin, on étudiera des implications de la Dem1 sur la construction d'espace en soulignant des conclusions des définitions de la ligne droite et la surface. Par ailleurs, on considèrera la Dem2, partant des connotations des mots employés en grec ancien. Puis, on s'efforcera au terme « prolonger » par les conclusions obtenues des Notions Communes.

La Dem1, en étant posée comme « qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point » déclare une relation entre des points et la ligne[160]. La proposition se trouve en grec ancien comme « Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν ». Le terme « ἀγαγεῖν » qui est le mode d'infinitif du verbe « ἄγω », a beaucoup des sens relatif à son usage. Dans le contexte des *Eléments* les commentateurs généralement le considère comme un terme employé afin de connoter « dessin ». Par exemple, dans la traduction de Heath, il se trouve comme « draw (dessiner)», et dans celle de Peyrard comme « conduire ». Vitrac, de même, la traduit comme « mener » qui peut être tenu comme conduire. En revanche, on pense, malgré du fait de ses significations, que ce terme fait référence à un acte de penser. Il seulement nous demande à réfléchir une ligne droite posée entre

[160] Vitrac, **ibid.** p. 167.

deux points. En d'autres termes, si l'on s'adresse à Aristote, l'existence d'une ligne droite entre deux points, est postulée par cette proposition ou bien à David Hilbert, comme il l'emploie dans *Les principes fondamentaux de la géométrie*, la règle de détermination d'une ligne droite par deux points distincts est postulée.[161]

En outre, la proposition emploie le mot « πᾶς » pour préciser deux points. La signification du terme est différente celle de « ὅλος » qui signifie notre « tout » dans le Notions Communes. En cela, des points posés n'impliquent pas « le tout » si l'on les considère tous ensemble ; à savoir, on ne peut parler d'une opération de « ajouter (προστίθημι) » pour des points.

Ensuite, une droite est postulée de tout point à tout point par cette proposition, d'où il faut discuter l'ordre de la postulation ; c'est-à-dire, si le point ou la droite sont premièrement posés. Parce que la direction de la composition de l'ensemble (l'appelons l'espace) des éléments géométriques dont on parle est importante. Dans le premier cas l'espace est construit en partant des points, dans le deuxième, il est déjà là, et on parle des points à partir de l'espace. En d'autres termes, le premier cas suppose que des éléments constructifs précédent l'espace, la deuxième suppose que l'espace précède ses éléments constructifs.

De surcroît, en partant de la DefI-3 on peut réclamer que des limites des parties d'une ligne sont des points. Toutefois, sont-ils des limites des parties des lignes par la définition du point ? On répond « non », car la définition de point ne pose rien sur le fait « d'être limite » de la ligne La définition de point est donnée sur le compte du fait d'être sans-partie. En partant de la DefI-3, on peut exprimer que si une chose est une ligne alors des limites de ses parties sont des points. En revanche, on ne peut pas dire que si une chose est un point alors elle est une limite d'une partie de la ligne. Ce cas ne suit pas de la définition du point. Le point est la limite par rapport à sa relation avec la ligne. Par suite, on peut avancer que le demande postule premièrement le point (ou des points). Puis, comme la ligne droite est postulée de tout point à tout point, elle est présentée en deuxième lieu. Dans ces conditions, on peut constater que des éléments constructifs de l'espace précédent l'espace.

---

[161] Hilbert, aussi, emploie des autres termes pour de décrire une droite : « *a* (la droite) pas par A (le point) et par B (le point) », « *a* joint A et B ». Cependant, tous ces usages signifient la détermination chez Hilbert. A cet égard, nous pensons que cette demande signifie une règle de détermination pour des lignes. Voir la note de bas de page 148.

En outre, il est nécessaire de remarque que cette demande pose une ligne droite (l'appelons droite) qui n'a pas de limite nécessairement par sa définition, c'est-à-dire la droite posée par cette proposition est illimitée. En cela, toutes droites déterminées par cette manière sont illimitées. Par suite, les droites qui sont les uns des éléments constitutifs sont illimitées, et donc, l'espace construit par ces droites sera illimitée.

En revanche il n'est pas clair que si l'on peut construire une surface soit plane soit non-plane en partant des Demandes car elles ni posent une règle pour cette construction, ni on peut l'inférer des Définitions. En effet, par la DefI-5 il est légitime de dire que la surface est divisible selon sa longueur et sa largeur. Puis, par la DefI-6 on peut dire que des limites de ses parties sont des lignes. Et enfin, par la DefI-7 une relation est posée entre la ligne droite et la surface plane. Par contre, aucune définition ne nous permit pas de réaliser la construction de la surface plane. Dans ce cadre on pense que le système exige une Demande de plus, comme la Dem1 énonçant une règle de détermination pour la ligne droite en partant de ses limites ou d'une autre manière, qui nous permettra à réaliser une telle construction[162].

D'autre part, comme deux points déterminent la droite, et comme des points sont des limites des segments d'une droite, on peut avancer que la droite est déterminée d'une manière qui se rapport à sa partie. En effet, lorsqu'on pose des points et des droites, on pose, de même, un domaine auquel la relation de tout-partie est applicable, car les Notions Communes sont applicables aux domaines incluant le domaine géométrique. De plus, on a montré que des lignes sont des choses qui possèdent des parties dont les limites sont des points. Puis, on a exposé la relation entre la ligne droite est ses segments entre lesquelles la relation nommé « d'être d'une manière égale » existe. Enfin, on a avancé, des propriétés de celle-là liées aux propriétés de l'égalité : la réflexivité, la symétrie, la transitivité, et la coïncidence. Les parties d'une droite peuvent être considéré en tant qu'interchangeable. De plus si

---

[162] Notons que Hilbert pose un axiome pour déterminer le plan : « Trois points A, B, C non situés sur une même droite déterminent toujours un plan α ; nous poserons ABC = α. Il, de plus, pose un autre axiome : « Trois points quelconques A, B, C d'un plan α, non situés sur une même droite, déterminent ce plan α. Voir : I. 4. *Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene a.*
Wir gebrauchen auch die Wendungen: *A*, *B*, *C* „liegen in" *a*; *A*, *B*, *C* „sind Punkte von" *a*; usw.
I 5. *Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene.*
Grundlagen der Geometrie von Dr. David Hilbert, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Ursprünglich erschienen bei B.G. Teubner in Leipzig 1922, p.3.

des parties d'une droite peuvent être envisagé comme interchangeables alors la ligne en possédant tel type des parties, est la ligne droite.

A cet égard on pense qu'Euclide pose à la fois, une règle de la détermination pour les segments de la droite, et pour elle-même dans sa totalité. En effet il prononce premièrement une droite déterminé par deux points quelconques ; à savoir il présente la droite dans sa totalité. On connaît que la ligne droite est illimité et qu'elle est divisible en possédant des parties par la DefI-2. Puisque la droite est divisible, les parties d'elle est posé en même temps. En cela on peut dire que la droite précède ses parties, car comme avant de la poser dans sa totalité on ne peut parler de ses parties, elle doit premièrement être posée dans sa totalité si le fait de parler de ses parties sera légitime. D'où la ligne droite précède ses parties. Puis, cette droite est déterminée par des points qui sont des limites de ses parties par la DefI-3. Par suite, on peut dire que la droite est déterminée à partir de ses parties.

En outre, cette détermination nous donne la possibilité de penser sur la relation « entre » donnée par Hilbert en tant qu'axiome[163]. Comme deux points

---

[163] Hilbert donne 5 axiomes, en tant qu'axiomes de distribution, dont les quatre premiers sont directement liés à la ligne droite :
1. A, B, C désignant trois points en ligne droite, si B est situé entre A et C, il l'est aussi entre C et A.
2. A et C désignant deux points d'une droite il y a au moins un point B situé entre A et C au moins un point D tel que, C soit situé entre A et D.
3. De trois points d'une droite, il en est toujours un et un seul situé entre les deux autres.
4. Quatre points quelconques A, B, C, D d'une droite peuvent toujours être distribués d'une manière telle que B soit situé entre A et C et aussi entre A et D, et que C soit situé entre A et D et aussi entre B et D.
De plus il pose une définition pour « segment » et « l'extérieur de segment » comme : « Le système formé par deux points A et B situés sur une droite est dite un segment, et nous le désignerons par AB ou BA. Les points situés entre A et B sont dits les points du segment AB ou encore à l'intérieur du segment AB ; tous les autres points de la droit *a* sont dits à l'extérieur du segment AB. Les points A et B sont dits les extrémités du segment AB.
Hilbert, **ibid.** p. 9.
Voir :
« Die Axiomgruppe 11: Axiome der Anordnung.
II I. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*
II 2. *Wenn A und C zwei Punkte einer Geraden sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigsten einen Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt.*
II 3. *Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt.*
Erklärung. Wir betrachten auf einer Geraden *a* zwei Punkte *A* und *B*; wir nennen das System der beiden Punkte *A* und *B* eine *Strecke* und bezeichnen dieselbe mit *AB* oder mit *BA*. Die Punkte zwischen *A* und *B* heißen Punkte der Strecke *AB* oder auch *innerhalb* der Strecke AB gelegen; die Punkte *A*, *B* heißen *Endpunkte* der Strecke *AB*. Alle übrigen Punkte der Geraden *a* heißen *außerhalb* der Strecke AB gelegen.
II 4. *Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.*

déterminent un segment de la droite, et comme des limites des parties de cette segment sont des points, des points qui sont des limites des parties de ce segment sont « entre » deux points qui limitent le segment. En cela, une règle de détermination pour la relation « entre » est probablement posée.

Par ailleurs, comme la droite est dite de tout point à tout point, les points sont distingués par le segment de droite qu'ils limitent. Le segment d'une droite sépare deux points quelconques. D'autre côté, il est possible de dire que le segment est entre des points qui l'entourent, en partant de fait qu'ils la déterminent. En conséquence, un segment est déterminé entre tous les deux points et il n'existe aucuns points entre lesquels un segment d'une droite ne soit pas. D'où, on peut dire que des points sont toujours des limites de la ligne, car comme il n'existe aucuns points entre lesquels un segment ne soit pas et puisque des limites de la droite sont des points par la DefI-3, tout point est limite de droite qui est entre lui et un autre point. Par suite, tout point est la limite d'un segment (ou droite)[164].

Au demeurant, puisqu'un segment est posé entre deux points, il n'existe pas une relation immédiate entre des points. C'est pourquoi, la médiation de deux points est la partie ayant lieu entre eux. De même, il n'existe pas de points adjacents, car si l'on parle de deux points différents, il existe toujours un segment entre eux. Par suite, l'adjacence des points n'est pas possible.

En outre, notons que demande pose que deux points déterminent une droite, non pas une ligne quelconque. C'est pourquoi, les lignes posées sont placée d'une manière égale par rapport à ses points. Souvenons que la différence de la ligne droite vient de la relation « de manière égale » ayant lieu entre ses parties. En cela, sous la supposition que toutes des droites sont menées de tout point à tout point, pour tous

---

Die Axiome II 1-3 enthalten nur Aussagen über die Punkte auf einer Geraden und mögen daher die *linearen Axiome der Gruppe* II heißen ;
das Axiom II 4 enthält eine Aussage über die Elemente der ebenen Geometrie und heiße daher das *ebene Axiom der Gruppe* II. ». Grundlagen der Geometrie von Dr. David Hilbert, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Ursprünglich erschienen bei B.G. Teubner in Leipzig 1922, p.5.

[164] A cet égard, « d'être limite » est, en termes d'Aristote, « accident éternelle » pour des points. A la fin du cinquième livre de la *Métaphysique*, Aristote donne la définition de « l'accident ». « Accident », chez lui, est ceux qui appartiennent à (ὑπάρχω) une chose et ceux qui sont vrai (ἀληθής) pour elle, pourtant, ils ne viennent nécessairement d'elle ni ils sont généralement dite pour elle. D'autre côté, il note que le terme « accident » est employé pour ceux qui appartiennent à la chose lui-même (καθ' αὑτὸν), ceux qui n'appartiennent pas à son substance (οὐσία). Puis, il nomme les accidents de ce type comme « accidents éternelles ». Comme nous venons de montrer, la demande postule que tout point est limite de la ligne. Cette incidence ne vient pas de la définition du point, elle vient de la relation qui est dite entre le point et la ligne. Par suite « d'être limite » n'est pas postulé pour le point en partant de sa définition, elle vient de la construction de l'espace. D'où, « d'être limite » est « accident éternelle » du point.

deux points il sera une ligne qui est placée de manière égale. Par suite, on peut dire que toutes régions de l'espace auront des mêmes propriétés, à savoir il sera régulier[165].

En dernier lieu, il est nécessaire de traiter la signification de « droite qui est mené de tout point à tout point ». On a mentionné que la relation « de manière égale » a une grande importance pour la DefI-4. La connotation de « de manière égale » détermine directement le caractère de la ligne droite. A partir de cette demande on peut indiquer que la géométrie construit est directement lié à la signification de cette relation. Si la ligne droite était tenue en tant que droites supposées appartenir à la géométrie euclidienne alors un type de géométrie serait créé. Et si l'on acceptait en tant que droite qui n'est pas « une droite de la géométrie euclidienne », quoi qu'elle satisfasse des conditions données par la DefI-4, alors un autre type de géométrie serait créé. En conséquence, la connotation de la droite a une grande importance pour l'espace qui sera construit, par suite, pour la géométrie qui sera créé[166].

La Dem2, prononçant « et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée », pose la légitimité de prolonger une droite limitée en tant que ligne droite (καὶ εὐθεῖαν πεπερασμένην κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν). La première remarque que l'on peut faire est l'usage de « πεπερασμένην » qui connote « limitée ». Puisque la droite est limitée, elle est une partie d'une autre droite, et ses limites sont les points. A cet égard il existe une relation entre la Dem1 et la Dem2. La règle de la détermination d'une partie de la droite est donnée par la Dem1.

En outre, l'opération nommée « prolongement (ἐκβαλεῖν) » d'une droite finie est valable « sur une droite (ἐπ᾽ εὐθείας) » où « sur (ἐπί) » est un terme familier. On a indiqué dans l'examen de la DefI-4 que « sur » signifie une relation de possession

---

165 On peut probablement essayer à construire la surface plane à partir de cette conclusion. Comme des lignes sont des limites d'une surface quelconque, et comme l'espace est homogène, la surface qui se trouve dans cette espace possèdent seulement des droites comme ses limites, à savoir ces droites sont sur elle qui est la première condition d'être une surface plane. Et puisque l'espace est homogène, il n'existe aucune irrégularité dans l'espace. Par suite, des parties de surface qui sont déterminées par ces droites sont interchangeables. D'où, le second critère de surface plane est satisfait. Cependant, nous n'avons pas une règle pour une telle détermination : il n'existe pas un énoncé en tant que la Dem. 1, pour de déterminer une surface plane. C'est la raison pour laquelle nous pouvons dire que le système exige une Demande de plus.

166 Par cette conclusion on peut avancer que la relation entre la géométrie euclidienne et géométrie non-euclidienne est construit. A partir de cette conclusion des droites euclidiennes et des droites non-euclidiennes peuvent être considérées en ensemble. Ce qui change cette situation est la Dem. 5 connue comme Postulat d'Euclide, ou Postulat de Parallèles.

qui se trouve entre des parties et du tout, ainsi que des limites par lesquelles les parties sont limitées, et du tout. Alors, ladite opération a lieu entre une partie d'une droite et cette droite. De plus, notons que l'opération de prolongement d'une droite finie est valable sur une droite qui n'est finie ni infinie[167].

De plus, comme prolongement opère sur la droite limitée, ses limites sont des points. On sait qu'une droite est postulée de tout point à tout point, d'où une droite limitée est posée entre l'un des limites de la droite et des points qui ne sont pas possédés par cette droite. Puis, parmi ces droites, il existe une telle droite qui a la relation « de manière égale » avec la première droite. En d'autres termes, il existe un point tel que la droite, qui est posée entre lui et l'un des limites de la droite limité, est placée sur la même droite que la droite limité. Toutefois, notons que dans cette condition, la Dem2, sera dépendant à la Dem1, car la Dem2 sera postulée à partir de la Dem1. Si une droite quelconque n'est pas posée entre deux points, un tel prolongement ne peut pas être réalisé.

D'autre part, la Dem2 est dépendant de la Dem1, non seulement à cause de ladite situation, mais aussi à cause d'impossibilité du prolongement d'une droite limitée (ou une ligne limitée quelconque) si une droite n'est pas déjà là. En d'autres termes, on ne peut pas prolonger une droite limitée si une droite n'existe déjà, car autrement lorsqu'on prolonge la droite, une droite ou un segment d'une droite commence à exister. A cet égard, une telle opération est seulement possible après la postulation de la Dem1. Par suite, on peut dire que la ligne droite devrait être illimitée, car autrement on est confronté au problème mentionné. Dans ce contexte, on peut aussi avancer que la ligne droite illimitée est une condition nécessaire de l'opération du prolongement, ainsi que segment. Enfin, notons que cette opération peut être indéfiniment réalisée, car il existe des points bien que la droite limitée ne les possède pas, la droite sur laquelle elle est posée, les possède.

Il faut, de plus, ajouter que l'opération de prolongement n'est pas définite dans les *Eléments*. Toutefois, à partir de son usage dans le texte, cette opération est très importante pour le système[168]. De plus, Euclide l'emploi à partir de la démonstration de la PropI-5. Comme toutes les démonstrations de la livre I

---

[167] En effet, nous pensons que cette droite, sur laquelle ladite opération est valable, est infinie (ou illimitée), car autrement Euclide la poserait comme « finie ».

[168] Il existe plus de 100 occurrences de ce terme dans 13 livres. Il est parfois construit par la préposition « προσ » qui signifie « à » en grec ancien.

s'enchaine, cette démonstration devient un élément important pour le système. A cet égard, on examinera cet usage du terme pour la compréhension de l'opération de prolongement.

Dans la démonstration, il prolonge premièrement la droite AC par la droite CE. Puis, il prit au hasard un point G sur CE et il retranche de la droite AE, la droite AG en tant que plus petite qu'AE ; à savoir en tant qu'une partie de AE. En cela, AG est une partie d'AE. Et puis, il mentionne AC comme la partie d'AG où AC est une partie d'AE. D'où, AC, CG, GE sont des parties d'AE. CG et CE sont dans la relation « de manière égale » en étant des parties de CE. Et puis ils sont dans la relation « de manière égale » avec AC en étant des parties d'AE. Par suite, AC et CE ont la relation « de manière égale » entre elles. Donc, AC est prolongé par CE à AE[169]. Dans ces conditions, on peut dire qu'Euclide emploi cette opération pour de déterminer une droite qui possède la ligne droite limitée qui sera prolongée.

[169] Vitrac, **ibid.** p. 204-205.

6. CONCLUSION

On a commencé à notre recherche en énonçant l'importance des *Eléments* pour l'histoire de la science et de la philosophie. Le texte avait été une source d'inspiration pour des siècles, ainsi qu'il est pour nous aujourd'hui. Malgré du fait qu'il n'est pas autant apprécié qu'il a été plusieurs siècles avant de notre temps, il porte encore sa nécessité pour la science, non moins que la philosophie. Ladite importance nous conduit à réaliser une telle recherche.

Dans cette recherche, on a, en premier lieu, traité l'œuvre d'Aristote les *Seconds analytiques* afin de déterminer la méthode employée dans les *Eléments*. Dans ce cadre, on a examiné la définition et les conditions de la science selon les *Seconds analytiques*. On a vu que la science est la connaissance nécessaire et vraie des choses, et démonstration qui est un genre du syllogisme nous la fournit. La démonstration est une suite des énonces où les propositions sont liées par la nécessité, et la conclusion est de même nécessaire. Puis, la science est l'enchainement des démonstrations.

Ensuite, comme tout enseignement vient des connaissances préexistantes, la démonstration qui nous donne la cause d'une connaissance scientifique, vient des connaissances préexistantes appelées les principes de la démonstration. Les principes sont les propositions qui systématisent la connaissance scientifique, car toutes les démonstrations aboutissent aux conclusions à partir d'eux. Ils sont la cause de la nécessité et vérité de la démonstration en étant à la fois nécessaire et vrais. De plus ils sont les propositions qui sont, premières, immédiates et indémontrables.

Par ailleurs, comme la conclusion de la démonstration est nécessaire, elle doit partir des principes nécessaires. A cet égard, les principes sont les attributs universels, car l'universel connote pour un attribut le fait d'appartenir à tout son sujet par soi. Il est nécessairement vrai pour son sujet.

En outre, les principes de la démonstration ne sont pas les sujets à démonstration, car ils sont indémontrables par le moyen de la démonstration. Comme la démonstration est le moyen de posséder des causes des choses causées, et comme les principes sont les choses qui ne sont pas causées, le domaine de la démonstration se diffère celle de la science qui étude les fondements des principes. D'où la démonstration des principes est impossible.

Enfin, on a trois classes des principes : les axiomes en tant que propositions qui sont nécessairement par soi, les postulats (ou les demandes) en tant que propositions qui ne sont pas nécessairement par soi, malgré du fait qu'ils sont posés et utilisé sans démonstration, et les définitions en tant que propositions qui expriment les essences des choses. Les axiomes sont les propositions dont la possession est essentielle pour tous ceux qui veulent avoir n'importe quelle connaissance scientifique. Les postulats et les définitions dépendent du genre de la science étant étudiée.

Finalement, il est évident qu'Euclide suive le chemin établit par Aristote. Lorsqu'on traite les *Eléments*, on aperçoit que les démonstrations aboutissent aux conclusions en partant des trois classes de propositions données au début du premier livre. Euclide emploie les inférences des trois classes des propositions dans toutes les démonstrations, cependant, il ne les démontra pas, il les donne seulement comme les Définitions, les Demandes, Les Notions Communes. Les Définitions donnent les nommes et les propriétés propres des éléments. Les Demandes donnent les règles pour des déterminations des éléments. Les Notions Communes donnent les propositions concernant la totalité du livre où la géométrie plane et la théorie des nombres qui ont les domaines différentes (dans une manière) sont examinées.

Dans ce contexte, il faut constater que non seulement l'usage de ces trois classes des propositions s'ajuste avec l'usage exposé dans les *Seconds analytiques*, mais encore les propositions qu'ils contiennent sont construites de même manière que celles de posées par Aristote. Il est nécessaire de mentionner que le titre d'Axiomes se transforme à ceuli de Notions Communes où il existe les propositions données par Aristote comme exemples d'Axiomes.

En outre, Aristote indique que les scientifiques ne postulent pas parfois certains axiomes s'ils sont évidents. Dans les *Eléments*, la loi de non-contradiction et la loi de tiers exclue de la logique sont employées sans démonstration, pourtant ils ne sont pas données sous le titre de Notions Communes ni ceux des deux autres classes. En ce sens, il existe une similarité de plus entre la méthode des *Eléments* et celle des *Secondes analytiques*.

Au surcroit, les propositions sont démontrées dans le texte d'Euclide, ou bien par les implications des trois classes des propositions, ou bien par la réduction à l'absurde. Dans ce sens, on peut dire que les conclusions des démonstrations sont nécessaires, car dans le premier cas la conclusion nécessairement suit les implications des propositions systématisant, et dans le deuxième cas la démonstration est conclue à partir de la loi de non-contradiction, par suite sa conclusion est nécessaire. Les démonstrations possèdent, donc, un caractère nécessaire, néanmoins au sujet de la nécessité des principes, ils ne sont pas démontrés dans les *Eléments*.

Dans l'examen des Notions Communes on a montré qu'ils doivent être contenus dans le texte original à partir du fait que l'absence de cette section cause des problèmes non seulement pour les démonstrations mais aussi pour la compréhension de deux autres classes des propositions systématisant.

Ensuite, on a discuté les connotations des Notions Communes. Ils sont les propositions qui posent les relations et les opérations primitives du domaine qu'Euclide s'occupe. Dans ce cadre on a analysé les relations connotées par les propositions : l'égalité, la substitution, l'inégalité. On a montré que la relation d'égalité possède les propriétés de la relation d'équivalence. Cette relation possède la réflexivité, la symétrie et la transitivité.

Par la suite de la relation d'égalité, on a traité l'opération d'ajouter ; à savoir l'addition, et l'opération de retrancher ; à savoir, la soustraction. Ils sont les opérations valables pour le domaine de la Géométrie et l'Arithmétique. En plus, on a supposé que l'addition signifie le fait de penser les choses séparés en tant que leur ensemble. Puis, on a assumé que l'addition et la soustraction sont les opérations inverses et que la soustraction est le fait de penser les choses qui sont ajoutées, en tant que séparé. Dans ce cadre on a trois hypothèses supplémentaires.

La première occurrence du « tout » se trouve par l'addition. On obtient le tout en ajoutant des choses appartenant au même genre. Puisque le tout ne contient que les éléments appartenant au son genre, l'addition est valable pour les éléments du même genre, ainsi que la soustraction ; car elle opère sur le résultat de l'addition.

Il est nécessaire d'éviter de supposer l'addition et la soustraction par leurs connotations arithmétiques ; car ils sont valables sur un domaine plus étendu. En ce sens, notre dénomination faut être considérée avec cette réserve.

Enfin, l'ingénuité des certains Notions Communes est démontrée, en partant du fait qu'on peut les déduire de la NC2 et la NC3. Ils sont les contraposées de ceux deux. Puisque les principes de la démonstration doivent être indémontrables, en étant démontrable la NC4, la NC5, et la NC6 ne peuvent pas être inclues sous le Notions Communes.

Après avoir exposé la NC2 et la NC3, on a traité la NC7, qui est généralement lié à la superposition par les commentateurs, à cause d'usage d'un terme (ἐφαρμόζω) dans les démonstrations, qui se trouve en proposition.

D'abord, « s'ajuster » connote « être appliqué à » en usage passive, et « s'adapter exactement » en usage active. Puisqu'il est utilisé en usage active, il signifie la coïncidence des choses qui sont égales. En effet, le terme est directement employé par Euclide dans une manière rappelant la superposition ; à savoir, le déplacement des objets géométriques l'un sur l'autre. C'est pour cela, cette notion commune est considérée comme un axiome de géométrie.

Ensuite, certains commentateurs réclament, en référant à cet usage, qu'elle est interpolée, ou qu'elle devrait être considérée en tant que Demande. Par exemple, Tannery revendique qu'elle est interpolée, et Heath asserte qu'elle est posée en tant qu'axiome de congruence ; c'est-à-dire l'axiome posé pour l'égalité des objets géométriques. Par contre, Proclus l'accepte comme original, car autrement, à partir de la PropI-4, un certain nombre des démonstrations l'employant seront invalides. Comme la PropI-4 possède une grande importance pour la totalité du texte, elle doit être contenue par lui.

Dans ce contexte, à partir des raisons données par Proclus, on est en accord avec l'idée qui suppose que la NC7 est contenue dans les *Eléments*. En revanche, on ne pense qu'elle est un axiome de congruence. Parce que si l'on prend cette notion commune en tant qu'axiome de congruence, les démonstrations où la substitution des égaux se trouve deviennent invalides. Parce qu'il n'y a aucune expression dans le texte qui permet la substitution des égaux. La substitution signifie la considération des éléments, ayant les mêmes propriétés, dans une manière interchangeable. D'où, on pense que la superposition des objets géométriques se trouve dans cette manière.

Il existe, les commentateurs, comme Tannery, qui distinguent la NC8 en tant qu'interpolation. A partir du fait que la première définition distingue les éléments primitifs sur le fait d'avoir partie, on pense que cette notion commune doit être contenue dans le texte original, car en l'absence d'elle, les problèmes se présentent à propos de la compréhension des définitions. C'est pourquoi elle devrait inclus parmi des Notions Communes.

Dans l'examen de l'inégalité posée par la N.C. 8, on a vu qu'elle signifie une relation entre « le tout » et « la partie ». On a essayé de construire la relation entre la partie et les ajoutées de l'addition. Comme les ajoutées du tout ne sont pas égaux au tout, car ils exigent une opération pour de devient le tout, le tout est plus grand que les ajoutées. D'où les ajoutées du tout signifie « la partie », et par suite, le résultat de l'addition des parties est le tout.

Ensuite, puisque le tout est le résultat de l'addition des parties, les parties sont le résultat de la soustraction. En cela, le tout est l'assemblage de ses parties. Son intégrité vient de cette coexistence, et cet intégrité distingue ses parties celles des autres touts. Par suite, le tout est la coexistence ou l'ensemble de ses parties. Il les tient ou les possède avec les autres parties.

Par la suite, on a démontré que les touts qui sont égaux peuvent être considérés comme interchangeables où la substitution des égales devient légitime. Puis, on a démontré que tous les éléments du domaine que les *Eléments* s'occupe sont égaux à soi-même.

Au demeurant, on a démontré les propriétés de l'inégalité : l'antisymétrie et la transitivité. Comme la relation est antisymétrique, on a une possibilité de décrire une relation de plus entre le tout et la partie. Puisque l'inégalité est valable pour les choses qui ne sont pas égales, et que la partie n'est pas plus grand que le tout, on a défini cette relation comme « être plus petit ». Par suite, il existe trois relations valables pour les choses de notre domaine : « l'égalité », « être plus grand » et « être plus petit ».

Dans l'examen des Définitions, on a commencé par la définition du point. Puisque le point est décrit comme l'élément sans-partie, la première différence des genres du domaine vient sur le fait d'avoir partie. Les uns qui ne possèdent pas de partie, appartiennent au genre sans-partie, et ils sont définis comme « point ».

Comme le point ne possède pas de partie, on ne peut pas l'envisager dans la relation de tout-partie. D'où le point ne peut pas être un élément de la relation d'égalité ni d'inégalité. De plus, il n'est valable pour l'opération d'addition ni de soustraction, car ils sont définis sur les parties. De plus, puisque le point est sans-partie, il est indivisible à ses parties.

Finalement, on a démontré que le tout ne possède que les parties appartenant à son genre ; car autrement il possèderait les parties qui détient les différences des autres genres, par suite le tout possèderait les différences qui sépare autres genres de son genre. En d'autres termes, il possèderait les différences qu'il ne possède pas, ce qui est absurde. D'où, on a démontré pour le tout, la nécessité d'avoir des parties appartenant son genre.

Au sujet de la discussion de la ligne, on a exposé qu'elle appartient, avec la surface au genre des éléments qui possèdent des parties. Cependant ils se diffèrent par rapport à ses extensions. La ligne est définie en tant que « longueur sans largeur » et la surface est définie en tant que « longueur et largeur ». Par suite, la différence entre le genre de la ligne et celle de la surface porte sur « largeur » qui est un terme d'extension. En suite comme la ligne et la surface possèdent des parties, elles sont les touts composés des éléments appartenant à leurs genres. Puisqu'elles sont touts, elles ne possèdent aucune partie en dehors d'elles-mêmes.

Ensuite, comme la ligne possède une partie, elle possède d'une autre partie de plus, car autrement la division de la partie et du tout serait inutile. Puisqu'elle possède deux parties, et ses parties ont des parties, et cette division se répète pour toutes les parties, la ligne possède un nombre indéfini des parties. Il en est ainsi pour la surface.

Par ailleurs, la limite de la ligne et les conditions d'être limité sont exposées dans notre recherche. La limite de la ligne est posée en tant que le point. Pour cela, si la ligne est limitée, ses limites sont des points. Toutefois, la condition d'être limité n'est pas définie dans le texte. C'est pourquoi, on a supposé que des parties d'un tout se limitent. Et comme la ligne possède des parties, ses parties se limitent, où les limites de ses parties sont des points. En outre, on a signalé l'analogie entre la DefI-3 et la DefI-6 où les limites de surface sont posées en tant que lignes. Dans ce cadre, notre supposition pour le fait d'être limité est valable pour la DefI-6. Comme la surface est un tout possédant des parties, ses parties se limitent. Par suite, les limites de ses parties sont des lignes.

Finalement, comme la ligne possède un nombre indéfini des parties, et comme les limites de ses parties sont des points, la ligne possède un nombre indéfini des points. En effet il en est ainsi pour la surface. La surface possède un nombre indéfini des lignes ainsi que des points, car les lignes qu'elle possède, possèdent un nombre indéfini des points.

En ce qui concerne la DefI-4 et la DefI-7 où la ligne droite et la surface plane sont définies, ils sont analogues comme les définitions de la limite. Pour cela, on a exposé la DefI-4 d'une façon qui est applicable à la DefI-7.

Tout d'abord, la DefI-4 pose la différence des espèces de la ligne comme « celle qui est placé de manière égale par rapport aux points sur elle ». La ligne droite est distinguée par « de manière égale » des autres espèces de la ligne. Ensuite, La définition est donnée à partir des relations qui se trouvent entre les primitifs ; à savoir, la ligne et le point. En exprimant « celle qui est placé de manière égale par rapport aux droites sur elle », la DefI-7 est posée de même manière. Elle indique une relation entre la droite et le point.

Dans les propositions il y a trois relations décrivant la droite : « sur » pour les points et la ligne, « par rapport à » pour la ligne et les points sur elle, et « de manière égale » pour les parties de la ligne.

Dans ce cadre, on a traité la signification de « sur ». On a supposé que « sur » signifie les éléments appartiennent au tout. Pour cela, les parties de la ligne et les points qui sont les limites de ses parties sont possédées par elle. Par suite, ils sont sur la ligne droite. En ce sens, les parties de la surface et les lignes qui sont les limites de ses parties sont possédés par la surface. Par suite ils sont sur la surface. De même, puisque les points sont possédés par les lignes qui sont sur la surface, les points sont aussi sur la surface.

Au demeurant, pour le cas de « par rapport à », on a supposé que le tout s'étend par rapport à ses parties. Comme les points sont les limites de parties de la ligne, et comme ils déterminent ces parties, alors, la ligne s'étend par rapport aux points sur elle. Il en est ainsi pour la surface qui s'étende par rapport aux lignes sur elle. Cependant il est obligatoire de noter que la surface plane est définit en partant des droites sur elle. Dans ce sens une condition de plus est posée pour la surface plane : elle doit possède des droites comme les limites de ses parties. En d'autres termes, si une surface est plane, alors ses parties peuvent être déterminées par les droites.

Au sujet de la relation « de manière égale », on a, en premier lieu, considéré l'interprétation de Heath. Nous avons vu qu'il mentionne un problème à propos de la construction de la définition en grec ancien pour laquelle il pose deux cas possibles : « par rapport aux points sur elle » est construit avec ou bien « de manière égale » ou bien « placé ». Dans ce cadre, on suppose qu'elle est construite avec « de manière égale » car « égale » est une relation entre les choses. Dans ce contexte, si « de manière égale » était construit avec « placé » il signifierait la façon de la réalisation du verbe; à savoir il fonctionnerait en tant qu'adverbe. Cependant, Euclide emploi « égale (ἴσος) » avec « ἐκ » qui évoque la raison d'une chose. Il n'utilise pas la forme adverbiale « d'égale » ; c'est-à-dire, « ἴσως ». D'où, on assume que « par rapport aux points sur elle » est construit avec « de manière égale ».

De plus, on a analysé la signification de « ἐξ ἴσου » en grec ancien. Afin d'examiner l'expression on a séparément analysé les mots « ἐκ » et « ἴσος ». On a exposé l'usage de « ἐκ » en grec ancien et on a montré que le mot est employé pour la signification d'une cause. C'est la cause qui détermine la relation des points (ou des parties limitées par ces points). De plus, on a signalé que le mot est employé d'une manière analogue chez Aristote. Par suite, lorsqu'on tient « ἐξ ἴσου » dans son ensemble, l'expression signifie « à cause », « en raison », « en conséquence » d'égale. En ce sens, « de manière égale » peut être tenir comme des conséquences des significations de l'égale.

En outre, la relation d'égale possède les propriétés suivantes : la réflexivité, la symétrie, la transitivité, et la coïncidence (ou s'ajuster). En ce sens, « de manière égale » devrait possèder ces propriétés. Et comme « de manière égale » est dit pour « des points sur une ligne » il les devrait lier à partir de ces propriétés.

Dans ce contexte, on peut avancer que cette relation ne concerne pas des points, car puisqu'ils ne sont pas de parties, la relation d'égalité n'est pas valable pour des points (ou bien on peut asserter que tous les points sont égaux). A cet égard, cette relation est postulée pour les parties de la ligne qui sont limitées par ces points.

Ensuite, comme « de manière égale » possède les propriétés de l'égalité il faut éclairer les implications de ces propriétés. Puisque « de manière égale » possède la coïncidence, les parties qui sont postulées « de manière égale » doivent être considérées interchangeables ; à savoir elles possèdent les mêmes propriétés. En cela, les parties d'une ligne droite (les segments) ou d'une surface plane étendent dans la même manière. Au sujet de la transitivité, si un segment quelconque étend dans la même manière avec un segment d'une droite, le segment (quelconque) étend dans la même manière avec les autres parties de cette ligne droite, par suite il appartient à cette ligne droite. Puisque on a conduit sa recherche sur la relation de tout-partie, il en est ainsi pour la surface plane et ses parties.

Quant aux Demandes, on a, d'abord, énoncé qu'ils sont les règles pour la détermination des éléments géométriques. La Dem1 postule la règle de la détermination de la ligne droite et ses segments, et La Dem2 postule celle du prolongement d'une droite déterminée.

Comme la droite est posée de chaque point à chaque point, si l'on les considère tous ensemble il ne connote pas un tout. L'addition n'est pas possible pour des points.

Autre, on a montré que les éléments constitutifs de l'espace le précédent. Comme la droite est posée de chaque point à chaque point, et comme la définition du point n'enveloppe que le fait de ne pas avoir des parties ; à savoir sa définition propre n'énonce rien sur le fait d'être limite de la ligne, le point n'est pas limite de la ligne par soi. En ce sens, le point est donné avant de la droite. Puis, la droite est postulée de chaque point à chaque point. Par suite, l'espace est construit à partir du point ; c'est-à-dire, l'espace est précédé par ses éléments constructifs.

De plus, la droite posée n'a pas de limite, car la définition de la ligne n'implique rien sur limitation de la ligne, elle la pose en tant que longueur sans largeur. De plus, Euclide ne pose pas la droite en tant que limitée comme il le fait dans la Dem2. Il postule le prolongement à partir de la droite limitée. C'est pourquoi, on insiste que la droite posée par cette demande soit illimité. Par suite, comme les éléments constructifs de l'espace sont illimités, l'espace qui est construit par ces éléments est illimité.

D'autre côté, comme deux points déterminent la droite, et comme des points sont des limites des segments d'une droite, on peut avancer que la droite illimitée est déterminée d'une manière connexe à sa partie. Dans ce cadre, Euclide pose la ligne droite illimitée et ses parties à la fois.

En outre, on peut déterminer une relation nommée « d'être entre », par cette demande. Comme deux points déterminent un segment de la droite, et comme des limites des parties de cette segment sont des points, des points qui sont des limites des parties de ce segment sont « entre » deux points qui limitent le segment. En cela, une règle de détermination pour la relation « entre » est probablement posée.

Par ailleurs, on peut dire que les points sont distingués par le segment qu'ils limitent. Le segment d'une droite sépare deux points quelconques. De plus il n'existe aucun segment qui n'est pas limité par des points. Par conséquent, tous les points sont limites des lignes droites. Puisqu'il n'existe aucun segment qui est limité par des points, il n'existe pas de relation immédiate entre des points. Par suite, il n'y a aucuns points adjacents.

En revanche, il est obligatoire de mentionner que la Dem1 ne nous donne l'opportunité de construire une surface plane ni la Dem2. En effet, on n'a aucune règle de la détermination ou la construction par les définitions de surface. On sait que les lignes sont les limites des parties de la surface et que la ligne droite détermine la surface plane. Pourtant, on ne peut pas construire une surface par ces définitions, si l'on ne suppose pas déjà une surface. D'où on peut dire que le système exige une Demande pour la détermination de la surface plane.

De surcroit, comme la droite, qui est une espèce régulière de la ligne, est postulée par la Demande, on peut constater que sous la supposition que toutes des droites sont menées de tout point à tout point, pour tous deux points il sera une ligne qui est placée de manière égale. Par suite, toutes les régions de l'espace seront régulières.

Enfin, il faut indiquer que la géométrie qui sera construit par cette Demande est directement liée à la signification de la ligne droite. Puis, comme la surface plane est déterminée par les droites sur elle, la connotation de la droite concerne directement celle de la surface plane. Si la ligne droite est tenue en tant que droites supposées appartenir à la géométrie euclidienne alors un type de géométrie serait créé. Et si l'on acceptait en tant que droite qui n'est pas « une droite de la géométrie euclidienne », quoi qu'elle satisfasse des conditions données par la DefI-4, alors un autre type de géométrie serait créé.

La deuxième Demande pose la règle de détermination de prolongement d'une droite limitée sur une droite. En effet, comme la droite est limitée par des points, on peut placer des droites de l'une de limites de cette droite à un autre point. Puis parmi ces droites il y a une telle droite qui a la relation « de manière égale » avec la droite posée. Cependant, en ce sens, la Dem2 dépend de la Dem1, car si la droite n'est pas dite de tout point à tout point, on ne peut pas prolonger la droite limitée.

Pour conclure, dans cette recherche on a traité les significations des trois classes des propositions qui systématisent les connaissances données dans les *Eléments*. Afin d'analyser les significations des propositions on a déplacé les Notions Communes au début de notre examen. Nous avons vu que les relations données par les propositions sous ce titre nous ont aidé à éclairer les Définitions et les Demandes. En premier lieu, ces relations sont utiles pour la définition du tout et de la partie qui sont employées pour la compréhension des Définitions. Dans ce cadre, on a vu qu'il est possible d'examiner les définitions en partant de tout-partie. De plus, on a utilisé les propriétés de la relation de l'égalité pour la DefI-4 et la DefI-7. Enfin, on a la possibilité de construire l'espace, en partant de nos conclusions tirées des Notions Communes et des Définitions.

En revanche, il est obligatoire de souligner qu'il existe les obscurités pour les définitions de la droite et de la surface plane, car la relation d'égalité qu'on l'a supposé entre ses parties devrait être déterminée en termes d'extension. Nous avons conduit notre recherche sur les inférences des Notions Communes. Cependant, on n'a pas employé les termes « longueur » et « largeur » qui sont postulés pour la ligne et la surface. D'où, on doit réexaminer nos inférences en termes d'extension. Dans ce contexte, il faut accepter cette thèse comme une recherche préliminaire pour la construction de l'espace.

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE, **Dernier Analytiques**, trad. par J Barthélemy Saint-Hilaire, Paris, Librairie Philosofique de Ladrange, 1842.

ARISTOTE, **Métaphysique,** trad. par Marie-Paule Duminil et Annick Jaulin, Paris, Flammarion, 2008.

ARISTOTE, **Seconds Analytiques**, trad. par Jules Tricot, Paris, J. VRIN, 2012.

ARISTOTLE, **Posterior Analytics**, trad. par E. S. Bouchier, Londres, Simpkin, Marshall, Hamilton, Kent & Co., 1901.

AUTOLYCOS, **De Sphaera quae movetur liber de ortibus et occasibus libri duo**, éd. Friedricus Hultsch, Leipzig, Tobner, 1885.

AUTOLYCOS, D. P., **La Sphère en Mouvement. Levers et Couchers Héliaques**, éd., trad. par Aujac G., avec la collaboration de Brunet J. P. et Nadal R., Paris, Les Belles Lettres1979.

AUTOLYCOS, **La Sphère, Instrument au Service de la Découverte du Monde**, trad. par Germaine Aujac, Caen, Paradigme, 1993.

EUCLIDE, **Euclidis Elementa Vol I**, trad. par J. L. Heiberg, Leipzig, B. G. Teubner, 1883.

EUCLIDE, **Euclidis Elementa Vol I**, trad. par J. L. Heiberg, Leipzig, B. G. Teubner, 1969.

EUCLIDE, **Euclidis Elementa Vol II**, trad. par J. L. Heiberg, Leipzig, B. G. Teubner, 1970.

EUCLIDE, **Euclidis Elementa Vol III**, trad. par J. L. Heiberg, Leipzig, B. G. Teubner, 1972.

EUCLIDE, **Euclidis Elementa Vol IV**, trad. par J. L. Heiberg, Leipzig, B. G. Teubner, 1973.

EUCLIDE, **Les éléments de géométrie d'Euclide**, trad. par F. Peyrard, Paris, F Louis, 1804.

EUCLIDE, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome I**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1814.

EUCLIDE, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome II**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1816.

EUCLIDE, **Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin, en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours Tome III**, trad. par François Peyrard, Paris, M. Patris, 1818.

HEATH, T. L., **The Thirteen Books of The Elements**, Cambridge, Presse Universitaire, 1968.

HILBERT, D., **Principes fondamentaux de la géométrie**, trad. par L. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1900.

HILBERT, D., **The Foundations of Geometry**, trad. par E. J. Townsend, Illinois, The Open Court Publishing Company, 1950.

MOGENET, J., Autolycos de Pitane, **Histoire du Texte, Suivi de l'Edition Critique**, Louvain, Bibliothèque de l'Université, 1950.

PROCLUS, **Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementoru Librum**, Leibzig, Teubner, 1873.

PROCLUS, **The Philosophical and Mathematical Commentaries of Proclus, on The First Book of Euclid's Elements. To which are added A History of the Restoration of Platonic Theology, By the Latter Platonists: And a Translation from the Greek of Proclus's Theological Elements. In Two Volumes Vol. 2**, trad. et éd. par T. Taylor, Londres, Publié pour l'auteur, 1792.

TANNERY, P., « Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide », **Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques** 2e série, Tome 8, No 1 (1884), p. 162-175.

VITRAC, B., **Euclide d'Alexandrie, Les Eléments, Volume I.**, Paris, Presses Universitaire de France, 1990.

VITRAC, B., **Euclide d'Alexandrie, Les Eléments, Volume II.**, Paris, Presses Universitaire de France, 1994.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Diyarbakır'da doğan Yusuf Turhallı ilk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamlamış, lise öğrenimini de Beşiktaş Atatürk Anadolu Lisesi'nde yapmıştır. Lisans eğitimini 2006 ve 2013 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde alan Turhallı, 2013'te Galatasaray Üniversitesi Felsefe Bölümü'ne kaydolmuştur. 2016 yılında aynı üniversitede Felsefe Yüksek Lisans eğitimine başlamış, 2019'da "Öklid'in Elemanları Kitap I'de İspatların Dizilişini Sistemleştiren Üç Önerme Sınıfı Vasıtasıyla Uzayın Kuruluşu İçin Ön Araştırma" teziyle bu bölümden mezun olmuştur.

TEZ ONAY SAYFASI

Üniversite	: T.C. GALATASARAY ÜNİVERSİTESİ
Enstitü	: SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
Hazırlayanın Adı Soyadı	: Yusuf TURHALLI
Tez Başlığı	: Öklid'in Elemanları Kitap I'de İspatların Dizilişini Sistemleştiren Üç Önerme Sınıfı Vasıtasıyla Uzayın Kuruluşu İçin Ön Araştırma.
Savunma Tarihi	: 13 / 09 / 2019
Danışmanı	: Dr. Öğretim Üyesi Tarık Necati ILGICIOĞLU

JÜRİ ÜYELERİ

Unvanı, Adı Soyadı	İmza
Doç. Dr. Aliye KOVANLIKAYA	Aliye
Dr. Öğr.Üyesi Hakan İŞSÖZEN	
Dr. Öğr.Üyesi Tarık Necati ILGICIOĞLU	

Enstitü Müdürü
Prof. Dr. M. Yaman ÖZTEK