

T.C. GALATASARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK ÖLÇÜTLÜ KARAR VERMEDE BULANIK ÖLÇÜM  
VE BULANIK ENTEGRAL UYGULAMALARI  
(APPLICATION DE LA MESURE FLOUE ET DE L'INTEGRAL FLOUE  
EN AIDE MULTICRITERE A LA DECISION)

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

End. Müh. Sevin SÖZER

112313

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 1 Haziran 2001

Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Haziran 2001

Tez Danışmanı

: Doç. Dr. E. Ertuğrul KARSAK

*E. Karay 02/07/01*

Diğer Jüri Üyeleri

: Doç. Dr. H. Ziya ULUKAN

*H. Ziya Ulukan 2/7/2001*

Yrd. Doç. Dr. Ruhi TUNCER

*R. Tuncer 29/6/2001*

HAZİRAN 2001

## Préface

Dans ce mémoire un aspect très important dans le domaine de l'aide multicritère à la décision est étudié: l'interaction entre les critères qui apparaît souvent dans la décision subjective de l'homme mais qui est généralement négligée. La moyenne pondérée qui est encore un outil d'agrégation fréquemment utilisée ne reflète pas le comportement de l'évaluation de l'homme à cause des hypothèses de l'additivité et de l'indépendance sous-jacentes.

La mesure floue et l'intégral floue avaient été proposées par Sugeno en 1974 afin d'exprimer les systèmes flous et de modéliser la procédure d'évaluation subjective de l'homme. Avec son modèle il essaie de simuler comment les individus intègrent les informations, les évaluent et décident sur leurs actions. Dans ce mémoire, après avoir présenté ce domaine innovant un exemple est donné pour l'identification d'une mesure floue 2-ordre avec un programme linéaire. En définitive, la généralisation est faite et sa fonction est montrée en la comparant avec une sélection parmi les autres méthodes d'aide multicritères à la décision.

Tout d'abord, je voudrais remercier à mon directeur de mémoire M. E. Ertuğrul KARSAK pour son aide précieuse, pour son soutien, pour la confiance qu'il m'a témoignée et aussi pour tous ses encouragements durant mon cursus universitaire. Il sera toujours mon exemple avec sa passion et pour ses qualités de chercheurs.

Je voudrais remercier aussi à M. Michel Grabisch qui m'a encouragé durant le mémoire et pour son aide sincère pendant la recherche des nouveaux articles.

Dernièrement, je voudrais remercier à tous ce qui étaient avec moi pendant mon mémoire. Mes chers amis pour m'avoir encouragé, les collègues à la Faculté d'Ingénierie et de Technologie pour leurs contributions, et spécialement ma famille à laquelle je dédie cette mémoire parce que sans leur encouragement ce mémoire n'aboutirait jamais.

1 Juin 2001

Sevin SÖZER

## Table des Matières

	Page
<b>Préface</b>	ii
<b>Table des Matières</b>	iii
<b>Liste des Figures</b>	v
<b>Liste des Tableaux</b>	vi
<b>Résumé</b>	vii
<b>Özet</b>	ix
<b>1. Introduction</b>	1
<b>2. La Mesure Floue et L'Intégral Floue</b>	7
<b>2.1. Introduction</b>	7
<b>2.2. Les fonctions d'ensemble</b>	8
<b>2.3. Les mesures</b>	9
<b>2.4. L'intégral</b>	12
<b>2.5. Les mesures floues et l'intégral de Choquet</b>	17
<b>2.6. Interaction entre les critères</b>	25
<b>2.7. Trois représentations d'une mesure floue</b>	29
<b>2.8. <math>k</math>-ordre additivités</b>	31
2.8.1. Les mesures $k$ -ordre additives	31
2.8.2. Le cas des mesures 2-additive	32
2.8.3. L'intégral de Choquet pour 2-additive mesures	34
<b>2.9. Veto et faveur en aide multicritères à la décision</b>	35
<b>2.10. Identification des mesures floues</b>	37
2.10.1. Identification à base des sémantiques	37
2.10.2. Identification à base de donnée apprise	39
2.10.3. Identification à base de satisfaction des contraintes	41
2.10.4. Le cas de la $\lambda$ -mesure	46

<b>3. Une Sélection d'Autres Méthodes Multicritères</b>	47
<b>3.1. TOPSIS</b>	47
3.1.1. Solutions idéale et anti-idéale	48
3.1.2. TOPSIS	49
<b>3.2. ELECTRE</b>	51
3.2.1. Approche de rangement et les méthodes d'ELECTRE	51
3.2.2. ELECTRE III	55
<b>4. Application dans l'Aide Multicritères à la Décision</b>	60
<b>4.1. Détermination des coefficients pour un problème de sélections des étudiants</b>	60
<b>4.2. Corrélacion entre les ordres de rangements des méthodes de l'aide multicritère à la décision</b>	66
4.2.1. Les résultats obtenus par les trois méthodes d'aide multicritères à la décision	66
4.2.2. Le calcul des coefficients de corrélacions de rangement de Spearman	70
<b>5. Conclusion</b>	73
<b>Bibliographie</b>	76
<b>Biographie</b>	81

## Liste des Figures

	<b>Page</b>
Figure 2.1. Familles des mesures de probabilités, mesures et mesures signées sur $X$	10
Figure 2.2. Le graphe de $f$	13
Figure 2.3. L'intégral de $f$	13
Figure 2.4. L'intégral de $f$	16
Figure 2.5. L'intégral de $f$	16
Figure 2.6. Les familles des fonctions d'ensemble sur un ensemble fini $X$	17
Figure 2.7. L'intégral de Choquet de $f$	20
Figure 2.8. Différents cas d'interaction	26
Figure 3.1. Les distances euclidiennes à la solution idéale et anti-idéale dans un espace de 2-dimensions	49
Figure 3.2. Le modèle des préférences de décideur	53
Figure 3.3. Comparaison des actions dans ELECTRE III	58

## Liste des Tableaux

	<b>Page</b>
Tableau 1.1. Les données pour la sélection de la voiture	2
Tableau 2.1. Les valeurs de $\beta_k^l$	30
Tableau 4.1. Les scores des candidats	61
Tableau 4.2. Les poids $m(i) = \mu(i)$ et les valeurs de Shapley	65
Tableau 4.3. Les indices d'interactions	65
Tableau 4.4. Les poids de la mesure floue obtenue	65
Tableau 4.5. Les évaluations globales $C_\mu$	65
Tableau 4.6. Les scores des étudiants	66
Tableau 4.7. La solution idéale et anti-idéale	67
Tableau 4.8. Les seuils de préférence et d'indépendance	68
Tableau 4.9. Le résultat obtenu par les trois méthodes d'aide multicritères à la décision	69
Tableau 4.10. Les ordres par rapport à trois méthodes	71
Tableau 4.11. Les coefficients de corrélation de Spearman	72

## Résumé

La mesure et l'intégrale par rapport à la mesure sont des concepts très importants dans les mathématiques. Ils ont beaucoup d'application en ingénierie, et leur caractéristique principale est l'additivité. Cette caractéristique est très effective et convenante mais souvent trop inflexible ou trop rigide. Afin de résoudre ce problème de rigidité, la mesure floue a été proposée par Sugeno en 1974 étant son étude de thèse doctorale. C'est une extension de la mesure de façon à remplacer la propriété d'additivité par une condition moins rigide, la monotonie. Les mesures floues et l'intégral floue avaient été présentées afin d'exprimer les systèmes flous et puis avaient été proposées pour modéliser la procédure d'évaluation subjective de l'homme. Avec son modèle Sugeno essaie de simuler comment les individus intègrent les informations, les évaluent et décident sur leurs actions.

Malgré les études profondes sur la théorie de la mesure floue, les applications de la mesure floue manquent surtout en aide multicritère à la décision (MCDM, Multiple Criteria Decision Making). Cette brèche est causée par la difficulté de l'utilisation pratique et de compréhension des mesures monotones comparées aux mesures additives. Avec les mesures floues, il est possible de modéliser deux sortes de choses, la première c'est l'incertitude sur l'ensemble  $\Omega$  des états du monde, et la deuxième c'est l'importance d'une coalition pour un  $A \subset \Omega$ . Ici,  $\mu(A)$  représente l'importance de la coalition  $A$  pour le problème de décision considéré.

Un concept introduit par Grabisch, les mesures floues  $k$ -ordre additives, permet de donner une solution intermédiaire pour les mesures floues qui peut varier entre les mesures additives et les mesures floues générales. En fait, composé par la définition de représentation de Shapley et d'interaction, les mesures floues sont devenues plus compréhensibles et applicables.

Dans cette thèse, on va introduire les mesures floues dans le concept de MCDM. Les définitions et le sens des concepts sont donnés profondément en chapitre 2. Puis l'interaction des critères et les trois représentations des mesures floues sont présentées. Après avoir défini la  $k$ -ordre additivité les effets de veto et faveur sont donnés. Les différentes approches possibles pour l'identification des mesures floues sont présentées en 2.10.

En chapitre 3, afin de faire comparer différentes approches, une sélection d'autres méthodes d'aide multicritères à la décision sont affichées. La première méthode est TOPSIS qui est une méthode basée sur le concept de distance entre les alternatives et les solutions idéale et anti-idéale. La deuxième méthode est ELECTRE III qui est basé sur le concept de préférence partiel et qui est une approche relationnelle.

Une application dans l'aide multicritères à la décision de la mesure floues est introduite en chapitre 4. Dans la première partie les coefficients de la mesure floues sont déterminés avec une approche proposée par Marichal et Roubens pour un problème de sélection des étudiants. Dans la deuxième partie l'utilité de ces coefficients est vérifiée en les traitant avec un échantillon d'étudiants de vingt personnes. Cet échantillon est rangé par les trois méthodes et ces rangements sont comparés par le coefficient de corrélation de Spearman.

Les mesures floues sont des outils de MCDM qui ne sont pas encore appliqués d'une façon efficace et effective. Même si, les études dans les aspects théoriques sont assez profondes, les applications dans des différents domaines doivent être étudiées et développées. L'exemple qu'on a étudié dans cette étude a montré applicabilité dans les problèmes fréquents.

## Özet

Çok Ölçütlü Karar Verme XX. yüzyılın ikinci yarısında önemli gelişmeler gösterdi. Özellikle 1972 yılındaki, aynı zamanda bu konuya ismini de veren, Uluslararası Çok Ölçütlü Karar Verme (Multiple Criteria Decision Making, MCDM) Konferansı'ndan sonra hızlı ve önemli gelişmeler gösterdi. Örneğin çok ölçütlü fayda teorisi (Multi Attribute Utility Theory, MAUT), çok amaçlı programlama (Multi-Objective Programming) ya da bulanık küme teorisi çok ölçütlü karar vermenin klasikleri arasına girdi. Çok ölçütlü karar verme problemleri için bir çok yöntem önerildi, bir çok alternatif çözüm sunuldu. Örneğin Roy'nın önerdiği ELECTRE yöntemleri, ikili alternatiflerin karşılaştırılması ve tercih sıralaması temeline dayanırken, MAUT alternatiflerin ölçütler üzerindeki değerlerinin faydaları esasına dayanır. Bütün bu yöntemlerde ortak nokta, belli bir noktada biriktirilen faydaların tümlenmesidir. ELECTRE yöntemlerinde alternatiflerin tercih dereceleri tümlenirken, MAUT'da fayda değerleri tümlenmektedir.

Geliştirilen bu yöntemlerde üzerinde durulan yenilik genelde seçim sürecinin modellenmesi olmuş, tümleme süreci ihmal edilmiştir. Günümüzde en çok kullanılan tümleme aracı, "ağırlıklı ortalama", insan değerlendirme yapısını iyi yansıtamayan bir yapıdadır. Gerçekte insan bulanık olayları değerlendirme durumundadır ve karar verirken, hem kullandığı yapıda ölçümler toplamsal olmamakta hem de çoğu zaman nesnelere ölçütler bağımsız olmamaktadır. Her durumda ağırlıklı ortalama gibi doğrusal bir yöntem, toplamsallık ve bağımsızlık varsayımlarına dayandığı için uygulanamaz.

Bulanık ölçümler ve bulanık entegral 1974 yılında Sugeno tarafından bulanık sistemleri ve sübjektif insan değerlendirme yapısını modellemek amacıyla önerildi. Sunduğu modelde, insanın bilgileri nasıl bütünlediğini, onları nasıl değerlendirdiğini ve hareketlerinde nasıl karar verdiğini taklit etmeye çalışmıştır. Bulanık ölçümler

teorisinde, klasik ölçümlerdeki toplamsallık yerine sadece monotonluk önerilmiş ve böylece daha genel bir yapı elde edilmiştir.

Bulanık ölçümler teorisi üzerine yapılan çalışmalar ilk günden beri hızla devam etmesine rağmen uygulama konusunda çalışmalar yetersiz kalmıştır. Bunun sebebi monoton ölçümlerin kullanılması ve anlaşılmasının olasılık gibi toplamsal ölçümlerle karşılaştırıldığında kolay olmamasıdır. Uygulama açısından bakıldığında,  $\mu$  ile gösterdiğimiz bulanık ölçümler yani monoton küme fonksiyonları, iki farklı problemi modellemek için kullanılabilir:

- ☞ Olasılıkta sıkça yapıldığı gibi,  $\Omega$  olay uzayındaki belirsizlik: Özellikle, bir  $A \subset \Omega$  altkümesi için,  $\mu(A)$  inanç derecesini modeller. Bulanık ölçümlerin özel durumları olan olabilirlik ölçümleri (possibility measure), inanma fonksiyonları (belief functions) bu bağlamda uygulanmışlardır.
- ☞ Bir koalisyonun önemi:  $X$ , elemanları bir işbirliği oyununun oyuncularını ya da bir çok ölçütlü karar verme probleminin ölçütleri olan bir küme olsun. Bu durumda  $\mu(A)$  her  $A \subset \Omega$  için  $A$  koalisyonunun bu karar verme problemi için önemini gösterir. Elemanlar arasındaki etkileşimleri esnek bir biçimde gösterebilmek için bulanık ölçümleri genel yapısıyla kullanmak ve olabilirlik ölçümlerinde ya da inanç fonksiyonlarında olduğu gibi kısıtlama yapmamak gerekir.

Eğer bulanık ölçümleri en genel yapısıyla kullanırsak bu ikinci yaklaşım çok ölçütlü karar verme problemlerinde daha uygulanabilir bir yaklaşım olmaktadır. Bu nedenle çalışmada bu durum üzerinde durulmuştur.

Bulanık ölçümler koalisyonların önemini modellemek için esnek yapılar olsa da uygulamada ele alınmaları kolay olmamaktadır. Bunun başlıca iki sebebini şöyle açıklayabiliriz: Öncelikle, bir bulanık ölçümün tanımlanabilmesi için kümenin altküme sayısı kadar katsayı tanımlamamız gerekir. Örneğin, bir çok ölçütlü karar

verme probleminde  $X$  ölçütler kümesinde  $n$  eleman olsun. Bir bulanık ölçüm tanımlayabilmek için monotonluk kısıtlarını sağlayan  $2^n$  pozitif gerçel katsayı tanımlanmalıdır. Dolayısıyla uygulayıcı, ya sadece  $n$  katsayı gerektiren bir toplamsal ölçümden yararlanıp zayıf bir modelleme aracı kullanmakta ya da bulanık ölçümlerin zenginliğini ve zorluklarını dikkate alıp bu sefer de bulanık ölçümü en genel anlamıyla ele almak için yeterli araçlara sahip olmamaktadır.

İkinci olarak,  $\mu(A)$  değerinin anlamını tanımlamakta güçlük çekilebilmektedir. Yani küçük  $n$  değerleri için bile tüm  $A \subset X$  için bir değer atamak külfetli olmaktadır. Bir çok uygulama probleminde uzmanlar bir ya da iki elemanlı kümelerin önemi için tahminde bulunabilirler ancak ikiden fazla eleman sayısı için durum zorluklar getirmektedir. Karşı durumda ise bir bulanık ölçüm verildiğinde karar verme tutumları açısından tam olarak anlamını söylemek imkansız gibidir. Bir tek  $i$  elemanın değeri küçük olduğu halde bir çok  $A \subset X$  için  $\mu(A \cup \{i\})$  değerleri yüksek olabilir. Bu durum  $i$  elemanın çok önemli olduğunu gösterir. Tersisi durum için de örnek çoğaltılabilir.

Bulanık ölçüm teorisi matematiksel açıdan derinliğine incelenmiştir. Ancak, belirsiz ortamda karar vermede uygulanması ihmal edilmiştir. Bulanık ölçüm teorisinde Choquet entegralinin bir tümlenme aracı olarak benimsenmesinden sonra uygulamalar hızlanmıştır. Grabisch tarafından Choquet entegralinin yeni bir biçimde ifade edilmesini sağlayan etkileşim gösteriminin tanımlanmasıyla entegralin mekanizmasının anlaşılması kolaylaşmıştır. Sonuç olarak 1997'de Grabisch tarafından önerilen  $k$ -derece toplamsal bulanık ölçümler, toplamsal ölçümlerle genel bulanık ölçümler arasında bir ara çözüm almayı sağlamıştır. Böylece Shapley ve etkileşim gösterimlerinin de kullanılmasıyla bulanık ölçüm daha anlaşılır ve uygulanabilir hale gelmiştir.

Bu tez çalışmasında, çok ölçütlü karar vermede ölçütler arasındaki etkileşimlerin bulanık ölçümler ve Choquet entegrali ile modellenmesi üzerinde durulmuştur. İlk olarak ölçüm ve entegral konularının tanımları verilerek bulanık ölçüm ve bulanık entegral konuları tanıtılmış, tanımları verilmiştir. Burada basit örneklerle konu

açıklanmaya çalışılmış daha sonra diğer tanımlara geçilmiştir. Bulanık entegrallerin Möbius, Shapley ve etkileşim gösterimleri tanıtılmış ve özellikleri verilmiştir.  $k$ -derece toplamsal bulanık ölçümlerin tanımlanmasından sonra ise bulanık ölçümlerin belirlenmesinde kullanılan farklı yaklaşımlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, bulanık ölçümlerle yapılan modelleri karşılaştırabilmek için iki yaygın kullanım gören çok ölçütlü karar verme aracı tanıtılmıştır. Bunlardan birincisi TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), alternatiflerin ideal ve karşıt-ideal çözümlere olan uzaklıklarını temel alan bir yaklaşımdır. En iyi alternatifin ideale en yakın ama karşıt-ideale en uzak olması gerekir. İkinci yöntem, ELECTRE III, ise ilişkiyel bir yaklaşımdır ve alternatiflerin birbirlerine göre kısmi tercih edilmeleri esasına dayanan bir yöntemdir.

Dördüncü bölümde ise bir yüksek lisans programı için öğrenci seçimi problemi irdelenmiştir. İlk aşamada bölüm 2.10'da tanıtılan, Marichal ve Roubens tarafından önerilen bir yöntemle, bir 2-toplamsal bulanık ölçüm belirlenmeye çalışılmıştır. Burada kullanılan ölçütler şunlardır:

- ☞ TOEFL (Test of English as a Foreign Language) derecesi. Bilgisayar bazlı test sonuçları göz önüne alınmıştır ve puanlar 300 üzerindedir.
- ☞ GRE (Graduate Record Exam) derecesi. Sayısal bölüm puanı 800, analitik bölüm puanı 800 üzerinden değerlendirilmektedir. Bu iki sonucun toplamı ölçüt olarak alınmıştır.
- ☞ Öğrencinin lisans mezuniyet not ortalaması. Lisans mezuniyet notu 4,00 üzerinden verilmiştir.
- ☞ Kompozisyon notları. Bir konsey tarafından öğrencinin yazdığı kompozisyonlar 5 üzerinden değerlendirilmiştir.

Bulanık ölçümün katsayılarını belirlemek amacıyla karar vericiden alınan aşağıdaki bilgiler doğrultusunda kısıtlar belirlenebilir:

- ☞  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  alternatifler kümesi,
- ☞  $N = \{TOEFL, GRE, Ortalama, Kompozisyon\}$  ölçütler kümesi,

- ☞ Tablo 1 de verilen  $x_i^a$  bireysel notlar tablosu,
- ☞  $A$  üzerinde verilen alternatiflerin bir kısmi sıralaması  $\succ_A$ ,
- ☞  $N$  üzerinde verilen ölçütlerin bir kısmi sıralaması  $\succ_N$ ,
- ☞ Ölçüt çiftleri arasında verilen bir kısmi sıralama  $\succ_A$  (etkileşim endisleri sıralaması),
- ☞ Bazı ölçüt çiftleri arasındaki etkileşimlerin işaretleri  $m(ij): > 0, < 0, = 0$ .

Toplanan tüm bu veriler, bir eşitlik ve eşitsizlikler sistemi şeklinde bilinmeyen  $\mu$  katsayıları cinsinden yorumlanarak Marichal ve Roubens tarafından önerilen aşağıdaki gibi bir matematiksel programda kullanılmıştır.

$$\max z = \varepsilon$$

kısıtlar

$$\varepsilon \geq 0 \quad (\text{pozitif yapay değişken})$$

$$\left. \begin{array}{l} C_\mu(a) - C_\mu(b) \geq \delta + \varepsilon, \quad a \succ_A b \\ -\delta \leq C_\mu(a) - C_\mu(b) \leq \delta, \quad a \approx_A b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \delta \text{ eşiği ile } A \text{ üzerinde kısmi} \\ \text{sıralama} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(i) - \mu(j) \geq \varepsilon, \quad i \succ_N j \\ \mu(i) = \mu(j), \quad i \approx_N j \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ölçütlerin önemlerinin} \\ \text{sıralanması} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{ij} - I_{kl} \geq \varepsilon, \quad ij \succ_P kl \\ I_{ij} = I_{kl}, \quad ij \approx_P kl \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ölçüt çiftlerinin sıralanması} \\ \text{(etkileşimler)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{ij} \geq \varepsilon, \quad I_{ij} > 0 \\ I_{ij} = 0 \quad \text{aksi halde} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Bazı etkileşimlerin} \\ \text{işaretleri} \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n I_i = 1 \quad (\text{değerler üzerindeki sınır şartı})$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A \subset B \subset X \quad (\text{monotonluk şartları})$$

Burada küme parantezleri gösterimi basitleştirmek amacıyla ihmal edilmiştir. Örneğin,  $\mu(\{i\}), S \cup \{i\}$  yerine  $\mu(i), S \cup i$  yazılmış ya da  $\{i, j\}, \{i, j, k\}$  yerine  $ij, ijk$  yazılması tercih edilmiştir.

Tüm bu kısıtlar, 2-toplamsal bulanık ölçümler için aşağıdaki eşitlikler göz önüne alınarak, Möbius transformasyonu  $m$  cinsinden ifade edilebilir.

$$C_{\mu}(a) = \sum_{i=1}^n m(i)x_i^a + \sum_{\{ij\} \subset X} m(ij)[x_i^a \wedge x_j^a]$$

$$I_i = \Phi_i = m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N-i} m(ij)$$

$$I_{ij} = m(ij)$$

$$\mu(i) = m(i)$$

Tablo 1. Adayların puanları

	$\leq 300$	$\leq 1600$	$\leq 4,00$	1-5
	1. TOEFL	2. GRE	3. Ortalama	4. Kompozisyon
<b>Aday 1</b>	250	1300	3,20	4
<b>Aday 2</b>	227	1300	3,50	3
<b>Aday 3</b>	240	1400	3,30	3
<b>Aday 4</b>	240	1500	3,50	4
<b>Aday 5</b>	243	1450	3,30	4
<b>Aday 6</b>	230	1300	3,20	3

Karar vericiden alınan bilgiler doğrultusunda adaylar için bir tercih sırası oluşturulmuş ve en büyük değerle göre normalize edilen puanlar hesaplamalarda kullanılmıştır. Karar verici adaylar arasında yaptığı tercih sırasının yanında ölçütler ve ölçüt çiftlerinin önemleri ile ilgili ek kısıtlar getirmemiştir. Tüm bu veriler ışığında oluşturulan doğrusal program aşağıdaki verilmiştir.

$$\max z = \varepsilon$$

kısıtlar

$$\varepsilon \geq 0$$

$$\begin{aligned} -0,01m(1) + 0,03m(2) + 0,06m(3) - 0,01m(12) + 0,02m(13) \\ - 0,01m(14) + 0,06m(23) + 0,03m(24) + 0,06m(34) \geq \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0,03m(1) + 0,1m(2) + 0,03m(3) - 0,1m(12) + 0,03m(13) \\ - 0,03m(14) + 0,08m(23) + 0,1m(24) + 0,03m(34) \geq \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,04m(1) - 0,07m(2) - 0,03m(3) + 0,25m(4) - 0,07m(12) - 0,03m(13) \\ + 0,25m(14) - 0,07m(23) + 0,12m(24) + 0,16m(34) \geq \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

$$0,05m(1) + 0,07m(2) - 0,06m(3) + 0,07m(12) + 0,03m(13) + 0,07m(23) \geq \delta + \varepsilon$$

$$-0,01m(1) + 0,09m(3) - 0,01m(13) \geq \delta + \varepsilon$$

$$m(1) + m(2) + m(3) + m(4) + m(12) + m(13) + m(14) + m(23) + m(24) + m(34) = 1$$

$$m(i) \geq 0, \quad i \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$m(i) + m(ij) \geq 0, \quad i, j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$m(i) + m(ij) + m(ik) \geq 0, \quad i, j, k \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) \geq 0, \quad i, j, k, l \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

Bu doğrusal program Excel SOLVER yazılımı kullanılarak çözülmüştür. Burada  $\delta = 0,025$  değeri kullanılarak en uygun sonuçlar belirlenmiştir. Tablo 2 tek elemanlı alt kümelerin, yani ölçütlerin, ölçümlerini ve Shapley değerlerini, yani önem derecelerini göstermektedir.

Tablo 2.  $m(i) = \mu(i)$  ağırlıkları ve Shapley değerleri

	1. TOEFL	2. GRE	3. Ortalama	4. Kompozisyon
$m(i) = \mu(i)$	0,3205	0,5692	0,3205	0,2582
$I(i)$	0,1603	0,4440	0,2154	0,1804

Etkileşim endisleri yani ölçüt ikililerinin ağırlıkları ise Tablo 3’de gösterilmiştir.

Tablo 3. Etkileşim endisleri

$I(ij) = m(ij)$	2. GRE	3. GPA	4. Kompozisyon
1. TOEFL	0	-0,3205	0
2. GRE		0,0077	-0,2582
3. Ortalama			0,1026

Elde edilen bu sonuçları kullanırken ihtiyatlı davranmak gerekir. Çünkü elde ettiğimiz aslında sadece öngördüğümüz kısıtlarla tutarlı olan bir çözümdür. Yani sadece bu çözüm ile genel sonuçlar çıkarmak doğru olmayabilir. Üstelik önerilen bu program çoklu çözümlere yatkın bir yapıdadır. Dolayısıyla modelin parametrelerini belirlerken dikkatli davranmalı ve aranan bulanık ölçümü en iyi yansıtan çözüm seçilmeye çalışılmalıdır.

İkinci aşamada ise elde edilen bu katsayıların faydası 20 kişilik yeni bir örneklem kullanılarak test edilmiş ve yaygın kullanım gören çok ölçütlü karar verme araçlarıyla elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Kullanılan 20 öğrencilik örneklem Tablo 4’de gösterilmiştir.

Tablo 4. Öğrencilerin puanları

No	TOEFL	GRE	Ort	Komp	No	TOEFL	GRE	Ort	Komp
1	240	1300	3,93	4	11	247	1550	3,86	5
2	247	1190	3,29	3	12	253	1270	3,07	3
3	237	1270	3,31	4	13	247	1210	3,80	3
4	217	1380	3,07	4	14	243	1400	3,18	5
5	257	1190	3,84	4	15	237	1260	3,44	4
6	240	1510	3,30	4	16	260	1450	3,07	3
7	253	1130	3,38	4	17	237	1130	3,75	4
8	247	1510	3,02	4	18	223	1100	3,62	4
9	240	1220	3,68	5	19	253	1320	3,15	3
10	233	1470	3,73	3	20	247	1410	3,71	4

Adayların puanları yine en büyük değer kullanılarak normalize edilmiş ve doğrusal programla bulduğumuz Möbius transformasyonu kullanılarak Choquet entegralleri hesaplanmıştır. TOPSIS yöntemi ile adaylar arasında bir sıralama elde edilirken ölçütlerin ağırlıklandırılmasında Shapley değerleri kullanılmıştır. Böylece ideal ve karşıt-ideal sonuçlara olan uzaklıkları ile hesaplanan puanlara göre adaylar sıralanmıştır. ELECTRE III yönteminde ise ilgili bilgisayar programı kullanılmış, adaylar ve performansları girildikten sonra ölçütlerin tercih ( $p_i$ ) ve farksızlık ( $q_i$ ) eşikleri belirlenmiştir. Burada kullanılan eşiklerin sabit olması tercih edilmiştir. Bu değerler Tablo 5’de üç yöntemden elde edilen sonuçlar ise Tablo 6’da gösterilmiştir.

Tablo 5. Tercih ve farksızlık eşikleri

	TOEFL	GRE	Ortalama	Kompozisyon
$q_i$	3	10	0,02	0
$p_i$	10	30	0,05	0

Tablo 6. Kullanılan üç çok ölçütlü karar verme yöntemi ile elde edilen sonuçlar

Sıra	TOPSIS		Choquet		ELECTRE III
	Aday	C	Aday	$C_u$	Aday
1	11	0,9461	11	0,9923	11
2	6	0,7028	8	0,9438	1
3	8	0,6631	6	0,9389	20
4	14	0,6531	14	0,9279	5
5	20	0,6521	16	0,9206	16
6	10	0,5914	10	0,9129	6
7	16	0,5332	20	0,9114	14
8	4	0,5200	9	0,9052	9
9	1	0,5125	1	0,8864	8
10	9	0,4799	19	0,8644	19
11	3	0,4011	4	0,8604	10
12	15	0,4009	5	0,8501	13
13	19	0,3863	3	0,8469	15
14	5	0,3826	12	0,8458	7
15	13	0,3161	15	0,8432	17
16	12	0,3126	7	0,8329	4
17	17	0,3061	17	0,8268	3
18	7	0,2688	13	0,8218	12
19	18	0,2635	18	0,8100	18
20	2	0,2110	2	0,8090	2

Farklı çok ölçütlü karar verme yöntemlerinden elde edilen sıralamaların değerlendirilmesi için Spearman sıra korelasyonu katsayısı hesaplanmıştır. Adayların Choquet entegralinin uygulaması sonucu elde edilen sıralamaları ile TOPSIS ve ELECTRE III sıralamaları arasında korelasyon katsayıları ayrı ayrı hesaplanmış ve bir hipotez testi ile aralarında pozitif bir korelasyon olduğu hipotezi doğrulanmıştır. TOPSIS ve Choquet sıralamaları arasındaki korelasyon katsayısı 0,95; ELECTRE III ve Choquet entegrali sıralamaları arasında ise 0,75'dir. %1'lik anlamlık derecesi için eşik değeri ise 0,534'dir.

Bulanık ölçüm çok ölçütlü karar vermede henüz etkin bir biçimde uygulanamamış bir araçtır. Teorik alanda çalışmalar derin olarak yapılmış olsa da farklı alanlardaki uygulamaları incelenmeli ve geliştirilmelidir. Burada incelediğimiz örnek bulanık ölçümlerin günlük hayatımızda karşılaştığımız problemlerde etkin olarak uygulanabileceğini göstermiştir.

## 1. Introduction

L'aide multicritère à la décision (Multiple Criteria Decision Making, MCDM) avait fait une bonne attaque pendant la deuxième partie du XX<sup>ème</sup> siècle. Depuis la première conférence internationale « Multiple Criteria Decision Making » en 1972 qui l'a nommé, ce domaine a grandi d'une façon accélérée. Par exemple, la théorie d'utilité multiple attributs (Multi Attribute Utility Theory, MAUT), la programmation multiple objectives, la théorie floue sont devenus des concepts classiques de MCDM. Plusieurs alternatives de solutions, plusieurs méthodes sont proposées pour les problèmes de MCDM par les chercheurs comme les méthodes ELECTRE de Roy qui utilisent la procédure de rangement différenciel de MAUT. Le point commun de toutes ces méthodes est que, à un moment on doit agréger les utilités qu'on a collectionnées. Dans la MAUT on agrège les nombres qui représentent une évaluation absolue d'une alternative par rapport à un critère, tant que dans ELECTRE on agrège les relations de préférences des alternatives comparées deux à deux par rapport à un critère.

Dans toutes ces méthodes l'innovation était surtout sur faire le modèle de la procédure de choix au lieu de l'étape d'agrégation [1]. Le plus commun d'outil d'agrégation actuel est encore la somme pondérée, qui ne reflète pas bien l'évaluation de l'homme. En fait, quand on veut simuler l'homme, les données sont en général floues et il y a des problèmes de structure. Premièrement, l'homme n'évalue pas les objets flous avec une mesure additive comme la probabilité et secondement, les attributs d'un objet ne sont pas tout le temps indépendants de l'un l'autre [2]. En tous cas un modèle linéaire comme la somme pondérée, ne peut pas être applicable car elle est basée sur les suppositions de l'additivité et l'indépendance.

Afin de montrer le cas de la dépendance des critères en MCDM considérons un exemple de sélection d'une voiture. On va évaluer les quatre voitures sur trois critères : le prix, la consommation, et le confort. Soit les données du Tableau 1.1.

Tableau 1.1. Les données pour la sélection de la voiture [3]

	<b>Prix</b>	<b>Consommation</b>	<b>Confort</b>
Voiture 1	10 000 Euro	10 l/100 km	Très bien
Voiture 2	10 000 Euro	9 l/100 km	Bien
Voiture 3	30 000 Euro	10 l/100 km	Très bien
Voiture 4	30 000 Euro	9 l/100 km	Bien

Si le décideur a les préférences suivantes

Voiture 2  $\succ$  Voiture 1

Voiture 3  $\succ$  Voiture 4

on peut dire qu'au fur à mesure que le prix augmente, l'importance du confort augmente. C'est-à-dire en décidant les critères ne réagissent pas indépendamment.

Les mesures floues et l'intégral floue avaient été présentées par Sugeno en 1974 étant sa thèse de doctorat afin d'exprimer les systèmes flous et puis avaient été proposées pour modéliser la procédure d'évaluation subjective de l'homme. Avec son modèle il essaie de simuler comment les individus intègrent les informations, comment les évaluent et comment décident sur leurs actions. Dans la théorie de la mesure floue seulement la monotonie est supposée au lieu d'additivité des mesures conventionnelles et donc la mesure floue est bien un cas plus général.

La théorie de la mesure floue a été étudiée bien profondément de point de vue mathématique de telle sorte que les définitions sont généralisées, leurs propriétés sont étudiées d'un niveau abstrait mais le côté d'application dans la théorie de décision en milieu incertain ou en multicritères est négligé. Au début les études avaient été accroît sur  $\lambda$ -mesure qui est un cas spécial de la mesure floue et qui montre le degré d'additivité de la mesure [4, 5]. Après l'introduction de l'intégral de Choquet dans la théorie de la mesure floue par Murofushi et Sugeno [6] les aspects théoriques et les applications sont accélérées avec les études des chercheurs comme Murofushi, Sugeno, et Grabisch [7, 8, 9, 10]. Avec l'introduction d'une nouvelle façon de représenter l'intégral de Choquet, la représentation d'interaction, par Grabisch, le mécanisme de

l'intégral est devenu plus évident [11,12]. Enfin, les recherches théoriques ont continué avec les livres de Wang et Klir [13], et Grabisch, Nguyen et Walker [14] et un livres des articles des auteurs bien connu avec ses recherches est publié par les éditeurs Grabisch, Murofushi et Sugeno [15]. En plus de tous ces aspects mathématiques de la mesure floue, il y a encore des études très récentes de Jang et Kwon [16], Wang *et al.* [17], Narukawa, Murofushi, et Sugeno [18], Marichal [19], Grabisch [20], et aussi de Grabisch et Labreuche [21]. Malgré toutes ces études sur la théorie, on constate que dans le côté d'application on rencontre très peu d'enthousiasme, car l'utilisation pratique et compréhension des mesures monotones n'est pas quelque chose évident comparée aux mesures additives comme les mesures de probabilités. De point de vu d'application, les mesures floues, noté par  $\mu$ , i.e. les fonctions d'ensemble monotones, peuvent être utilisé pour modeler deux choses différents [11]:

- ☞ L'incertitude sur l'ensemble  $\Omega$  des états du monde, comme le fait la probabilité souvent. Spécialement, pour un sous-ensemble  $A \subset \Omega$ ,  $\mu(A)$  modèle le degré de croyance. Les cas particuliers de la mesure floue comme les mesures de possibilité, et les fonctions de croyance sont déjà appliquées dans ce contexte. C'est typiquement ce qu'on fait en décision en cas d'incertitude, e.g., le modèle d'utilité espéré non-additive.
- ☞ L'importance d'une coalition. Soit  $X$  un ensemble d'éléments qui peuvent être les joueurs d'un jeu coopératif, les critères d'un problème de multicritères, les attributs, les experts d'un problème de piscine d'idée, etc. Alors, pour un  $A \subset \Omega$ ,  $\mu(A)$  représente l'importance de la coalition  $A$  pour le problème de décision considéré. Afin d'avoir une représentation flexible de l'interaction complexe entre les éléments, il est nécessaire de considérer la mesure floue en sa généralité complète et ne pas faire des restrictions, e.g. les mesures possibilités, les fonctions de croyance, ou bien aux mesures décomposable plus générales.

Si on considère les mesures floues avec leurs généralités complètes le deuxième point de vue semble être plus ouvert aux applications sur les problèmes d'aide à la décision multicritères et reconnaissance de formes multi-attributs. On a donc concentré sur ce deuxième aspect des mesures floues dans cette étude. Un résumé des applications faites est donné par Grabisch [1], et Grabisch, Nguyen, et Walker [14].

Même si les mesures floues sont des outils flexibles pour modeler l'importance des coalitions, elles ne sont pas faciles à manipuler dans un problème pratique. Il y a deux raisons importantes de cette situation.

La première raison c'est la complexité exponentielle impliquée par la manipulation d'une fonction d'ensemble. Soit un problème d'aide multicritère à la décision qui a un ensemble de critère  $X$  de  $n$  éléments. Donc afin définir une mesure floue sur  $X$ , il est nécessaire de définir  $2^n$  coefficients positifs réels qui satisfont quelques contraintes de monotonie. Cela devient très difficile à manipuler quand  $n$  est large, disons 8. En conséquence, les praticiens doivent décider entre utiliser simplement une mesure additive qui nécessite seulement  $n$  coefficient mais qui est un outil de modélisation pauvre, ou bien utiliser la richesse et la complexité de la mesure floue mais dans ce cas ne pas avoir les outils nécessaires pour la manipuler complètement. C'est la raison pour laquelle les chercheurs ont utilisé les  $\lambda$ -mesures comme dans [22].

Le deuxième fait c'est qu'il semble difficile de comprendre le sens de  $\mu(A)$ . C'est-à-dire même pour les petites valeurs de  $n$ , il est difficile d'assigner une valeur numérique pour tout  $A \subset X$ . Dans plusieurs problèmes pratiques, un expert peut deviner les valeurs des coefficients pour les ensembles d'un élément et de deux éléments mais pas pour les ensembles de plus d'éléments. Réciproquement, si une mesure floue est donnée, il est même impossible de dire exactement son sens en terme de comportement en décision. La mesure d'un seul élément  $i$  peut être basse même si pour plusieurs  $A \subset X$ ,  $\mu(A \cup \{i\})$  sont hautes qui implique une grande importance de  $i$  dans la décision. Bien sur il est possible de produire l'exemple contraire.

Les applications des mesures floues sont donc restées peu et on a cherché des méthodes plus efficaces afin d'atteindre la richesse de la mesure floue tout en étant identifiable. Détermination de la mesure floue par une méthode d'identification récursive est donnée par Ishii et Sugeno [23] et cette méthode est appliquée afin d'analyser l'attitude de la publique pour l'utilisation de l'énergie nucléaire par Onisawa *et al.* [2]. Bien sur, ces méthodes demandent beaucoup d'information, et on a introduit d'autres méthodes comme proposé par Yoneda, Fukami et Grabisch [24]. Il y a aussi des approches de réseau neural comme proposé par Wang et Wang [25].

Enfin un autre concept introduit par Grabisch [11], les mesures floues  $k$ -ordre additives, permet de donner une solution intermédiaire pour les mesures floues qui peuvent varier entre les mesures additives et les mesures floues générales. En fait, composé par la définition de représentation de Shapley et d'interaction, les mesures floues sont devenues plus compréhensible et applicable. En reconnaissance de formes les applications augmentent au fur et à mesure [26, 27, 28]. En MCDM aussi les études sont accélérés par les études de Grabisch, Roubens, Marichal [1, 3, 29].

Dans cette thèse, on va introduire les mesures floues dans le concept de MCDM. Les définitions et le sens des concepts sont donnés profondément en chapitre 2. Puis l'interaction des critères et les trois représentations des mesures floues sont présentés. Après avoir défini la  $k$ -ordre additivité, les effets de veto et faveur sont donnés. Les différentes approches possibles pour l'identification des mesures floues sont présentées en section 2.10.

En chapitre 3. afin de faire comparer différentes approches, une sélection d'autres méthodes d'aide multicritères à la décision sont affichées. La première méthode c'est TOPSIS qui est une méthode basée sur le concept de distance entre les alternatives et les solution idéale et anti-idéale. La deuxième méthode c'est ELECTRE III qui est basé sur le concept de préférence partiel et qui est une approche relationnelle.

Une application dans l'aide multicritères à la décision de la mesure floues est introduite en chapitre 4. Dans la première partie les coefficients de la mesure floues sont déterminés avec une approche proposée par Marichal et Roubens [3] pour un problème de sélection des étudiants. Dans la deuxième partie l'utilité de ces coefficients est vérifiée en les traitant avec un échantillon d'étudiants de vingt personnes. Cet échantillon est ranger par les trois méthodes et les relations entre ces rangements sont évaluées par le coefficient de corrélation de Spearman.



## 2. La Mesure Floue et L'Intégral Floue

### 2.1. Introduction

La mesure et l'intégrale par rapport à la mesure sont des concepts très importants dans les mathématiques. Ils ont beaucoup d'application en ingénierie, et leur caractéristique principale, c'est l'additivité. Cette caractéristique est très effective et convenant mais souvent trop inflexible ou trop rigide. Afin de résoudre ce problème de rigidité, la mesure floue a été proposée par Sugeno en 1974 étant son étude de thèse doctorale. C'est une extension de la mesure de façon à remplacer la propriété d'additivité par une condition moins rigide, la monotonie. Comme la non-additivité est la caractéristique principale de la mesure floue, on l'appelle aussi la mesure non-additive. 'L'intégrale floue' est un terme général utilisé pour les intégrales par rapport à la mesure floue. Il y a plusieurs types d'intégrale floue: L'intégrale de Choquet, l'intégrale de Sugeno, l'intégrale de Sipos, l'intégrale de t-conorme, etc. On va discuter surtout l'intégrale de Choquet [30].

Dans cette étude on va s'occuper seulement des mesures floues avec des valeurs finies sur des ensembles finis. La première raison c'est que jusqu'à présent presque toutes les applications ont utilisé les mesures floues avec des valeurs finies sur des ensembles finis. Une autre raison c'est que la théorie de ces intégrales est plus facile que le cas général. Denneberg a présenté en détail la mesure floue et l'intégrale floue sur des ensembles infinis dans [31].

On note par  $\mathfrak{R}$  l'ensemble des nombres réels et par  $\mathfrak{R}_+$  l'ensemble des nombres réels non-négatifs. Tous les ensembles ont des valeurs réelles et  $X$  est supposé un ensemble fini. L'ensemble des sous-ensembles de  $X$  est présenté par  $P(X)$ . On utilise le terme 'famille' pour un ensemble d'ensemble.

## 2.2. Les fonctions d'ensemble

**Définition 2.1.** Une fonction  $\xi$  définie sur une famille de l'ensemble est nommée une fonction d'ensemble. Soit  $\xi$  une fonction d'ensemble définie sur  $P(X)$ .

- i. La fonction d'ensemble  $\xi$  est dite *additive* si pour toute paire de sous-ensemble disjoint  $A$  et  $B$  de  $X$

$$\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B).$$

- ii. La fonction d'ensemble  $\xi$  est dite *monotone* si pour toute paire de sous-ensemble  $A$  et  $B$  de  $X$  tel que  $A \subset B$

$$\xi(A) \leq \xi(B).$$

- iii. La fonction d'ensemble  $\xi$  est dite *normalisé* si

$$\min\{\xi(A) \mid A \subset X\} = 0 \quad \text{et} \quad \max\{\xi(A) \mid A \subset X\} = 1.$$

Si  $\xi$  est additive, alors  $\xi(\emptyset) = 0$  parce que  $\xi(\emptyset) = \xi(\emptyset) + \xi(\emptyset)$ . Une fonction d'ensemble non-négative additive est monotone si  $\xi$  est non-négative, et si  $A \subset B \subset X$ , alors  $\xi(B) = \xi(A \cup (B/A)) = \xi(A) + \xi(B/A) \geq \xi(A)$  où  $B/A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$ , car  $\xi(B/A) \geq 0$ . Comme  $X$  est une ensemble finie, une fonction d'ensemble additive  $\xi$  définie sur  $P(X)$  peut être représenté par:

$$\xi(A) = \sum_{x \in A} \xi(\{x\}) \quad \text{pour } A \subset X$$

**Définition 2.2:** Soient  $\xi$  définie sur  $P(X)$  et un sous-ensemble  $A$ . La restriction  $\xi_A$  de  $\xi$  est définie comme:

$$\xi_A(B) = \xi(A \cap B) \quad \text{pour tout } B \subset X$$

Une restriction  $\xi_A$  a les même propriétés que  $\xi$ ; Si  $\xi$  est additive (ou monotone ou non-négative) alors  $\xi_A$  est aussi.

**Définition 2.3:** Pour une fonction d'ensemble  $\xi$  défini sur  $P(X)$  tel que  $\xi(\emptyset) = 0$ , sa fonction d'ensemble conjugué est définie comme:

$$\bar{\xi}(A) = \xi(X) - \xi(A^c) \quad \text{pour tout } B \subset X$$

où  $A^c$  est le complément de  $A$ .

Par définition,  $\bar{\xi}(\emptyset) = 0$ . Si  $\xi(\emptyset) = 0$ , alors on a  $\bar{\xi}(X) = \xi(X)$  et alors  $\bar{\bar{\xi}} = \xi$ . Si  $\xi$  est additive alors elle est soi-conjugué, i.e.,  $\bar{\bar{\xi}} = \xi$ . Si  $\xi$  est monotone, alors  $\bar{\xi}$  aussi. Quand  $\xi$  est normalisé et monotone, son conjugué  $\bar{\xi}$  est appelé aussi le dual de  $\xi$ .

### 2.3. Les mesures

**Définition 2.4.** Une mesure sur  $X$  est une fonction d'ensemble non-négative additive définie sur  $P(X)$ . Une mesure normalisée est nommée une mesure de probabilité. Une mesure signée sur  $X$  est une fonction additive d'ensemble définie sur  $P(X)$ .

Une mesure de probabilité est une mesure et une mesure est une mesure signée comme illustrée sur la Figure 2.1. Une fonction d'ensemble  $\wp$  est une mesure de probabilité si et seulement si c'est une mesure tel que  $\wp(X) = 1$ .

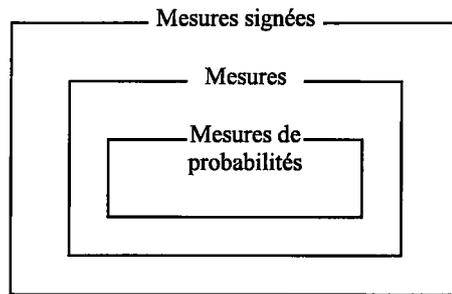


Figure 2.1. Familles des mesures de probabilités, mesures et mesures signées sur  $X$

Une mesure évalue la dimension des ensembles. Le nombre des éléments dans un ensemble est une sorte de mesure de sa dimension.

*Exemple 2.1:* Soit  $X$  un ensemble fini. La fonction d'ensemble  $m_c$  est défini par:

$$m_c(A) = |A|,$$

où  $|A|$  est le nombre d'éléments de  $A$ , est une mesure sur  $X$ , qui est nommé la mesure de comptage.

Le volume et la masse peuvent aussi être vus comme des dimensions d'ensemble. Bien que la dimension soit souvent non-négative, on peut imaginer une dimension qui prend des valeurs négatives. La quantité d'électricité peut être vue comme une telle dimension.

*Exemple 2.2:* Soit  $X$  un ensemble fini des objets solides.

- i.* Soit  $v_x \text{ cm}^3$  le volume de chaque objet  $x$ . Alors la fonction d'ensemble  $V : P(X) \rightarrow \mathfrak{R}_+$  qui mesure le volume de chaque sous-ensemble  $A$  de  $X$ ,

$$V(A) = \sum_{x \in A} v_x$$

est une mesure sur  $X$ .

- ii. Soit  $m_x$  g la masse de chaque objet  $x$ . Alors la fonction d'ensemble  $M : P(X) \rightarrow \mathfrak{R}_+$  qui mesure la masse de chaque sous-ensemble  $A$  de  $X$ ,

$$M(A) = \sum_{x \in A} m_x$$

est une mesure sur  $X$ .

- iii. Soit chaque objet  $x$  électriqué de  $q_x$  coulomb. Alors la fonction d'ensemble  $Q : P(X) \rightarrow \mathfrak{R}$  qui mesure la quantité d'électricité de chaque sous-ensemble  $A$  de  $X$ ,

$$Q(A) = \sum_{x \in A} q_x$$

est une mesure signée sur  $X$ .

La probabilité peut être vue comme une dimension.

*Exemple 2.3.* Considérer la situation d'un jeu de dé. Soit  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  les résultats possibles. Alors la fonction d'ensemble  $\wp : P(X) \rightarrow \mathfrak{R}_+$  qui mesure la probabilité de chaque sous-ensemble est une mesure de probabilité. Si le dé est juste alors  $\wp(\{x\}) = 1/6$  pour chaque  $x \in X$ .

La suivante est une mesure spéciale.

*Exemple 2.4.* Soit  $x_0$  un élément de  $X$ . La fonction d'ensemble  $\delta_{x_0}$  définie comme

$$\delta_{x_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in A, \\ 0 & \text{si } x_0 \notin A \end{cases}$$

est une mesure sur  $X$ , qui est nommée la mesure de Dirac.

**Définition 2.5.** Soit  $m$  une mesure signée sur  $X$ . Un sous-ensemble  $N$  de  $X$  est nommé un ensemble  $m$ -nul (ou tout simplement nul) si  $m(M) = 0$ ,  $\forall M \subset N$ .

*Exemple 2.5.* (Suite de *Exemple 2.2. iii.*) Un sous-ensemble  $A$  de  $X$  est un ensemble  $Q$ -nul si et seulement si tous les éléments de  $A$  ne sont pas électrifés.

## 2.4. L'intégral

**Définition 2.7.** Soit  $m$  une mesure signée sur  $X$  et  $f$  une fonction sur  $X$ . L'intégral  $\int f(x) dm(x)$  ou simplement  $\int f dm$  de  $f$  par rapport à  $m$  est définie comme

$$\int f dm = \sum_{x \in X} f(x) \cdot m(\{x\}) \quad (2.1)$$

Figures 2.2 et 2.3 montrent le graphe de  $f$  et l'intégral de  $f$ , respectivement.

Soit  $A \subset X$ . L'intégral  $\int_A f dm$  sur  $A$  est définie comme

$$\int_A f dm = \int f 1_A dm$$

où  $1_A$  est l'indicateur (ou la fonction caractéristique) de  $A$  ;

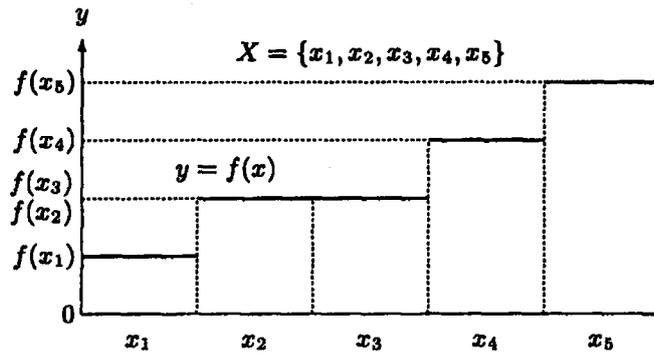
$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Evidemment

$$\int_X f dm = \int f dm$$

et

$$\int_X f dm = \sum_{x \in A} f(x) \cdot m(\{x\}) = \int f dm_A$$

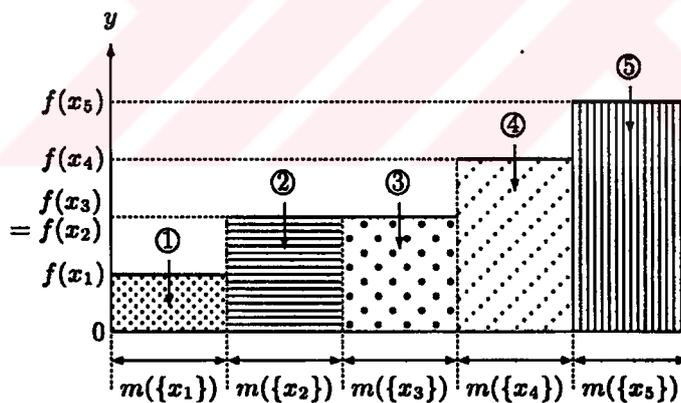
Figure 2.2. Le graphe de  $f$  [30]

$$\int f dm = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} = f(x_1) \cdot m(\{x_1\}) \quad \textcircled{4} = f(x_4) \cdot m(\{x_4\})$$

$$\textcircled{2} = f(x_2) \cdot m(\{x_2\}) \quad \textcircled{5} = f(x_5) \cdot m(\{x_5\})$$

$$\textcircled{3} = f(x_3) \cdot m(\{x_3\})$$

Figure 2.3. L'intégral de  $f$  [30]

*Exemple 2.8.* (Suite de l'Exemple 2.1) Soit  $m_c$  la mesure comptage sur  $X$ . Alors  $\forall A \subset X, \forall f$  sur  $X$ ,

$$\int_A f dm_c = \sum_{x \in A} f(x).$$

*Exemple 2.9.* (Suite de l'Exemple 2.2 i., ii.) Soit la densité de chaque  $x \in X$   $f(x) g / \text{cm}^3$ . L'intégral de  $f$  par rapport à  $V$  est égal à la masse totale de  $X$ . De plus  $A \subset X$

$$M(A) = \int_A f dV.$$

L'intégral de  $f$  par rapport à la mesure de probabilité  $\rho$  est nommée l'espérance de  $f$  et notée  $E(f)$ .

*Exemple 2.10.* (Suite de l'Exemple 2.3) Soit  $x_0 \in X$  et  $\delta_{x_0}$  la mesure de Dirac sur  $X$ ,

$$\int f d\delta_{x_0} = f(x_0)$$

L'intégral a les propriétés suivantes:

**Proposition 2.1.** Soit  $m$  une mesure signée sur  $X$ . Soit  $a, b, a_1, \dots, a_n$  des nombres réels,  $f$  et  $g$  des fonctions sur  $X$ , et  $A, A_1, A_2, \dots, A_n$  des sous-ensembles de  $X$ .

i.  $\int (af + bg) dm = a \int f dm + b \int g dm.$

ii.  $\int \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} dm = \sum_{i=1}^n a_i \cdot m(A_i);$

spécialement

$$\int 1_A dm = m(A).$$

iii. Si  $m$  est une mesure et  $f \leq g$ , alors

$$\int f dm \leq \int g dm$$

iv. Si  $N$  est un ensemble nul, et si  $f(x) = g(x)$  pour tout  $x \notin N$ , alors

$$\int f \, dm = \int g \, dm.$$

En considérant *ii.* de la proposition ci-dessus, noter que toute fonction  $f$  sur  $X$  peut être représenté comme

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$$

Par exemple,

$$f = \sum_{x \in X} f(x) 1_{\{x\}} \quad (2.2)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i 1_{\{x | f(x) = a_i\}} \quad (2.3)$$

$$= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) 1_{\{x | f(x) \geq a_i\}} \quad (2.4)$$

où  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  est la gamme  $\{f(x) | x \in X\}$  de  $f$ ,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  et  $a_0 = 0$ .

Pour une fonction  $f$  représenté comme en (2.2), on peut représenter son intégral donné par (2.1) d'après la proposition 2.2 *ii* comme indiqué sur la Figure 2.3.

Pour (2.3) l'intégral est donnée par

$$\int f \, dm = \sum_{i=1}^n a_i \cdot m(\{x | f(x) = a_i\}) \quad (2.5)$$

indiqué sur la Figure 2.4.

Pour (2.4), l'intégral est donnée par

$$\int f \, dm = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) \cdot m(\{x | f(x) \geq a_i\}) \quad (2.6)$$

indiqué sur la Figure 2.5. Les côtés droit de (2.1), (2.5), et (2.6) ont les même valeurs car la mesure (signée) est *additive*.

$$\int f dm = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= a_1 \cdot m(\{x|f(x) = a_1\}) & \textcircled{3} &= a_3 \cdot m(\{x|f(x) = a_3\}) \\ \textcircled{2} &= a_2 \cdot m(\{x|f(x) = a_2\}) & \textcircled{4} &= a_4 \cdot m(\{x|f(x) = a_4\}) \end{aligned}$$

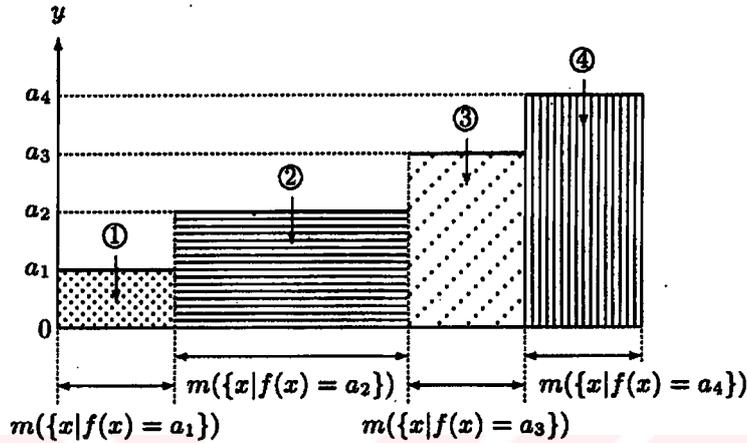


Figure 2.4. L'intégral de  $f$  [30]

$$\int f d\mu = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= (a_1 - a_0) \cdot \mu(\{x|f(x) \geq a_1\}) \\ \textcircled{2} &= (a_2 - a_1) \cdot \mu(\{x|f(x) \geq a_2\}) \\ \textcircled{3} &= (a_3 - a_2) \cdot \mu(\{x|f(x) \geq a_3\}) \\ \textcircled{4} &= (a_4 - a_3) \cdot \mu(\{x|f(x) \geq a_4\}) \end{aligned}$$

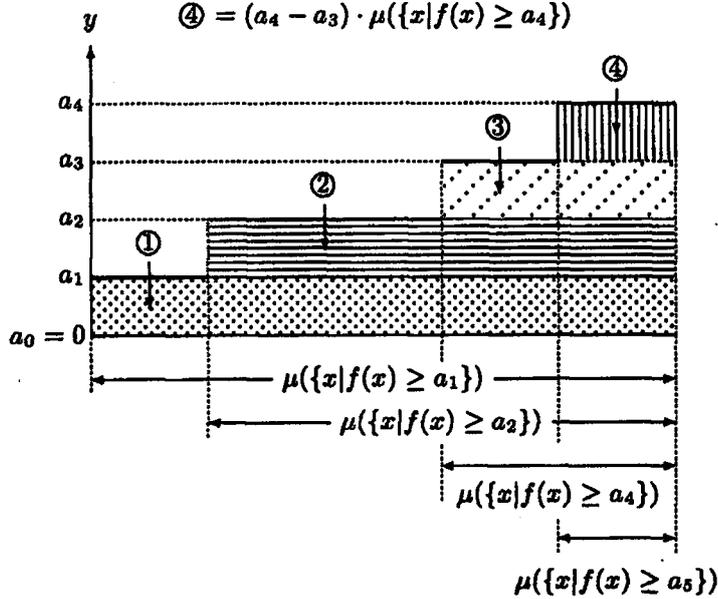


Figure 2.5. L'intégral de  $f$  [30]

## 2.5. Les mesures floues et l'intégral de Choquet

**Définition 2.8.** Une mesure floue sur  $X$  est une application  $\mu : P(X) \mapsto [0,1]$ , satisfaisant les axiomes suivants:

- (i).  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii).  $A \subset B \subset X$  implique  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

On prend  $\mu(X) = 1$  par convention, en général  $\mu(X)$  peut être n'importe quelle quantité positive finie ou infinie.

Evidemment une mesure floue est un cas spécial de la mesure floue non-monotone. Une mesure floue est non-négative car  $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0$  pour tout  $A \subset X$ . Une mesure floue non-monotone additive, est une mesure signée, et une mesure floue additive est une mesure car elle est non-négative. Ces relations sont illustrées sur la Figure 2.6.

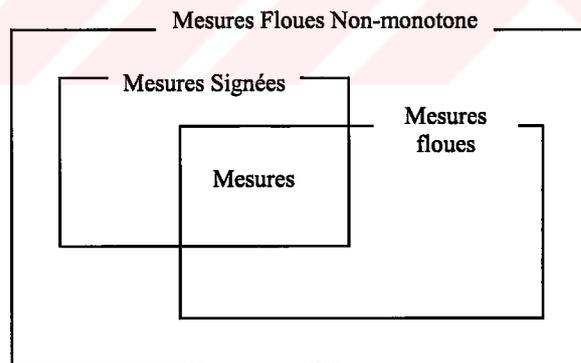


Figure 2.6. Les familles des fonctions d'ensemble sur un ensemble fini  $X$  [30]

Noter que une mesure floue n'est pas nécessairement une mesure. La différence entre une mesure et une mesure floue (ou bien une mesure floue non-monotone et une mesure signée) est que la première n'est pas nécessairement additive. La caractéristique principale d'une mesure floue (non-monotone) est le non-additivité, c'est la raison pour laquelle une mesure floue (non-monotone) est aussi appelée la *mesure non-additive*.

Ici,  $\mu(A)$  représente les poids de l'importance de l'ensemble de critères  $A$ . Donc, en plus des critères pris séparément les poids de chaque combinaison de critères sont définis. Une mesure floue est dite

« additive » si  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  à chaque fois  $A \cap B = \emptyset$ ,

« super additive » si  $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$  à chaque fois  $A \cap B = \emptyset$ ,

« sous additive » si  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$  à chaque fois  $A \cap B = \emptyset$ .

Noter bien que si une mesure floue est additive, alors il suffit de définir seulement les ' $n$ ' coefficients (poids)  $[\mu(\{x_1\}), \mu(\{x_2\}), \dots, \mu(\{x_n\})]$ . Au cas général, il faut définir  $2^n$  coefficients correspondants aux  $2^n$  sous-ensembles de l'ensemble des critères  $X$  [1].

Trois spéciaux cas des mesures floues sont les suivantes [23]:

(1) Mesure probabilité

$$A, B \in 2^K \text{ et } A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(2) Mesure F-additive

$$A, B \in 2^K \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B).$$

(3)  $\lambda$ -mesure

$$A, B \in 2^K \text{ et } A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda \mu(A) \mu(B)$$

$$\text{où } \lambda \in [-1, +\infty).$$

On peut donner un exemple pour mieux comprendre le concept d'une mesure floue: Soit  $X$  un ensemble d'employé qui travaillent dans un atelier et supposer qu'ils produisent les même produits. Pour chaque  $A \in P(X)$ , on considère la situation que les membres de  $A$  travaillent dans l'atelier. Faire travailler les employés dans des différentes combinaisons de groupe est possible. Mais supposer que groupe  $A$  travaille en meilleure efficacité. Soit  $\mu(A)$  le nombre de produit produit par  $A$  en une heure.

Donc  $\mu$  est la mesure de la productivité d'un groupe. Par définition de  $\mu$  les assertions suivantes sont naturelles:

- 1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- 2)  $A \subset B \subset X$  implique  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

C'est-à-dire,  $\mu$  est une mesure floue. On constate que  $\mu$  n'est pas nécessairement additive. Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles disjointes de  $X$  et considérons la productivité du groupe  $A \cup B$ . Si le groupe  $A$  et  $B$  travaille séparément donc  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ . Mais, comme en général ils influencent les uns des autres, l'égalité n'est pas souvent atteinte. L'inégalité  $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$  montre la coopération effective entre les membres des groupes  $A$  et  $B$ . L'inverse de l'inégalité  $\mu(A \cup B) < \mu(A) + \mu(B)$  montre l'incompatibilité entre les opérations de  $A$  et  $B$ . Par exemple insuffisance d'équipement peut causer cette incompatibilité. Donc on peut voir dans un équipe  $A \cup B$ , les deux cas, la coopération et l'incompatibilité, ensemble. Si le degré de coopération effective est supérieur que le degré de l'incompatibilité, l'inégalité  $\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B)$  est gardée [6].

**Définition 2.9.** Soit  $\mu$  une mesure floue sur  $X$ . L'intégral de Sugeno d'une fonction  $f : X \mapsto [0,1]$  par rapport à  $\mu$  est définie par:

$$S_{\mu}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \max_{i=1}^n (f(x_{(i)}) \wedge \mu(A_{(i)})) \quad (2.7)$$

où  $\bullet_{(i)}$  indique que les indices sont permutés de façon  $0 \leq f(x_{(1)}) \leq \dots \leq f(x_{(n)}) \leq 1$  et  $A_{(i)} = \{x_{(i)}, \dots, x_{(n)}\}$ .

Une autre définition est proposée par Murofushi et Sugeno [7] en utilisant un concept introduit par Choquet en théorie de capacité.

**Définition 2.10.** Soit  $\mu$  une mesure floue sur  $X$ . L'intégral Choquet d'une fonction  $f : X \mapsto [0,1]$  par rapport à  $\mu$  est définie par:

$$(C) \int f d\mu = C_\mu(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \sum_{i=1}^n (f(x_{(i)}) - f(x_{(i-1)})) \mu(A_{(i)}) \quad (2.8)$$

avec la même notation en haut et  $f(x_{(0)}) = 0$ . Une illustration est présentée sur la Figure 2.5 avec la notation  $f(x_i) = a_i$  et  $\mu(A_{(i)}) = \mu(\{x | f(x) \geq a_i\})$  pour  $a_1 > 0$ . L'illustration pour  $a_1 < 0$  est représentée sur la Figure 2.7 avec  $(C) \int f d\mu = C_\mu(f(x_i))$

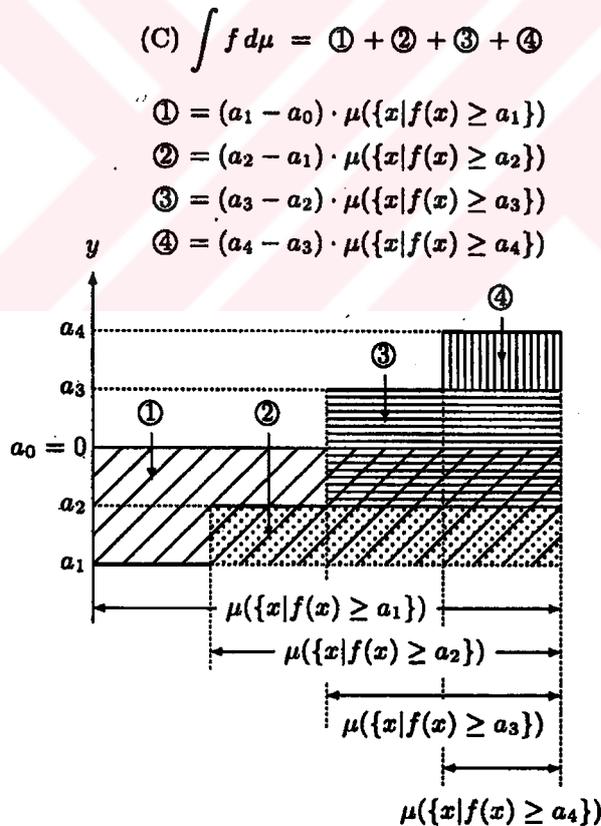


Figure 2.7. L'intégral de Choquet de  $f$  [30]

Une autre formule de computation pour le cas des ensembles finis pour l'intégral de Choquet peut être représenté par:

$$(C) \int f d\mu = C_\mu(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \sum_{i=1}^n f(x_{(i)}) [\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})] \quad (2.9)$$

avec la même notation en haut et  $A_{(n+1)} = \emptyset$ .

La nature des intégraux flous de Sugeno et Choquet est différente, car la première est basée sur les opérateurs non linéaires (min, max) et la seconde sur les opérateurs linéaires. Toutes les deux sont une sorte de moyenne floues tordues.

Continuons avec l'exemple de la productivité dans un atelier: soit  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  l'ensemble des employés. Supposer que chaque employé  $x_i$  travaille  $f(x_i)$  heures par jour. Sans perdre la généralité, on peut assumer  $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_n)$ . Pour  $i \geq 2$  on a,

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \geq 0 \quad \text{et}$$

$$f(x_i) = f(x_1) + [f(x_2) - f(x_1)] + [f(x_3) - f(x_2)] + \dots + [f(x_i) - f(x_{i-1})] \quad (2.10)$$

Maintenant, on peut agréger les heures de travail des employés par la méthode suivante. Premièrement le groupe  $X$  avec  $n$  employés travaille  $f(x_1)$  heures, puis le groupe  $X - \{x_1\} = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$  travaille  $f(x_2) - f(x_1)$  heures, ensuite le groupe  $X - \{x_1, x_2\} = \{x_3, x_4, \dots, x_n\}$  travaille  $f(x_3) - f(x_2)$  heures, ..., dernièrement l'employé  $x_n$  travaille  $f(x_n) - f(x_{n-1})$  heures. Comme la quantité produite par un groupe  $A \subset X$  par une heure c'est  $\mu(A)$ , on peut représenter le nombre totale de produits par

$$\begin{aligned}
& f(x_1)\mu(X) + [f(x_2) - f(x_1)]\mu(X - \{x_1\}) \\
& \quad + [f(x_3) - f(x_2)]\mu(X - \{x_1, x_2\}) \\
& \quad + \cdots + [f(x_n) - f(x_{n-1})]\mu(x_n) \\
& = \sum_{m=1}^n [f(x_m) - f(x_{m-1})]\mu(\{x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}) \quad \text{où } f(x_0) = 0. \tag{2.11}
\end{aligned}$$

Mettons un exemple plus simple. Supposer qu'il y a un livre très rare de deux volumes. Noter le premier et le deuxième volume par  $y_1$  et  $y_2$  respectivement. Supposer qu'il y a un vendeur d'occasion qui les vend au coût de  $p(\{y_1\})$  franc pour le premier,  $p(\{y_2\})$  franc pour le deuxième et  $p(\{y_1, y_2\})$  pour l'ensemble de deux volumes. Comme les deux volumes complets a une valeur supérieurs on a

$$p(\{y_1, y_2\}) > p(\{y_1\}) + p(\{y_2\})$$

Si le vendeur a  $h(y_1)$  volume 1 et  $h(y_2)$  volume 2 avec  $h(y_1) \leq h(y_2)$ , la quantité que le vendeur va obtenir de ce livre en vendant  $h(y_1)$  de volumes complet et  $h(y_2) - h(y_1)$  de volume 2 sera:

$$h(y_1)p(\{y_1, y_2\}) + [h(y_2) - h(y_1)]p(\{y_2\}) \text{ francs.} \tag{2.12}$$

On peut voir les quantités (2.11) et (2.12) l'intégral de  $f$  par rapport à  $\mu$  et de  $h$  par rapport à  $p$  [6].

L'intégral de Choquet a les propriétés suivantes.

**Proposition 2.2.** Soient  $f$  et  $g$  des fonctions sur  $X$  et  $A$  un sous-ensemble de  $X$ .

$$i. \quad (C) \int_A d\mu = \mu(A).$$

ii. Si  $\mu$  est une mesure et  $f \leq g$ , alors

$$(C) \int f d\mu \leq (C) \int g d\mu$$

iii. Si  $a$  est un nombre non-négative réel et  $b$  est un nombre réel, alors

$$(C) \int (af + b) d\mu = a \cdot (C) \int f d\mu + b \cdot \mu(X)$$

iv.

$$(C) \int (-f) d\mu = -(C) \int f d\bar{\mu}$$

v. Pour tout fonctions  $f$  sur  $X$

$$(C) \int (-f) d\mu = -(C) \int f d\mu$$

si et seulement si  $\mu = \bar{\mu}$

vi.

$$(C) \int f d\mu = (C) \int f^+ d\mu - (C) \int f^- d\bar{\mu},$$

où  $f^+(x) = \max \{f(x), 0\}$  et  $f^-(x) = \max \{-f(x), 0\}$ .

vii. Si  $a$  est nombre réel, alors

$$(C) \int f d(a \cdot \mu) = a \cdot (C) \int f d\mu .$$

viii. Si  $\mu$  et  $\nu$  sont des mesures floues sur  $X$  tel que  $\mu \leq \nu$  et  $\mu(X) = \nu(X)$ , alors pour toute fonction sur  $X$

$$(C) \int f d\mu \leq (C) \int f d\nu$$

ix. Si  $N$  est une ensemble nul, et si  $f(x) = g(x) \quad \forall x \notin N$ , alors

$$(C) \int f d\mu = (C) \int g d\mu$$

Une mesure floue peut être représentée, en identifiant les sous-ensembles avec leur vecteur caractéristique dans  $\{0,1\}^n$ , par une fonction pseudo-Booléen  $f : \{0,1\}^n \mapsto \mathfrak{R}$ .

Une telle fonction a une unique expression:

$$f(x) = \sum_{T \subseteq X} a(T) \prod_{i \in T} x_i, \quad x \in \{0,1\}^n \quad (2.13)$$

Dans les combinatoires,  $a$  est vue comme une fonction d'ensemble sur  $X$  et nommé transformation de Möbius donné par

$$a(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \mu(T), \quad S \subseteq X \quad (2.14)$$

Bien sur, n'importe quel ensemble de  $2^n$  coefficients  $\{q(T)/T \subseteq X\}$  n'est pas la représentation de Möbius d'une mesure floue. Les conditions de monotonie et de borne doivent être complètes. Ces conditions peuvent être écrites en terme de la transformation de Möbius comme suit:

$$a(\emptyset) = 0,$$

$$\sum_{T \subseteq N} a(T) = 1 \quad (2.15)$$

$$\sum_{T: i \in T \subseteq S} a(T) \geq 0, \quad \forall S \subseteq N, \forall i \in S.$$

## 2.6. Interaction entre les critères

L'importance totale d'un critère  $i \in X$  ne dépend pas seulement du nombre  $\mu(i)$ , mais aussi de tous  $\mu(S)$  avec  $i \in S$ . Un coefficient pour représenter cette quantité de l'importance d'un critère avait été proposé par Shapley dans le concept de théorie de jeu. Dans le cadre du théorie du jeu,  $X$  est l'ensemble de joueurs, chaque sous-ensemble  $A \subset X$  est nommé une coalition, et  $\mu$  est nommé la fonction caractéristique du jeu, exprimant la valeur de chaque coalition (i.e. la valeur d'argent dont la coalition va gagner si le jeu est joué). En général,  $\mu$  n'est pas monotone par rapport à l'inclusion, et peut prendre les valeurs négatives.

Un problème central de la théorie du jeu est sur le concept de valeur. La source du problème est la suivante: Soit  $\mu(X)$  la valeur totale du jeu. Sachant la valeur de chaque coalition, quelle est la valeur monétaire d'un seul joueur? Evidemment ce n'est pas  $\mu(\{i\})$ , car même si la nouvelle valeur de chaque coalition,  $K \subset X - \{i\}$ , à laquelle le joueur  $i$  joint, augmente considérablement, la valeur de  $\mu(\{i\})$  peut être nul. Cela veut dire que  $i$  est très utile et doit être récompenser par une quantité  $\Phi_i > 0$ . La valeur du jeu est donc le vecteur  $[\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ . Shapley avait proposé la définition suivante, nommé la valeur de Shapley donnant les  $\Phi_i$ , indice de Shapley [32].

**Définition 2.11.** Soit  $\mu$  une mesure floue sur  $X$ . L'indice de Shapley pour chaque  $i \in X$  est défini par:

$$\Phi_i = \sum_{K \subset X-i} \frac{(n-|K|-1)!|K|!}{n!} [\mu(K \cup \{i\}) - \mu(K)] \quad (2.16)$$

la valeur de Shapley est le vecteur  $\Phi(\mu) = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ . On peut interpréter l'indice de Shapley comme une moyenne pondérée de la contribution générale de

l'élément  $i$  seul dans toutes les coalitions. La valeur de Shapley a la propriété de

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \mu(X), \text{ et est un opérateur linéaire sur l'ensemble des jeux.}$$

L'analogie avec l'aide à la décision multicritère est claire: la valeur d'une coalition de joueur est l'importance d'une coalition de critère. Evidemment  $\mu(X)$  a la valeur maximale, étant 1 par convention. Puis l'indice de Shapley  $\Phi_i$  exprime l'importance relatif d'un seul critère dans le problème de décision, c'est-à-dire quel degré  $i$  est nécessaire pour mettre dans l'ensemble des critères.

Dans le concept d'aide à la décision multicritère l'interaction entre les critères a une importance informative différemment à la théorie de jeu. On peut le reconnaître avec l'exemple suivant.

Soit deux critères 1 et 2 et quatre alternatives A, B, C et D, représentés sur la Figure 2.8. On suppose les critères égaux pour prendre la décision. Sur les axes on représente le degré de satisfaction des alternatives pour chaque critère. Normalement, comme on préfère les alternatives qui satisfont autant de critères possibles, le décideur aura une stricte préférence de C sur A. Le cas des alternatives B et D est plus délicat.

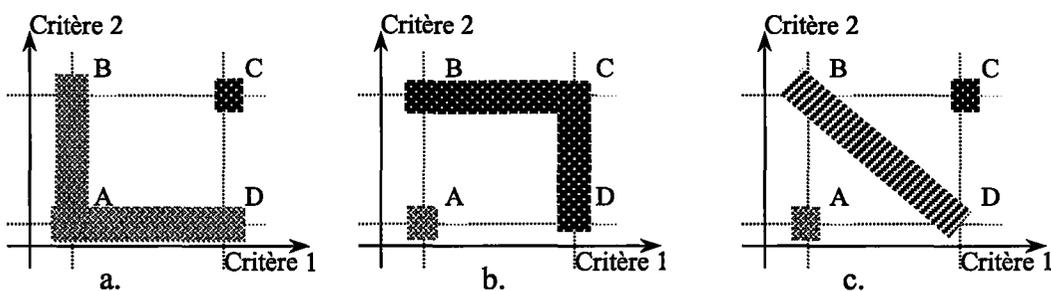


Figure 2.8. Différents cas d'interaction [32]

Un décideur peut considérer B et D également mauvais comme A, car tous les deux ne satisfont pas tous les critères. Selon ce décideur, les critères agissent conjointement, c'est-à-dire tous les deux doivent être satisfaits. C'est le cas de Figure 2.8.a, et on l'appelle le cas d'interaction positive ou synergie positive entre les critères: bien que

l'importance d'un seul critère soit nul, l'importance de la paire est large. Les critères peuvent être appelés complémentaire.

Un autre décideur peut considérer B et D également bon comme C. Dans ce cas, les critères agissent disjonctivement, et il suffit de satisfaire un des deux, illustré sur la Figure 2.8.b. Ici, on parle d'interaction négative ou synergie négative: l'union des critères n'apporte rien et l'importance du pair est à peu près la même que l'importance d'un seul critère. On les appelle redondantes.

Le troisième cas se situe entre les deux premiers. Ici, le décideur pense que B et D sont mieux que A parce qu'ils satisfont un critère, mais pire que C qui satisfait les deux critères. C'est-à-dire l'importance de la paire est plus ou moins importante que la somme des importances individuelles des critères: ils agissent indépendamment et il n'y a pas interaction entre eux [32].

Considérer une paire  $\{i, j\} \subseteq X$  de critères. La différence

$$a(\{i, j\}) = \mu(\{i, j\}) - \mu(\{i\}) - \mu(\{j\})$$

semble refléter le degré de l'interaction entre  $i$  et  $j$ . cette différence est nulle quand les importances individuelles  $\mu(\{i\})$  et  $\mu(\{j\})$  additionnent sans intervenir. Dans ce cas il n'y a pas d'interaction entre  $i$  et  $j$ . La différence est positive s'il y a un effet synergie entre  $i$  et  $j$ . Finalement, la différence est négative dans le cas d'un effet de superposition entre  $i$  et  $j$ . Donc les critères interviennent d'une manière négative.

Comme dans le cas de l'importance, une définition convenable de l'interaction ne doit pas contenir seulement  $\mu(\{i\})$ ,  $\mu(\{j\})$  et  $\mu(\{i, j\})$ , elle doit contenir la mesure de toutes les sous-ensembles contenant  $i$  et  $j$ . Ainsi l'interaction entre les critères  $i$  et  $j$  peut être considérée comme une moyenne des contributions marginales de  $j$  en présence de  $i$ , qui correspond la somme pondérée de toutes les combinaisons  $T \subseteq X - \{i, j\}$  de

$$\mu(T \cup \{i, j\}) - \mu(T \cup \{i\}) - \mu(T \cup \{j\}) + \mu(T).$$

Murofushi et Soneda ont proposé la définition suivante, prenant le concept de la MAUT qui est similaire à l'indice de Shapley.

**Définition 2.12.** Soit  $\mu$  une mesure floue sur  $X$ . L'indice d'interaction des éléments  $i, j \in X$  est défini par

$$I_{ij} = \sum_{T \subset X - \{i, j\}} \frac{(n - |T| - 2)! |T|!}{(n - 1)!} [\mu(T \cup \{i, j\}) - \mu(T \cup \{i\}) - \mu(T \cup \{j\}) + \mu(T)]$$

(2.17)

La définition peut élargir pour n'importe quelle coalition par la définition de Grabisch [11].

**Définition 2.13.** Soit  $\mu$  une mesure floue sur  $X$ . L'indice d'interaction pour n'importe quelle coalition  $A \subset X$  est définie par

$$I(A) = \sum_{B \subset X - A} \frac{(n - |B| - |A|)! |B|!}{(n - |A| + 1)!} \sum_{C \subset A} (-1)^{|A-C|} \mu(T \cup B)$$

(2.18)

C'est clair que c'est une généralisation de la valeur de Shapley et l'indice d'interaction de Murofushi et Soneda car  $\Phi_i$  coïncide avec  $I(\{i\})$  et  $I_{ij}$  avec  $I(\{i, j\})$ .

## 2.7. Trois représentations d'une mesure floue

**Définition 2.14.** Soit  $\mu$  une fonction d'ensemble (pas nécessairement une mesure floue) sur  $X$ . La transformation Möbius de  $\mu$  est une fonction d'ensemble sur  $X$  définie par

$$m(A) := \sum_{B \subset A} (-1)^{|A \setminus B|} \mu(B), \quad \forall A \subset X.$$

La transformation est inversible, et  $\mu$  peut être recouvert avec  $m$  par

$$\mu(A) = \sum_{B \subset A} m(B), \quad \forall A \subset X.$$

Il est évident que le coefficient  $a(T)$  de l'expression (2.13) correspond à  $m(T)$   $\forall T \subset X$ .

La *représentation* d'une mesure floue  $\mu$  (ou bien plus généralement, d'une fonction d'ensemble) est une fonction d'ensemble  $\nu$  avec laquelle on peut recouvrir  $\mu$  sans perdre d'information.

En bref, on a trouvé trois représentations d'une mesure floue:

- ☞ Représentation usuelle (simplement  $\mu$ ),
- ☞ Représentation de Möbius  $m$ ,
- ☞ Représentation d'interaction  $I$ .

Les formules des différentes représentations sont établies comme indiquées ci-dessous.

$$I(A) = \sum_{B \subset X-A} \frac{1}{|B|+1} m(A \cup B), \quad (2.19)$$

$$m(A) = \sum_{B \subset X-A} \alpha_{|B|} I(B \cup A), \quad (2.20)$$

$$\mu(A) = \sum_{B \subset X} \beta_{|A \cap B|}^{|B|} I(B), \quad (2.21)$$

avec 
$$\alpha_k := -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{\alpha_l}{k-l+1} \binom{k}{l}.$$

et  $\alpha_0 = 1$ . En effet, les coefficients  $\alpha_k$  sont les nombres de Bernoulli, souvent notés  $B_k$  les termes premiers sont  $\alpha_1 = -1/2$ ,  $\alpha_2 = 1/6$ ,  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_4 = -1/30$ ,  $\alpha_5 = 0$ .

$$\beta_k^l := \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_{l-j}$$

Les premières valeurs de  $\beta_k^l$  sont montrés sur le Tableau 2.1.

Tableau 2.1. Les valeurs de  $\beta_k^l$

$k/l$	0	1	2	3	4
0	1	-1/2	1/6	0	-1/30
1		1/2	-1/3	1/6	-1/30
2			1/6	-1/6	2/15
3				0	-1/30
4					-1/30

Les nombres de Bernoulli et les coefficients  $\beta_k^l$  possèdent des propriétés remarquables [12].

## 2.8. k-ordre additivités

### 2.8.1. Les mesures k-ordre additives

Le concept des mesures  $k$ -ordre additives a été proposé par Grabisch [11], afin de résoudre le problème de complexité exponentielle des mesures floues. En regardant l'expression polynomiale de la mesure floue, on peut noter que les mesures additives ont une représentation linéaire,  $f(x) = \sum_{i=1}^n m(\{i\})x_i$ . Par extension, on peut imaginer une mesure floue qui a une représentation polynomiale de degré 2, ou 3, ou un entier fixé  $k$ . C'est naturel de nommer cette sorte de mesure floue  $k$ -ordre additive mesure floue ou simplement  $k$ -additive mesures. C'est-à-dire la transformation Möbius de telles mesures est 0 pour sous-ensembles qui ont plus de  $k$  éléments.

**Définition 2.15.** Une mesure floue est dite  $k$ -ordre additive ou simplement  $k$ -additive si sa transformation de Möbius  $m(A) = 0$  pour tout  $A$  tel que  $|A| > k$ , et il existe au moins une sous-ensemble  $A$  de  $X$  qui a exactement  $k$  éléments tel que  $m(A) \neq 0$ .

Une axiomatisation de  $I$ , indice d'interaction, avait été construite par Grabisch et Roubens [32]. Une des axiomes fondamentales est comme suit:

*Axiome Fictive:* Si  $i$  est un joueur fictif, alors pour tout  $A \subset X - \{i\}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $I(A \cup \{i\}) = 0$ .

On dit que  $i$  est joueur (critère) fictif si  $\mu(A \cup \{i\}) = \mu(A) + \mu(\{i\})$ ,  $\forall A \subset X - \{i\}$ . Cet axiome exprime le sens de l'interaction. Un joueur fictif porte seulement sa valeur propre à la coalition, ni plus ni moins. Cela veut dire que ce joueur n'a pas d'interaction avec les coalitions.

La propriété suivante doit être mentionnée en reliant l'indice d'interaction et  $k$ -additivité.

**Proposition 2.3.** Soit  $\mu$  une mesure  $k$ -additive sur  $X$ . Alors

- i.  $I(A) = 0, \forall A \subset X$  tel que  $|A| > k$ ,
- ii.  $I(A) = m(A), \forall A \subset X$  tel que  $|A| = k$ .

### 2.8.2. Le cas des mesures 2-additive

Le cas de 2- additivité est impressionnant. Étant donné qu'elle est simple et permet de modeler l'interaction. Détaillons les expressions du cas 2-additive.

Pour les mesures 2-additive on a, pour un  $K \subset X$  :

$$\mu(K) = \sum_{i=1}^n m(i)x_i + \sum_{\{i,j\} \subset K} m(ij)x_i x_j \quad (2.22)$$

avec  $x_i = 1$  si  $i \in K$ ,  $x_i = 0$  sinon. On en déduit donc

$$\mu(i) = m(i) \quad \forall i \quad \text{et} \quad \mu(ij) = m(i) + m(j) + m(ij) = \mu(i) + \mu(j) + m(ij)$$

La formule générale c'est

$$\mu(K) = \sum_{i \in K} m(i) + \sum_{\{i,j\} \subset K} m(ij) = \sum_{\{i,j\} \subset K} \mu(ij) - (|K| - 2) \sum_{i \in K} \mu(i) \quad (2.23)$$

pour un  $K \subset X$  tel que  $|K| \geq 2$ . Ici  $m(\cdot)$  correspond à la transformation de Möbius, et les parenthèses d'ensemble sont omises, c'est-à-dire écrire  $\mu(i), S \cup i$  au lieu de  $\mu(\{i\}), S \cup \{i\}$  et aussi pour les ensemble  $ij, ijk$  au lieu de  $\{i, j\}, \{i, j, k\}$  par exemple  $m(\{i, j\}),$  au lieu de  $m(ij)$ .

Remarquer que si  $k$  varie de 1 à  $n$ , on recouvre toutes les mesures floues possibles. Noter  $\aleph_k$  l'ensemble des toutes  $k$ -ordre additives mesures sur  $X$ ,  $\aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_n$  construit une partition de l'ensemble  $\aleph$  de toutes les mesures floues.

Clairement,  $k$ - additive mesures besoin moins de  $2^n$  coefficients à définir. Pour  $k = 1$  on a besoin de  $n$  coefficients, pour  $k = 2$  de  $n(n+1)/2$ , et en général

$$\sum_{j=1}^k \binom{n}{j}$$

coefficients pour  $k$ - additive mesures [11].

De plus, l'indice d'interaction a pour l'équation:

$$I(i) = m(i) + m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N-i} m(ij), \quad i \in N, \quad (2.24)$$

$$I(ij) = m(ij), \quad i, j \in N$$

avec la même notation qu'au précédent. Noter que  $I(i), m(i) \in [0,1] \quad \forall i \in N$ . Il est démontré que  $I(ij) \in [-1,1] \quad \forall i, j \in N$ .

Dans ce contexte, les condition (2.15) pour les coefficients  $m(\emptyset), m(i), m(ij), i, j \in N$  pour déterminer une mesure floue sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\emptyset) = 0, \\ \sum_{i \in N} m(i) + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij) = 1 \\ m(i) \geq 0 \quad \forall i \in N \\ m(i) + \sum_{j \in T} m(ij) \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall T \subseteq N-i \end{array} \right. \quad (2.25)$$

### 2.8.3. L'intégral de Choquet pour 2-additive mesures

C'est possible d'exprimer l'intégral de Choquet en cas de 2-additive, en utilisant l'indice d'interaction. Soit  $t_1, \dots, t_n$ , les points sur les critères.

$$C_\mu(t_1, \dots, t_n) = \sum_{I_{ij} > 0} (t_i \wedge t_j) I_{ij} + \sum_{I_{ij} < 0} (t_i \vee t_j) |I_{ij}| + \sum_{i=1}^n t_i \left( \Phi_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |I_{ij}| \right) \quad (2.26)$$

avec la propriété

$$\Phi_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |I_{ij}| \geq 0 \quad \forall i.$$

Ici,  $|I_{ij}|$  note la valeur absolue de  $I_{ij}$ . On peut admettre l'intégral de Choquet pour 2-additives mesures décomposées en trois parties, une conjonctive, une disjonctive et une partie additive correspondant à l'indice d'interaction positive, l'indice d'interaction négative, et la valeur Shapley, respectivement. Cela fait certaine le sens précise de  $I_{ij}$  en cas de l'intégral de Choquet:

- ☞  $I_{ij}$  positive implique un comportement conjonctif entre  $i$  et  $j$ . C'est-à-dire la satisfaction simultanée de  $i$  et  $j$  est significative pour le point global mais la satisfaction l'une des deux n'a pas d'effet.
- ☞  $I_{ij}$  négative implique un comportement disjonctif, qui implique la satisfaction l'un des deux,  $i$  ou bien  $j$ , est suffisante pour avoir un effet significatif sur le point global.
- ☞ La valeur Shapley agit comme un vecteur de poids dans une moyenne pondérée. Cela représente la partie linéaire de l'intégral de Choquet. Il sera petit si les indices d'interaction sont larges [32].

En cas de la mesure floue 2-ordre l'intégral de Choquet peut être écrite en terme de transformation de Möbius comme ci-dessous:

$$C_{\mu}(x) = \sum_{i \in N} m(i)x_i + \sum_{\{i,j\} \subseteq N} m(ij)(x_i \wedge x_j), \quad x \in \mathfrak{R}^n \quad (2.27)$$

## 2.9. Veto et faveur en aide multicritères à la décision

**Définition 2.16.** Supposer  $H$  un opérateur d'agrégation utilisée pour un problème d'aide multicritère à la décision. Un critère  $i$  est veto pour  $H$  si pour chaque alternative avec le résultat  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{R}^{+n}$ ,

$$H(t_1, \dots, t_n) \leq t_i.$$

Similairement, le critère  $i$  est faveur pour  $H$  si pour chaque alternative avec le résultat  $(t_1, \dots, t_n) \in \mathfrak{R}^{+n}$ ,

$$H(t_1, \dots, t_n) \geq t_i.$$

C'est-à-dire, quand le critère  $i$  est veto, si le résultat de  $i$  est haut, il n'a pas d'effet sur l'évaluation totale, mais s'il est bas, le résultat global aussi va être bas.

La mesure floue peut représenter le veto et la faveur comme indiqué à la proposition ci-dessous.

**Proposition 2.4.** Pour l'intégral floue,  $i$  est un veto si et seulement si la mesure floue satisfait  $\mu(A) = 0$  à chaque fois  $i \notin A$ . Telle mesure floue est notée  $\mu^{i\wedge}$ . Similairement,  $i$  est un faveur si et seulement si la mesure floue satisfait  $\mu(A) = 1$  à chaque fois  $i \in A$ . Telle mesure floue est notée  $\mu^{i\vee}$ .

Noter que si un critère est en même temps veto et faveur, alors il est un dictateur, i.e..  $C_\mu(t_1, \dots, t_n) = t_i$ . Un autre conséquence de la définition c'est que pour un  $H$  donné, ce n'est pas possible d'avoir en même temps un veto sur  $i$  et un faveur sur  $j$ ,  $i \neq j$ , car avoir  $H(t_1, \dots, t_n) \leq t_i$  et  $H(t_1, \dots, t_n) \geq t_j$  n'est pas compatible en général.

Examinons la représentation interaction de  $\mu^{i\wedge}$  et  $\mu^{i\vee}$ . Noter  $I_{jk}^{i\wedge}$  et  $I_{jk}^{i\vee}$  leur indice d'interaction respective. On a la condition ci-dessous nécessaire mais pas suffisante:

$$I_{jk}^{i\wedge} \geq 0, I_{jk}^{i\vee} \leq 0, \quad \forall k \neq i.$$

**Proposition 2.5.** Soit  $\mu$  une mesure floue 2-additive. Le critère  $i$  est un veto si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

- i.  $I_{ik} \geq 0, \quad \forall k \neq i,$
- ii.  $I_{kl} = 0, \quad \forall k, l \neq i,$
- iii.  $\Phi_k = \frac{1}{2} I_{ik}, \quad \forall k \neq i.$

Similairement,  $i$  est un critère faveur si et seulement si

- i.  $I_{ik} \leq 0, \quad \forall k \neq i,$
- ii.  $I_{kl} = 0, \quad \forall k, l \neq i,$
- iii.  $\Phi_k = -\frac{1}{2} I_{ik}, \quad \forall k \neq i.$

C'est possible de généraliser le concept de veto pour plusieurs critères. Un groupe  $A \subset X$  est veto (resp. faveur) pour  $H$  si tous les critères dans  $A$  est veto (resp. faveur). Cela correspond à l'équation suivante pour le cas veto

$$H(t_1, \dots, t_n) \leq \min_{i \in A} t_i$$

et pour le cas faveur

$$H(t_1, \dots, t_n) \geq \max_{i \in A} t_i.$$

Pour l'intégral de Choquet, Proposition 2.5. généralise facilement: L'effet de veto sur une coalition  $A$  de critère est obtenu si et seulement si la mesure floue satisfait  $\mu(B) = 0, \forall B \supsetneq A$ . L'interaction de telle mesure satisfait  $I^{A^{\wedge}}(A \cup \{k\}) \geq 0, \forall k \notin A$ . Similairement, un effet de faveur est obtenu pour  $A$  si et seulement si la mesure floue satisfait  $\mu(B) = 1, \forall B \cap A \neq \emptyset$ . L'interaction de telle mesure satisfait  $I^{A^{\vee}}(A \cup \{k\}) \leq 0, \forall k \notin A$ .

## 2.10. Identification des mesures floues

Le problème qu'on doit résoudre c'est l'identification des mesures floues. C'est-à-dire comment déterminer les  $2^n$  coefficients de la mesure floue  $\mu$  en considérant les relations de monotonie entre les coefficients.

### 2.10.1. Identification à base des sémantiques

Elle a pour but de deviner les coefficients  $\mu$  à partir des considérations sémantiques telles que:

- ☞ *Importances des critères.* On peut utiliser la valeur de Shapley ou bien la valeur  $\mu(\{i\})$  seule.
- ☞ *Interaction entre les critères.* L'indice d'interaction convient pour cela. Pour  $n \leq 3$ , le signe de  $\mu(\{x_i, x_j\}) - \mu(\{x_i\}) - \mu(\{x_j\})$  peut être suffisant, même s'il n'est pas équivalent à l'indice d'interaction.

- ☞ *Critères symétriques.* Deux critères  $x_i$  et  $x_j$  sont symétriques s'ils peuvent être échangés sans changer le mode d'agrégation. On a alors,  $\mu(A \cup \{x_i\}) = \mu(A \cup \{x_j\})$ ,  $\forall A \subset X - \{x_i, x_j\}$ . Cela diminue le nombre des coefficients.
- ☞ *Effet de Veto.* Cela veut dire que un mauvais point du critère  $j$  va causer à un mauvais point global quoi que le degré de satisfactions des autres critères. Il suffit de modeler l'intégral de Choquet comme en Proposition 2.4. Dans ce cas, le nombre de coefficient à déterminer est  $2^{n-1}$ . Le nombre des critères veto peuvent être augmenté et chaque critère veto divise le nombre de coefficients à deux.
- ☞ *Effet de Faveur.* Cela veut dire que un bon point sur  $x_j$ , va causer à un bon point global quoi que le degré de satisfactions des autres critères. Similairement à l'effet de veto on peut le modeler avec l'intégral de Choquet. Le nombre des critères à déterminer se divise en deux encore une fois. De plus, il est possible de mixer les effets veto et faveur.

Même s'il est possible de déduire le nombre des coefficients nécessaires en considérant les effets de veto, faveur ou symétrie, cette approche est pratique pour les petit valeur de  $n$ . De plus, il est indispensable de disposer un décideur ou bien un expert qui est capable de dire les importances relatives des critères et la sorte des interactions entre eux. C'est la situation de l'application de désigner nouveaux produits où le marché 'définit' ce que va être le 'produit idéal' avec les termes d'agrégation.

Comme on le voit cette approche est loin d'être une méthodologie bien établie, et a besoin d'une quantité d'expérience non-négligeable [1].

### 2.10.2. Identification à base de donnée apprise

*Minimisation de la carrée de l'erreur.* On considère le modèle de l'intégral floue comme un système et on cherche à identifier ses paramètres en minimisant un critère de l'erreur à l'aide des données disponibles. Supposer  $(z_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sont les données apprises où  $z_k = [z_{k1} \dots z_{kn}]^T$  est un vecteur d'entrée de  $n$  dimensions, qui contient le degré de satisfaction de l'objet  $k$  par rapport au critère de 1 à  $n$  (ou bien le degré de préférence entre deux objets si les méthodes de rangement sont utilisées),  $y_k$  est l'évaluation globale de l'objet  $k$ . On peut donc chercher la mesure floue  $\mu$  optimale en minimisant le critère de la carrée de l'erreur.

$$E^2 = \sum_{k=1}^l (C_{\mu}(z_{k1}, \dots, z_{kn}) - y_k)^2$$

On peut montrer que cette erreur peut être mise en forme d'un programme quadratique, comme en ci-dessous

$$\min \frac{1}{2} \mathbf{u}' \mathbf{D} \mathbf{u} + \mathbf{c}' \mathbf{u}$$

sous les contraintes

(2.28)

$$\mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur de dimension  $(2^n - 2)$  qui contient toutes les coefficients de la mesure floue  $\mu$ , exceptionnellement  $\mu(\emptyset)$  et  $\mu(X)$  qui sont fixes ne sont pas incluses,  $\mathbf{D}$  est une matrice carrée de dimension  $(2^n - 2)$ ,  $\mathbf{c}$  est un vecteur de dimension  $(2^n - 2)$ ,  $\mathbf{A}$  est une matrice de  $n(2^{n-1} - 1) \times (2^n - 2)$  dimension et  $\mathbf{b}$  est un vecteur de dimension  $n(2^{n-1} - 1)$ . La solution de ce programme n'est pas en général unique [32]. En plus, c'est possible d'écrire le programme en terme de  $\mu$  sous un autre programme en terme de transformation de Möbius ou bien en terme d'indice d'interaction. Comme cela on a l'occasion de s'occuper facilement avec les mesures  $k$ - additive et ajouter des contraintes sur l'indice d'interaction donné par le décideur.

Le programme peut être résolu avec des méthodes standards de l'optimisation quadratique même si la matrice  $\mathbf{D}$  a un rang inférieur à  $(2^n - 2)$ .

Les expériences ont montré des inconvénients de cette méthode [32].

- ✧ S'il y a très peu de donnée, la solution n'est pas unique et la solution proposée par le programme peut être intuitive à cause des coefficients très proches de 1 ou 0.
- ✧ Au fur et à mesure que  $n$  augmente, la dimension des vecteurs et matrices augmentent exponentiellement, comme le temps de computation et la mémoire exigée.  $n = 8$  est déjà une valeur large, et  $n = 10$  est presque irréalisable.

*Algorithmes heuristiques.* Il y a d'autres approches qui utilisent les données apprises et qui cherchent une solution plus facile à obtenir. Au lieu de la programmation quadratique ils utilisent des algorithmes sous forme de « heuristique », en restant à la sous-optimale.

Une de ces méthodes, c'est celle proposée par Grabisch: Algorithme de Le Plus Petit Moyen Carré Heuristique (heuristic least mean squares algorithm). L'idée de base c'est que en absence d'information le plus non arbitraire (le moins spécifique) moyen c'est le moyen arithmétique, ainsi l'intégral de Choquet par rapport à une mesure floue équilibrée. Chaque entrée d'information tend à mouvoir la mesure floue de ce point d'équilibre. Cela veut dire que, quand il y a peu de donnée, les coefficients de la mesure floue qui ne sont pas concernés par la donnée sont maintenus près du point d'équilibre, afin d'être assurés de la monotonie.

Les épreuves de cette méthode faites dans les problèmes de classification montrent la bonne performance de l'algorithme, même mieux que la méthode optimale quand  $n$  est large. Spécialement, la mémoire exigée et le temps de computation sont beaucoup moins de ceux du programme quadratique. Il est possible de traiter des problèmes avec  $n = 16$  avec cette méthode [32].

### 2.10.3. Identification à base de satisfaction des contraintes

Cette méthode proposée par Roubens et Marichal [3] utilise des entrées de différentes sortes par rapport à la précédente. La première a besoin des résultats (numérique) sur les critères et le résultat global, en tant que la deuxième n'a pas besoin d'un résultat global mais un rangement des actions ou les objets à évaluer et en addition quelque indication sur l'importance et l'interaction des critères.

En bref, on suppose que le décideur ou l'expert est capable de dire l'importance relative des critères et le type d'interaction entre eux. En effet dans les applications, le décideur est capable de donner informations sur les poids  $\mu(i)$  et les indices d'interactions plus facilement qu'attribuer directement la mesure floue. Ainsi c'est important de poser les bonnes questions qui permettent d'identifier la mesure floue.

Les entrées du problème peuvent être citées comme ci-dessous:

- ↪ L'ensemble  $A$  des alternatives et l'ensemble  $N$  des critères,
- ↪ Un tableau des résultats individuels  $x_i^a$  donnés dans la même intervalle que  $X \subseteq \mathfrak{R}$ ,
- ↪ Un pré-ordre partiel  $\succ_A$  sur  $A$  (un rangement des alternatives),
- ↪ Un pré-ordre partiel  $\succ_N$  sur  $N$  (un rangement des critères),
- ↪ Un pré-ordre partiel  $\succ_A$  sur l'ensemble des paires de critères (un rangement des indices interactions),
- ↪ Le signe d'interaction entre quelque paire de critères  $m(\{ij\})$ :  $>0, <0, = 0$ .

Toutes ces données peuvent être formulées sous forme des égalités ou inégalité linéaire qui relie les « poids »  $\mu$ . Le modèle consiste en trouver une 2-ordre mesure floue. Ainsi on a un problème de satisfaction des contraintes linéaires. Noter que les inégalités strictes peuvent être convertir à des inégalités vagues en introduisant un variable d'écart comme dans la proposition suivante.

**Proposition 2.6.**  $x \in \mathfrak{R}^n$  est une solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j < d_i, \quad i = 1, \dots, q,$$

si et seulement s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq d_i - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, q,$$

en particulier, une solution existe si et seulement si le programme linéaire suivant

$$\max z = \varepsilon$$

sous les contraintes

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \leq d_i - \varepsilon, \quad i = 1, \dots, q,$$

a une solution optimale  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  avec une valeur optimale de  $\varepsilon^* > 0$ . Dans ce cas  $x^*$  est la solution du premier système.

Ainsi le problème de trouver une 2-ordre mesure floue peut être formaliser à l'aide d'un programme linéaire. C'est évident qu'au fur et à mesure que le nombre d'entrée diminue, l'ensemble de solution grandit. En conséquence, il est désirable d'avoir le plus complet d'information. Cependant si cette information a des incohérences alors l'ensemble de solution peut être vide. Remarquer pourtant que l'ensemble de solution vide peut être à cause d'une incompatibilité entre les informations données et de

supposition que la mesure est de l'ordre 2. Dans ce cas il est utile de considérer une mesure de 3-ordre ou bien si nécessaire une mesure d'ordre plus haut.

Toutes les informations collectionnées peuvent être transmises en un système d'égalité et d'inégalité qui construit un programme linéaire en terme des coefficients inconnus  $\mu$ . Le programme linéaire proposé par Marichal et Roubens est comme suit:

$$\max z = \varepsilon$$

sous les contraintes

$$\varepsilon \geq 0 \quad (\text{le variable d'écart positive})$$

$$\left. \begin{array}{l} C_\mu(a) - C_\mu(b) \geq \delta + \varepsilon \quad \text{si } a \succ_A b \\ -\delta \leq C_\mu(a) - C_\mu(b) \leq \delta \quad \text{si } a \approx_A b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Semi-ordre partiel sur } A \\ \text{avec un seuil } \delta \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(i) - \mu(j) \geq \varepsilon \quad \text{si } i \succ_N j \\ \mu(i) = \mu(j) \quad \text{si } i \approx_N j \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Le rangement de critères} \\ \text{(les poids)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{ij} - I_{kl} \geq \varepsilon \quad \text{si } ij \succ_P kl \\ I_{ij} = I_{kl} \quad \text{si } ij \approx_P kl \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Le rangement des paires de} \\ \text{critères (interaction)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{ij} \geq \varepsilon \quad (\text{resp.} \leq -\varepsilon) \quad \text{si } I_{ij} > 0 \quad (\text{resp.} < 0) \\ I_{ij} = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Le signe de quelques} \\ \text{interactions} \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n I_i = 1 \quad (\text{La condition de borne sur les valeurs})$$

$$\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A \subset B \subset X \quad (\text{Les conditions de monotonie})$$

où les parenthèses d'ensemble sont omises, c'est-à-dire écrire  $\mu(i)$ ,  $S \cup i$  au lieu de  $\mu(\{i\})$ ,  $S \cup \{i\}$  et aussi pour les ensemble  $ij$ ,  $ijk$  au lieu de  $\{i, j\}$ ,  $\{i, j, k\}$  par exemple  $m(ij)$ , au lieu de  $m(\{i, j\})$ .

Tous ces expressions peuvent être écrites en terme de transforme de Möbius  $m$ .  
Grabisch [11] avait démontré qu'en cas de 2-additive mesure:

$$C_\mu(a) = \sum_{i=1}^n m(i)x_i^a + \sum_{\{ij\} \in X} m(ij)[x_i^a \wedge x_j^a] \quad (2.29)$$

$$I_i = \Phi_i = m(i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in N-i} m(ij) \quad (2.30)$$

$$I_{ij} = m(ij) \quad (2.31)$$

$$\mu(i) = m(i) \quad (2.32)$$

Le modèle pour identification des poids écrit en terme de transformation de Möbius peut être donné comme ci-dessous:

$$\max z = \varepsilon$$

sous les contraintes

$$\left. \begin{array}{l} C_\mu(a) - C_\mu(b) \geq \delta + \varepsilon \quad \text{si } a \succ_A b \\ -\delta \leq C_\mu(a) - C_\mu(b) \leq \delta \quad \text{si } a \approx_A b \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Semi-ordre partiel} \\ \text{avec un seuil } \delta \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} m(i) - m(j) \geq \varepsilon \quad \text{si } i \succ_N j \\ m(i) = m(j) \quad \text{si } i \approx_N j \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Le rangement de critères} \\ \text{(les poids)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} m(ij) - m(kl) \geq \varepsilon \quad \text{si } ij \succ_p kl \\ m(ij) = m(kl) \quad \text{si } ij \approx_p kl \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Le rangement des paires de} \\ \text{critères (interaction)} \end{array} \quad (2.33)$$

$$\left. \begin{array}{l} m(ij) \geq \varepsilon \quad (\text{resp.} \leq -\varepsilon) \quad \text{si } m(ij) > 0 \quad (\text{resp.} < 0) \\ m(ij) = 0 \quad \text{si } m(ij) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Le signe de quelques} \\ \text{interactions} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i \in N} m(i) + \sum_{\{i,j\} \in N} m(ij) = 1 \\ m(i) \geq 0 \quad \forall i \in N \\ m(i) + \sum_{j \in T} m(ij) \geq 0 \quad \forall i \in N, \quad \forall T \subseteq N-i \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Les conditions de} \\ \text{borne et monotonie} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} C(a) = \sum_{i \in N} m(i)x_i^a + \sum_{\{i,j\} \in N} m(ij)[x_i^a \wedge x_j^a] \quad \forall a \in A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La définition de } C_\mu \end{array}$$

où  $m(\cdot)$  correspond à la transformation de Möbius, et les parenthèses d'ensemble sont omises, c'est-à-dire écrire  $\mu(i)$ ,  $S \cup i$  au lieu de  $\mu(\{i\})$ ,  $S \cup \{i\}$  et aussi pour les ensemble  $ij$ ,  $ijk$  au lieu de  $\{i, j\}$ ,  $\{i, j, k\}$  par exemple  $m(ij)$ , au lieu de  $m(\{i, j\})$ .

C'est naturel d'assumer que le rangement sur  $A$  est transmis à un semi-ordre partiel sur l'ensemble des évaluations données par l'intégral de Choquet. Ce semi-ordre partiel a un seuil de préférence fixé  $\delta$  qui peut être changer arbitrairement. Un tel seuil doit être atteint par la différence entre les résultats globaux afin de considérer un objet préférable significativement à un autre objet.

Comme l'intégral de Choquet est stable sous les même transformations admissibles d'intervalle, utiliser une échelle  $[0,100]$  ou  $[-2,3]$  n'a pas d'influence sur le rangement des alternatives. Supposer que les utilités  $x_i^a$  sont définis sur  $X = [0,1]$ . Changer cette échelle à  $[p,q]$  avec  $p < q$  et translater les utilités revient à faire le changement suivant sur les premiers contraintes

$$C(a) - C(b) \geq \delta + \frac{\varepsilon}{q - p} \quad \text{si } a \succ_A b$$

Il semble que une compromise raisonnable sera de prendre  $q - p = 1$  et ainsi de définir les utilités sur l'intervalle d'unité  $[0,1]$ .

La valeur du seuil  $\delta$  doit aussi être choisi attentivement. En effet, si  $\delta$  augmente,  $\varepsilon^*$  diminue. Un  $\delta$  trop large peut causer l'infaisabilité du programme. Il est suggéré de choisir  $\delta$  en comparant les solutions obtenues avec différents  $\delta$  [32].

#### 2.10.4. Le cas de la $\lambda$ -mesure

$\lambda$ -mesure est un cas spécial de la mesure floue. Pour un  $\lambda > -1$ , on a une mesure non-additive tel que:

$$A, B \in P(X) \text{ et } A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda \mu(A) \mu(B) \quad (2.34)$$

Le paramètre  $\lambda$  peut être déterminé grâce à la condition suivante: si  $\lambda > -1$  existe alors la mesure  $\mu$  satisfait la règle suivante [22]:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left\{ \prod_{i=1}^n [1 + \lambda \mu(A_i)] - 1 \right\} & \text{pour } \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^n \mu(A_i) & \text{pour } \lambda = 0 \end{cases}$$

pour chaque série  $\{A_i\}$  de l'ensemble de  $P(X)$ .

Comme dans ce cas on a

$$\mu(X) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \prod_{i=1}^n [1 + \lambda \mu(\{A_i\})] - 1 \right\},$$

et  $\mu(X) = 1$ , d'où le paramètre  $\lambda$  peut être déterminé par l'équation suivante:

$$1 + \lambda = \prod_{i=1}^n [1 + \lambda \mu(\{A_i\})] \quad (2.35)$$

### **3. Une Sélection d'Autres Méthodes Multicritères**

Les méthodes d'aide multicritères à la décision se différencient soit selon la méthode d'agrégation qu'elles utilisent soit selon le concept sur lequel elles sont basées. On a choisi deux méthodes d'aide multicritère à la décision qui sont les plus utilisées. La première méthode c'est TOPSIS qui est une méthode basée sur le concept de distance entre les alternatives et les solutions idéale et anti-idéale. Cette méthode utilise l'approche cardinale. C'est une méthode fréquemment utilisée grâce à sa simplicité et sa convenance au modèle de l'évaluation de l'homme. La deuxième méthode c'est ELECTRE III qui est basé sur le concept de préférence partiel et qui est une approche relationnelle [29]. Avec cette méthode on compare les alternatives deux par deux et on obtient un nombre qui exprime la préférence d'une alternative sur l'autre par rapport à un critère. Toutes ces relations de préférence sont agrégées en considérant tous les critères. Comme cela on obtient un ordre partiel des actions (alternatives) avec l'approche de rangement et on a l'occasion de modéliser des pseudo-critères.

#### **3.1. TOPSIS**

Un problème de décision multiple attributs avec  $m$  alternatives qui sont évaluées par  $n$  attributs peut être vu comme un système géométrique avec  $m$  points dans un espace de  $n$ -dimensionnels. Le TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) est basé sur le concept qui cherche à prendre l'alternative ayant la distance la plus courte de la solution idéale et la plus longue de la solution anti-idéale [33].

### 3.1.1. Solutions idéale et anti-idéale

Une solution idéale est définie comme la collection des niveaux idéaux dans tous les attributs (critères). Pourtant, la solution idéale est souvent irréalisable. Donc, être la plus proche d'une telle solution est la rationalité du choix humain. Comme l'idéale est dépendante des limites et contraintes courants de l'économie et de technologie, une idéale perçue est utilisée au lieu d'implémenter le choix rationnel dans un procès de décision normative. La solution idéale est notée comme

$$A^* = (x_1^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$$

où  $x_j^*$  est la meilleure valeur pour  $j$ -ème attribut entre tous les alternatives.

La composition de tous les meilleurs résultats pour les attributs correspondants est la solution idéale, et la solution anti-idéale est composée de tous les plus mauvais résultats faisables. La solution anti-idéale est donné par

$$A^- = (x_1^-, \dots, x_j^-, \dots, x_n^-)$$

où  $x_j^-$  est la pire des valeurs pour  $j$  ième attribut entre tous les alternatives. Il faut noter qu'en général la solution la plus proche de la solution idéale n'est pas la solution la plus loin de la solution anti-idéale.

Par exemple, soient les deux alternatives  $A_1$  et  $A_2$  par rapport à deux attributs bénéficiaire sur la Figure 3.1.  $A_1$  est la plus proche de la solution idéale et mais  $A_2$  est la plus loin de la solution anti-idéale.

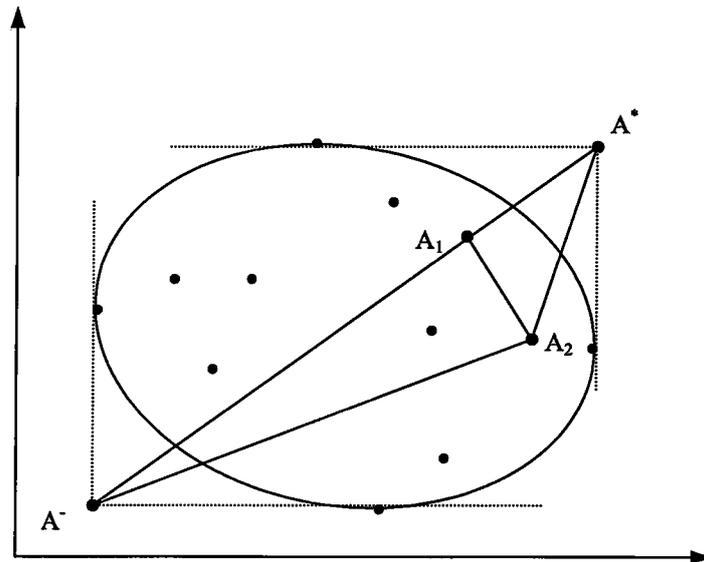


Figure 3.1. Les distances euclidiennes à la solution idéale et anti-idéale dans un espace de 2-dimensions [33]

### 3.1.2. TOPSIS

TOPSIS définit un indice nommé *similarité à la solution idéale* qui combine la proximité de la solution idéale et le lointainement de la solution anti-idéale. Ainsi, la méthode choisit une alternative avec la meilleure similarité à la solution idéale. TOPSIS assume que chaque critère prend l'utilité croissant monotone ou décroissant monotone. C'est-à-dire quand la valeur de l'attribut augmente, la préférence pour les attributs bénéficiaire augmente et la préférence pour les attributs de coût diminue.

La méthode est présentée avec les étapes successives suivantes:

*Etape 1. Calculer les valeurs normalisées.* La normalisation vectorielle est utilisée pour calculer  $r_{ij}$  qui est donné par

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

*Etape 2. Calculer les valeurs normalisées pondérées.* La valeur normalisée pondérée est calculée par

$$v_{ij} = w_j r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

où  $w_j$  est le poids de  $j$ -ème attribut.

*Etape 3. Identifier les solutions idéale et anti-idéale.*  $A^*$  et  $A^-$  sont définis en terme des valeurs normalisées pondérées

$$\begin{aligned} A^* &= \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_j^*, \dots, v_n^*\} \\ &= \left\{ \left( \max_i v_{ij} \mid j \in J_1 \right), \left( \min_i v_{ij} \mid j \in J_2 \right) \mid i = 1, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} A^- &= \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_j^-, \dots, v_n^-\} \\ &= \left\{ \left( \min_i v_{ij} \mid j \in J_1 \right), \left( \max_i v_{ij} \mid j \in J_2 \right) \mid i = 1, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $J_1$  est un ensemble des attributs bénéficiaires et  $J_2$  est un ensemble des attributs de coût.

*Etape 4. Calculer des mesures de séparation.* La séparation (distance) entre les alternatives peut être mesurée par la distance Euclidien  $n$ -dimensionnelles. La séparation de chaque alternative de la solution idéale,  $A^*$ , est donnée par

$$S_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^*)^2}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

Similairement, la séparation de chaque alternative de la solution anti-idéale,  $A^-$ , est donnée par

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6)$$

*Etape 5. Calculer la similarité à la solution idéale. On a*

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{(S_i^* + S_i^-)} = 1 - \frac{S_i^*}{(S_i^* + S_i^-)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

Noter que  $0 \leq C_i^* \leq 1$  où  $C_i^* = 0$  quand  $A_i = A^-$ ,  $C_i^* = 1$  quand  $A_i = A^*$ .

*Etape 6. Trier les ordres de préférence. Choisir l'alternative avec un maximum  $C_i^*$  ou bien ranger les alternatives par rapport aux  $C_i^*$  dans l'ordre décroissant.*

## 3.2. ELECTRE

### 3.2.1. Approche de rangement et les méthodes d'ELECTRE

La famille ELECTRE qui comprend six méthodes de multicritère toutes basées sur l'approche de rangement assume [34]:

- (1) *Un ensemble  $A$  des actions (alternatives) potentielles.*
- (2) *Une famille consistante  $F$  des  $n$  critères  $g_j$ . Les préférences des acteurs sont traités par rapports aux points de vue reflétés par les critères de  $F$ ;  $g_j(a)$  est nommé la performance  $j$ -ème de  $a$ . On peut supposer que*

- i.  $g_j(a)$  est un nombre réel (même si il reflète un jugement qualitative.)
- ii.  $\forall b \in A$  et  $a \in A, g_j(b) \geq g_j(a)$  implique  $b$  est au moins aussi bon que  $a$ , si seulement le point de vue de  $j$ -ème critère est considéré.

(3) *Imprécision, incertain et/ ou la détermination incorrecte des performances* peut causer quelques acteurs de juger (sur un critère donné, e.g. le  $k$ -ième) que

- i.  $b$  est indifférent de  $a$ , quand  $g_j(b) = g_j(a), \forall j \neq k$  même si  $g_k(b) \neq g_k(a)$  ;
- ii.  $b$  est préférable strictement que  $a$ , quand  $g_j(b) = g_j(a), \forall j \neq k$  seulement si la différence  $g_k(b) - g_k(a)$  est suffisamment signifiante.

(4) *Un modèle de préférence par rapport à un acteur particulier* (réel ou mythique) dite décideur, existe et permet de considérer hésitations entre les deux des trois cas suivants:

- i.  $b I a$ , indifférence
- ii.  $b P a$ , préférence stricte
- iii.  $a P b$ , préférence stricte .

Parmi lesquelles on peut citer:

- ☞ *Préférence faible* (relation  $Q$ ).  $b Q a$ , si hésitation est entre les cas  $b I a$  et  $b P a$  étant sûre de non  $a P b$ ;  $a Q b$ , si hésitation est entre les cas  $b I a$  et  $a P b$  excluant  $b P a$
- ☞ *Incomparabilité* (relation  $R$ ).  $b R a$  si hésitation est entre  $b P a$  et  $a P b$ .

Toutes ces relations sont présentées sur la Figure 3.2.

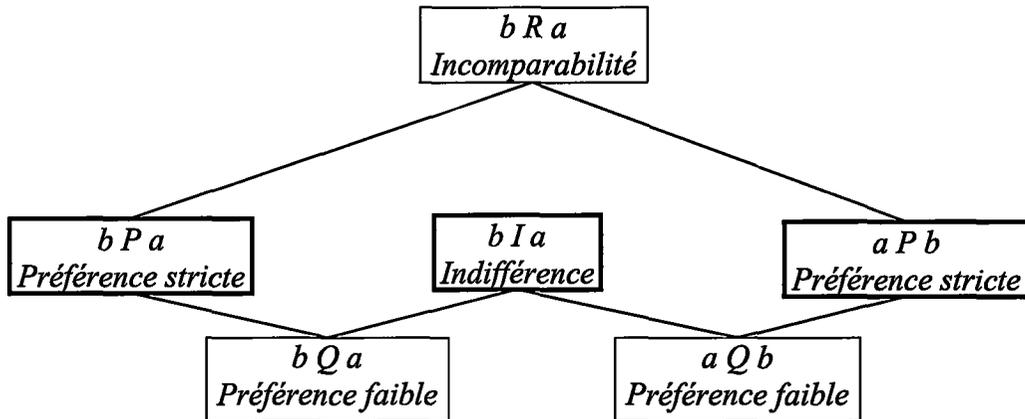


Figure 3.2. Le modèle des préférences de décideur

L'approche de rangement est basée sur l'axiome de Roy nommé *axiome de comparabilité partielle fondamentale*. Selon cet axiome, les préférences peuvent être modélées par quatre relations binaires:  $I$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ . Avec la relation de préférence faible  $Q$ , tous les autres relations peuvent être obtenues:

- ↷  $b P a$  implique  $b Q a$  et non  $a Q b$  ;
- ↷  $b I a$  implique  $b Q a$  et  $a Q b$  ;
- ↷  $b R a$  implique non  $b Q a$  et non  $a Q b$  ;

Afin de modéliser un critère qui prend en compte la situation où la différence  $g_i(b) - g_i(a)$  traduisent une indifférence entre  $a$  et  $b$ , il est introduit un seuil d'indifférence,  $q_i(g_i(b))$  représentant le plus grand écart  $g_i(b) - g_i(a)$  compatible avec la situation d'indifférence entre  $a$  et  $b$ , tel que

$$a P b \Leftrightarrow g_i(a) - g_i(b) > q_i(g_i(b))$$

$$a I b \Leftrightarrow g_i(a) - g_i(b) \leq q_i(g_i(b))$$

Pour éviter un passage brusque de l'indifférence à la préférence stricte, il est introduit un seuil de préférence,  $p_i(g_i(b))$  laissant place à une zone de préférence faible ( $Q$ ).

Pour  $g_i(a) \geq g_i(b)$ , on a les relations ci-dessous

$$\begin{aligned}
a P b &\Leftrightarrow g_i(a) - g_i(b) > p_i(g_i(b)) \\
a Q b &\Leftrightarrow q_i(g_i(b)) < g_i(a) - g_i(b) \leq p_i(g_i(b)) \\
a I b &\Leftrightarrow 0 \leq g_i(a) - g_i(b) \leq q_i(g_i(b))
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ce type de critère qui consiste en même temps un seuil d'indifférence et de préférence est nommée un *pseudo-critère*. Afin d'éviter quelques inconsistances, les fonctions des seuils doivent satisfaire les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
g_i(a) > g_i(b) &\Rightarrow g_i(a) + q_i(g_i(a)) \geq g_i(b) + q_i(g_i(b)) \quad \text{et} \\
&g_i(a) + p_i(g_i(a)) \geq g_i(b) + p_i(g_i(b)); \\
&p_i(g_i(a)) \geq q_i(g_i(b)), \quad \forall g_i
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ce type de procédure de modélisation peut présenter un manque de stabilité sérieux. On peut voir des cas où une petite variation des scores cause des variations des pseudo-ordre et donc, des prescriptions conflictuelles. Le fait d'un tel manque de stabilité, peut être prévenu par des analyses de sensibilité.

La classification des modèles selon les présences des seuils est faite comme suit:

- ☞ un *quasi-critère* est un pseudo-critère tel que  $p(g_i(a)) = q(g_i(a)), \forall a \in A$
- ☞ un *pré-critère* est un pseudo-critère tel que  $q(g_i(a)) = 0, \forall a \in A$  ou bien n'est pas défini.
- ☞ un *vrai-critère* est un pseudo-critère tel que  $p(g_i(a)) = q(g_i(a)) = 0, \forall a \in A$

Le vrai-critère est le modèle classique utilisé en théorie de la décision. Les deux premiers permettent de modeler les situations où l'indifférence n'est pas transitive. Le concept de comparabilité partielle est la base de ces méthodes de surclassement. Ce sont basé sur la compréhension que, en général, la relation de dominance est faible parce qu'elle est basée sur un consensus de point de vue. C'est-à-dire une action  $a$  est dominant sur  $b$  seulement si  $a$  est au moins aussi bon que  $b$  sur tous les critères

considérés. Alternativement,  $a$  est dominant sur  $b$ , si  $a$  est au moins aussi bon que  $b$  sur la majorité des cas et n'est pas si mauvais sur n'importe quel cas. Le concept derrière des méthodes de surclassement est que l'enrichissement des relations de dominance peut être fait lorsque l'information réelle est disponible. Donc, il existe un structure formel entre la relation de dominance et le préordre complète de la fonction d'utilité. En utilisant les méthodes de surclassement, quelques relations incomparables deviennent comparables, grâce à l'existence de l'information réelle, mais néanmoins quelques autres restent incomparables. Brièvement, ces modèles consistent en agrégation des critères dans une relation binaire partielle  $a S b$  (relation de surclassement) et donc exploitation de cette relation. Ces étapes d'agrégations peuvent être traitées dans quelques différentes manières selon la formulation du problème et le cas particulier considéré.

### 3.2.2. ELECTRE III

Parmi les méthodes ELECTRE, ELECTRE III qui permet de prendre en compte en plus des pseudo-critères un seuil de veto, est choisi, car il est toujours possible de considérer des vrais critères ou les quasi-critères en choisissant les valeurs nécessaires pour les fonctions des seuils correspondants.

ELECTRE III prennent en compte, pour chaque critère un seuil de veto  $v_j$  qui en même titre que les seuils d'indifférences,  $q_j(g_j(b))$ , et de préférences,  $p_j(g_j(b))$ , peuvent varier avec la performance. Elles font enfin intervenir, un coefficient d'importance  $k_j > 0$  qui sert à apprécier l'importance de la coalition concordante avec la proposition  $b S a$ . On note  $\sigma_s(b, a)$ , l'indice de crédibilité de cette affirmation [35].

La définition de l'indice de crédibilité  $\sigma_s(b, a)$  prend appui

- ↪ d'une part sur un *indice de concordance*  $c(b, a)$  qui fait intervenir les coalition  $C(b S a)$  et  $C(a S b)$  ;
- ↪ d'autres part des *indices de discordance*  $d_j(b, a)$  définis pour chaque critère  $j \in F$  .

Ici,  $b S a$  présente la *relation de surclassement* qui correspond à l'existence de raisons claires et positives qui justifient soit une préférence, soit une présomption de préférence. Mais il doit y avoir aucune séparation significative établie entre les situations de préférence stricte, de préférence faible et d'indifférence. Cette relation est une relation binaire floue. La relation binaire pour la relation de surclassement est donné par [35]

$$a S b \Rightarrow (a P b \text{ ou } a Q b \text{ ou } a I b).$$

En plus,  $C(a S b)$  qui présente la coalition des critères concordante avec la proposition  $a S b$  est défini par

$$C(a S b) = \{j \in F \mid a S b\}$$

La première partie de l'indice de crédibilité, indice de concordance,  $c(b, a)$ , est défini comme suit:

$$c(b, a) = c_1(b, a) + c_2(a, b) \quad (3.10)$$

où

$$c_1(b, a) = \frac{1}{k} \sum_{j \in C(b S a)} k_j, \text{ avec } k = \sum_{j \in F} k_j$$

et

$$c_2(a,b) = \frac{1}{k} \sum_{j \in C(aQb)} \varphi_j k_j$$

$$\text{avec } \varphi_j = \frac{p_j(g_j(b)) + g_j(b) - g_j(a)}{p_j(g_j(b)) - q_j(g_j(b))}$$

on a par définition

$$C(bSa) = \{j \in F \mid g_j(b) + q_j(g_j(b)) \geq g_j(a)\} \text{ et}$$

$$C(aQb) = \{j \in F \mid g_j(b) + q_j(g_j(b)) < g_j(a) \leq g_j(b) + p_j(g_j(b))\}$$

Le coefficient  $\varphi_j$  décroît linéairement de 1 jusqu'à 0 lorsque  $g_j(a)$  décrit l'intervalle  $[g_j(b) + q(g_j(b)); g_j(b) + p(g_j(b))]$ .

La deuxième partie de l'indice de crédibilité, indice de discordance du critère  $j$ , est créé afin de présenter le fait que le critère  $j$  est plus ou moins discordant avec la proposition  $bSa$ . Cette discordance est maximum,  $d_j(b,a) = 1$ , lorsque le critère  $j$  met son veto au surclassement. Elle est minimum,  $d_j(b,a) = 0$ , lorsque le critère  $j$  n'est pas discordant, c'est-à-dire  $j \notin C(aPb)$ . La valeur de l'indice dans la zone intermédiaire est définie proportionnellement à  $g_j(a) - g_j(b)$ , d'où la définition suivante:

$$d_j(b,a) = \begin{cases} 0 & \text{si } g_j(a) - g_j(b) < p_j(g_j(b)) \\ \frac{g_j(a) - g_j(b) - p_j(g_j(b))}{v_j(g_j(b)) - p_j(g_j(b))} & \text{si } p_j(g_j(b)) \leq g_j(a) - g_j(b) < v_j(g_j(b)) \\ 1 & \text{si } g_j(a) - g_j(b) \geq v_j(g_j(b)) \end{cases} \quad (3.11)$$

pour les critères discordants qui vérifie  $d_j(b,a) > c(b,a)$ . En absence d'un tel critère l'indice de crédibilité  $\sigma(b,a) = c(b,a)$ . La valeur de crédibilité est réduite s'il y a un ou plusieurs critères discordants. Cette réduction augmente au fur et à mesure que

$d_j(b, a)$  approche de 1. En accord avec l'effet de veto,  $\sigma(b, a) = 0$  si  $d_j(b, a) = 1$  au moins pour un critère.

Plus précisément

$$\sigma(b, a) = c(b, a) \cdot \prod_{j \in D_c(b, a)} \frac{1 - d_j(b, a)}{1 - c(b, a)} \quad (3.12)$$

avec

$$D_c(b, a) = \{j \mid j \in F, d_j(b, a) > c(b, a)\}$$

On observe bien que l'indice de crédibilité a la propriété suivante dans ELECTRE III:

$$0 \leq \sigma(a, b) + \sigma(b, a) \leq 2$$

Chacune des deux bornes pouvant être atteinte. (Voir Figure 3.3)

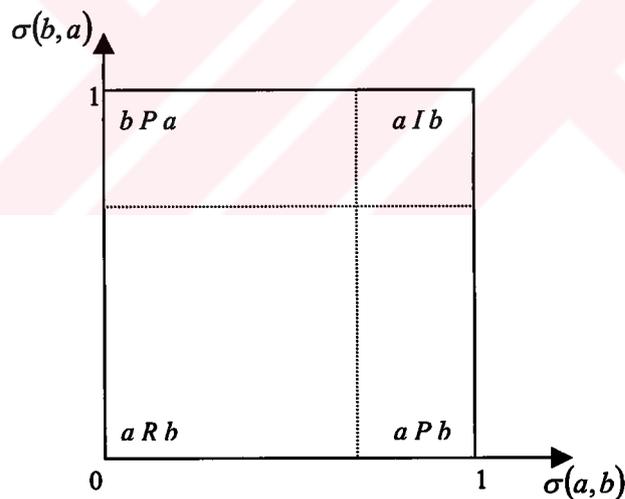


Figure 3.3. Comparaison des actions dans ELECTRE III [35]

Le cas  $\sigma(a, b) + \sigma(b, a) = 2$  traduit une indifférence bien établie entre  $a$  et  $b$ . Lorsque la somme considérée diminue avec  $\sigma(a, b)$  voisine de  $\sigma(b, a)$ , on passe de l'indifférence à l'incomparabilité. Déjà pour  $\sigma(a, b) + \sigma(b, a) = 1$ , l'indifférence n'est plus acceptable. Toutes ces relations sont illustrées sur la Figure 3.3.

La procédure de rangement de ELECTRE III utilise une distillation qui est basé sur la qualification de chaque alternative. Les principes de base sont comme suit:

- ↻ Construction d'un ordre complet  $Z_1$ ,
- ↻ Construction d'un ordre complet  $Z_2$ ,
- ↻ Construction d'un ordre partiel  $Z = Z_1 \cap Z_2$ .

La construction de  $Z_1$  et  $Z_2$  est accomplit à travers une distillation descendant et ascendant, respectivement. Pour le commencement, la valeur  $\lambda = \max S(a, b)$  est déterminée et seulement les arcs qui ont des valeurs suffisamment proche de  $\lambda$  sont considérés dans la matrice des degrés de surclassement, i.e. plus précisément ceux qui ont une valeur plus large ou égale à  $\lambda - s(\lambda)$ . Dans cette procédure  $s(\lambda)$  est un seuil à déterminer [36].

Plus clairement, l'algorithme de rangement de ELECTRE III utilise la matrice des degrés de crédibilité pour construire deux classements selon les procédés dits la distillation descendante ( $Z_1$ ) et de distillation ascendante ( $Z_2$ ): distillation descendante sélectionne au fur et à mesure les meilleures actions pour terminer avec les pires alors que la distillation ascendante sélectionne au fur et à mesure les pires actions pour terminer avec les meilleurs. On obtient ainsi deux pré-ordres complets sur l'ensemble des actions. Une action qui est incomparable à une séquence d'autres actions sera positionnée à la fin de cette séquence dans la distillation descendante et en tête dans la distillation ascendante.

Les rangs dans le pré-ordre final sont établis de la façon suivante: toute action qui n'admet aucune action meilleure qu'elle sera affectée au rang 1, même si elle est incomparable à de nombreuses d'autres actions, les actions de rang 2 seront celles qui n'admettent que des actions de rang 1 meilleure qu'elles et ainsi de suite... cette représentations occulte totalement les incomparabilités: Deux actions de même rang peuvent être équivalentes ou incomparables sans qu'il soit possible de différencier ces deux cas. De même, rien ne permet de distinguer pour des actions de rangs différents si l'une est meilleure que l'autre ou si elles sont incomparables [37].

## **4. Application dans l'Aide Multicritère à la Décision**

### **4.1. Détermination des coefficients pour un problème de sélections des étudiants**

La mesure floue et l'intégral floue permet de modéliser l'interaction entre les critères comme on l'a expliqué aux chapitres précédents. Cet avantage de représenter les dépendances de n'importe quel type est retiré par la difficulté de déterminer ces coefficients. La méthode proposée par Roubens et Marichal qui combine les méthodes sémantiques par le concept de  $k$ -ordre additivité de Grabisch semble être bien applicable aux problèmes d'aide multicritère à la décision. Ici on va présenter un exemple de sélection des candidats pour un programme de 3ème cycle.

En bref, on va s'intéresser à trouver une mesure floue 2-ordre basée sur un rangement partiel des candidats et sur des considérations sémantiques comme présenté en 2.10.1. Les critères considérés sont

- ☞ Le score de TOEFL (Test of English as a Foreign Language). La note est basée sur le CAT (Computer Adaptive Test). L'échelle est sur 300.
- ☞ Le score de GRE (Graduate Record Exam) L'échelle est sur 800 pour la teste quantitative et 800 pour la teste analytique. La somme des deux scores est considérée.
- ☞ La moyenne des études précédentes. La note est donnée sur une échelle de 4.
- ☞ La note pour les essais. Les essais sont notés par les membres de conseil des admissions sur 5.

Afin de déterminer les coefficients de la mesure floue on va résoudre un programme linéaire en utilisant les contraintes qu'on a citées en 2.10.3:

- ☞ L'ensemble  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  des alternatives et l'ensemble  $N = \{\text{TOEFL}, \text{GRE}, \text{Moyenne}, \text{Essais}\}$  des critères,
- ☞ Un tableau des résultats individuels  $x_i^a$  donnés sur le Tableau 4.1.
- ☞ Un pré-ordre partiel  $\succ_A$  sur  $A$  (un rangement des alternatives),
- ☞ Un pré-ordre partiel  $\succ_N$  sur  $N$  (un rangement des critères),
- ☞ Un pré-ordre partiel  $\succ_A$  sur l'ensemble des paires de critères (un rangement des indices interactions),
- ☞ Le signe d'interaction entre quelque paire de critères  $m(ij) : > 0, < 0, = 0$ .

Les décideurs vont comparer les six candidats qui ont les scores présentés sur le Tableau 4.1. Après avoir obtenu les coefficients de Möbius,  $m(i), m(ij)$ , ou bien, les valeurs de la mesure floue,  $\mu(i), \mu(ij), \mu(ijk)$ , on sera modelé l'évolution des décideurs et on aura l'occasion de juger des ensembles de candidats plus nombreux.

Tableau 4.1. Les scores des candidats

	$\leq 300$	$\leq 1600$	$\leq 4,00$	1-5
	1. TOEFL	2. GRE	3. Moyenne	4. Essais
<b>Candidat 1</b>	250	1300	3,20	4
<b>Candidat 2</b>	227	1300	3,50	3
<b>Candidat 3</b>	240	1400	3,30	3
<b>Candidat 4</b>	240	1500	3,50	4
<b>Candidat 5</b>	243	1450	3,30	4
<b>Candidat 6</b>	230	1300	3,20	3

Les décideurs sont demandés de trier ces candidats. Ils/elles font les évaluations suivantes:

- ↪ Candidat 1 est préférable que Candidat 2; car il a fait un bon score de TOEFL et sa note pour les essais est bien aussi.
- ↪ Candidat 3 est préférable que Candidat 2; car les notes de TOEFL et de GRE sont mieux.
- ↪ Candidat 4 est préférable que les autres avec un score de GRE 1500, en plus sa note de TOEFL et sa moyenne et essais sont aussi bien.
- ↪ Candidat 1 est préférable que Candidat 6 avec son score de TOEFL.
- ↪ Candidat 5 est préférable que Candidat 1 grâce à son score de GRE.

En effet, ils/elles donnent le pré-ordre partiel suivant pour les candidats:

Candidat 4  $\succ_A$  Candidat 5

Candidat 5  $\succ_A$  Candidat 1

Candidat 1  $\succ_A$  Candidat 2

Candidat 1  $\succ_A$  Candidat 6

Candidat 3  $\succ_A$  Candidat 2

Enfin après avoir mis un rangement entre les candidats 1, 2, 6 ils/ elles posent le pré-ordre suivant:

Candidat 4  $\succ_A$  Candidat 5

Candidat 5  $\succ_A$  Candidat 1

Candidat 1  $\succ_A$  Candidat 3

Candidat 3  $\succ_A$  Candidat 2

Candidat 2  $\succ_A$  Candidat 6

Les décideurs ne posent pas un pré-ordre partiel sur les critères ou bien sur les paires de critères. Les notes des candidats selon différents critères sont normalisées par la valeur maximum. Comme cela tous les échelles sont sur  $[0, 1]$ . Après cette normalisation les contraintes pour le programme linéaires sont calculées d'après les pré-ordres donnés par les décideurs basés sur ces valeurs. Les conditions pour ce pré-ordre peuvent être écrites comme si dessous selon l'équation (2.29) et les contraintes (2.33):

Candidat 4  $\succ_A$  Candidat 5

$$\begin{aligned} & -0,01m(1) + 0,03m(2) + 0,06m(3) - 0,01m(12) + 0,02m(13) \\ & \quad - 0,01m(14) + 0,06m(23) + 0,03m(24) + 0,06m(34) \end{aligned}$$

Candidat 5  $\succ_A$  Candidat 1

$$\begin{aligned} & -0,03m(1) + 0,1m(2) + 0,03m(3) - 0,1m(12) + 0,03m(13) \\ & \quad - 0,03m(14) + 0,08m(23) + 0,1m(24) + 0,03m(34) \end{aligned}$$

Candidat 1  $\succ_A$  Candidat 3

$$\begin{aligned} & 0,04m(1) - 0,07m(2) - 0,03m(3) + 0,25m(4) - 0,07m(12) - 0,03m(13) \\ & \quad + 0,25m(14) - 0,07m(23) + 0,12m(24) + 0,16m(34) \end{aligned}$$

Candidat 3  $\succ_A$  Candidat 2

$$0,05m(1) + 0,07m(2) - 0,06m(3) + 0,07m(12) + 0,03m(13) + 0,07m(23)$$

Candidat 2  $\succ_A$  Candidat 6

$$-0,01m(1) + 0,09m(3) - 0,01m(13)$$

Le programme linéaire considéré sera comme ci-dessous

$$\max z = \varepsilon$$

sous les contraintes

$$\varepsilon \geq 0$$

$$\begin{aligned} -0,01m(1) + 0,03m(2) + 0,06m(3) - 0,01m(12) + 0,02m(13) \\ - 0,01m(14) + 0,06m(23) + 0,03m(24) + 0,06m(34) \geq \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0,03m(1) + 0,1m(2) + 0,03m(3) - 0,1m(12) + 0,03m(13) \\ - 0,03m(14) + 0,08m(23) + 0,1m(24) + 0,03m(34) \geq \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,04m(1) - 0,07m(2) - 0,03m(3) + 0,25m(4) - 0,07m(12) - 0,03m(13) \\ + 0,25m(14) - 0,07m(23) + 0,12m(24) + 0,16m(34) \geq \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

$$0,05m(1) + 0,07m(2) - 0,06m(3) + 0,07m(12) + 0,03m(13) + 0,07m(23) \geq \delta + \varepsilon$$

$$-0,01m(1) + 0,09m(3) - 0,01m(13) \geq \delta + \varepsilon$$

$$m(1) + m(2) + m(3) + m(4) + m(12) + m(13) + m(14) + m(23) + m(24) + m(34) = 1$$

$$m(i) \geq 0, \quad i \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$m(i) + m(ij) \geq 0, \quad i, j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$m(i) + m(ij) + m(ik) \geq 0, \quad i, j, k \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$m(i) + m(ij) + m(ik) + m(il) \geq 0, \quad i, j, k, l \in N = \{1, 2, 3, 4\}$$

En utilisant le logiciel Excel SOLVER on a la solution optimale avec  $\delta = 0,025$  :

∞ La fonction objective  $\varepsilon = 0,0006$ ; les poids  $m(i) = \mu(i)$  et les valeurs de Shapley sont présentés sur le Tableau 4.2.

Tableau 4.2. Les poids  $m(i) = \mu(i)$  et les valeurs de Shapley

	<b>TOEFL</b>	<b>GRE</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Essais</b>
$m(i) = \mu(i)$	0,3205	0,5692	0,3205	0,2582
$I(i)$	0,1603	0,4440	0,2154	0,1804

↻ Les indices d'interactions sont présentées sur le Tableau 4.3.

Tableau 4.3. Les indices d'interactions

$I(ij) = m(ij)$	<b>GRE</b>	<b>Moyenne</b>	<b>Essais</b>
<b>TOEFL</b>	0	-0,3205	0
<b>GRE</b>		0,0077	-0,2582
<b>Moyenne</b>			0,1026

↻ En suite, la mesure floue obtenue est présentée sur le Tableau 4.4.

Tableau 4.4. Les poids de la mesure floue obtenue

$\mu(1)$	$\mu(2)$	$\mu(3)$	$\mu(4)$		
0,3205	0,5692	0,3205	0,2582		
$\mu(12)$	$\mu(13)$	$\mu(14)$	$\mu(23)$	$\mu(24)$	$\mu(34)$
0,8897	0,3205	0,5788	0,8974	0,5692	0,6813
$\mu(123)$	$\mu(124)$	$\mu(134)$	$\mu(234)$	$\mu(1234)$	
0,8974	0,8897	0,6813	1,0000	1,0000	

↻ Enfin, les évaluations globales sont présentées sur le Tableau 4.5.

Tableau 4.5. Les évaluations globales  $C_\mu$ 

	$C_\mu$		$C_\mu$
<b>Candidat 1</b>	0,9487	<b>Candidat 4</b>	1,0000
<b>Candidat 2</b>	0,8974	<b>Candidat 5</b>	0,9744
<b>Candidat 3</b>	0,9231	<b>Candidat 6</b>	0,8718

En utilisant ce résultat obtenu il faut être prudent, car tous ce qu'on a, est une solution qui est réalisable avec les contraintes qu'on a prévues. C'est-à-dire il n'est pas très convenable de faire des conclusions générales. En plus le modèle proposé a une structure qui facilite les solutions multiples. Donc il faut être attentif en choisissant les paramètres du modèle et la solution qui reflète la plus la mesure floue cherchée.

#### 4.2. Corrélacion entre les ordres de rangements des méthodes de l'aide multicritère à la décision

##### 4.2.1. Les résultats obtenus par les trois méthodes d'aide multicritères à la décision

Pour tester la stabilité de la mesure floue qu'on a trouvé en section 4.1 on va l'utiliser sur un autre échantillon d'étudiants. En plus on va comparer les ordres de rangement obtenu par une sélection de méthode d'aide multicritère à la décision: TOPSIS et ELECTRE III. Les scores des étudiants sont donnés sur le Tableau 4.6.

Tableau 4.6. Les scores des étudiants

<i>No</i>	<i>TOEFL</i>	<i>GRE</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Essais</i>	<i>No</i>	<i>TOEFL</i>	<i>GRE</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Essais</i>
1	240	1300	3,93	4	11	247	1550	3,86	5
2	247	1190	3,29	3	12	253	1270	3,07	3
3	237	1270	3,31	4	13	247	1210	3,80	3
4	217	1380	3,07	4	14	243	1400	3,18	5
5	257	1190	3,84	4	15	237	1260	3,44	4
6	240	1510	3,30	4	16	260	1450	3,07	3
7	253	1130	3,38	4	17	237	1130	3,75	4
8	247	1510	3,02	4	18	223	1100	3,62	4
9	240	1220	3,68	5	19	253	1320	3,15	3
10	233	1470	3,73	3	20	247	1410	3,71	4

Les premiers résultats se sont calculés avec les coefficients obtenus par le modèle en section 4.1. Les résultats des vingt candidats sont utilisés après avoir normalisé par la valeur maximum avec la formule suivant:

$$r_i^a = \frac{x_i^a}{\max_i x_i^a}$$

Avec l'équation (2.28), l'intégral de Choquet est calculé facilement en fonction de la transformation de Möbius. Les cinq premiers candidats sont 11, 8, 6, 14, 16, respectivement et le dernier, c'est le deuxième.

Afin d'obtenir le rangement avec la méthode de TOPSIS, on a utilisé la valeur de Shapley  $I(i)$ , qui reflète l'importance des critères dans tous les coalitions possibles donnée sur le Tableau 4.2, comme le vecteur de l'importance des critères. Les solutions idéale et anti-idéale sont obtenues selon les valeurs normalisées pondérées données sur le Tableau 4.7. Avec cette méthode qui cherche à obtenir les alternatives qui sont la plus proche de la solution idéale et la plus loin de la solution anti-idéale, les cinq premiers résultats sont 11, 6, 8, 14, 20, respectivement, et le dernier, c'est le deuxième.

Tableau 4.7. La solution idéale et anti-idéale

	TOEFL	GRE	Moyenne	Essais
$A^*$	0,1603	0,4440	0,2154	0,1804
$A^-$	0,1338	0,3151	0,1655	0,1082

Enfin pour obtenir le pré-ordre par la méthode d'ELECTRE III on a utilisé le logiciel ELECTRE III\_IV [37]. On commence par la définition des critères en indiquant le poids et son sens de préférence. On a choisi les poids des critères concordant à la valeur de Shapley; étant [0,16 ; 0,44 ; 0,18 ; 0,22]. Puis les vingt actions (les candidats) et ses performances sont saisies.

Ensuite il fallait de saisir les seuils pour les quatre critères. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  des seuils d'indifférence, de préférence, et de veto sont saisis. On a l'option de supprimer l'effet de veto. Si les seuils d'indifférence et de préférence ne sont pas pertinents pour le critère considéré (c'est-à-dire si on estime être en présence d'un vrai-critère), on doit saisir 0 pour les quatre coefficients des seuils d'indifférence et de préférence. Si, au contraire, on souhaite définir un pseudo-critère, on doit saisir les valeurs appropriées pour construire les fonctions seuil d'indifférence et de préférence qu'on souhaite. Tout seuil se calcule comme une fonction affine de la performance:  $\alpha \cdot g(a) + \beta$ . Si on souhaite définir un seuil constant sur toute l'étendue de l'échelle des performances, il suffit de saisir  $\alpha = 0$ ,  $\beta =$  valeur constante du seuil. Pour définir un seuil proportionnel à la performance, il suffit de saisir  $\beta = 0$ .

Pour le problème d'évaluation des étudiants, on a choisi des seuils constants pour les trois premières contraintes. Le troisième contrainte, essais, est estimé un vrai-critère. L'effet de veto n'existe pas pour ces critères. Les seuils de préférence et d'indépendance sont considérés comme montrés sur le Tableau 4.8.

Tableau 4.8. Les seuils de préférence et d'indépendance

	TOEFL	GRE	Moyenne	Essais
$q_i$	3	10	0,02	0
$p_i$	10	30	0,05	0

Les résultats obtenus par ces données peuvent être interprétés par le logiciel ELECTRE III. Le rang dans le pré-ordre final permet de voir les incomparabilités et les équivalences dans le même rang. On n'a pas donc un rang complet qu'on peut comparer avec les autres pré-ordres qu'on avait obtenus. C'est la raison pour la quelle on a utilisé le pré-ordre médian. Ce classement est une alternative possible pour ceux qui ne souhaitent pas prendre en compte les incomparabilités. Il s'agit d'un pré-ordre complet (c'est-à-dire par lequel deux actions quelconques sont nécessairement comparables: l'une est meilleure que l'autre ou elles sont équivalentes) construit à partir du pré-ordre final partiel de la façon suivante: les actions sont rangées suivant les rangs du pré-ordre final puis les actions d'un même rang sont départagées suivant la

différence de leurs positions dans les deux pré-ordres (cet indicateur mesure la stabilité relative entre les deux pré-ordres).

Ainsi, on a trois différents ordres pour les vingt candidats considérés. Ces pré-ordres sont donnés sur le Tableau 4.9 pour les méthodes TOPSIS, l'intégral de Choquet et ELECTRE III.

Tableau 4.9. Le résultat obtenu par les trois méthodes d'aide multicritères à la décision

Ordre	TOPSIS		Choquet		ELECTRE III
	Candidat	C	Candidat	$C_{\mu}$	Candidat
1	11	0,9461	11	0,9923	11
2	6	0,7028	8	0,9438	1
3	8	0,6631	6	0,9389	20
4	14	0,6531	14	0,9279	5
5	20	0,6521	16	0,9206	16
6	10	0,5914	10	0,9129	6
7	16	0,5332	20	0,9114	14
8	4	0,5200	9	0,9052	9
9	1	0,5125	1	0,8864	8
10	9	0,4799	19	0,8644	19
11	3	0,4011	4	0,8604	10
12	15	0,4009	5	0,8501	13
13	19	0,3863	3	0,8469	15
14	5	0,3826	12	0,8458	7
15	13	0,3161	15	0,8432	17
16	12	0,3126	7	0,8329	4
17	17	0,3061	17	0,8268	3
18	7	0,2688	13	0,8218	12
19	18	0,2635	18	0,8100	18
20	2	0,2110	2	0,8090	2

#### 4.2.2. Le calcul des coefficients de corrélations de rangement de Spearman

C'est une approche non paramétrique à la corrélation qui utilise les rangs des mesures pour déterminer une mesure de corrélation [38]. Le coefficient de corrélation  $r_s$  se calcule par

$$r_s = \frac{SS_{uv}}{\sqrt{SS_{uu} \cdot SS_{vv}}}$$

où

$$SS_{uv} = \sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$$

$$SS_{uu} = \sum (u_i - \bar{u})^2$$

$$SS_{vv} = \sum (v_i - \bar{v})^2$$

avec

$u_i$  : le rang de  $i$  ième mesure dans l'échantillon 1

$v_i$  : le rang de  $i$  ième mesure dans l'échantillon 2

$n$  : le nombre de paires de mesure

$\bar{u}, \bar{v}$  : la moyenne des rang dans la première et la deuxième mesures.

Noter que la définition du coefficient de rangement de corrélation de Spearman est identique à la définition de coefficient de corrélation de Pearson  $r$ , sauf  $r_s$  utilise les rangs. On peut utiliser aussi une formule plus court qui est équivalente quand il n'y a pas de nœud dans les rangs.

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

où

$$d_i = u_i - v_i$$

Après avoir calculé le coefficient de corrélation on peut faire un test d'hypothèse afin de vérifier notre hypothèse.

$H_0 : \rho_s = 0$  (Il n'y a pas corrélation de population entre les rangements.)

$H_a : \rho_s > 0$  (Il y a une positive corrélation de population entre les rangements.)

La région de rejet, c'est  $r_s > r_{s,\alpha}$  où  $r_{s,\alpha}$  est la valeur qui correspond à  $\alpha$  et  $n$  paires d'observation. Ces valeurs sont introduites dans les livres correspondants. Les ordres par rapport à trois méthodes sont donnés dans le Tableau 4.10 et les coefficients de corrélation correspondants sont indiqués sur le Tableau 4.11.

**Tableau 4.10. Les ordres par rapport à trois méthodes**

<b>Candidat</b>	<b>TOPSIS</b>	<b>Choquet</b>	<b>ELECTRE</b>
1	9	9	2
2	20	20	20
3	11	13	17
4	8	11	16
5	14	12	4
6	2	3	6
7	18	16	14
8	3	2	9
9	10	8	8
10	6	6	11
11	1	1	1
12	16	14	18
13	15	18	12
14	4	4	7
15	12	15	13
16	7	5	5
17	17	17	15
18	19	19	19
19	13	10	10
20	5	7	3

**Tableau 4.11. Les coefficients de corrélation de Spearman**

<b>Corrélation (TOPSIS, Choquet)</b>	<b>0,95</b>
<b>Corrélation (ELECTRE III, Choquet)</b>	<b>0,75</b>

La valeur de  $r_{s,\alpha}$  pour un  $\alpha = 0,01$  c'est 0,534. On conclue donc il y a une corrélation positive entre les rangements obtenus des trois méthodes.



## 5. Conclusion

La mesure floue est une extension de la mesure de façon à remplacer la propriété d'additivité par une condition moins rigide, la monotonie. C'est-à-dire au lieu de la supposition d'additivité qui ne reflète pas l'évaluation subjective de l'homme, la monotonie est introduite. Avec son modèle, M. Sugeno cherche à simuler comment les individus intègrent les informations, comment les évaluent-ils et comment décident-ils sur leurs actions. Malgré les études profondes sur la théorie de la mesure floue, les applications de la mesure floue manquent surtout en MCDM. Cette brèche est causée par la difficulté de l'utilisation pratique et de compréhension des mesures monotones comparées aux mesures additives. Avec les mesures floues, il est possible de modeler deux sortes de choses:

- ↻ L'incertitude sur l'ensemble  $\Omega$  des états du monde.
- ↻ L'importance d'une coalition. Pour un  $A \subset \Omega$ ,  $\mu(A)$  représente l'importance de la coalition  $A$  pour le problème de décision considéré.

Quand on utilise la mesure floue avec toute sa généralité, elle permet de définir les interactions entre les critères de type synergie (interaction positive) ou bien de type redondance (interaction négative). Tandis que les méthodes utilisées couramment en MCDM ne sont pas capables de s'occuper avec les critères qui ont des interactions, elles supposent l'indépendance des critères au lieu de surmonter cette situation. La mesure floue et l'intégral de Choquet sont des outils très effectifs en cas d'interactions entre les critères.

Cependant, la richesse de l'intégral floue est payée par la complexité de la méthode. Il y a deux raisons principales de cette complexité:

- ↻ Le nombre de coefficients nécessaire pour le modèle de l'intégral floue croisse exponentiellement. Afin de définir une mesure floue sur  $X$  de  $n$  éléments, il est nécessaire de définir  $2^n$  coefficients positifs réels qui satisfont quelques contraintes de monotonie. Donc quand  $n$  augmente, il devient presque impossible de le définir.
- ↻ Il est difficile de comprendre le sens de  $\mu(A)$ . Même pour les petites valeurs de  $n$ , il est difficile d'assigner une valeur numérique pour tout  $A \subset X$ . Dans plusieurs problèmes pratiques, un expert peut deviner les valeurs des coefficients pour les ensembles d'un élément et de deux éléments mais pas pour les ensembles de plus d'éléments.

Dans cette étude, on a essayé de montrer les avantages de la mesure floue et l'intégral floue en même temps que sa complexité et sa difficulté. En chapitre 2, toutes les définitions et les propriétés de la mesure floue et l'intégral de Choquet sont présentés. En plus, les définitions de l'interaction entre les critères, les différentes représentations sont donnés.  $k$ -ordre additivité qui donne une solution intermédiaire entre le cas général et le cas d'additivité, est présenté en 2.8. Après l'énoncé du cas veto et faveur en aide multicritère à la décision, les différentes méthodes d'identification de la mesure floue sont présentées.

En chapitre 3, une sélection d'autres méthodes multicritères est montrée pour comparer les solutions obtenues avec la mesure floue et l'intégral de Choquet. Ensuite en chapitre 4, une application est montrée en deux étapes. Au début, les coefficients de la mesure floue 2-additives sont déterminés par une méthode proposée par Marichal et Roubens. Ici les décideurs déclarent leurs opinions sur les préférences des étudiants basés sur quatre critères. Un programme linéaire est composé avec les informations obtenues des décideurs et les contraintes de monotonie de la mesure floue. Le point qu'on doit faire attention c'est que si les contraintes qui sont données par les décideurs ne portent pas assez d'information sur la stratégie de décision, la méthode peut devenir inefficace. Car, dans ce cas l'espace des solutions réalisables peut être énorme tel que la solution obtenue n'a pas de sens en terme de la stratégie de décision.

En deuxième étape, cette mesure obtenue est utilisée pour obtenir un pré-ordre complet d'un autre groupe d'étudiants plus large. Deux autres rangements obtenus par deux autres méthodes de MCDM bien connues, TOPSIS et ELECTRE III, sont utilisés dans le but de confirmer l'utilité de la mesure floue obtenue. On constate que dans toutes les méthodes le meilleur élément c'est le onzième. Le coefficient de corrélation de rang entre TOPSIS et Choquet, et ELECTRE III et Choquet sont assez grand qu'on peut approuver qu'il y ait une positive corrélation entre les rangements.

Les mesures floues sont des outils de MCDM qui ne sont pas encore appliqués d'une façon efficace et effective. Même si, les études dans les aspects théoriques sont assez profondes, les applications dans des différents domaines doivent être étudiées et développées. L'exemple qu'on a étudié dans cette étude a montré applicabilité dans les problèmes fréquents.

## Bibliographie

- [1] Grabisch, M., "The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making", *European Journal of Operational Research*, 89, 445 - 456, (1996).
- [2] Onisawa, T., Sugeno, M., Nishiwaki, Y., Kawai, H., Harima, Y., "Fuzzy measure analysis of public attitude towards the use of nuclear energy", *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 259 - 289, (1986).
- [3] Marichal, J-L., Roubens, M., "Determination of weights of interacting criteria from a reference set", *European Journal of Operational Research*, 124, 641 - 650, (2000).
- [4] Wierzchon, S.T., "An algorithm for identification of fuzzy measure", *Fuzzy Sets and Systems*, 9, 69 - 78, (1983).
- [5] Kruse, R. "Fuzzy integrals and conditional fuzzy measures", *Fuzzy Sets and Systems*, 10, 309 - 313, (1983).
- [6] Murofushi, T., Sugeno, M., "An interpretation of fuzzy measure and Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 29, 201 - 227, (1989).
- [7] Murofushi, T. and Sugeno, M., "A theory of fuzzy measures: Representations, the Choquet Integral, and the Null Sets", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 159, 532 - 549, (1991).
- [8] Grabisch, M., Murofushi, T. and Sugeno, M., "Fuzzy measure of fuzzy events defined by fuzzy integrals", *Fuzzy Sets and Systems*, 50, 293 - 313, (1992).

- [9] Murofushi, T., Sugeno, M., "Some quantities represented by the Choquet integral", *Fuzzy Sets and Systems*, 56, 229 - 235, (1993).
- [10] Grabisch, M., "On Equivalence Classes of Fuzzy Connectives - The Case of fuzzy Integrals", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3 (1), 96 - 109, (1995).
- [11] Grabisch, M., " $k$ -order additive discrete fuzzy measures and their representations", *Fuzzy Sets and Systems*, 92, 167 - 189, (1997).
- [12] Grabisch, M., "Alternative representations of discrete fuzzy measures for decision making", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness, Knowledge Based Systems*, 5, 587 - 607, (1997).
- [13] Wang, Z., Klir, G.J., *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York, (1992).
- [14] Grabisch, M., Nguyen, H.T., Walker, E.A., *Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference*, Kluwer Academic, Dordrecht, (1995).
- [15] Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (editors), *Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, (2000).
- [16] Jang L.C., Kwon J.S., "On the representation of Choquet integrals of set-valued functions, null sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 112, 233 - 239, (2000).
- [17] Wang, Z., Leung, K-S., Wong, M-L., Fang, J., "A new type of nonlinear integrals and computational algorithm", *Fuzzy Sets and Systems*, 112, 223 - 231, (2000).
- [18] Narukawa, Y., Murofushi, T., Sugeno M., "Regular fuzzy measure and representation of comonotonically additive functional", *Fuzzy Sets and Systems*, 112, 177 - 186, (2000).

- [19] Marichal, J-L., "On Sugeno integral as an aggregation function", *Fuzzy Sets and Systems*, 114, 347 - 365, (2000).
- [20] Grabisch, M., "A graphical interpretation of the Choquet integral", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8 (5), (2000).
- [21] Grabisch, M., Labreuche, C., "The Sipos integral for the aggregation of interacting bipolar criteria", *8th International conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, (2000).
- [22] Devedzic, G.B., Pap, E., "Multicriteria-multistages linguistic evaluation and ranking of machine tools", *Fuzzy Sets and Systems*, 102, 451 - 461, (1999).
- [23] Ishii, K., Sugeno, M., "A model of human evaluation process using fuzzy measure", *International Journal of Man-Machine Studies*, 22, 19 - 38, (1985).
- [24] Yoneda, M., Fukami, S., Grabisch, M., "Interactive determination of a utility function represented as a fuzzy integral", *Information Sciences*, 71, 43 - 64, (1993).
- [25] Wang, J., Wang, Z., "Using neural networks to determine Sugeno measures by statistics", *Neural Networks*, 10 (1), 183 - 195, (1997).
- [26] Grabisch, M., "The representation of importance and interaction of features by fuzzy measures", *Pattern Recognition Letters*, 17, 567 - 575, (1996).
- [27] Mikanina, L., Zimmermann, H-J., "Improved feature selection and classification by the 2-additive fuzzy measure", *Fuzzy Sets and Systems*, 107, 197 - 218, (1999).

- [28] Chiang, J-H., "Aggregating membership values by a Choquet-fuzzy-integral based operator", *Fuzzy Sets and Systems*, 114, 367 - 375, (2000).
- [29] Grabisch, M., "Fuzzy integral in multicriteria decision making", *Fuzzy Sets and Systems*, 69, 279 - 298, (1995).
- [30] Murofushi, T., Sugeno, M., "Fuzzy Measures and Integrals", in *Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications*, Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (editors), 3 - 41, Physica-Verlag, Heidelberg, (2000).
- [31] Dennenberg, D., "Non-additive measure and integral, basic concepts and their role for applications", in *Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications*, Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (editors), 42 - 69, Physica-Verlag, Heidelberg, (2000).
- [32] Grabisch, M., Roubens, M., "Application of the Choquet integral in Multicriteria Decision Making", in *Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications*, Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (editors), 348 - 374, Physica-Verlag, Heidelberg, (2000).
- [33] Hwang, C.L., Yoon, K.P., *Multiple attribute decision making : methods and applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, (1981).
- [34] Karagiannidis, A., Moussiopoulos, N., "Application of ELECTRE III for the integrated management of municipal solid waste in the Greater Athens Area", *European Journal of Operational Research*, 97, 439 - 449, (1997).
- [35] Roy, B., Bouyssou, D., *Aide Multicritère à la Décision: Méthodes et Cas*, Economica, Paris, (1993).

- [36] Salminen, P., Hokkanen, J., Lahdelma, R., "Comparing multicriteria methods in the context of environmental problems" *European Journal of Operational Research*, 104, 485 - 496, (1998).
- [37] ELECTRE III-IV, Logiciel d'Aide Multicritères à la Décision.
- [38] Freund, J.E., Simon, G.A., *Modern Elementary Statistics*, Prentice Hall, New Jersey, (1997).



## Biographie

Sevin SÖZER est née le 22 Février 1977 à Ankara. Elle a complété ses études secondaires au Lycée Anatolien d'Ankara en 1995.

Elle a fait ses études universitaires à l'Université Galatasaray en Génie Industriel. Pendant ses études, elle a fait deux stages: la première chez Schneider Electric en France avec une bourse de l'Université et la deuxième chez Oyak-Renault sur le système de suggestion au Département d'Organisation. Elle a terminé la Faculté d'Ingénierie et de Technologie en 1999 avec la mention bien. Elle est la première de sa promotion. Le sujet de son projet de fin d'étude était l'ABC (Activity-Based Costing) dans les institutions financières. De ses travaux, elle a publié un article intitulé « Faaliyet Bazlı Maliyetlendirmede maliyet sürücülerini belirlenmesine yönelik bütünsel bir yaklaşım » en *Osman Zillioğlu anısına Armağan*, Galatasaray.

Elle travaille depuis août 1999 comme assistante chercheuse au Département de Génie Industriel à l'Université Galatasaray.

Elle a commencé ses études de mastère en 1999 et a préparé son mémoire sous la direction de Doç. Dr. E. Ertuğrul KARSAK.

112313

Anabilim Dalı : Endüstri Mühendisliği  
Tez Danışmanı : Doç. Dr. E. Ertuğrul KARSAK  
Tez Türü / Tarihi : Yüksek Lisans / Haziran 2001

## ÇOK ÖLÇÜTLÜ KARAR VERMEDE BULANIK ÖLÇÜM VE BULANIK ENTEGRAL UYGULAMALARI

Sevin SÖZER

**Özet:** Çok ölçütlü karar vermede bulanik entegral, ölçütler arasındaki sinerjiden tekrarlanan ölçütlere kadar çok geçitli etkileşimleri esnek bir biçimde modellemek amacıyla kullanılmaktadır. Bulanik ölçüm ve bulanik entegral ilk olarak 1974'de Sugeno tarafından bulanik sistemleri ifade etmek amacıyla önerilmiş daha sonra karar vericilerin subjektif değerlendirme sürecini açıklamak için kullanılmıştır. Karar vericiden alınan bilgiler doğrultusunda oluşturulacak bir doğrusal programlama modeli ile 2-toplamsal bulanik ölçümlerin belirlenmesi ve karar verme sürecinde kullanılmaları mümkün olmaktadır. Bu çalışmada bulanik ölçümler ve bulanik entegraler tanıtılarak, çok ölçütlü karar vermede kullanıma geçilleri açıklanmış ve 2-toplamsal bulanik ölçümlerin kullanımı bir uygulama aracılığı ile TOPSIS ve ELECTRE III yöntemleri kullanılarak karşılaştırılması olarak incelenmiştir.

**Anahar Sözcükler:** Çok ölçütlü karar verme, bulanik ölçümler, bulanik entegral, Choquet entegrali.

# APPLICATION DE LA MESURE FLOUE ET DE L'INTEGRAL FLOUE EN AIDE MULTICRITERE A LA DECISION

Sevin SÖZER

**Résumé:** En aide multicritère à la décision, l'intégral floue est un outil d'agrégation utilisé afin de modéliser les interactions entre les critères, de synergie jusqu'à redondance, d'une façon flexible. Les mesures floues et l'intégral floue ont été présentées par Sugeno en 1974 afin d'exprimer les systèmes flous et puis étaient proposées pour modéliser la procédure d'évaluation subjective de l'homme. Il est possible d'identifier les mesures 2-additive avec une programmation linéaire construite par les informations déterminées par les décideurs et de l'utiliser dans le processus de décision. Dans ce travail, la mesure floue et l'intégral floue sont introduites dans le concept d'aide multicritère à la décision et l'application des mesures 2-additive est présentée en la comparant par deux autres méthodes, TOPSIS et ELECTRE III.

**Mots clés:** Aide multicritères à la décision, mesure floue, intégral floue, intégral de Choquet.

# THE APPLICATION OF FUZZY INTEGRAL AND FUZZY MEASURE IN MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING

Sevin SÖZER

**Abstract:** In multiple criteria decision making, the fuzzy integral is an aggregation tool used in order to model the interactions between criteria from synergy to redundancy, in a flexible way. The fuzzy measures and the fuzzy integral were presented by Sugeno in 1974 in order to express fuzzy systems and then have been proposed to model the human subjective evaluation procedure. It is possible to identify 2-additive fuzzy measures with a linear program constructed by the information obtained from decision makers and to introduce it in the decision making process. In this work, the fuzzy measure and the fuzzy integral are introduced within the framework of multiple criteria decision making and application of the 2-additive fuzzy measures is presented by comparing it with two other decision making techniques, namely TOPSIS and ELECTRE III.

**Keywords:** Multiple criteria decision making, fuzzy measure, fuzzy integral, Choquet integral.