

BELİRSİZLİK ORTAMINDA VERİ ZARFLAMA ANALİZİ UYGULAMALARI  
(LES APPLICATIONS DE L'ANALYSE D'ENVELOPPMENT DE DONNEES  
IMPRECISES)

140019- 140019

YÜKSEK LİSANS TEZİ

End.Müh. Semra Şebnem AHISKA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Mayıs 2003

Tezin Savunulduğu Tarih : 05 Haziran 2003

Tez Danışmanı : Prof. Dr. E. Ertuğrul KARSAK

*E. Karacak* 23/06/2003

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. H. Ziya ULUKAN

*H. Ziya Ulukan* 23/06/2003

Yrd. Doç. Dr. C. Ruhi TUNCER

*R. Tuncer* 23/06/2003

**T.C. GALATASARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**TEZ KÜTÜPHANESİ**

HAZİRAN 2003

## Préface

L'analyse d'enveloppement de données est une technique de décision multicritère basée sur la programmation linéaire qui peut évaluer l'efficacité des entités, si les quantités de toutes les entrées et les sorties de celles-ci sont exactement connues. Pourtant, dans certains cas, il peut être très difficile, ou même impossible, d'obtenir les valeurs exactes de certaines entrées ou sorties. Pour pouvoir traiter ces données imprécises, l'analyse d'enveloppement de données imprécises (IDEA) a été développée.

Dans ce mémoire, je vais présenter tout d'abord les approches d'IDEA déjà apparues dans la littérature et je vais comparer les modèles d'IDEA selon leurs pouvoirs de discrimination et leurs efficacités. Ensuite, je vais étudier quelques problèmes de décision pour lesquels je vais proposer des modèles de décision multicritère ayant un pouvoir de discrimination fort.

Je voudrais remercier tout d'abord Prof. Dr. E. Ertuğrul KARSAK pour avoir partagé toute sa connaissance, ses précieuses idées et ses remarques, pour m'avoir orientée durant tout mon travail et répondu avec patience à toutes mes questions. C'est grâce à sa disponibilité et son support permanent que j'ai pu terminer mon mémoire sans aucune difficulté.

Je remercie également mon collègue et cher ami Haris SAYBAŞILI pour sa précieuse contribution à la rédaction de ce mémoire ainsi que pour son amitié et son encouragement, et mon amie Aslı Gül ÖNCEL qui était toujours souriante et sympa.

Dernièrement, je remercie beaucoup ma famille qui m'a soutenu durant toute ma vie.

23 mai 2003

Semra Şebnem AHISKA

## Table des Matières

	<u>Page</u>
Préface.....	ii
Table des Matières .....	iii
Liste des Figures.....	v
Liste des Tableaux.....	vi
Résumé.....	viii
Özet.....	xi
1. Introduction.....	1
2. Les Types de Données.....	9
3. L'Analyse d'Enveloppement de Données.....	15
3.1. Le Modèle de CCR DEA.....	16
3.2. Les Modèles de DEA Avec Un Pouvoir de Discrimination Plus Fort.....	19
3.2.1. L'Analyse d'Efficacité Croisée.....	19
3.2.2. Une Application de l'Analyse d'Efficacité Croisée.....	25
4. L'Analyse d'Enveloppement de Données Imprécises (IDEA).....	30
4.1. Les Approches Fondamentales pour le Traitement des Données Imprécises dans la DEA.....	30
4.2. L'Application des Alternations de Variables.....	31
4.2.1. Les Modèles d'IDEA Ayant Le Pouvoir de Traiter des Données Ordinales.....	31
4.2.1.1. Le Modèle de Cook et al.....	31
4.2.1.2. Le Modèle de Cooper et al.....	38
4.2.1.3. La Comparaison du Modèle de Cook et al. au Modèle de Cooper et al.....	39
4.2.2. Les Modèles d'IDEA ayant le Pouvoir de Traiter des Données Bornées.....	48
4.2.2.1. Le modèle de Cooper et al.....	48
4.2.2.2. Le Modèle de Despotis et Smirlis.....	51

4.2.2.3. Comparaison des Modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis.....	54
4.3. La Conversion des Données Imprécises en Données Exactes.....	56
4.3.1. Des Données Ordinales en Données Exactes.....	56
4.3.2. Des Données Bornées en Données Exactes.....	57
4.4. La Conversion des Données Floues en Données Ordinales ou Bornées.....	61
4.4.1. Des Données Floues en Données Ordinales.....	61
4.4.2. Des Données Floues en Données Bornées.....	62
5. Les Applications de DEA et d'IDEA.....	64
5.1. 1 <sup>er</sup> Cas: La DEA avec des Sorties Exactes Multiples et une Seule Entrée Exacte.....	64
5.2. 2 <sup>ème</sup> Cas: L'IDEA avec des Sorties Exactes ou Ordinales Multiples et une Seule Entrée Exacte.....	73
5.3. 3 <sup>ème</sup> Cas: L'IDEA avec des Sorties et des Entrées Exactes, Ordinales, Bornées et Floues Multiples.....	77
6. Conclusion.....	85
Bibliographie.....	89
Appendice A: Le programme de GAMS du modèle de Cook et al. pour la DMU 1 de l'exemple numérique étudié dans le sous-chapitre 4.2.1.3.....	93
Appendice B: Le programme de GAMS du modèle de Cooper et al. pour la DMU 1 de l'exemple numérique étudié dans le sous-chapitre 4.2.1.3.....	97
Biographie.....	101

## Liste des Figures

	<u>Page</u>
<b>Figure 2.1</b> Classification des données.....	9
<b>Figure 2.2</b> La fonction d'appartenance d'un nombre flou trapézoïdal $A = (a, b, c, d)$ ..	13
<b>Figure 2.3</b> La fonction d'appartenance d'un nombre flou triangulaire $A = (a, b, c)$ .....	14
<b>Figure 4.1</b> Le modèle de Cook et al. formulé pour la DMU 1 en considération.....	46
<b>Figure 4.2</b> Le modèle de Cooper et al. et son équivalent exprimé en variables du Modèle de Cook et al. formulés pour la DMU 1 en considération.....	47

## Liste des Tableaux

	<u>Page</u>
<b>Tableau 3.1</b> La matrice d'efficacité croisée.....	20
<b>Tableau 3.2</b> Les données pour les entreprises de ciment turques en 2000.....	25
<b>Tableau 3.3</b> Les valeurs d'efficacité simple, les valeurs moyennes d'efficacité croisée agressive et les index de Maverick pour les entreprises de ciment (pour $\varepsilon = 0$ ).....	27
<b>Tableau 3.4</b> La matrice d'efficacité croisée agressive pour les entreprises de ciment...29	29
<b>Tableau 4.1</b> Le nombre des variables de décision et le nombre des contraintes des modèles de Cook et al. et de Cooper et al. lorsque les sorties et les entrées ordinales sont représentées par l'échelle à L points.....	40
<b>Tableau 4.2</b> La comparaison des modèles de Cook et al. et de Cooper et al. par rapport à leur pouvoir de discrimination et leur efficacité.....	41
<b>Tableau 4.3</b> Les scores attribués aux DMUs par rapport aux sorties et entrées Ordinales.....	43
<b>Tableau 4.4</b> Les scores d'efficacité obtenus par le modèle de Cook et al. et le modèle de Cooper et al.....	43
<b>Tableau 4.5</b> Le nombre des variables de décision et celui des contraintes des modèles de Cook et al. et de Cooper et al. pour l'exemple numérique.....	44
<b>Tableau 4.6</b> Contraintes indiquant les relations ordinales entre les DMUs selon la sortie 3 et l'entrée 1 dans les modèles de Cook et al. et Cooper et al...45	45
<b>Tableau 4.7</b> Les données d'entrées et de sorties.....	50
<b>Tableau 4.8</b> Comparaison des modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis selon leur nombre de contraintes et de variables de décision.....	54
<b>Tableau 4.9</b> Les données d'entrées et de sorties bornées.....	55
<b>Tableau 4.10</b> Les données d'entrées et de sorties bornées normalisées par la normalisation de valeur maximale.....	55

<b>Tableau 4.11</b> Les scores d'efficacité obtenus par les modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis pour $\varepsilon = 0$ .....	55
<b>Tableau 5.1</b> Les données pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes.....	69
<b>Tableau 5.2</b> Les données normalisées pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes.....	70
<b>Tableau 5.3</b> Les scores de certaines mesures d'efficacités (pour $\varepsilon = 0$ ) pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes.....	70
<b>Tableau 5.4</b> La matrice d'efficacité croisée agressive pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes.....	72
<b>Tableau 5.5</b> Les données normalisées pour le problème hypothétique où des sorties exactes et ordinales multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes.....	75
<b>Tableau 5.6</b> Les scores de certaines mesures d'efficacités (pour $\varepsilon = 0.036$ ) pour le problème hypothétique où des sorties exactes et ordinales multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes.....	76
<b>Tableau 5.7</b> La matrice d'efficacité croisée agressive pour le problème hypothétique où des sorties exactes et ordinales multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes.....	77
<b>Tableau 5.8</b> Les données pour le problème hypothétique où des sorties exactes et imprécises multiples et des entrées exactes et imprécises multiples sont prises en comptes.....	81
<b>Tableau 5.9</b> Les données normalisées pour le problème hypothétique où des sorties exactes et imprécises multiples et des entrées exactes et imprécises multiples sont prises en comptes.....	82
<b>Tableau 5.10</b> Les scores d'efficacité classique des DMUs pour certaines $\alpha$ – coupes	84
<b>Tableau 5.11</b> Les scores d'efficacité de minimax des DMUs pour certaines $\alpha$ – coupes .....	84

## Résumé

L'analyse d'enveloppement de données (Data envelopment analysis-DEA), qui est une technique de décision basée sur la programmation linéaire, évalue l'efficacité relative des alternatives, appelées entités de prise de décision (decision making units-DMUs), qui utilisent des entrées multiples similaires pour produire des sorties multiples similaires.

Le modèle original de DEA, qu'on appelle le modèle de CCR DEA, a été développé par Charnes, Cooper et Rhodes. Ce modèle, ayant pour but de maximiser l'efficacité relative d'une DMU particulière, classe les DMUs en deux groupes, l'un consistant des DMUs efficaces et l'autre de celles qui sont inefficaces. Toutes les DMUs efficaces ont le même score d'efficacité qui est 1. Donc, il n'est pas possible de faire une distinction entre elles. Pour pouvoir faire plus de discrimination parmi les DMUs, on peut se servir de deux approches fondamentales, dont l'une est d'utiliser intégralement la DEA et une autre technique de décision multicritère comme TOPSIS, AHP etc., et l'autre est de formuler un nouveau modèle de DEA ayant un pouvoir de discrimination plus fort, en incluant au modèle de CCR DEA de nouvelles contraintes, appelées des contraintes de restriction de poids, ou en changeant sa fonction objectif (c.à.d, en définissant une autre mesure d'efficacité).

Le modèle de CCR DEA peut seulement être appliqué aux problèmes de décision où on connaît exactement les quantités des entrées consommées et des sorties produites par les DMUs. Pourtant, dans certains cas, il peut être très difficile, ou même impossible, d'obtenir les valeurs exactes de certaines entrées ou sorties. Dans ces cas, puisque les valeurs des entrées et des sorties sont imprécises, elles sont incluses au modèle de DEA comme des variables de décision inconnues, ce qui cause l'apparition des produits de deux variables dans le modèle, l'une indiquant la valeur de l'entrée ou de la sortie

imprécise et l'autre indiquant son poids d'importance. Par conséquent, le modèle de DEA devient un programme non-linéaire et non convexe.

Pour traiter les données imprécises dans la DEA, que l'on appelle l'analyse d'enveloppement de données imprécises (imprecise data envelopment analysis-IDEA), certaines approches qui surmontent le problème de non-linéarité ont été développées. Une approche est de faire des altérations de variables qui permettront la transformation du modèle d'IDEA non-linéaire en un modèle linéaire. Une autre, est de convertir d'abord les données imprécises (ordinales ou bornées) en données exactes et de se servir ensuite d'un modèle linéaire de DEA, comme le modèle de CCR DEA. Dans la littérature, on rencontre aussi des études où on a proposé de convertir les données floues en données ordinales, et d'utiliser ensuite un modèle d'IDEA approprié ayant le pouvoir de traiter ces données ordinales.

Dans ce mémoire, on a d'abord présenté les approches d'IDEA déjà apparues dans la littérature. Ensuite, via des exemples numériques, on a comparé les modèles d'IDEA ayant le pouvoir de traiter un certain type de données imprécises, selon leur pouvoir de discrimination et leur efficacité (mesurée par les nombres de variables de décision et de contraintes). En plus, on a aussi introduit une nouvelle approche d'IDEA qui consiste à convertir d'abord les données floues en données bornées et utiliser ensuite un modèle d'IDEA approprié qui peut traiter ces données bornées.

Comparés aux modèles de DEA traitant seulement les données exactes, les modèles traitant les données imprécises ont un pouvoir de discrimination plus faible. Car, dans les modèles d'IDEA, en plus des poids d'importance des entrées et des sorties, les quantités des entrées et des sorties qui sont imprécises, sont aussi définis comme des variables de décision, ce qui augmente la chance de la DMU évaluée pour recevoir le score d'efficacité de 1 (c.à.d, ce qui réduit le pouvoir de discrimination du modèle). Donc, pour empêcher un tel résultat, on a besoin de certaines approches qui vont augmenter le pouvoir de discrimination du modèle d'IDEA.

**T.C. YÜSEKÖĞRETTİM KURULU**  
**BAŞKANLIĞI**  
**TEKNOLOJİ VE İNÖZÜM BAKANLIĞI**

Dans ce mémoire, on a introduit une mesure d'efficacité nouvelle ayant un pouvoir de discrimination haut. En se servant de cette mesure d'efficacité et d'une transformation de variables, on a converti le modèle de CCR DEA en un modèle de décision multicritère à poids communs qui peut être considéré comme un modèle efficace pour les problèmes de décision où les DMUs sont évaluées par des sorties multiples exactes ou imprécises et une seule entrée exacte. Ce modèle a deux avantages comparé au modèle de DEA. Premièrement, il nous permet de calculer les scores d'efficacité de toutes les DMUs en une seule fois, contrairement au modèle de DEA qui nécessite la résolution de  $n$  formulations. Deuxièmement, il a un pouvoir de discrimination très haut, qui permet l'identification de la meilleure DMU. Pour évaluer la fiabilité de ce modèle, on l'a comparé à l'analyse d'efficacité croisée agressive, via deux exemples numériques. Les deux analyses ont évalué la même DMU comme la meilleur. En outre, l'analyse d'efficacité croisée agressive a nécessité la résolution de beaucoup plus de formulations.

Finalement, on a formulé un modèle d'IDEA ayant le pouvoir de traiter des problèmes de décision concernant l'évaluation des DMUs selon plusieurs sorties ou entrées exactes, ordinales, bornées ou floues. Pour augmenter le pouvoir de discrimination de ce modèle d'IDEA, en plus d'attribuer la valeur maximale au paramètre de discrimination  $\varepsilon$ , on y a incorporé le concept d'efficacité de minimax. Pour illustrer le pouvoir de discrimination de ces modèles, on les a appliqués à un exemple numérique. En somme, selon les scores d'efficacité classique moyens, cinq DMUs parmi 15 sont évaluées comme efficaces, alors que le modèle d'efficacité de minimax a réduit le nombre des DMUs efficaces à deux, ce qui justifie le pouvoir de discrimination haut de la mesure d'efficacité de minimax.

## Özet

Veri zarflama analizi (VZA) benzer girdileri kullanarak benzer çıktılar üreten karar verme birimlerinin (KVB'lerin) görelî etkinliklerini değerlendirmede kullanılan, matematiksel programlama bazlı parametresiz bir karar verme yöntemidir.

Veri zarflama analizinde, Farrell'in teknik etkinlik kavramı benimsenerek, bir karar verme biriminin etkinliđi, toplam ađırlıklandırılmıř çıktılarının toplam ađırlıklandırılmıř girdilerine oranı olarak tanımlanmıřtır. İlk VZA modeli, Charnes, Cooper ve Rhodes tarafından 1978 yılında geliřtirilmiřtir. CCR modeli olarak bilinen bu model, belli bir karar verme biriminin görelî etkinliđini maksimize edecek ölçüt önem ađırlıklarını saptamaktadır. Sonuç olarak, her bir karar verme biriminin görelî etkinliđi kendi yararına olmak üzere farklı ölçüt önem ađırlıkları ile değerlendirilmektedir. Dolayısıyla, VZA ile diđer çok ölçütlü karar verme yöntemleri arasındaki temel fark, dikkate alınan ölçütlerin önemlerine iliřkin herhangi bir bilgiyi gerektirmemesi ve her karar verme birimini farklı önem ađırlıkları ile değerlendirmesidir.

CCR modeli karar verme birimlerini etkin (etkinlik deđeri bir olan) birimler ve etkin olmayan (etkinlik deđeri birden küçük olan) birimler olmak üzere iki gruba ayırmaktadır. Model, her bir KVB'ye kendi etkinliđini maksimize etme serbestisini tanıdıđı için, KVB'ler girdi ve çıktıların önem ađırlıklarını kendi yararlarına uygun olarak seçmektedirler. Örneđin, görelî olarak yüksek performans gösterdikleri girdi veya çıktılarına yüksek ađırlıklar atarken düşük performans gösterdikleri girdi veya çıktılarına mümkün olan en düşük ađırlıđı ( $\epsilon$ ) atamaktadırlar. Bu durum, bazı girdi ve çıktıların değerlendirme dıřı bırakılmasına neden olduđu gibi, çok fazla sayıda KVB'nin etkin olarak değerlendirilmesine yol açmaktadır. Tüm etkin birimlerin aynı etkinlik deđerine sahip olmaları da, KVB'ler arasından sadece birini seçmesi gereken karar vericiyi zor duruma düşürmektedir.

Etkin karar verme birimleri arasından seçim yapabilmek için, ayırım yapma gücü CCR modeline oranla daha fazla olan yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan bir tanesi, veri zarflama analizi ile bir çok ölçütlü karar verme tekniğinin bütünleşik olarak kullanıldığı iki aşamalı bir karar analizi yapmaktır. Bu analizde, genel olarak, ilk aşamada, veri zarflama analizi yapılarak etkin karar verme birimleri saptanmaktadır. İkinci aşamada ise, etkin karar verme birimlerine TOPSIS gibi bir karar verme yöntemi uygulanarak, bu birimler performanslarına göre sıralanmaktadır. Diğer bir yaklaşım, VZA modeline bazı kısıtlar eklemek veya ayırım yapma gücü daha yüksek olan bir etkinlik ölçüsü tanımlayarak modelin amaç fonksiyonunu değiştirmektir. Karar verme birimlerinin etkinliklerini değerlendirmede dikkate alınan girdi ve çıktıların önem ağırlıklarına ilişkin bir ön bilginin mevcut olduğu durumlarda, bu bilgi modele kısıtlar eklenerek aktarılabilmektedir. Bu kısıtlar, modelin, girdi ve çıktılarının önem ağırlıklarına söz konusu KVB yararına olacak en uygun değeri atama esnekliğini kısıtladıkları için, ağırlık sınırlandırma kısıtları olarak adlandırılmaktadırlar. Bu sınırlandırma herhangi bir girdi veya çıktının değerlendirme dışı bırakılmasını engelleyecek hem de karar verme birimlerinin daha düşük etkinlik değeri almalarına yol açacaktır. Sonuç olarak, modelin ayırım yapma gücü artacaktır. Öte yandan, klasik etkinlik ölçüsüne oranla daha yüksek ayırım yapma gücüne sahip olan minimax, minisum veya çapraz etkinlik ölçüleri gibi ölçüler tanımlayarak VZA modelinin amaç fonksiyonunu değiştirmek de etkin karar verme birimlerinin sayısını azaltarak karar vericinin seçim yapmasını kolaylaştıracaktır.

CCR modeli, yalnızca, etkinlikleri değerlendirilecek karar verme birimlerinin kullandıkları girdilerin ve ürettikleri çıktılarının miktarları kesin olarak bilindiği karar problemlerine uygulanabilmektedir. Öte yandan, gerçek hayatta, bazı girdi veya çıktılara ilişkin kesin değerlere ulaşmak oldukça zor, hatta imkansız olabilmektedir. Örneğin, kalite gibi niteliksel bir çıktı veya gelecek yıla ilişkin tahmini üretim miktarı gibi niceliksel bir çıktı için KVB'lerin aldıkları kesin değerleri saptamak mümkün değildir. Böyle durumlarda, ya değere ilişkin alt ve üst sınırların bilindiği bir aralık verilmekte, ya sözkonusu girdi veya çıktıya göre karar verme birimleri sınıflandırılmakta veya sıralanmakta, ya da bulanık küme teorisinden faydalanılmaktadır. Başka bir ifadeyle, belirsiz olan girdi ve çıktılar, sınırlandırılmış

veriler (interval data), sırasal veriler (ordinal data) veya bulanık veriler (fuzzy data) ile temsil edilmektedir. Böyle durumlarda, belirsiz olan bu girdi ve çıktuların kesin miktarları bilinmediğinden, bu miktarlar CCR modelinde değişken olarak yer almaktadır. Etkinlik hesabında ağırlıklandırılmış çıktı ve girdi miktarlarına ihtiyaç duyulması nedeniyle, bu bilinmeyen girdi ve çıktı miktarlarının, yine değişken olan önem ağırlıkları ile çarpılması da CCR modelinin doğrusal olmayan bir programa dönüşmesine neden olmaktadır. Öte yandan, modeldeki değişken sayısının artması, söz konusu KVB'nin değişkenlere atanacak değerleri kendi yararına seçme esnekliğini de artırmaktadır. Dolayısıyla, belirsiz veriler modelin ayırım yapma gücünü azaltmaktadır ve kesin verilere oranla daha fazla ayırım yapma gücünü artırıcı yaklaşımların kullanılmasını gerektirmektedir.

Belirsiz verilere veri zarflama analizinin uygulanması, belirsiz veri zarflama analizi (BVZA) olarak adlandırılmaktadır. Yakın zaman içerisinde, belirsiz verilerin VZA modeline aktarılmaları sonucu meydana gelen "doğrusal olmama problemi"nin ortadan kalkması için çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlardan en yaygın olarak kullanılanı, değişken dönüşümü yardımıyla modeli doğrusal hale getirmektir. Değişken dönüşümü, iki değişken çarpımı şeklinde ifade edilmelerinden ötürü doğrusal olmayan ağırlıklandırılmış girdi ve çıktı terimlerinin her birinin tek bir değişken olarak ifade edilmesi anlamına gelmektedir. Bu yolla kurulan modeller, BVZA modeli olarak adlandırılmaktadırlar. Cook ve diğerleri (Cook, Kress ve Seiford), öncelikle, kesin değeri bilinen ölçütlerin yanında tek bir sırasal (ordinal) ölçütün de değerlendirildiği karar problemlerine ilişkin bir model kurmuş, daha sonra, modellerini birden fazla ordinal ölçütü değerlendirebilecek şekilde geliştirmişlerdir. Daha sonraki yıllarda, Cooper ve diğerleri (Cooper, Park ve Yu), Cook ve diğerlerinininkilerden farklı değişkenler tanımlayarak, ordinal verilere ek olarak sınırlandırılmış (alt ve üst sınırı belli olan) verilerin de değerlendirilebildiği bir BVZA modeli geliştirmişlerdir. Despotis ve Smirlis ise, Cooper ve diğerlerinininkilerden farklı değişkenler kullanarak, kesin verilere ek olarak sadece sınırlandırılmış veriler için uygun bir BVZA modeli geliştirmişlerdir.

Belirsiz verilerin veri zarflama analizinde kullanılmasını mümkün kılan ikinci bir yaklaşım, öncelikle, sırasal veya sınırlandırılmış olan belirsiz verilerin veri zarflama analizinin özelliğinden faydalanarak kesin veriler cinsinden ifade edilmesini ve daha sonra herhangi bir doğrusal VZA modelinin kullanılmasını içermektedir. Başka bir ifade ile, VZA modelinin amacı dikkate alınarak, modelin belirsiz girdi ve çıktı miktarlarına hangi değeri atayacağı önceden tahmin edilebilmekte ve belirsiz veriler yerine bu kesin değerler kullanılmaktadır. Modelin amacı söz konusu karar verme birimine özel olduğu için de, belirsiz verilerden yola çıkarak KVB sayısı kadar kesin veri kümesinin oluşturulması gerekmektedir. Bir kere, kesin değerler saptandığında, modelde sadece ölçüt ağırlıkları değişken olarak yer alacağından, VZA modeli doğrusallık özelliğini muhafaza etmektedir. Dolayısıyla, değişken dönüşümüne ihtiyaç duyulmamaktadır.

Literatürde, bulanık sayılar ile ifade edilen girdi ve çıktıların bir bulanık sayı sıralama yönteminden faydalanılarak sıralanması, yani sıralı veriler cinsinden tanımlanması ve daha sonra sıralı verileri değerlendirebilen bir BVZA modelinin kullanılmasına ilişkin Karsak [22, 23] tarafından yapılmış çalışmalar da mevcuttur.

Bu tezin birinci bölümünde belirsiz veri zarflama analizine bir giriş yapılmış ve bu konuda yapılmış çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, veri türleri sınıflandırılmış ve belirsiz veri grubuna giren “sırasal”, “sınırlandırılmış” ve “bulanık” veriler kısaca tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, 15 Türk çimento şirketinin 2000 yılındaki göreceli etkinlikleri, “çalışan sayısı”, “toplam varlıklar” ve “özsermaye” girdi ve “net satışlar” ile “net kâr” çıktı olarak dikkate alınarak CCR modeli ile değerlendirilmiş, bunun sonucunda altı çimento şirketi etkin olarak saptanmıştır. CCR modeli etkin şirketler arasında bir sıralama yapılmasına izin vermemektedir ve etkin şirketler arasından rassal bir seçim yapılması, gerçekte etkin olmayan (“false positive” olan) bir KVB’nin seçilmesine neden olabilmektedir. Dolayısıyla, en iyi şirketin belirlenebilmesi için Doyle ve Green’in önerdiği, ayırım yapma gücü CCR modeline oranla daha yüksek olan agresif çapraz

etkinlik analizinden yararlanılmıştır. Agresif çapraz etkinlik modeli, belli bir KVB'nin etkinliğini maksimize eden ölçüt ağırlıkları arasından diğer KVB'lerin toplam etkinliklerini minimize eden ağırlıkları seçmektedir. Model, her KVB için ayrı ayrı kurulup çözülmekte; dolayısıyla, KVB sayısı kadar (yani,  $n$  adet) ağırlık kümesi elde edilmektedir. Daha sonra, bu  $n$  adet ağırlık kümesi kullanılarak, her bir KVB için  $n$  adet çapraz etkinlik değeri hesaplanmakta ve KVB'ler çapraz etkinlik değerlerinin ortalamasına göre sıralanmaktadır. Agresif çapraz etkinlik analizi sonucunda, en iyi şirket, Mardin Çimento olarak belirlenmiştir. Öte yandan, CCR modeline göre etkin olan Afyon Çimento, Ünye Çimento ve Oysa-Niğde Çimento şirketlerinin aslında "false positive" oldukları saptanmıştır. Çünkü, CCR modeline göre etkin olmayan bazı şirketler, bu üç şirketinkinden daha yüksek ortalama agresif çapraz etkinlik değerine sahip olmuşlardır.

Dördüncü bölümde, belirsiz veri zarflama analizinde kabul görmüş yaklaşımlar tanıtılmış ve değişken dönüşümü yaklaşımıyla kurulmuş alternatif BVZA modelleri ayırım yapma gücü ve model etkinliği dikkate alınarak birbirleriyle kıyaslanmıştır. Öncelikle, sırasal verileri değerlendirebilen BVZA modelleri ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, Cook ve diğerlerinin modelinin ayırım yapma gücü en az Cooper ve diğerlerinin modelindeki kadar iyidir. Aynı zamanda, sırasal verileri temsil etmede kullanılan ölçeğin boyutu (örneğin,  $L$  noktalı ölçek için boyut  $L$ dir) KVB sayısından küçük olduğu durumlarda, Cook ve diğerlerinin modelindeki değişken ve kısıt sayısı daha azdır. Sonuç olarak, çoğunlukla Cook ve diğerlerinin modelinin performansı en az Cooper ve diğerleri kadar iyidir. Daha sonra, sınırlandırılmış verileri değerlendirebilen Cooper ve diğerlerinin modeli ile Despotis ve Smirlis'in modeli kıyaslanmıştır. Her iki modelin de ayırım yapma gücü aynı olmakla beraber Cooper ve diğerlerinin modelinin kısıt sayısı, Despotis ve Smirlis'in modelinin de değişken sayısı diğerine göre daha fazladır. Bir modeldeki kısıt sayısının fazlalığı değişken sayısına oranla modelin etkinliğini daha fazla düşürdüğü için, Despotis ve Smirlis modelinin performansı daha iyi kabul edilebilir. Tezin bu bölümünde, literatürde yer alan "değişken dönüşümü" ve "belirsiz verilerin kesin verilere dönüştürülmesi" yaklaşımlarına ek olarak, yeni bir yaklaşım tanıtılmaktadır. Bu yaklaşım, bulanık verilerin çeşitli alfa kesikleri için sınırlandırılmış veriler cinsinden ifade edilmesi ve daha sonra bu verilere

sınırlandırılmış verileri değerlendirebilen bir BVZA modelinin uygulanması aşamalarını içermektedir.

Beşinci bölümde, girdi ve çıktı sayısı veya türüne göre farklılık gösteren üç farklı karar verme durumu incelenmiş ve her duruma uygun bir model geliştirilmiştir.

İlk ele alınan durum, KVB'lerin değerlendirilmesinde, kesin değerleri bilinen birden fazla çıktı ile tek bir girdinin dikkate alındığı karar problemidir. Birden fazla girdi ve birden fazla çıktı dikkate alınarak kurulan orjinal CCR modeli doğrusal değildir. Modeli doğrusal hale getirmek için yapılan değişken dönüşümü sonucunda, modele, etkinliği maksimize edilecek olan KVB'nin ağırlıklandırılmış girdi toplamını bire eşitleyen bir kısıt eklenmektedir. Birden fazla çıktıya ek olarak sadece tek bir girdinin dikkate alınacağı karar problemlerinde ise, çıktı ağırlıklarının her birinin girdi ağırlığına bölümünün tek bir değişken olarak tanımlanması sonucunda, CCR modeline herhangi bir kısıt eklemeyen, modeli doğrusallaştırmak mümkün olmaktadır. Böyle bir durumda, klasik etkinlik ölçüsü yerine, ayırım yapma özelliği daha yüksek olan minisum veya minimax etkinlik ölçüleri gibi tek bir KVB'ye özel olmayan bir amaca sahip bir etkinlik ölçüsü kullanılması hem bir tane model kurulup çözümlenerek tüm KVB'lerin etkinliklerinin saptanmasını mümkün kılacak, hem de daha az sayıda etkin KVB saptanmasını sağlayacaktır. Bir KVB'nin etkinlikten sapması, KVB'nin etkinliğinin ideal etkinlik değeri olan birden sapması şeklinde tanımlanmıştır. Minisum etkinlik ölçüsünün amacı, tüm KVB'lerin etkinlikten sapmalarının toplamının minimize edilmesidir. Minimax etkinlik ölçüsünün amacı ise, KVB'lerin etkinlikten sapmaları arasında maksimum olanının minimize edilmesidir. Her iki ölçüt de, her hangi bir KVB'nin etkinlikten sapmasının minimize edilmesini amaçlamamaktadır, dolayısıyla genel amaçlara sahiptir. Modelde, herhangi bir kısıtın veya amaç fonksiyonunun KVB'ye özel olmaması, her bir KVB için ayrı ayrı model kurulması ihtiyacını ortadan kaldırmaktadır; dolayısıyla, tüm KVB'lerin etkinlik değerlerinin tek bir formülasyon yardımıyla hesaplanmasını mümkün kılmaktadır. Sonuç olarak, tüm KVB'lerin etkinlikleri, veri zarflama analizindeki aksine, aynı ölçüt önem ağırlıkları dikkate alınarak hesaplanmaktadır. Bu bakımdan, elde edilen model, bir VZA modeli yerine "ortak ağırlıklı çok ölçütlü karar verme modeli- OAÇÖKV modeli" olarak

adlandırılmıştır. Minimax etkinlik ölçüsünü dikkate alan OAÇÖKV modelinin birden fazla karar verme birimini etkin olarak değerlendirdiği durumlarda etkin KVB sayısını bire indirmede kullanılacak yeni bir etkinlik ölçüsü tanımlanmıştır. Önerilen bu yeni ölçüt, minimax etkin KVB'lerin etkinliğini agresifçe değerlendirmekte, bu da doğal olarak etkin KVB sayısını düşürmektedir. Geliştirilen OAÇÖKV modeli, önce 12 KVB'nin kesin değerleri bilinen 4 adet çıktı ve bir adet girdiye göre değerlendirilmesine ilişkin sayısal bir örneğe uygulanmıştır. Klasik etkinlik değerine göre, altı KVB etkin çıkarken, minimax etkinlik değeri dikkate alındığında bu sayı üçe düşmüştür. Önerilen yeni ölçüt sayesinde ise etkin KVB sayısını iki adımda bire indirmek mümkün olmuştur. Modelin güvenilirliğinin test edilmesi açısından aynı verilere agresif çapraz etkinlik analizi yapılmış ve bu analiz sonucunda aynı KVB en iyi olarak belirlenmiştir. Üstelik, çapraz etkinlik analizi için toplam 24 formülasyon çözüldürken, önerilen OAÇÖKV modeli sayesinde sadece 3 formülasyon çözüldürken sonuca ulaşılmıştır. Dolayısıyla, OAÇÖKV modeli agresif çapraz etkinlik analizine alternatif etkin bir karar verme modeli olarak kullanılabilir.

İkinci ele alınan durum, kesin değerleri bilinen birden fazla çıktı ve tek bir girdiye ek olarak sırasal verilerle ifade edilmiş birkaç çıktının da dikkate alınması gereken bir karar problemidir. Bu karar probleminin çözülebilmesi için, ilk durum için önerilen OAÇÖKV modeli, Cook ve diğerlerinin önerdiği değişken dönüşümünden faydalanılarak, sırasal verilerle ifade edilmiş çıktıları da değerlendirebilecek şekilde genişletilmiştir. Elde edilen model 12 KVB'nin iki sıralı çıktı, dört kesin çıktı ve tek bir kesin çıktıya göre değerlendirildiği bir karar problemine uygulanmış ve sadece iki formülasyon sonucu en iyi KVB saptanmıştır. Karşılaştırma yapmak amacıyla, aynı verilere agresif çapraz etkinlik analizi de yapılmıştır. Analiz sonucunda yine aynı KVB en iyi olarak saptanmış, ancak bu analiz 24 formülasyonun çözüldürmesini gerektirmiştir.

Üçüncü ele alınan durum, birden fazla belirsiz çıktı ve girdinin dikkate alındığı bir karar problemidir. Kesin değerleri bilinen verileri değerlendirmek için CCR modeli, sırasal veriler için Cook ve diğerlerinin modeli, sınırlandırılmış veriler için Despotis ve Smirlis modeli ve üçgen veya trapezoidal bulanık veriler için "bulanık verilerin sınırlandırılmış veriler cinsinden ifade edilmesi" yaklaşımı kullanılarak genel bir BVZM kurulmuştur.

Bu model, çok fazla sayıda KVB'yi etkin olarak değerlendirebilmektedir. Böyle bir durumda, birimler arasında daha fazla ayırımın yapılabilmesi için, modele minimax etkinlik kavramı uyarlanarak ayırım yapma gücü daha yüksek bir BVZM elde edilebilmektedir. Elde edilen her iki model de, sayısal bir örneğe uygulanmıştır. Örnekteki bulanık veriler, beş farklı alfa kesiti dikkate alınarak, beş farklı sınırlandırılmış veri kümesi ile temsil edilmişlerdir. Daha sonra her iki model de her bir veri kümesine ayrı ayrı uygulanarak, KVB'lerin her biri için beşer adet klasik etkinlik ve minimax etkinlik değerleri hesaplanmıştır. Ortalama klasik etkinlik değerlerine göre, 15 KVB arasından beşi etkin olarak saptanırken, ortalama minimax etkinlik değerleri dikkate alındığında bu sayı ikiye inmektedir.



## 1. Introduction

L'analyse d'enveloppement de données (Data envelopment analysis-DEA), introduite par Charnes et al. [1], est une technique de prise de décision basée sur la programmation mathématique, qu'on utilise pour évaluer l'efficacité relative des entités, appelées entités de prise de décision (decision making units-DMUs), qui utilisent des entrées multiples similaires pour produire des sorties multiples similaires.

La DEA a été largement utilisée pour évaluer l'efficacité relative des organisations comme des branches de banque, des hôpitaux, des universités, des entreprises, aussi bien pour faire un choix parmi les technologies comme des systèmes flexibles de production, des robots, des technologies de traitement de déchet etc. Les applications de la DEA à de tels problèmes peuvent être rencontrées dans de nombreux articles [2, 3, 4, 5].

Le modèle fondamental de DEA (le modèle de CCR DEA), développé par Charnes et al. [1], classe les DMUs en deux groupes, l'un consistant des entités efficaces et l'autre consistant de celles qui sont inefficaces. Pourtant, comme toutes les unités efficaces ont le même score d'efficacité de 1, ce modèle ne permet pas qu'on fasse une distinction entre elles. En outre, le modèle de CCR DEA donne à la DMU évaluée la liberté de choisir les poids des entrées et des sorties en sa propre faveur, c.à.d, d'une façon à maximiser son propre score d'efficacité. L'existence d'une telle flexibilité de poids peut aboutir à l'identification d'une DMU comme efficace en attribuant un poids extrêmement grand aux critères par rapport auxquels elle a montré une performance extrêmement bonne et au contraire, un poids extrêmement petit à ceux par rapport auxquels elle a montré une performance extrêmement faible. On appelle une telle DMU 'false positive'. Car, une pondération si extrême est irréaliste et elle affaiblit énormément le pouvoir de discrimination du modèle de DEA.

Pour surmonter les limitations du modèle de CCR DEA, on a développé un certain nombre d'approches permettant une discrimination plus forte parmi les DMUs, qui peut même assurer un classement entier des DMUs. L'une de ces approches est d'utiliser une méthodologie à deux phases combinant la DEA et d'autres techniques de décision multicritère. Khouja [4] adresse un problème de décision concernant le choix du meilleur robot. D'abord, il applique la DEA à tous les robots pour identifier ceux qui sont efficaces. Ensuite, pour pouvoir distinguer parmi ces robots efficaces, en se servant d'une fonction d'utilité additive, il détermine les scores d'utilité de ces robots, selon lesquels il les range. Parkan et Wu [6] étudient le même problème de décision adressé par Khouja. Mais, pour déterminer le meilleur parmi les robots efficaces, ils leur appliquent la TOPSIS et l'OCRA, séparément, et ils comparent les classements des robots obtenus par ces méthodes à celui obtenu par Khouja qui avait utilisé la fonction d'utilité additive. Dans la littérature, on peut trouver aussi des articles incluant l'utilisation intégrée de la DEA et de l'AHP pour distinguer mieux parmi les DMUs [7, 8].

Une autre approche pour augmenter le pouvoir de discrimination de la DEA, est de formuler de nouveaux modèles de programmation linéaire en faisant certaines transformations au modèle original de DEA, comme l'inclusion des nouvelles contraintes (c.à.d, des contraintes de restriction de poids) ou la définition d'une autre fonction objectif (c.à.d, une autre mesure d'efficacité ayant un pouvoir de discrimination plus fort que la mesure d'efficacité classique).

Quand quelque information sur les poids d'importance des entrées et des sorties (les poids des facteurs ou les multiplicateurs) est disponible, les contraintes de restriction de poids, qu'on appelle la région d'assurance (Assurance region-AR), peuvent être incluses dans le modèle de DEA. Ces contraintes limiteront la flexibilité de la DMU évaluée pour choisir les valeurs des multiplicateurs en sa faveur, recevant ainsi un score d'efficacité inférieure. Par conséquent, une discrimination plus forte parmi les DMUs sera possible et en plus, la distribution des poids d'une façon irréaliste qui causerait la négligence de quelques entrées ou sorties qu'on devrait prendre en compte, ne se

produira pas. On peut rencontrer des façons différentes de restreindre les poids d'importance des entrées et des sorties dans [9].

Quand il n'existe aucune information a priori sur l'importance des facteurs, on propose l'utilisation d'une mesure d'efficacité qui pourrait distinguer parmi les DMUs mieux que la mesure d'efficacité classique, comme par exemple, la mesure d'efficacité croisée, la mesure d'efficacité de minimax ou la mesure d'efficacité de minisomme. Sexton et al. [10] introduisent le concept d'efficacité croisée dans la DEA pour obtenir un classement entier parmi les DMUs. Dans l'analyse d'efficacité croisée, d'abord chaque DMU est évaluée par les poids optimaux des autres DMUs qui ont été produits par le modèle de CCR DEA, ensuite les DMUs sont classifiés selon le moyen des scores qu'elles reçoivent. Une telle évaluation permet la détermination des DMUs qui sont fausses positives (c.à.d, les DMUs qui sont évaluées comme efficaces par le modèle de CCR DEA, parce qu'elles exécutent extrêmement bien selon un seul ou très peu de critères) et assure qu'on choisisse comme la meilleure une DMU qui exécute assez bien selon plusieurs critères. Pourtant, quand le modèle de CCR DEA produit des poids optimaux multiples, l'analyste de décision ne pourra pas savoir quel ensemble de poids optimaux devrait être utilisé pour calculer les valeurs d'efficacité croisée et un choix arbitraire par des analystes différents mènera à de différents classements des DMUs, ce qui diminue la robustesse de l'analyse d'efficacité croisée. Pour surmonter ce problème de poids optimaux multiples, Doyle et Green [11] développent les modèles d'efficacité croisée agressive et bienveillante. Le modèle d'efficacité croisée agressive (ou bienveillante) a deux buts: l'objectif primaire est de maximiser l'efficacité d'une DMU particulière, et l'objectif secondaire est de minimiser (ou maximiser) l'efficacité totale des autres DMUs. Comme ce modèle fera un choix parmi les poids optimaux alternatifs qui maximisent l'efficacité d'une certaine DMU selon l'objectif secondaire, il réduira le nombre possible des poids optimaux alternatifs, ce qui augmente le degré de la robustesse de l'analyse d'efficacité croisée. Plusieurs articles sur l'application de l'analyse d'efficacité croisée aux problèmes de choix ont été apparus dans la littérature. Baker et Talluri [12] appliquent l'analyse d'efficacité croisée agressive au problème de choix de robot adressé par Khouja [4]. Sarkis et Weinrach [5] adressent le problème de décision concernant le choix de la meilleure technologie de traitement de déchet et ils y

appliquent quelques techniques de DEA dont l'une est l'analyse d'efficacité croisée agressive. Comme la mesure d'efficacité croisée, les mesures d'efficacité de minimax et minisomme aussi distingue mieux parmi les DMUs que la mesure d'efficacité classique. La mesure d'efficacité de minimax a pour but de minimiser la déviation maximale parmi les déviations de l'efficacité de toutes les DMUs, alors que la mesure d'efficacité de minisomme a pour but de minimiser la somme de toutes les déviations de l'efficacité. Comme ces mesures-ci ont un but concernant toutes les DMUs en même temps plutôt qu'une seule DMU, ils mènent à des scores d'efficacité plus bas (c.à.d, ils sont plus distinctifs) comparés à la mesure d'efficacité classique (c.à.d, l'objectif du modèle de CCR DEA) qui a pour but de minimiser la déviation de l'efficacité d'une seule DMU particulière. Pour améliorer le pouvoir de discrimination de la DEA, Li et Reeves [13] formulent un modèle de DEA multiobjectif en tenant compte aussi bien des mesures d'efficacité de minimax et de minisomme que de la mesure d'efficacité classique.

Les modèles standards de DEA exigent qu'on connaisse les valeurs des entrées et des sorties exactement. Cependant, il existe des problèmes de décision où il est très difficile ou même impossible d'obtenir les valeurs exactes de certaines entrées ou sorties selon lesquelles les DMUs seront évaluées. Dans ces cas, les données imprécises peuvent être représentés par des données ordinales, bornées ou flous, et puisque leurs valeurs ne sont pas connues précisément, elles sont incluses aux modèles standards de DEA comme des variables de décision inconnues, ce qui cause l'apparition des produits de deux variables dans le modèle, l'une indiquant la valeur de l'entrée ou de la sortie imprécise et l'autre indiquant son poids d'importance. Par conséquent, le modèle de DEA devient un programme non-linéaire et non convexe.

Pour pouvoir traiter les données imprécises dans la DEA, que l'on appelle l'analyse d'enveloppement de données imprécises (imprecise data envelopment analysis-IDEA), en évitant le problème de non-linéarité, certaines approches ont été développées. L'approche la plus largement utilisée est de faire des altérations de variables qui permettront la transformation du modèle de DEA non-linéaire en un modèle linéaire, que l'on appellera le modèle d'IDEA. Cook et al. [14] adresse le problème d'évaluation

des technologies où quelques facteurs sont connus à satisfaire seulement quelques relations ordinales (c.à.d, les DMUs sont catégorisées en utilisant l'échelle à L points ou elles sont rangées selon ces facteurs), et en définissant des variables nouvelles qui remplacent les termes causant la non-linéarité, ils formulent un modèle ayant le pouvoir de traiter un seul facteur ordinal. Quelques années plus tard, Cook et al. [15] étendent leur modèle de manière à traiter les problèmes de décision où il existe des facteurs ordinaux multiples. En définissant des variables différentes de celles de Cook et al., Cooper et al. [16] formulent un modèle d'IDEA qui permet aussi bien le traitement des données bornées que le traitement des données ordinales et des données exactes. Kim et al. [17] utilisent le modèle de Cooper et al. pour évaluer les efficacités des offices de téléphones. On peut aussi trouver l'application de ce modèle d'IDEA à un problème de décision concernant l'évaluation des efficacités des entreprises de télécommunication Koréennes dans [18]. Despotis et Smirlis [19] proposent d'abord une transformation de variables alternative à celle de Cooper et al. pour les données bornées, et ensuite, en servant de la transformation de variables introduite par Cook et al., ils étendent leur modèle traitant les données bornées de façon à traiter aussi des données ordinales. Pour but de comparaison, ils appliquent leur modèle à l'exemple numérique étudié dans [16]. Leur modèle produit les mêmes scores d'efficacité que celui de Cooper et al.

Une autre approche visant à traiter les données imprécises dans la DEA, consiste à convertir d'abord les données imprécises (ordinales ou bornées) en données exactes et à se servir ensuite d'un modèle standard de DEA linéaire, comme par exemple le modèle de CCR DEA. Zhu [20] explique en détaille la conversion des données ordinales en données exactes, et il applique cette approche au problème de décision concernant l'évaluation des efficacités des entreprises de télécommunication Koréennes, qui a été étudié dans [18]. Dans [21], on peut trouver une révision de l'approche de conversion des données imprécises en données exactes aussi bien l'approche de transformation de variables développée par Cooper et al [16].

Dans la littérature, on trouve aussi des études où on a proposé de convertir les données flous en données ordinales via une méthode de classement des nombres flous (fuzzy

number ranking method) et d'utiliser ensuite un modèle d'IDEA approprié ayant le pouvoir de traiter ces données ordinales [22, 23].

Comme on a déjà noté, les modèles de DEA donnent aux DMUs la flexibilité de choisir les valeurs des variables de décision en leur propre faveur. Par conséquent, un seul facteur selon lequel une DMU a montré une performance extrêmement bonne peut assurer qu'une DMU soit évaluée comme efficace, aboutissant à un nombre très élevé des DMUs efficaces, ce qui est un résultat indésirable. Comparé aux modèles de DEA traitant seulement les données exactes, les modèles traitant les données imprécises ont un pouvoir moins distinctif. Car, dans le dernier, en plus des multiplicateurs, les quantités des entrées et des sorties qui sont imprécises, sont aussi définis comme des variables de décision, ce qui augmente la chance de la DMU évaluée pour recevoir le score d'efficacité de 1 (c.à.d, ce qui réduit le pouvoir de discrimination du modèle). Donc, pour empêcher un tel résultat, on a besoin de certaines approches qui augmenteront le pouvoir de discrimination du modèle d'IDEA. Les méthodes proposées pour augmenter le pouvoir de discrimination des modèles classiques de DEA (comme l'utilisation intégrée de la DEA et d'une autre méthode de décision multicritère, l'inclusion des contraintes de restriction de poids dans le modèle ou la définition d'autres mesures d'efficacité ayant un pouvoir de discrimination plus fort) peuvent aussi être utilisées pour augmenter le pouvoir de discrimination des modèles d'IDEA. Dans le cas où on a de l'information sur le classement des facteurs ordinaux selon leur importance, Cook et al. [15] formulent des contraintes de restriction de poids ayant le pouvoir de représenter cette information. Cooper et al. [16] aussi incluent des contraintes de restriction de poids dans le modèle d'IDEA pour distinguer mieux parmi les DMUs, et ils appellent le modèle obtenu le modèle de AR-IDEA (Assurance Region-IDEA). Dans les cas où les DMUs sont évaluées selon des facteurs ordinaux, Cook et al. [15] proposent une autre approche qui consiste à associer la valeur la plus grande possible à  $\varepsilon$ , qui est considéré comme un paramètre de discrimination entre les rangs consécutifs et comme une borne inférieure pour les multiplicateurs. L'utilisation de la valeur maximale pour  $\varepsilon$  assurera une discrimination maximale parmi les DMUs. Karsak [22] adresse le problème de choix de robot, et il y applique une méthodologie à deux phases. Dans la première phase, on applique le modèle de Cook et al. pour

identifier les robots efficaces et dans la deuxième phase, pour pouvoir distinguer parmi ces robots efficaces, on leur applique l'analyse d'efficacité croisée en utilisant les poids optimaux produits par le modèle de Cook et al. Pourtant, comme dans cette méthodologie, l'analyse d'efficacité croisée est conduite seulement parmi les robots efficaces, les robots qui sont false positives ne peuvent pas être détectés. Sarkis et Talluri [24] construisent une matrice de comparaison par paires (a pair-wise comparison matrix) en se servant du modèle de Cook et al. [15] et d'une formulation agressive inspirée du modèle d'efficacité croisée agressive de Doyle et Green [11]. Ensuite, utilisant cette matrice, ils conduisent l'analyse d'efficacité croisée pour pouvoir mieux distinguer les DMUs qui sont bonnes exécutrices de ceux qui sont false positives. Karsak [23] incorpore le concept d'efficacité de minimax dans le modèle de Cook et al., aboutissant à un modèle d'IDEA qui distingue mieux parmi les DMUs et qui allège le problème de pondération irréaliste.

Dans ce mémoire, à part les approches d'IDEA déjà apparues dans la littérature, on va aussi présenter une nouvelle approche qui consiste à convertir des données floues en données bornées et utiliser ensuite un modèle d'IDEA approprié qui peut traiter ces données bornées. Ensuite, en se servant de cette approche et de quelques modèles d'IDEA, on va formuler un modèle d'IDEA général ayant le pouvoir de traiter un mélange de données imprécises et de données exactes. On va aussi introduire une mesure d'efficacité nouvelle ayant un pouvoir de discrimination haut et en se servant de cette mesure, on va développer un modèle de décision multicritère à poids communs qui peut être considéré comme un modèle efficace pour les problèmes de décision où les DMUs sont évaluées par une seule entrée exacte et des sorties multiples exactes ou imprécises.

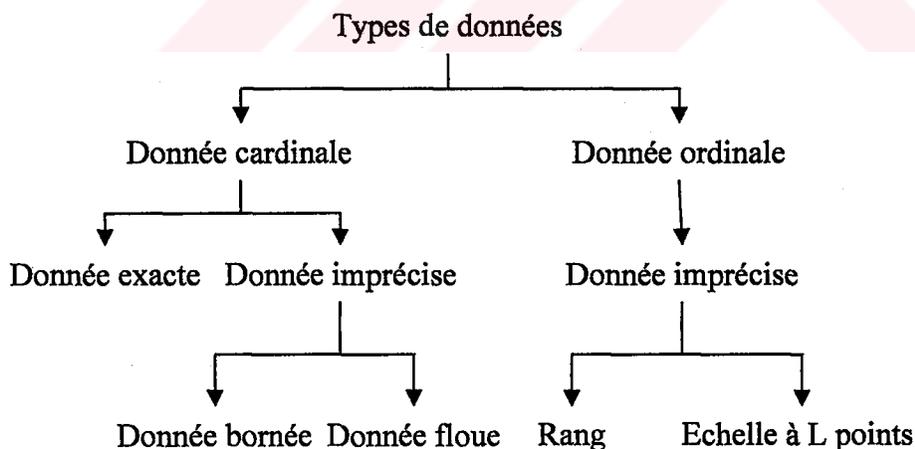
Ce mémoire est organisé comme suit: dans le chapitre 2, les types de données sont classifiés et les données imprécises incluant les données ordinales, bornées et floues sont décrits brièvement. Dans le chapitre 3, d'abord, le modèle de CCR DEA et l'analyse d'efficacité croisée sont introduits. Ensuite, le pouvoir de discrimination de l'analyse d'efficacité croisée agressive est illustré par un problème de décision concernant l'évaluation d'efficacité relative des entreprises de ciment turques en 2000.

Dans le chapitre 4, on présente d'abord les approches déjà apparues dans la littérature, qui ont été développées afin de traiter des données imprécises dans l'analyse d'enveloppement de données. Ensuite, les modèles d'IDEA alternatives, formulés en utilisant l'approche d'alternation de variables pour le traitement d'un certain type de donnée imprécise, sont comparés l'un à l'autre via des exemples numériques. Dans ce chapitre, on introduit aussi une nouvelle méthode d'IDEA qui consiste à convertir d'abord les données floues en données bornées en utilisant la représentation de  $\alpha$ -coupe, et appliquer ensuite à ces données bornées un modèle d'IDEA ayant le pouvoir de les traiter. Le chapitre 5 inclut quelques applications de la DEA et de l'IDEA. Premièrement, on prend en considération le problème de décision où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en compte pour l'évaluation des DMUs. En utilisant une nouvelle mesure d'efficacité, on développe un modèle de décision multicritère qui permet d'évaluer toutes les DMUs par des poids communs. Ensuite, ce modèle de décision multicritère à poids communs est étendu de façon à traiter aussi des sorties ordinales, ce qui permet l'évaluation d'efficacité relative des DMUs prenant en considération de plusieurs sorties exactes ou ordinales et une seule entrée exacte. Finalement, on formule un modèle d'IDEA général ayant le pouvoir de traiter de plusieurs sorties/entrées exactes, ordinales, bornées et floues triangulaires ou trapézoïdales. Pour obtenir un modèle plus distinctif (c.à.d, plus puissant selon le pouvoir de discrimination), le concept d'efficacité de minimax est incorporé au modèle d'IDEA. Le modèle qui résulte est appliqué à un problème de décision hypothétique. Les conclusions sont données dans le chapitre 6.

## 2. Les Types de Données

La plupart des problèmes de prise de décision exigent la considération des critères multiples pour la sélection de la meilleure alternative parmi un certain nombre d'alternatives. Le type de données le plus approprié pour les critères qu'on considère, devrait être choisi pour augmenter la fiabilité du choix fait par une certaine méthode de prise de décision.

Les critères peuvent être qualitatifs ou quantitatifs par nature. Les données qu'on utilise pour représenter ces critères peuvent être classifiées en deux catégories: des données ordinales et des données cardinales. Tous les types de données ordinales sont considérés comme imprécis tandis que certaines données cardinales sont exactes et d'autres sont imprécises. Une telle classification de données est illustrée dans la figure 2.1.



**Figure 2.1** Classification des données

Si on connaît précisément la valeur des données, on les appelle 'des données exactes'. Les critères quantitatifs comme le prix, le coût ou la quantité de production par mois

pour un produit spécifique, peuvent être représentés par des données exactes. Car, en général, il est possible et facile d'obtenir la valeur exacte pour ces critères.

Si on ne connaît pas la valeur exacte des données, on dit que ces données sont imprécises. Les données imprécises sont largement utilisées pour représenter les données qualitatives comme la qualité, la flexibilité etc. aussi bien que les données quantitatives dont la valeur exacte est difficile ou impossible d'être estimée comme la demande à long terme estimée d'un produit spécifique. En considérant la nature des données ou l'information disponible sur les données, le type de données imprécises le plus approprié devrait être choisi pour représenter ces données. Par exemple, si on connaît les bornes inférieures et supérieures des données, on devrait utiliser des données bornées pour les représenter. Ou bien, si seulement quelques relations ordinales comme le rang ou catégorisation des entités à une échelle par rapport à leur importance (c.à.d, une échelle à L points où chaque point représente une catégorie comme très important, important, moyen en importance, peu important etc.) sont disponibles, des données ordinales peuvent être utilisées pour représenter ces données. Les données ordinales, bornées et floues qui sont des données imprécises sont brièvement décrites ci-dessous:

#### *Données ordinales:*

Quand il est extrêmement difficile ou impossible d'obtenir la valeur exacte pour un critère, on peut préférer classifier les alternatives en un certain nombre de catégories représentant leur degré d'importance (par exemple, on peut utiliser une échelle à 5 points où un point particulier peut être interprété comme très haut, haut, moyen, bas, ou très bas) ou bien ranger directement les alternatives selon leur importance par rapport à ce critère. Dans ce cas, le point approprié ou le classement des alternatives devrait être déterminé par un consensus de la part des experts [15].

Dans le cas où le classement ordinal (rang ordinal) des alternatives par rapport à quelques critères serait disponible, le plus qu'on peut dire sur une alternative  $i$ , qui a un rang plus haut qu'une alternative  $j$ , est que l'alternative  $i$  est préféré à l'alternative  $j$ . Une telle interprétation est aussi vraie pour le cas où les alternatives seraient classifiées à une échelle à L points selon quelques critères. Dans plusieurs études poursuivies, on

observe que l'échelle à 5 points est généralement utilisée pour évaluer les alternatives en cas d'existence de données qualitatives. Les points de l'échelle (c.à.d, les scores) peuvent être interprétés comme ci-dessous:

- 5 : Très important (ou très haut, très bon etc.)
- 4 : Important (ou haut, bon etc.)
- 3 : Assez important (ou assez haut, assez bon etc.)
- 2 : Peu important (ou bas, mauvais etc.)
- 1 : Très peu important (ou très bas, très mauvais etc.)

L'échelle à  $L$  points ne devrait pas être interprétée dans un sens cardinal, c'est-à-dire, les points de l'échelle n'ont pas un sens numérique. Car, il n'est pas raisonnable de conclure qu'une alternative classifiée comme 'très importante' est cinq fois mieux qu'une alternative classifiée comme 'très peu importante'. Au contraire, ces points devraient être traités dans un sens ordinal, c.à.d. une alternative classifiée comme 'très importante' est préférée à celle classifiée comme 'peu importante' etc.

Les relations ordinales entre les alternatives par rapport aux certains critères peuvent être classifiées en deux groupes: les relations ordinales faibles et les relations ordinales fortes. Considérons  $y_{rj}$  et  $y_{rk}$ , qui indiquent les quantités de sortie  $r$  produite par l'alternative  $j$  et l'alternative  $k$ , respectivement. Si l'alternative  $j$  produit au moins autant de sortie  $r$  que l'alternative  $k$  produit, la relation ordinale entre ces deux alternatives par rapport à la sortie  $r$  est considérée comme faible et elle est représentée comme ci-dessous:

$$y_{rj} \geq y_{rk}, \text{ pour } \forall j \neq k$$

Si l'alternative  $j$  produit plus de sortie  $r$  que l'alternative  $k$  produit, on considère cette relation ordinale comme forte et on la représente comme ci-dessous:

$$y_{rj} > y_{rk}, \text{ for } \forall j \neq k$$

*Données bornées:*

Les données bornées sont des données dont les valeurs exactes se trouvent dans un intervalle dont on connaît la borne inférieure et supérieure.  $x^L$  et  $x^U$  étant respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la donnée bornée  $x$ ,  $x$  peut être représentée de différentes manières comme ci-dessous:

$$\text{a) } x \in [x^L, x^U]$$

$$\text{b) } x^L \leq x \leq x^U$$

$$\text{c) } x = x^L + \alpha(x^U - x^L), \text{ pour } \alpha \in [0,1]$$

*Données floues:*

La théorie de l'ensemble flou (fuzzy set theory) a été développée par Zadeh [25] pour résoudre les problèmes où une source de manque de précision existe. Un ensemble flou peut être défini mathématiquement en attribuant à chaque individu possible dans l'univers de discours une valeur qui représente son degré d'appartenance à l'ensemble flou.

Un ensemble flou  $A \subset R$  est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in R$$

$$\mu_A(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \text{ pour } \lambda \in [0,1]$$

où  $\mu_A(x)$  est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou  $A$  qui indique le degré d'appartenance de  $x$  à l'ensemble flou  $A$ .

Un ensemble flou  $A \subset R$  est normal si et seulement si

$$\sup_x \mu_A(x) = 1, \text{ pour } x \in R$$

Autrement dit, il est normal si la plus grande valeur d'appartenance à l'ensemble flou  $A$  est égale à 1.

Un ensemble  $A \subset R$ , qui est convexe et normal dont la fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  est continue en pièces (piecewise continuous) de  $R$  à l'intervalle fermé  $[0,1]$ , est appelé un nombre flou. La fonction d'appartenance d'un nombre flou  $A$  peut être décrite comme ci-dessous:

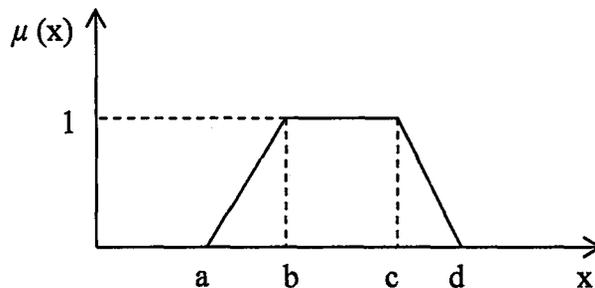
$$\mu_A(x) = \begin{cases} L_A(x), & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ R_A(x), & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases}$$

où  $L_A : [a,b] \rightarrow [0,1]$  et  $R_A : [c,d] \rightarrow [0,1]$ .

Plusieurs fonctions d'appartenance peuvent être dérivées de la fonction ci-dessus. Un type possible de nombres flous est le nombre flou trapézoïdal. Un nombre flou trapézoïdal  $A = (a,b,c,d)$  est un nombre flou dont la fonction d'appartenance, indiquée ci-dessus, a la forme d'un trapézoïde de la hauteur 1.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{x-d}{c-d}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.1)$$

Le graphe de la fonction d'appartenance d'un nombre flou trapézoïdal  $A = (a,b,c,d)$  est illustré dans la figure 2.2.:

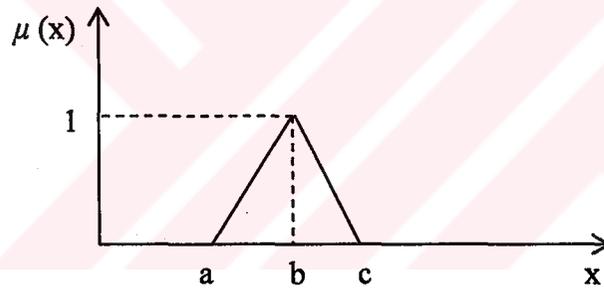


**Figure 2.2** La fonction d'appartenance d'un nombre flou trapézoïdal  $A = (a,b,c,d)$

Un nombre flou triangulaire est défini comme un nombre flou dont la fonction d'appartenance a une forme triangulaire de la hauteur 1. Donc, on peut le considérer comme un cas spécial du nombre flou trapézoïdal quand  $b = c$ . La fonction d'appartenance d'un nombre flou triangulaire  $A = (a, b, c)$  est indiquée ci-dessus:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.2)$$

Le graphe de la fonction d'appartenance d'un nombre flou triangulaire  $A = (a, b, c)$  est illustré dans la figure 2.3.



**Figure 2.3** La fonction d'appartenance d'un nombre flou triangulaire  $A = (a, b, c)$

### **3. L'Analyse d'Enveloppement de Données**

L'analyse d'enveloppement de données (Data envelopment analysis-DEA) est une technique de décision basée sur la programmation linéaire, qui évalue l'efficacité relative des alternatives, appelées entités de prise de décision (decision making units-DMUs), qui utilisent des entrées multiples similaires pour produire des sorties multiples similaires.

La DEA est une méthode non paramétrique, car elle nous permet de calculer l'efficacité relative des DMUs sans nous obliger à spécifier la forme de la fonction de production ou les poids d'importance des entrées et des sorties à prendre en compte. Au contraire des autres méthodes de décision multicritère, les poids des entrées et des sorties ne sont pas 'des entrées' pour la DEA, mais 'des sorties'. Parce que, la DEA, elle-même, produisent ces poids. Pour cette raison, la DEA est considérée comme une méthode objective comparée aux autres méthodes de décision multicritère qui exigent que le décideur (decision maker-DM) spécifie les poids d'importance de critères.

Dans la DEA, plusieurs concepts déjà connus dans l'analyse de décision multicritère sont représentés par un nom spécifique. Les critères qu'on désire minimiser sont appelés 'les entrées', les critères qu'on désire maximiser sont appelés 'les sorties', les alternatives qu'on veut évaluer sont appelées 'entités de prise de décision', et finalement, les poids qui indiquent le degré d'importance des critères, c'est-à-dire les poids d'importance, sont appelés 'les poids des facteurs', 'les poids des entrées et des sorties' ou tout simplement, 'les multiplicateurs'.

Le modèle original de DEA, à savoir le modèle de CCR DEA, a été introduit par Charnes, Cooper et Rhodes [1], et depuis lors, un certain nombre d'articles ont été apparus dans la littérature, où des améliorations ont été proposées et certaines extensions du modèle de CCR DEA ont été développées pour surmonter les faiblesses de celui-ci.

### 3.1. Le Modèle de CCR DEA

Le modèle de CCR DEA a le but de produire les poids des entrées et des sorties qui maximisent l'efficacité relative de la DMU en considération (connue aussi comme la DMU évaluée) sous les contraintes qui assurent que les efficacités de toutes les DMUs sont inférieures ou égales à l'efficacité idéale de 1.

Le concept de l'efficacité technique de Farrell [26] ayant été adopté par la DEA, la mesure d'efficacité d'une DMU est définie comme la somme de ses entrées pondérées divisée par la somme de ses sorties pondérées, comme ci-dessous:

$$E_j = \frac{\sum_r \mu_r y_{rj}}{\sum_i \omega_i x_{ij}}, \quad \forall j$$

où  $E_j$  est la valeur d'efficacité relative de la DMU  $j$ ;  $\mu_r$  et  $\omega_i$  sont les poids attribués à la sortie  $r$  et à l'entrée  $i$ , respectivement;  $y_{rj}$  est la quantité de la sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $x_{ij}$  est la quantité de l'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$ .

En utilisant la mesure d'efficacité indiquée précédemment, le modèle de CCR DEA est formulé comme ci-dessous:

$$\max E_{j_0} = \frac{\sum_r \mu_r y_{rj_0}}{\sum_i \omega_i x_{ij_0}}$$

sous les contraintes (slc)

$$\frac{\sum_r \mu_r y_{rj}}{\sum_i \omega_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j \quad (3.1)$$

$$\mu_r \geq \varepsilon, \quad \forall r$$

$$\omega_i \geq \varepsilon, \quad \forall i$$

où  $E_{j_0}$  indique la valeur d'efficacité relative de la DMU évaluée, DMU  $j_0$  et  $\varepsilon$  est un nombre non négatif auquel on préfère attribuer en général un nombre positive pour assurer la positivité des multiplicateurs  $\mu_r$  et  $\omega_i$  afin que aucune entrée ou sortie qu'on devrait considérer ne soit négligée.

La formulation (3.1) qui est non-linéaire peut être transformée en un modèle linéaire en définissant  $q = \sum_{i=1}^m \omega_i x_{ij_0}$  et en remplaçant  $\mu_r$  et  $\omega_i$  par  $u_r q$  et  $v_i q$ , respectivement, comme ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 \max E_{j_0} &= \sum_r u_r y_{rj_0} \\
 \text{sic} \quad &\sum_i v_i x_{ij_0} = 1 \\
 &\sum_r u_r y_{rj} - \sum_i v_i x_{ij} \leq 0, \forall j \\
 &u_r \geq \varepsilon, \forall r \\
 &v_i \geq \varepsilon, \forall i
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $u_r$  indique le poids attribué à la sortie  $r$  et  $v_i$  indique le poids attribué à l'entrée  $i$ .

Pour qu'on puisse déterminer l'efficacité relative de toutes les DMUs, le modèle ci-dessus doit être formulé et résolu séparément pour chaque DMU  $j_0$  (c'est-à-dire, pour  $j_0 = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  indiquant le nombre des DMUs qu'on veut évaluer)

La DEA suppose que toutes les données associées aux entrées et aux sorties sont positives et que la valeur de l'efficacité idéale est égale à 1. Donc, toutes les efficacités déterminées par le modèle de CCR DEA appartiennent à l'intervalle  $(0,1]$ . Les DMUs qui reçoivent le score 1 (c.à.d,  $E_{j_0} = 1$ ) sont appelées 'efficaces' et on dit qu'elles se trouvent sur la frontière efficace, alors que les DMUs qui reçoivent un score inférieur à 1 (c.à.d,  $E_{j_0} < 1$ ) sont appelées 'inefficaces' et qu'on dit qu'elles se trouvent sous la frontière efficace. En conclusion, le modèle de DEA classe les DMUs en deux

groupes: celles qui sont efficaces et celles qui sont inefficaces. Puisque toutes les DMUs efficaces ont le même score d'efficacité qui est 1, le modèle de CCR DEA ne permet pas qu'on fasse une distinction entre elles. Donc, ce modèle-ci n'est pas approprié pour le cas où le décideur doit choisir seulement une DMU.

En outre, le modèle de CCR DEA donne à la DMU évaluée (DMU  $j_0$ ) la liberté de choisir les poids des entrées et des sorties en sa faveur, c.à.d, d'une façon à maximiser son propre score d'efficacité. L'existence d'une telle flexibilité de poids peut aboutir à l'identification d'une DMU comme efficace en attribuant un poids extrêmement grand aux critères par rapport auxquels elle a montré une performance extrêmement bonne et au contraire, un poids extrêmement petit (c.à.d,  $\varepsilon$ ) à ceux par rapport auxquels elle a montré une performance extrêmement faible. Cependant, une pondération si extrême est irréaliste et elle affaiblit énormément le pouvoir de discrimination du modèle de DEA.

Pour surmonter les limitations du modèle original de DEA, plusieurs approches qui permettent une discrimination meilleure entre les DMUs ont été proposées dans la littérature. On peut les classer essentiellement en deux catégories:

1. L'utilisation intégrée de la DEA et des autres techniques de décision multicritère: cette approche consiste à utiliser d'abord le modèle de DEA pour déterminer les DMUs qui sont efficaces et après, appliquer une autre technique de décision multicritère comme AHP ou TOPSIS pour déterminer la meilleur des DMUs efficaces [4, 6, 8].
2. La formulation des variantes du modèle original de DEA: un nouveau modèle de DEA ayant un pouvoir de discrimination plus fort peut être formulé en faisant les transformations suivantes au modèle original de DEA:
  - a) Changement de la fonction objectif: la fonction objectif du modèle original de DEA peut être changée en définissant une autre mesure d'efficacité qui a un pouvoir de discrimination plus fort, comme la mesure d'efficacité croisée [11], la mesure d'efficacité de minimax [13], etc.

- b) L'inclusion des nouvelles contraintes: Dans le cas où une certaine information sur les poids d'importance des critères serait disponible, des contraintes de restriction de poids reflétant une telle information, que l'on appelle la Région d'Assurance (Assurance Region-AR), peuvent être ajoutées au modèle original de DEA, ce qui aboutit au modèle de AR-DEA [9]. Selon l'information obtenue par le décideur, on peut limiter les poids des façons différentes. Par exemple, on peut attribuer une borne inférieure au poids lui-même ou à la proportion de deux poids. Cependant, l'inclusion de telles contraintes au modèle réduira le degré d'objectivité de la DEA.

Dans ce mémoire, on va présenter quelques approches incluses dans la deuxième catégorie ci-dessus, dont le pouvoir de discrimination sera illustré à l'aide de quelques exemples numériques.

## 3.2. Les Modèles de DEA Avec Un Pouvoir de Discrimination Plus Fort

### 3.2.1. L'Analyse d'Efficacité Croisée

Le concept d'efficacité croisée (cross efficiency) a été introduit par Sexton et al.[10] pour surmonter le pouvoir de discrimination faible du modèle de CCR DEA. Depuis lors, plusieurs améliorations de l'analyse d'efficacité croisée et ses applications aux problèmes de décision ont été apparus dans la littérature [5, 11, 12, 27].

La mesure d'efficacité croisée est définie comme l'efficacité d'une DMU calculée avec les poids optimaux qui maximisent l'efficacité d'une autre DMU et elle est formulée comme ci-dessous:

$$E_{kj} = \frac{\sum_r u_{rk} y_{rj}}{\sum_i v_{ik} x_{ij}} \quad (3.3)$$

où  $E_{kj}$  est la valeur d'efficacité croisée de la DMU  $j$  évaluée par la DMU  $k$ ,  $u_{rk}$  est le poids optimal attribué à la sortie  $r$  pour DMU  $k$  et  $v_{ik}$  est le poids optimal attribué à l'entrée  $i$  pour DMU  $k$ .

La valeur d'efficacité croisée  $E_{kj}$  est aussi appelée 'la valeur d'évaluation par l'adversaire' (peer appraisal value) pour  $j \neq k$  et la 'valeur d'évaluation par soi-même' (self appraisal value) ou simplement 'l'efficacité simple' pour  $j = k$ .

Les valeurs d'efficacité croisée d'une DMU nous donnent de l'information sur sa performance mesurée par les poids optimaux des autres  $n-1$  DMUs. Avec les valeurs d'efficacité croisée de chaque DMU, on construit une matrice appelée la matrice d'efficacité croisée indiquée dans le tableau 3.1. Les valeurs d'efficacité simples obtenues par le modèle de CCR DEA,  $E_{kk}$ , se trouvent sur la diagonale de cette matrice. La valeur qui se trouve sur la ligne  $k$  et sur la colonne  $j$  de la matrice,  $E_{jk}$ , représente la valeur d'efficacité croisée de la DMU  $j$  calculée par les poids optimaux de DMU  $k$ .

**Tableau 3.1** La matrice d'efficacité croisée

DMU	1	2	...	j	...	n
1	$E_{11}$	$E_{12}$	...	$E_{1j}$	...	$E_{1n}$
2	$E_{21}$	$E_{22}$	...	$E_{2j}$	...	$E_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...
k	$E_{k1}$	$E_{k2}$	...	$E_{kj}$	...	$E_{kn}$
...	...	...	...	...	...	...
n	$E_{n1}$	$E_{n2}$	...	$E_{nj}$	...	$E_{nn}$
Efficacité croisée moyenne	$e_1$	$e_2$	...	$e_j$	...	$e_n$

La valeur d'efficacité croisée moyenne d'une DMU  $j$  indique comment elle est évaluée par les autres DMUs. On la calcule en prenant la moyenne des valeurs d'efficacité croisée qui se trouvent sur la colonne  $j$  de la matrice ci-dessus avec ou sans la valeur d'efficacité simple. Si on veut considérer seulement les valeurs d'évaluation par les

adversaires (peer appraisal values), l'efficacité croisée moyenne  $e_j$  est calculée par la formulation suivante:

$$e_j = \frac{\sum_{j \neq k} E_{kj}}{n-1}, \forall j \quad (3.4)$$

où  $e_j$  est la valeur d'efficacité croisée moyenne de la DMU  $j$ ,  $E_{kj}$  est la valeur d'efficacité croisée de la DMU  $j$  évaluée par la DMU  $k$ , et  $n$  indique le nombre des DMUs qu'on évalue.

Les DMUs qui sont de bonnes exécutrices (performers) auront plusieurs valeurs d'efficacité croisée hautes sur la colonne associée à elles dans la matrice d'efficacité croisée, tandis que les DMUs positives fausses (false positive) auront plusieurs valeurs d'efficacité croisée basses. Pour différencier les DMUs positives fausses de celles qui sont de bonnes exécutrices, on peut utiliser la valeur d'efficacité croisée moyenne [24]. Les bonnes exécutrices sont les DMUs qui exécutent assez bien par rapport aux plusieurs critères tandis que les positives fausses sont les DMUs qui sont évaluées comme efficaces par le modèle de CCR DEA, parce qu'elles exécutent extrêmement bien par rapport à un seul critère ou à très peu de critères. La valeur d'efficacité croisée moyenne d'une telle DMU sera inférieure à celle d'une DMU qui a été évalué comme inefficace par le modèle de CCR DEA [5].

Pour identifier les DMUs positives fausses et mesurer le degré de leur positivité fausse (false positiveness) d'une manière efficace, Doyle et Green propose le calcul de l'index de Maverick [11]. L'index de Maverick est défini comme le pourcentage de la différence entre l'efficacité croisée et l'efficacité simple, comme formulé ci-dessous:

$$M_j = \frac{E_{jj} - e_j}{e_j} \times 100, \forall j \quad (3.5)$$

où  $M_j$  indique l'index de Maverick de la DMU  $j$ . Un index de Maverick plus haut signifie un degré de positivité fautive plus haut pour la DMU en considération.

Lorsque les poids produits par le modèle de CCR DEA seront utilisés dans la formulation (3.3), l'analyste de décision se trouvera devant une difficulté dans le cas où des poids optimaux multiples existeraient. Car, quand les poids optimaux ne sont pas uniques, l'analyste ne pourra pas savoir quel ensemble de poids optimaux devrait être utilisé pour calculer les valeurs d'efficacité croisée et par conséquent, elle va le choisir arbitrairement. Comme ces valeurs-ci vont dépendre du choix de l'analyste, l'analyse d'efficacité croisée conduite par de différents analystes aboutira à de différentes matrices d'efficacité croisée, donc, à de différents classements des DMUs. Cette ambiguïté affrontée par l'analyste diminue la robustesse de l'analyse d'efficacité croisée.

Pour surmonter ce problème de 'poids optimaux multiples', Doyle et Green [11] propose d'obtenir les poids par un modèle où l'objectif primaire est de maximiser l'efficacité relative de la DMU évaluée, la DMU  $k$ , et l'objectif secondaire est de minimiser (ou maximiser) la somme des valeurs d'efficacité des autres DMUs. Comme ce modèle choisira celui (ou ceux) qui assure l'objectif secondaire parmi les vecteurs (ensembles) de poids optimaux alternatifs produits par le modèle de CCR DEA (c.à.d, les poids qui assurent déjà l'objectif primaire), le nombre des vecteurs de poids optimaux alternatifs de ce modèle sera inférieur à celui du modèle de CCR DEA, ce qui augmente le degré de la robustesse de l'analyse d'efficacité croisée.

L'objectif primaire du modèle proposé par Doyle et Green est assuré en ajoutant au modèle du DEA la contrainte suivante, qui égalise l'efficacité de la DMU  $k$  à sa valeur d'efficacité simple ( $E_{kk}$ ) que l'on obtient en résolvant le modèle de CCR DEA.

$$\frac{\sum_r u_{rk} y_{rk}}{\sum_i v_{ik} x_{ik}} = E_{kk} \Rightarrow \sum_r u_{rk} y_{rk} - E_{kk} \sum_i v_{ik} x_{ik} = 0 \quad (3.6)$$

où  $E_{kk}$  est la valeur d'efficacité simple de la DMU  $k$ , c.à.d, la valeur d'efficacité générée par le modèle de CCR DEA ;  $u_{rk}$  et  $v_{ik}$  sont les poids optimaux qui maximisent l'efficacité de DMU  $k$ .

L'objectif secondaire du modèle de Doyle et Green peut être formulé comme ci-dessous:

$$\min \sum_{j \neq k} E_{kj} = \min \sum_{j \neq k} \frac{\sum_r u_{rk} y_{rj}}{\sum_i v_{ik} x_{ij}} \quad (3.7)$$

Pourtant, la formulation ci-dessus est fractionnelle et elle ne peut pas être convertie en forme linéaire. Donc, Doyle et Green ont proposé l'approximation suivante, que l'on définit comme la somme des sorties pondérées totales de toutes les DMU  $j \neq k$  divisée par la somme des entrées pondérées totales de toutes les DMU  $j \neq k$  :

$$\min \frac{\sum_{j \neq k} \sum_r u_{rk} y_{rj}}{\sum_{j \neq k} \sum_i v_{ik} x_{ij}} = \min \frac{\sum_r u_{rk} \sum_{j \neq k} y_{rj}}{\sum_i v_{ik} \sum_{j \neq k} x_{ij}} \quad (3.8)$$

En utilisant l'objectif primaire (Formulation (3.6) et la forme linéaire de l'objectif secondaire défini précédemment, le modèle d'efficacité croisée agressive de Doyle et Green est formulé comme ci-dessous:

$$\begin{aligned} & \min \sum_r u_{rk} \sum_{j \neq k} y_{rj} \\ \text{sic} \quad & \sum_i v_{ik} \sum_{j \neq k} x_{ij} = 1 \\ & \sum_r u_{rk} y_{rk} - E_{kk} \sum_i v_{ik} x_{ik} = 0 \\ & \sum_r u_{rk} y_{rj} - \sum_i v_{ik} x_{ij} = 0, \forall j \neq k \\ & u_{rk} \geq \varepsilon, \forall r \\ & v_{ik} \geq \varepsilon, \forall i \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'analyse d'efficacité croisée agressive comprend deux pas: premièrement, on utilise le modèle de CCR DEA pour obtenir les valeurs d'efficacité simple ( $E_{kk}, k = 1, 2, \dots, n$ ). Deuxièmement, le modèle d'efficacité croisée agressive est formulé et résolu pour chaque DMU  $k$  afin d'obtenir les poids optimaux qu'on utilisera dans le calcul des valeurs d'efficacité croisée ( $E_{kj}$ ) avec lesquelles on construira la matrice d'efficacité croisée. Ensuite, on va prendre le moyen de chaque colonne de cette matrice et les DMUs seront classifiées selon leur valeur d'efficacité croisée agressive moyenne. En somme, pour faire l'analyse d'efficacité croisée agressive, on doit résoudre au total  $2n$  formulations qui comprennent  $n$  formulations de CCR DEA et  $n$  formulations d'efficacité croisée agressive.

Le modèle d'efficacité croisée bienveillante a les mêmes contraintes que le modèle d'efficacité croisée agressive. La seule différence est que sa fonction objectif doit être maximisée au lieu d'être minimisée. Donc, le remplacement de 'min' par 'max' dans la fonction objectif de la formulation (3.9) aboutira à la formulation d'efficacité croisée bienveillante.

Les avantages de l'analyse d'efficacité croisée agressive ou bienveillante peuvent être résumés comme ci-dessous [12]:

1. Il n'est pas possible de choisir une DMU positive fautive (c.à.d, sous optimale)
2. Le choix optimal sera une DMU qui exécute bien par rapport à plusieurs critères.
3. On n'a pas besoin d'obtenir de l'information sur l'importance des critères pour obtenir un classement des DMUs. Donc, l'objectivité de la DEA n'est pas diminuée.
4. Le modèle peut être reconstruit de façon à inclure les contraintes de restrictions de poids, si nécessaire.

Le nom de la mesure d'efficacité croisée  $E_{kj}$  dépend du modèle qu'on utilise pour produire les poids optimaux de DMU  $k$  qu'on va utiliser dans le calcul de l'efficacité

croisée de DMU  $j$ . On appelle  $E_{kj}$  'la mesure d'efficacité croisée simple', si les poids optimaux de DMU  $k$  utilisés pour calculer l'efficacité de DMU  $j$  sont produits par le modèle de CCR DEA; 'la mesure d'efficacité croisée agressive', s'ils sont produits par le modèle d'efficacité croisée agressive de Doyle et Green; et 'la mesure d'efficacité croisée bienveillante', s'ils sont produits par le modèle d'efficacité croisée bienveillante de Doyle et Green [5].

### 3.2.2. Une Application de l'Analyse d'Efficacité Croisée

On va évaluer l'efficacité relative de 15 entreprises de ciment turques à l'année 2000 à l'aide de l'analyse d'efficacité croisée agressive [28].

Pour évaluer ces entreprises de ciment, on considère 'le nombre du personnel', 'l'actif total' et 'les capitaux propres' comme des entrées, et 'le chiffre d'affaire net' et 'le résultat net' comme des sorties. Les valeurs des entrées et des sorties des entreprises de ciment turques en 2000 sont données dans le tableau 3.2.

**Tableau 3.2** Les données pour les entreprises de ciment turques en 2000

Le nom de l'entreprise	Les Entrées			Les Sorties	
	Nombre du personnel'	Actif total (million liras turques (LT))	Capitaux propres (million LT)	Chiffre d'affaire net (million LT)	Résultat net (million LT)
Adana Çimento	510	106.420.706	73.435.159	72.290.190	10.787.387
Afyon Çimento	130	4.607.604	2.098.960	9.696.829	470.993
Akçansa	939	127.030.753	92.677.150	118.325.133	2.531.981
Batı Çimento	420	53.034.601	38.043.825	67.883.801	2.919.431
Batı Söke Çimento	261	41.647.704	38.181.286	21.749.398	37.406
Bolu Çimento	295	53.304.945	39.635.189	50.038.772	3.586.302
Bursa Çimento	289	31.264.032	20.420.623	32.930.520	1.446.123
Çimsa	516	102.672.316	72.710.861	75.379.944	13.421.232
Çimentaş	638	61.140.648	32.977.486	43.578.909	1.545.927
Göлтаş Çimento	529	38.059.164	26.375.278	25.814.262	3.454.349
Konya Çimento	166	29.076.376	18.982.047	23.937.369	2.551.302
Mardin Çimento	198	30.901.708	23.413.052	25.493.544	9.571.365
Oysa-Niğde Çimento	147	10.704.649	7.211.609	14.356.176	2.791.738
Nuhçimento	438	90.171.517	62.603.926	55.036.260	7.276.016
Ünye Çimento	225	92.031.441	44.307.470	27.571.238	11.251.494

Avant de commencer l'analyse d'efficacité croisée agressive, on normalise toutes les données pour éviter les problèmes qui peuvent se produire à cause de grandes différences d'échelle qui existent entre les entrées et les sorties. On utilise la normalisation suivante qu'on appelle 'la normalisation de valeur moyenne (mean value normalization)':

$$\bar{y}_r = \sum_j y_{rj} / n, \quad y'_{rj} = y_{rj} / \bar{y}_r, \quad \forall r, j$$

$$\bar{x}_i = \sum_j x_{ij} / n, \quad x'_{ij} = x_{ij} / \bar{x}_i, \quad \forall i, j$$

où  $\bar{y}_r$  et  $\bar{x}_i$  indiquent la valeur moyenne pour la sortie  $r$  et la valeur moyenne pour l'entrée  $i$ , respectivement;  $y'_{rj}$  et  $x'_{ij}$  indiquent la valeur normalisée de la sortie  $r$  produite par la DMU  $j$  et la valeur normalisée de l'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$ , respectivement.

Après avoir normalisé les données indiquées dans le tableau 3.2, le modèle de CCR DEA (formulation (3.2)) est formulé et résolu pour chaque DMU afin de déterminer les valeurs d'efficacité simples (c.à.d,  $E_{kk}$ , pour  $k = 1, 2, \dots, 15$ ), que l'on indique à la troisième colonne du tableau 3.3. Après, le modèle d'efficacité croisée agressive (formulation (3.9)) est utilisé pour calculer les valeurs d'efficacité croisée agressive,  $E_{kj}$ , avec les quelles on construit la matrice d'efficacité croisée agressive indiquée dans le tableau 3.4. Les valeurs d'efficacité croisée agressive moyennes, que l'on indique à la dernière ligne du tableau 3.4 et aussi à la quatrième colonne du tableau 3.3 sont calculées par la formulation (3.4). Finalement, les indexes de Maverick qui indiquent le degré de positivité fausse des DMUs, sont calculés en utilisant la formulation (3.5) et ils sont indiqués à la cinquième colonne du tableau 3.3.

**Tableau 3.3** Les valeurs d'efficacité simple, les valeurs moyennes d'efficacité croisée agressive et les index de Maverick pour les entreprises de ciment (pour  $\varepsilon = 0$ )

Le numéro de l'entreprise	Le nom de l'entreprise	L'efficacité simple	L'efficacité croisée agressive moyenne	L'index de Maverick
1	Adana Çimento	0.904	0.651	38.9
2	Afyon Çimento	1.000	0.591	69.2
3	Akçansa	0.777	0.560	38.8
4	Batı Çimento	1.000	0.758	31.9
5	Batı Söke Çimento	0.499	0.324	54.0
6	Bolu Çimento	1.000	0.730	37.0
7	Bursa Çimento	0.815	0.566	44.0
8	Çimsa	0.953	0.700	36.1
9	Çimentaş	0.582	0.359	62.1
10	Göлтаş Çimento	0.479	0.306	56.5
11	Konya Çimento	0.903	0.669	35.0
12	Mardin Çimento	1.000	0.818	22.2
13	Oysa-Niğde Çimento	1.000	0.658	52.0
14	Nuhçimento	0.789	0.567	39.2
15	Ünye Çimento	1.000	0.640	56.3

Comme on peut observer dans le tableau 3.3, le modèle de CCR DEA évalue six entreprises de ciment (Afyon Çimento, Batı Çimento, Bolu Çimento, Mardin Çimento, Oysa-Niğde Çimento et Ünye Çimento) comme efficaces, ce qui ne nous permet ni de choisir la meilleur parmi les entreprises ni de faire un classement entier entre elles. En outre, il est possible qu'une entreprise positive fausse existe parmi ces entreprises efficaces. Pour pouvoir distinguer les entreprises positives fausses et pour pouvoir classer entièrement les entreprises de ciment, on prend en compte les valeurs moyennes de l'efficacité croisée agressive. C'est Mardin Çimento qui a reçu le score d'efficacité croisée agressive moyen le plus haut, donc elle est considérée comme la meilleure. En plus, comme il n'existe aucun score d'efficacité croisée moyenne identique, un classement entier des entreprises est disponible, comme indiqué ci-dessous:

Mardin Çimento > Batı Çimento > Bolu Çimento > Çimsa > Konya Çimento > Oysa-Niğde Çimento > Adana Çimento > Ünye Çimento > Afyon Çimento > Nuhçimento > Bursa Çimento > Akçansa > Çimentaş > Batı Söke Çimento > Göлтаş Çimento

En outre, les entreprises Afyon Çimento, Oysa-Niğde Çimento et Ünye Çimento, qui ont été évaluées comme efficaces par le modèle de CCR DEA, ont reçu des scores d'efficacité croisée moyens qui sont inférieurs à ceux de certaines entreprises qui ont été évaluées comme inefficace, comme par exemple, Çimsa et Konya Çimento. Donc, on

les considère comme les entreprises positives fausses. D'ailleurs, leur degré de positivité fausse mesuré par l'index de Maverick est haut comparé aux autres entreprises efficaces, ce qui n'est pas surprenant.

En résumé, l'analyse d'efficacité croisée évite qu'on choisisse les entreprises positives fausses et elle permet qu'on choisisse l'entreprise qui exécute assez bien par rapport à plusieurs critères.



**Tableau 3.4** La matrice d'efficacité croisée agressive pour les entreprises de ciment

Numéro de l'entreprise	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.904	0.437	0.708	0.923	0.456	0.999	0.653	0.953	0.388	0.306	0.876	1.000	0.637	0.788	0.969
2	0.199	1.000	0.259	0.362	0.115	0.257	0.323	0.210	0.268	0.197	0.256	0.223	0.404	0.178	0.126
3	0.816	0.514	0.777	1.000	0.499	0.998	0.718	0.846	0.436	0.319	0.850	0.786	0.629	0.725	0.598
4	0.590	1.000	0.742	1.000	0.428	0.792	0.784	0.631	0.514	0.445	0.692	0.685	0.882	0.529	0.284
5	0.820	0.509	0.776	0.998	0.499	1.000	0.716	0.849	0.434	0.317	0.852	0.786	0.625	0.728	0.607
6	0.840	0.447	0.746	0.951	0.490	1.000	0.672	0.863	0.403	0.288	0.847	0.770	0.566	0.744	0.725
7	0.636	1.000	0.739	1.000	0.368	0.803	0.815	0.666	0.582	0.422	0.762	0.675	0.848	0.568	0.430
8	0.904	0.436	0.708	0.922	0.455	0.998	0.652	0.953	0.387	0.305	0.875	1.000	0.637	0.788	0.969
9	0.634	1.000	0.737	0.997	0.367	0.801	0.813	0.664	0.582	0.421	0.761	0.673	0.847	0.567	0.431
10	0.645	1.000	0.725	0.996	0.411	0.810	0.781	0.706	0.508	0.479	0.729	0.886	1.000	0.570	0.377
11	0.882	0.544	0.757	0.999	0.451	1.000	0.730	0.933	0.450	0.352	0.903	1.000	0.732	0.772	0.852
12	0.435	0.080	0.056	0.142	0.004	0.249	0.102	0.532	0.050	0.136	0.314	1.000	0.394	0.341	1.000
13	0.384	0.796	0.121	0.257	0.028	0.267	0.232	0.473	0.167	0.344	0.368	1.000	1.000	0.309	0.616
14	0.904	0.437	0.709	0.924	0.456	1.000	0.653	0.954	0.388	0.306	0.877	1.000	0.637	0.789	0.969
15	0.423	0.076	0.054	0.137	0.004	0.241	0.098	0.517	0.048	0.130	0.304	0.966	0.377	0.332	1.000
$e_j$	0.651	0.591	0.560	0.758	0.324	0.730	0.566	0.700	0.359	0.306	0.669	0.818	0.658	0.567	0.640

## **4. L'Analyse d'Enveloppement de Données Imprécises (IDEA)**

### **4.1. Les Approches Fondamentales pour le Traitement des Données Imprécises dans la DEA**

L'analyse d'enveloppement de donnée évalue l'efficacité relative des entités de prise de décision (DMUs) prenant en considération des entrées et des sorties multiples. Les modèles standards de DEA exigent qu'on connaisse les valeurs des entrées et des sorties exactement. Cependant, dans certains cas, les valeurs des entrées et des sorties peuvent être imprécise comme des données ordinales, bornées ou flous. Dans ces cas, puisque les valeurs des entrées et des sorties ne sont pas connues précisément, elles sont incluses aux modèles standards de DEA comme des variables de décision inconnues, ce qui cause l'apparition des produits de deux variables dans le modèle, l'une indiquant la valeur de l'entrée ou de la sortie imprécise et l'autre indiquant son poids d'importance. Par conséquent, le modèle de DEA devient un programme non-linéaire et non convexe, que l'on appelle l'analyse d'enveloppement de données imprécises (imprecise data envelopment analysis-IDEA).

Dans plusieurs articles, ce problème de non-linéarité a été adressé et certaines approches ont été développées pour traiter l'imprécision dans la DEA. L'approche le plus largement utilisée est de faire des altérations de variables qui permettront la transformation du modèle d'IDEA non-linéaire en un modèle linéaire [15, 16, 19]. Une autre approche est de convertir les données imprécises (ordinales ou bornées) en données exactes et après, de se servir d'un modèle standard de DEA linéaire, comme par exemple le modèle de CCR DEA [20, 21]. Dans la littérature, on rencontre aussi des études où on a proposé de convertir les données flous en données ordinales et d'utiliser ensuite un modèle d'IDEA approprié ayant le pouvoir de traiter ces données ordinales [22, 23]. Dans ce mémoire, à part les approches déjà apparues dans la littérature, on va aussi présenter une nouvelle approche qui consiste à convertir des données flous en données bornées et utiliser ensuite un modèle d'IDEA approprié qui peut traiter ces données bornées.

## **4.2. L'Application des Alternations de Variables**

### **4.2.1. Les Modèles d'IDEA Ayant Le Pouvoir de Traiter des Données Ordinales**

#### **4.2.1.1. Le Modèle de Cook et al.**

Les modèles standards de DEA ne sont pas capables de traiter les données qualitatives. Ainsi, dans les cas où certaines entrées ou sorties ne sont pas quantitatives par nature et qu'elles peuvent être représentées seulement par données qualitatives, certaines transformations devraient être faites au modèle de DEA afin de l'accommoder à de telles données qualitatives.

Cook et al. ont introduit un modèle d'IDEA qui permet l'inclusion des entrées et des sorties ordinales dans la structure de CCR DEA [15]. Le modèle qu'ils proposent peut traiter les problèmes de décision où certaines données d'entrées ou de sorties sont une catégorisation des DMUs à une certaine échelle (par exemple, échelle à 5 points) ou simplement un classement ordinal des DMUs.

Si l'échelle à L points sera utilisée pour représenter une entrée ou une sortie ordinale, chaque DMU recevra l'un des scores 1 à L, le score L représentant 'la meilleure' et le score 1 'la pire' pour une sortie ordinale tandis que l'inverse étant vrai pour une entrée ordinale. Car, une DMU qui produit plus de sortie en utilisant moins d'entrées est préférable à celle qui produit moins de sorties en utilisant plus d'entrées. De même, si on utilisera le classement des DMUs selon une entrée ou sortie ordinale, chaque DMU recevra l'un des rangs 1 à n, n indiquant le nombre des DMUs. Dans ce cas aussi, la DMU ayant le score n est considéré comme "la meilleure" si le critère selon lequel elle est classée est une sortie et "le pire" s'il est une entrée.

Le modèle de CCR DEA ne peut pas traiter les données ordinales d'une façon raisonnable dans sa forme standard. Car, si on introduit explicitement les scores reçus par les DMUs selon les critères ordinaux au modèle de CCR DEA, le modèle traite ces scores comme s'ils ont un sens numérique, ce qui n'est pas vrai. Autrement dit, une DMU qui reçoit le score 2 selon une sortie ordinale est évalué par le modèle de CCR DEA comme deux fois meilleure qu'une DMU qui reçoit le score 1. Par contre, la

DMU ayant le score de 2 devrait être considéré seulement comme préférable à celle qui reçoit le score 1. Car, comme on ne connaît pas les valeurs exactes des sorties produites par les DMUs, il n'est pas raisonnable de conclure combien de fois une DMU est meilleure qu'aux autres.

Afin d'obtenir un modèle qui puisse interpréter dans un sens ordinal les données représentées par l'échelle à  $L$  points ou le classement des DMUs, Cook et al. proposent de faire certaines transformations au modèle de CCR DEA, que l'on explique en détaille ci-dessous:

Considérons une situation où on évaluera  $n$  DMUs prenant en considération  $s$  sorties ordinales et  $m$  entrées ordinales. Pour les sorties et les entrées ordinales, on définit respectivement les vecteurs d'unité à dimension  $L$   $\gamma_r(j) = [\gamma_{r1}(j), \dots, \gamma_{rL}(j)]$  et  $\delta_i(j) = [\delta_{i1}(j), \dots, \delta_{iL}(j)]$  dont les entrées ont les significations suivantes:

$$\gamma_r(j) = \begin{cases} 1 & \text{si la DMU } j \text{ est rangée à la } l\text{ième place par rapport à la sortie ordinaire } r \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si la DMU } j \text{ est rangée à la } l\text{ième place par rapport à l'entrée ordinaire } i \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Autrement dit, les vecteurs  $\gamma_r(j)$  et  $\delta_i(j)$  indiquent les scores attribués à la DMU  $j$  par rapport à la sortie ordinaire  $r$  et à l'entrée ordinaire  $i$ , respectivement.

$L$ , qui est la dimension des vecteurs définis ci-dessus, dépend de l'échelle de Likert qu'on utilise pour catégoriser les DMUs. Les échelles de Likert utilisées par les chercheurs du marché sont généralement à 5, 7 ou 9 points. Pourtant, l'utilisation de l'échelle à 5 points semble être assez commune dans plusieurs études, puisque l'utilisation de cinq catégories auxquelles on associe une signification particulière, comme par exemple, très important, important, assez important, peu important, très peu

important, semble être suffisante pour classifier les alternatives selon un critère d'une manière rationnelle.

Si l'échelle à 5 points sera utilisée (c.à.d,  $L=5$ ) et si, par exemple, la DMU 1 est rangée à la 3ème place (c.à.d, elle est incluse dans la troisième catégorie parmi les cinq catégories) selon la sortie 4, donc  $\gamma_{43}(1)=1$  et  $\gamma_{4l}(1)=0$  pour  $l=1,2,4,5$  (c.à.d,  $\gamma_4(1)=[0,0,1,0,0]$ ).

En plus des vecteurs de rang  $\gamma_r(j)$  et  $\delta_i(j)$ , qui indiquent les rangs associés à la DMU  $j$  par rapport à la sortie  $r$  et l'entrée  $i$ , Cook et al. définient aussi des vecteurs de valeur  $w_r^1 = [w_{r1}^1, w_{r2}^1, \dots, w_{rL}^1]$  et  $w_i^2 = [w_{i1}^2, w_{i2}^2, \dots, w_{iL}^2]$  dont les entrées  $w_{ri}^1$  et  $w_{ii}^2$  représentent les valeurs pondérées d'être rangée dans la  $li$ ème place selon la sortie  $r$  et l'entrée  $i$ , respectivement, pour  $\forall r, i, l$ .

Dans le modèle de CCR DEA, la contribution de la sortie exacte  $r$  à l'efficacité totale de la DMU  $j$  est représentée par le terme  $u_r y_{rj}$ ,  $u_r$  indiquant le poids d'importance associé à la sortie  $r$  et  $y_{rj}$  indiquant le score reçu par la DMU  $j$  selon la sortie  $r$ . Pourtant, quand les sorties ordinales existent, le terme  $u_r y_{rj}$  devient non-linéaire. Parce que, comme le multiplicateur  $u_r$ , le score  $y_{rj}$  aussi devient une variable, puisque la valeur exacte de la sortie  $r$  produite par la DMU  $j$  est inconnue. Pour surmonter ce problème de non-linéarité, Cook et al. remplacent le terme  $u_r y_{rj}$  par une seule variable représentée par  $w_r^1 \gamma_r(j)$  (ou  $\sum_{l=1}^L w_{rl}^1 \gamma_{rl}(j)$ ) où  $w_r^1$  est le vecteur à dimension  $L$  incluant les variables  $w_{rl}^1$  qui indiquent la valeur pondérée d'être placée dans le  $li$ ème rang selon la sortie  $r$  (pour  $\forall l, r$ ) et  $\gamma_r(j)$  est le vecteur à dimension  $L$  incluant les variables binaires  $\gamma_{rl}(j)$ , qui indique le rang associé à la DMU  $j$  selon la sortie  $r$ . Une transformation similaire à celle faite pour les sorties ordinales peut être aussi faite pour les entrées ordinales, comme indiquée ci-dessous.

$$u_r y_{ij} = w_r^1 \gamma_r(j), \quad \forall r, j$$

$$v_i x_{ij} = w_i^2 \delta_i(j), \quad \forall i, j$$

En utilisant les substitutions ci-dessus, le modèle de Cook et al. est formulé comme suit:

$$\begin{aligned} \max E_{j_0} &= \sum_r w_r^1 \gamma_r(j_0) \\ \text{sic} \quad &\sum_i w_i^2 \delta_i(j_0) = 1 \\ &\sum_r w_r^1 \gamma_r(j) - \sum_i w_i^2 \delta_i(j) \leq 0, \quad \forall j \\ &\{w_r^1, w_i^2\} \in \Psi \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $\gamma_r(j_0)$  et  $\delta_i(j_0)$  sont les vecteurs indiquant le rang associé à la DMU évaluée, DMU  $j_0$ , selon la sortie ordinale  $r$  et l'entrée ordinale  $i$ , respectivement.  $\Psi$  dénote l'ensemble des vecteurs de valeur admissibles.

L'existence des relations ordinales fortes sur les composants des vecteurs de valeur signifie que la différence entre la valeur pondérée d'être placé dans le rang  $l+1$  et celle d'être placé dans le rang  $l$  est strictement positive. Si le rang 5 indique 'la meilleure' pour les sorties ordinales et 'la pire' pour les entrées ordinales, on peut écrire les inégalités  $w_{r,l+1}^1 > w_r^1$  et  $w_{i,l+1}^2 > w_i^2$  pour  $l = 1, 2, \dots, L-1$ . C'est-à-dire, la valeur pondérée d'être placé dans le rang  $l+1$  est supérieure à celle d'être placée dans le rang  $l$  selon un facteur ordinal. Car, comme un rang plus grand indique 'meilleure' pour une sortie ordinale, cela signifie qu'une DMU placée dans le rang  $l+1$  selon une sortie ordinale  $r$  produit plus de sortie ordinale  $r$  que celle qui est placée dans le rang  $l$ . Similairement, comme un rang plus grand indique 'pire' pour une entrée ordinale, une DMU placée dans le rang  $l+1$  selon une entrée ordinale  $i$  consomme plus d'entrée ordinale  $i$  que celle qui est placée dans le rang  $l$ . Donc,  $\Psi$ , qui représente l'ensemble des contraintes indiquant les relations ordinales, est défini comme ci-dessous:

$$\Psi = \left\{ (w_r^1, w_i^2) \left| \begin{array}{l} w_{r,l+1}^1 - w_{r,l}^1 \geq \varepsilon, w_{r,l}^1 \geq \varepsilon \quad \forall r; l = 1, 2, \dots, L-1 \\ w_{i,l+1}^2 - w_{i,l}^2 \geq \varepsilon, w_{i,l}^2 \geq \varepsilon, \quad \forall i; l = 1, 2, \dots, L-1 \end{array} \right. \right\} \quad (4.2)$$

où  $w_r^1$  et  $w_i^2$  indiquent les valeurs pondérées d'être associé au rang  $l$  selon la sortie  $r$  et l'entrée  $i$ , respectivement ; et  $\varepsilon$  est un scalaire positive. En somme, la formulation (4.2) assure que le modèle attribue une valeur pondérée plus grande à la DMU placée dans le rang  $l+1$  comparée à celle qui est placée dans le rang  $l$ .

Dans les modèles de DEA, les DMUs ont la flexibilité de choisir les valeurs des variables de décision en leur propre faveur. Par conséquence, un seul facteur selon lequel une DMU a montré une performance extrêmement bonne peut assurer qu'une DMU soit évaluée comme efficace, aboutissant à un nombre très élevé des DMUs efficaces, ce qui est un résultat indésirable. Comparé au modèle de DEA traitant seulement les données exactes, les modèles traitant les données ordinales ont un pouvoir moins distinctif. Car, dans le dernier, en plus des multiplicateurs, les facteurs ordinaux sont aussi définis comme des variables de décision, ce qui augmente la flexibilité d'une DMU pour choisir les valeurs des variables en sa faveur. Donc, pour empêcher un tel résultat, on a besoin de certaines approches qui augmenteront le pouvoir de discrimination du modèle d'IDEA. L'une des approches est d'ajouter des contraintes de restriction de poids dans le modèle de Cook et al. Une autre approche est d'associer une valeur appropriée à  $\varepsilon$ , qui peut être considéré comme un paramètre distinctif [15].

#### *L'inclusion des contraintes de restriction de poids dans le modèle*

Il existe plusieurs situations de décision multicritère où les gestionnaires peuvent vouloir imposer un classement a priori des critères selon leurs degrés d'importance. Dans ce cas, si les critères sont ordinaux et s'ils sont représentés tous par une échelle à  $L$  points, l'information sur l'importance des critères peut être incorporée dans le modèle sans difficulté par l'ajout des contraintes qui restreignent les variables de valeur  $w_r^1$  et  $w_i^2$ . Cependant, si on représentait les critères différents par des échelles différentes, l'incorporation de l'importance des critères au modèle serait problématique.

Pour incorporer l'importance relative des entrées et des sorties ordinales, on doit redéfinir l'ensemble  $\Psi$  qui inclut les contraintes de restrictions sur les vecteurs de valeur  $\{w_r^1, w_r^2\}$  (c'est-à-dire, la formulation 4.2). Supposons que les sorties ordinales sont rangées selon leur importance dans l'ordre descendant, et que, sans perte de généralité, elles sont numérotées de 1 à  $s$  ( $s$  indique le nombre des sorties ordinales en considération), 1 indiquant le critère le plus important. Autrement dit, la sortie ordinale  $r$  est assumée plus importante que la sortie ordinale  $r+1$ . Si les sorties étaient des données exactes, cette situation serait reflétée en utilisant les inégalités suivantes:

$$u_r - u_{r+1} \geq \varepsilon, \quad r = 1, 2, \dots, s-1$$

$$u_s \geq \varepsilon$$

où  $u_r$  indique le poids d'importance de la sortie  $r$ .

Pourtant, pour les sorties ordinales, les variables de poids d'importance,  $u_r$ , n'existent pas explicitement dans le modèle. Elles sont considérées implicitement par le vecteur de valeur  $w_r^l$ . Donc, nous pouvons refléter la priorisation des sorties ordinales par l'ajout des restrictions sur les entrées du vecteur  $w_r^l$ , comme ci-dessous:

$$w_{rl}^1 - w_{r+1l}^1 \geq \varepsilon, \quad \forall l; \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$w_{sl}^1 \geq \varepsilon, \quad \forall l$$

Les inégalités ci-dessus indiquent que la valeur pondérée d'être placée dans le rang  $l$  selon une sortie ordinale qui a le rang d'importance  $r$  est plus grande que celle d'être placée dans le même rang selon une sortie ordinale qui a le rang d'importance  $r+1$ , et la valeur pondérée d'être placé dans le rang  $l$  selon la moins importante sortie (c.à.d,  $w_s^1$ ) est positive, ce qui assure que cette sortie (et par conséquent, aucune sortie) ne soit négligée dans le processus d'évaluation des DMUs.

De la même façon, en faisant les mêmes suppositions, les inégalités suivantes peuvent être formulées pour refléter l'importance relative des entrées ordinales:

$$w_{il}^2 - w_{i+1l}^2 \geq \varepsilon, \quad \forall l; i = 1, 2, \dots, m-1$$

$$w_{ml}^2 \geq \varepsilon, \quad \forall l$$

L'inclusion des contraintes expliquées précédemment dans la formulation (4.2) (c.à.d,  $\Psi$ ) assurera la considération de l'information sur l'importance relative des sorties et des entrées ordinales. En plus, comme ces contraintes limitent de plus la région admissible du problème, ils augmenteront le pouvoir de discrimination du modèle, ce qui mènera à un nombre plus petit de DMUs efficaces.

#### *Le choix d'une valeur appropriée pour $\varepsilon$*

Comme les modèles standards de DEA, le modèle de Cook et al. a le degré de dépendance au choix de  $\varepsilon$ . Quand le modèle de Cook et al. est appliqué à un ensemble de données en attribuant chaque fois une valeur différente à  $\varepsilon$ , on obtient des valeurs d'efficacité différentes. Donc, les résultats sont sensibles au choix de  $\varepsilon$ .

La valeur choisie pour  $\varepsilon$  influence les valeurs des multiplicateurs et la différence entre les valeurs pondérées attribuées à deux catégories (ou rangs) consécutives, ce qui influence en conséquence les valeurs d'efficacité attribuées aux DMUs. Une valeur plus grande de  $\varepsilon$  est préférable à une valeur plus petite pour deux raisons: premièrement, une fois qu'on a choisi les facteurs selon lesquels les DMUs seront évaluées, il n'est pas raisonnable que quelques uns soient attribués un poids d'importance négligeable. Parce que, s'il avait une importance négligeable, il n'aurait pas été choisi comme un critère à considérer dans l'analyse de décision. Deuxièmement,  $\varepsilon$  joue aussi le rôle d'être un paramètre de discrimination minimale (c.à.d, elle représente la différence minimale entre la valeur pondérée attribuée au rang  $(l+1)$  et celle attribuée au rang  $l$ ). Quand on choisit une valeur plus grande pour  $\varepsilon$ , on obtient des valeurs d'efficacité plus basses, ce qui permet une discrimination plus forte entre les DMUs. Donc, il est raisonnable de distinguer entre les rangs différents le plus possible afin d'obtenir une réduction maximale dans le nombre de DMUs efficaces.

La maximisation de la discrimination entre les rangs consécutives et de l'importance minimale attribuée aux facteurs peut être assurée en assignant à  $\varepsilon$  la plus grande valeur possible, que l'on peut déterminer en résolvant les  $n$  formulations suivantes et définissant  $\varepsilon_{\max} = \min_{j=1,2,\dots,n} \{\hat{\varepsilon}_j\}$  [15].

$$\max \hat{\varepsilon}_j = \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

sous les contraintes de la Formulation 4.1 (4.3)

#### 4.2.1.2. Le Modèle de Cooper et al.

Cooper et al. [16] proposent une autre formulation de DEA qui est capable de traiter avec des données ordinales, comme une alternative au modèle de Cook et al., présenté dans le sous-chapitre précédent. En fait, leur modèle qu'ils appellent le modèle d'IDEA, est capable de traiter avec un mélange de données imprécises (ordinales et bornées) et de données exactes. Cependant, dans ce sous-chapitre, pour but de le comparer au modèle de Cook et al., on présentera seulement la partie de leur modèle qui traite des données ordinales.

Quand la sortie  $r$  produite et l'entrée  $i$  consommée par les DMUs sont connues seulement à satisfaire quelques relations ordinales,  $y_{rj}$  qui indique la quantité de sortie ordinaire  $r$  produite par la DMU  $j$  et,  $x_{ij}$  qui indique la quantité d'entrée ordinaire  $i$  consommée par la DMU  $j$  deviennent des variables, parce qu'on ne connaît pas leurs valeurs exactes. En conséquence, les termes  $u_r y_{rj}$  et  $v_i x_{ij}$  existants dans le modèle de CCR DEA, qui indiquent, respectivement, les valeurs pondérées de la sortie  $r$  produite et l'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$ , causent la non-linéarité. Car, aussi bien que les variables  $y_{rj}$  et  $x_{ij}$ , les multiplicateurs  $u_r$  et  $v_i$ , indiquant les poids d'importance de la sorties  $r$  et de l'entrée  $i$ , respectivement, sont aussi des variables. Pour éviter ce problème de non-linéarité, Cooper et al. proposent de remplacer les produits de deux

variables  $u_r y_{rj}$  par une seule variable  $Y_{rj}$  et les produits  $v_i x_{ij}$  par  $X_{ij}$ , ce qui aboutit à la formulation suivante:

$$\begin{aligned}
 \max E_0 &= \sum_r Y_{rj_0} \\
 \text{sic} \quad &\sum_i X_{ij_0} = 1 \\
 &\sum_r Y_{rj} - \sum_i X_{ij} \leq 0, \quad \forall j \\
 &Y_{rj}, X_{ij} \in \text{ORDREL}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où  $Y_{rj}$  indique la valeur pondérée de la sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $X_{ij}$  indique la valeur pondérée de l'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$  et ORDREL est l'ensemble des contraintes qui représentent les relations ordinales entre les DMUs selon chaque sortie ordinale  $r$  (pour  $r = 1, 2, \dots, s$ ) et chaque entrée ordinale  $i$  (pour  $i = 1, 2, \dots, m$ ). Par exemple, si la DMU 1 reçoit le score 5 et la DMU 2 reçoit le score 4 par rapport à la sortie 3, cela signifie que la DMU 1 produit plus de sortie 3 comparé à la DMU 2. Donc,  $Y_{31}$  est plus grand que  $Y_{32}$ . Pour refléter une telle situation, on inclut la contrainte  $Y_{31} - Y_{32} \geq \varepsilon$  dans l'ensemble ORDREL. Les contraintes qui se trouvent dans ORDREL diffèrent beaucoup, dépendant du problème de décision qu'on étudie. Il n'est pas possible d'écrire une formulation générale pour refléter les relations ordinales qui existent entre les DMUs, donc il n'est pas pratique de programmer ce modèle. L'analyste de décision devrait être très attentif lors de la formulation des contraintes de relations ordinales. Car, celles-ci diffèrent beaucoup d'après l'ensemble de données qu'on étudie.

#### 4.2.1.3. La Comparaison du Modèle de Cook et al. au Modèle de Cooper et al.

Le modèle de Cook et al. et celui de Cooper et al. seront comparés l'un à l'autre selon leur efficacité et leur pouvoir de discrimination.

$L$ ,  $n$ ,  $m$  et  $s$  indiquant la dimension de l'échelle à  $L$  points, le nombre des DMUs à évaluer, le nombre des entrées ordinales et le nombre des sorties ordinales, respectivement, le nombre des variables de décision et celui des contraintes de chaque modèle sont indiqués dans le tableau 4.1.

**Tableau 4.1** Le nombre des variables de décision et le nombre des contraintes des modèles de Cook et al. et de Cooper et al. lorsque les sorties et les entrées ordinales sont représentées par l'échelle à  $L$  points

Modèle	Le nombre des variables de décision	Le nombre des contraintes
Cook et al.	$L \times (m + s)$	$L \times (m + s) + n + 1$
Cooper et al.	$n \times (m + s)$	$n \times (m + s) + n + 1$

Comme on peut observer dans le tableau 4.1, la différence fondamentale entre l'efficacité du modèle de Cook et al. et celle du modèle de Cooper et al. est que dans le modèle de Cook et al., le nombre des variables de décision et le nombre des contraintes exprimant les relations ordinales dépendent particulièrement du 'nombre de catégories (scores) possibles' (le nombre de scores possibles est égale à  $L$  si on utilise l'échelle à  $L$  points pour représenter les facteurs ordinales alors qu'il est égale à  $n$  si on utilise un classement (rang) entier des DMUs), tandis que dans le modèle de Cooper et al., ils dépendent du nombre des DMUs. Donc, en cas d'existence des entrées ou sorties ordinales exprimées par l'échelle à  $L$  points, l'efficacité du modèle de Cook et al. sera supérieure à celle du modèle de Cooper et al., car en général  $L < n$ . D'autre part, si les entrées ou sorties ordinales sont exprimées par un classement entier des DMUs,  $L$  sera remplacé par  $n$  dans le tableau 4.1, donc l'efficacité des deux modèles sera la même.

**Tableau 4.2** La comparaison des modèles de Cook et al. et de Cooper et al. par rapport à leur pouvoir de discrimination et leur efficacité

Le type des données ordinales	Le type des relations ordinales	Comparaison par rapport au pouvoir de discrimination	Comparaison par rapport à l'efficacité mesurée par le nombre des variables de décision et le nombre des contraintes
Un classement entier	Faibles	Le modèle de Cook et al. = le modèle de Cooper et al.	Le modèle de Cook et al. = le modèle de Cooper et al.
	Fortes	Le modèle de Cook et al. = le modèle de Cooper et al.	Le modèle de Cook et al. = le modèle de Cooper et al.
L'échelle à L points	Faibles	Le modèle de Cook et al. = le modèle de Cooper et al.	Le modèle de Cook et al. > le modèle de Cooper et al., si $n > L$
	Fortes	Le modèle de Cook et al. $\geq$ le modèle de Cooper et al.	Le modèle de Cook et al. > le modèle de Cooper et al., si $n > L$

Lorsque les critères à considérer sont fortement ordinaux et qu'ils sont exprimés par une échelle à L points, si chaque score de 1 à L de cette échelle est attribué à au moins une DMU, les contraintes représentant les relations ordinales des deux modèles seront équivalentes. Cependant, si quelques scores de cette échelle ne sont attribués à aucune DMU, les contraintes représentant les relations ordinales du modèle de Cook et al. seront plus restrictives que celles du modèle de Cooper et al. Autrement dit, elles diminueront plus la flexibilité de la DMU évaluée pour choisir les valeurs des variables en sa propre faveur, ce qui aboutira à une discrimination plus forte parmi les DMUs. D'autre part, quand les DMUs sont entièrement classées selon les critères, chaque rang possible de 1 à n sera naturellement attribué à l'un des n DMUs. Donc, les deux modèles seront équivalents, menant aux mêmes scores d'efficacité.

Comme on peut observer dans le tableau 4.2, le pouvoir de discrimination et l'efficacité du modèle de Cook et al. sont au moins aussi bons que ceux du modèle de Cooper et al. pour de divers types de données et de relations ordinales. En outre, il est plus facile de programmer le modèle de Cook et al. Parce que grâce à l'utilisation des vecteurs  $\gamma_j$  et  $\delta_j$ , il devient possible de présenter explicitement au programme les scores reçus par les DMUs et l'utilisation des vecteurs  $w_r^1$  et  $w_r^2$  permet de modéliser les relations ordinales dans un format général, comme on peut le voir dans l'exemple de programme donné dans l'appendice A. D'autre part, dans le modèle de Cooper et al., on ne montre pas explicitement les scores reçus par les DMUs, au contraire cette information est donnée implicitement par les contraintes représentant les relations ordinales. Et, ces contraintes de relations ordinales nécessitent qu'on les entre manuellement dans le programme un par un, ce qui signifie un effort et une attention supplémentaire pour le programmeur (voir l'appendice B).

Pour illustrer les résultats de la comparaison des deux modèles indiqués précédemment, on considérera l'exemple numérique suivant qu'on a pris de [15].

Considérons 10 DMUs qui seront évaluées par rapport à 3 sorties ordinales et 3 entrées ordinales représentées par l'échelle à 5 points, le score 5 étant 'le meilleur score' selon les sorties ordinales et 'le pire score' selon les entrées ordinales. Les scores attribués

aux DMUs par rapport aux sorties et aux entrées sont donnés dans le tableau 4.3 et les scores d'efficacité déterminés par les modèles de Cook et al. et de Cooper et al. pour  $\varepsilon = 0.03$  sont illustrés dans le tableau 4.4.

**Tableau 4.3** Les scores attribués aux DMUs par rapport aux sorties et entrées ordinales

DMU $j$	Sortie 1	Sortie 2	Sortie 3	Entrée 1	Entrée 2	Entrée 3
1	4	2	5	5	2	1
2	5	5	2	3	5	2
3	5	5	5	1	2	1
4	3	3	3	4	3	2
5	2	3	1	5	1	4
6	4	1	5	1	2	2
7	5	2	5	5	4	3
8	5	1	3	3	3	3
9	1	4	2	4	2	5
10	1	2	2	5	5	5

**Tableau 4.4** Les scores d'efficacité obtenus par le modèle de Cook et al. et le modèle de Cooper et al.

DMU $j$	Le modèle de Cook et al.	Le modèle de Cooper et al.
1	0.76	0.79
2	0.73	0.79
3	1.00	1.00
4	0.67	0.73
5	1.00	1.00
6	0.82	0.82
7	0.67	0.70
8	0.67	0.73
9	0.55	0.61
10	0.37	0.43

Comme on peut voir dans le tableau 4.4, les mêmes DMUs (la DMU 3 et la DMU 5) sont évaluées comme efficaces par les deux modèles. D'autre part, pour quelques DMUs inefficaces, les scores d'efficacité diffèrent. Les scores obtenus par le modèle de Cook et al. sont inférieurs ou égaux à ceux obtenus par le modèle de Cooper et al. Donc, le pouvoir de discrimination de Cook et al. est au moins aussi bon que celui du modèle de Cooper et al. En outre, on observe dans le Tableau 4.5 que le nombre des variables de décision et celui des contraintes de Cook et al. sont inférieurs à ceux du modèle de Cooper et al.

**Tableau 4.5.** Le nombre des variables de décision et celui des contraintes des modèles de Cook et al. et de Cooper et al. pour l'exemple numérique

Le Modèle	Le nombre des variables de décision	Le nombre des contraintes
Cook et al.	$5 \times (3 + 3) = 30$	$5 \times (3 + 3) + 10 + 1 = 41$
Cooper et al.	$10 \times (3 + 3) = 60$	$10 \times (3 + 3) + 10 + 1 = 71$

Le modèle de Cook et al. est donné dans la figure 4.1 alors que le modèle de Cooper et al. et son équivalent exprimé en variables propres au modèle de Cook et al. (c.à.d,  $w_r^1$  et  $w_i^2$ ) qu'on a formulé pour buts de comparaison sont donnés dans la figure 4.2.

Cook et al. et Cooper et al. remplacent les termes 'sortie pondérée' et 'entrée pondérée' du modèle de CCR DEA (c.à.d,  $u_r y_{rj}$  et  $v_i x_{ij}$ ) par d'autres termes, comme indiqué ci-dessous:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{CCR} & \text{Cook et al.} & \text{Cooper et al.} \\
 \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
 u_r y_{rj} & = w_r^1 \gamma_r(j) & = Y_{rj}, \forall r, \forall j \\
 v_i x_{ij} & = w_i^2 \delta_i(j) & = X_{ij}, \forall i, \forall j
 \end{array} \quad (4.5)$$

Les égalités ci-dessus indiquent que l'ensemble des contraintes excluant les contraintes représentant les relations ordinales du modèle de Cook et al. est équivalent à celui du modèle de Cooper et al. Cependant, deux modèles peuvent différer l'un de l'autre en leurs contraintes de relations ordinales, comme pour le cas de l'exemple numérique présenté dans ce sous-chapitre.

Pour buts de comparaison, l'équivalent du modèle de Cooper et al. est formulé en utilisant la formulation 4.5, c'est-à-dire, en remplaçant chaque variable  $Y_{rj}$  et  $X_{ij}$  par une variable appropriée  $w_r^1$  ou  $w_i^2$  du modèle de Cook et al., comme indiqué dans l'exemple ci-dessous:

$$Y_{31} = w_3^1 \gamma_3(1) = [w_{31}^1 \ w_{32}^1 \ w_{33}^1 \ w_{34}^1 \ w_{35}^1] \times [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T = w_{35}^1$$

Considérons la sortie 3 et l'entrée 1 de l'exemple donné précédemment. Les équivalents des contraintes indiquant les relations ordinales entre les DMUs selon la sortie 3 et l'entrée 1 du modèle de Cooper et al. sont déterminés comme ci-dessous.

Pour la sortie 3:

$$Y_{31} = Y_{33} = Y_{36} = Y_{37} > Y_{34} = Y_{38} > Y_{32} = Y_{39} = Y_{310} > Y_{35} > \varepsilon \Rightarrow w_{35}^1 > w_{33}^1 > w_{32}^1 > w_{31}^1 > \varepsilon$$

Pour l'entrée 1:

$$X_{11} = X_{15} = X_{17} = X_{110} > X_{14} = X_{19} > X_{12} = X_{18} > X_{13} = X_{16} > \varepsilon \Rightarrow w_{11}^2 > w_{12}^2 > w_{13}^2 > w_{15}^2 > \varepsilon$$

Les contraintes de relations ordinales du modèle de Cooper et al. ne sont pas équivalents à celles du modèle de Cook et al., dû au fait que le 'score 4' n'est attribué à aucune DMU selon la sortie 3 et le 'score 2' n'est attribué à aucune DMU selon l'entrée 1. Comme le modèle de Cook et al. prend en compte l'existence de ces scores et définit les variables  $w_{34}^1$  et  $w_{12}^2$  pour les représenter, ses contraintes de relations ordinales qui sont liées à la sortie 3 et à l'entrée 1 sont plus restrictive que celles du modèle de Cooper et al., comme l'indique le tableau 4.6. Si ces scores étaient attribuées à au moins une DMU, tous les deux modèles seraient équivalents, aboutissant aux mêmes scores d'efficacité.

**Tableau 4.6** Contraintes indiquant les relations ordinales entre les DMUs selon la sortie 3 et l'entrée 1 dans les modèles de Cook et al. et Cooper et al.

Le modèle	Les contraintes liées a la sortie 3	Les contraintes liées a l'entrée 1
Cook et al.	$w_{35}^1 > w_{34}^1 > w_{33}^1 > w_{32}^1 > w_{31}^1 > \varepsilon$	$w_{11}^2 > w_{12}^2 > w_{13}^2 > w_{15}^2 > \varepsilon$
L'équivalent du Cooper et al.	$w_{35}^1 > w_{33}^1 > w_{32}^1 > w_{31}^1 > \varepsilon$	$w_{11}^2 > w_{12}^2 > w_{13}^2 > w_{15}^2 > \varepsilon$

$$\max E_1 = w_{14}^1 + w_{22}^1 + w_{35}^1$$

slc

$$w_{15}^2 + w_{22}^2 + w_{31}^2 = 1$$

$$w_{14}^1 + w_{22}^1 + w_{35}^1 - w_{15}^2 - w_{22}^2 - w_{31}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{25}^1 + w_{32}^1 - w_{13}^2 - w_{25}^2 - w_{32}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{25}^1 + w_{35}^1 - w_{11}^2 - w_{22}^2 - w_{31}^2 \leq 0$$

$$w_{13}^1 + w_{23}^1 + w_{33}^1 - w_{14}^2 - w_{23}^2 - w_{32}^2 \leq 0$$

$$w_{12}^1 + w_{23}^1 + w_{31}^1 - w_{15}^2 - w_{21}^2 - w_{34}^2 \leq 0$$

$$w_{14}^1 + w_{21}^1 + w_{35}^1 - w_{11}^2 - w_{22}^2 - w_{32}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{22}^1 + w_{35}^1 - w_{15}^2 - w_{24}^2 - w_{33}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{21}^1 + w_{33}^1 - w_{13}^2 - w_{23}^2 - w_{33}^2 \leq 0$$

$$w_{11}^1 + w_{24}^1 + w_{32}^1 - w_{14}^2 - w_{22}^2 - w_{35}^2 \leq 0$$

$$w_{11}^1 + w_{22}^1 + w_{32}^1 - w_{15}^2 - w_{25}^2 - w_{35}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 > w_{14}^1 > w_{13}^1 > w_{12}^1 > w_{11}^1 \geq \varepsilon$$

$$w_{25}^1 > w_{24}^1 > w_{23}^1 > w_{22}^1 > w_{21}^1 \geq \varepsilon$$

$$w_{35}^1 > w_{34}^1 > w_{33}^1 > w_{32}^1 > w_{31}^1 \geq \varepsilon$$

$$w_{15}^2 > w_{14}^2 > w_{13}^2 > w_{12}^2 > w_{11}^2 \geq \varepsilon$$

$$w_{25}^2 > w_{24}^2 > w_{23}^2 > w_{22}^2 > w_{21}^2 \geq \varepsilon$$

$$w_{35}^2 > w_{34}^2 > w_{33}^2 > w_{32}^2 > w_{31}^2 \geq \varepsilon$$

où chaque signe 'plus grand' > est remplacé par  $\geq \varepsilon$  comme indiqué dans l'exemple ci-dessous:

$$w_{15}^1 > w_{14}^1 \Rightarrow w_{15}^1 - w_{14}^1 \geq \varepsilon$$

**Figure 4.1** Le modèle de Cook et al. formulé pour la DMU 1 en considération

**Le modèle de Cooper et al.      L'Equivalent du modèle de Cooper et al.**

$$\max E_1 = Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} \Rightarrow$$

slc

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1 \Rightarrow$$

$$Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} - X_{11} - X_{21} - X_{31} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{12} + Y_{22} + Y_{32} - X_{12} - X_{22} - X_{32} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{13} + Y_{23} + Y_{33} - X_{13} - X_{23} - X_{33} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{14} + Y_{24} + Y_{34} - X_{14} - X_{24} - X_{34} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{15} + Y_{25} + Y_{35} - X_{15} - X_{25} - X_{35} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{16} + Y_{26} + Y_{36} - X_{16} - X_{26} - X_{36} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{17} + Y_{27} + Y_{37} - X_{17} - X_{27} - X_{37} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{18} + Y_{28} + Y_{38} - X_{18} - X_{28} - X_{38} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{19} + Y_{29} + Y_{39} - X_{19} - X_{29} - X_{39} \leq 0 \Rightarrow$$

$$Y_{110} + Y_{210} + Y_{310} - X_{110} - X_{210} - X_{310} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\max E_1 = w_{14}^1 + w_{22}^1 + w_{35}^1$$

slc

$$w_{15}^2 + w_{22}^2 + w_{31}^2 = 1$$

$$w_{14}^1 + w_{22}^1 + w_{35}^1 - w_{15}^2 - w_{22}^2 - w_{31}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{25}^1 + w_{32}^1 - w_{13}^2 - w_{25}^2 - w_{32}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{25}^1 + w_{35}^1 - w_{11}^2 - w_{22}^2 - w_{31}^2 \leq 0$$

$$w_{13}^1 + w_{23}^1 + w_{33}^1 - w_{14}^2 - w_{23}^2 - w_{32}^2 \leq 0$$

$$w_{12}^1 + w_{23}^1 + w_{31}^1 - w_{15}^2 - w_{21}^2 - w_{34}^2 \leq 0$$

$$w_{14}^1 + w_{21}^1 + w_{35}^1 - w_{11}^2 - w_{22}^2 - w_{32}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{22}^1 + w_{35}^1 - w_{15}^2 - w_{24}^2 - w_{33}^2 \leq 0$$

$$w_{15}^1 + w_{21}^1 + w_{33}^1 - w_{13}^2 - w_{23}^2 - w_{33}^2 \leq 0$$

$$w_{11}^1 + w_{24}^1 + w_{32}^1 - w_{14}^2 - w_{22}^2 - w_{35}^2 \leq 0$$

$$w_{11}^1 + w_{22}^1 + w_{32}^1 - w_{15}^2 - w_{25}^2 - w_{35}^2 \leq 0$$

$$Y_{12} = Y_{13} = Y_{17} = Y_{18} > Y_{11} = Y_{16} > Y_{14} > Y_{15} > Y_{19} = Y_{10} \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$w_{15}^1 > w_{14}^1 > w_{13}^1 > w_{12}^1 > w_{11}^1 \geq \varepsilon$$

$$Y_{22} = Y_{23} > Y_{29} > Y_{24} = Y_{25} > Y_{21} = Y_{27} = Y_{210} > Y_{26} = Y_{28} \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$w_{25}^1 > w_{24}^1 > w_{23}^1 > w_{22}^1 > w_{21}^1 \geq \varepsilon$$

$$Y_{31} = Y_{33} = Y_{36} = Y_{37} > Y_{34} = Y_{38} > Y_{32} = Y_{39} = Y_{310} > Y_{35} \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$w_{35}^1 > w_{33}^1 > w_{32}^1 > w_{31}^1 \geq \varepsilon$$

$$X_{11} = X_{15} = X_{17} = X_{110} > X_{14} = X_{19} > X_{12} = X_{18} > X_{13} = X_{16} \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$w_{15}^2 > w_{14}^2 > w_{13}^2 > w_{11}^2 \geq \varepsilon$$

$$X_{22} = X_{210} > X_{27} > X_{24} = X_{28} > X_{21} = X_{23} = X_{26} = X_{29} > X_{25} \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$w_{25}^2 > w_{24}^2 > w_{23}^2 > w_{22}^2 > w_{21}^2 \geq \varepsilon$$

$$X_{39} = X_{310} > X_{35} > X_{37} = X_{38} > X_{32} = X_{34} = X_{36} > X_{31} = X_{33} \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$w_{35}^2 > w_{34}^2 > w_{33}^2 > w_{32}^2 > w_{31}^2 \geq \varepsilon$$

où chaque signe 'plus grand' > est remplacé par  $\geq \varepsilon$  comme indiqué dans l'exemple ci-dessous:

$$Y_{18} > Y_{11} \Rightarrow Y_{18} - Y_{11} \geq \varepsilon$$

**Figure 4.2** Le modèle de Cooper et al. et son équivalent exprimé en variables du modèle de Cook et al. formulés pour la DMU 1 en considération

#### 4.2.2. Les Modèles d'IDEA ayant le Pouvoir de Traiter des Données Bornées

Assumons  $n$  DMUs, chacune consommant  $m$  entrées pour produire  $s$  sorties. La quantité de la sortie  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, s$ ) produite par la DMU  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) est dénotée par  $y_{rj}$  et la quantité de l'entrée  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) consommée par la DMU  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) est dénotée par  $x_{ij}$ . Quand on sait seulement que les quantités des entrées et des sorties se trouvent dans des intervalles (c'est-à-dire,  $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$  et  $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$  où les bornes supérieure et inférieure sont des constants strictement positives), le modèle de CCR DEA devient non-linéaire. Car, comme les variables de poids des sorties et des entrées  $u_r$  et  $v_i$ , les quantités des sorties et des entrées (c.à.d,  $y_{rj}$  et  $x_{ij}$ ) sont aussi des variables dont les valeurs exactes doivent être estimées par le modèle. Pour résoudre ce problème de non-linéarité, une approche d'alternance de variable qui consiste à remplacer les produits des deux variables par de nouvelles variables a été proposée dans la littérature [16, 19].

##### 4.2.2.1. Le Modèle de Cooper et al.

Pour traiter les données bornées dans la DEA, Cooper et al. propose l'approche à deux pas suivante [16]:

1<sup>er</sup> Pas: On normalise tous les données bornées par la normalisation de valeur maximale (max value normalisation), comme indiqué ci-dessous:

$$\hat{y}_{rj}^L = \frac{y_{rj}^L}{\max_j y_{rj}^U}, \hat{y}_{rj}^U = \frac{y_{rj}^U}{\max_j y_{rj}^U}, \forall r$$

$$\hat{x}_{ij}^L = \frac{x_{ij}^L}{\max_j x_{ij}^U}, \hat{x}_{ij}^U = \frac{x_{ij}^U}{\max_j x_{ij}^U}, \forall i$$

où  $\hat{y}_{rj}^L$  et  $\hat{y}_{rj}^U$  indiquent respectivement les valeurs normalisées de la borne supérieure et de la borne inférieure de  $y_{rj}$ , qui représente la quantité de la sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $\hat{x}_{ij}^L$  et  $\hat{x}_{ij}^U$  indiquent respectivement les valeurs normalisées de la borne supérieure et de la borne inférieure de  $x_{ij}$ , qui représente la quantité de l'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$

2<sup>ème</sup> Pas: On remplace les produits des deux variables  $u_r y_{rj}$  et  $v_i x_{ij}$ , qui causent la non-linéarité, par une seule variable  $Y_{rj}$  et  $X_{ij}$ , respectivement, ce qui aboutit au modèle linéaire suivant:

$$\begin{aligned}
 \max E_0 &= \sum_r Y_{rj_0} \\
 \text{sic} \quad &\sum_i X_{ij_0} = 1 \\
 &\sum_r Y_{rj} - \sum_i X_{ij} \leq 0, \forall j \\
 &Y_{rj}, X_{ij} \in \text{BORNES}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

où  $Y_{rj}$  indique la valeur pondérée de la sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $X_{ij}$  indique la valeur pondérée de l'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$ ; *BORNES* est l'ensemble incluant les contraintes qui indiquent les bornes supérieures et inférieures des données bornées, qu'on peut formuler comme ci-dessous:

$$\text{BORNES} = \left\{ \begin{array}{l} u_r \hat{y}_{rj}^L \leq Y_{rj} \leq u_r \hat{y}_{rj}^U, \forall r, j \\ v_i \hat{x}_{ij}^L \leq X_{ij} \leq v_i \hat{x}_{ij}^U, \forall i, j \end{array} \right\} \tag{4.7}$$

Comme on peut observer dans la formulation (4.7), *BORNES* contient  $2n(m+s)$  contraintes.

Une DMU  $k$  est appelée un maximum de colonne (column maximum), si les conditions suivantes sont satisfaites:

$y_{rk}$  est exacte, c.à.d,  $y_{rk} = y_{rk}^L = y_{rk}^U$ , et  $y_{rk} = \max_j y_{rj}^U$

ou  $x_{ik}$  est exacte, c.à.d,  $x_{ik} = x_{ik}^L = x_{ik}^U$ , et  $x_{ik} = \max_j x_{ij}^U$

Autrement dit, si dans la colonne liée à la sortie  $r$  ou celle liée à l'entrée  $i$ , la DMU  $k$  a une valeur exacte maximale, elle est considérée comme un maximum de colonne. Par exemple, considérons les données d'entrées et de sorties indiquées dans le tableau 4.7. La DMU 3 et la DMU 2 sont les maximums de colonne pour la sortie 1 et l'entrée 1, respectivement. Pour la sortie 2 et l'entrée 2, aucun maximum de colonne existe.

**Tableau 4.7** Les données d'entrées et de sorties

DMU j	Sortie 1	Sortie 2	Entrée 1	Entrée 2
1	[0.3, 0.6]	[0.4, 0.7]	[150, 200]	[13, 20]
2	[0.7, 1 ]	[0.6, 1 ]	250	[15, 22]
3	1	0.2	[200, 250]	[18, 25]
4	[0.3, 0.4]	[0.3, 0.4]	[100, 150 ]	[7, 12 ]

Dans le cas où il existe un colonne maximum (disons la DMU  $k_0$ ) pour chaque entrée et sortie, il est possible d'éliminer les variables  $u_r$  et  $v_i$  existant dans l'ensemble *BORNES* (Formulation (4.7)), en les remplaçant par les variables  $Y_{rk_0}$  et  $X_{ik_0}$ , respectivement, comme l'indiquent les égalités suivantes [16]:

$$Y_{rk_0} = u_r \cdot \hat{y}_{rk_0} = u_r \cdot 1 = u_r$$

$$X_{ik_0} = v_i \cdot \hat{x}_{ik_0} = v_i \cdot 1 = v_i$$

Les remplacements ci-dessus diminueront le nombre des variables de décision par  $m + s$  (parce que les variables  $u_r$  et  $v_i$  disparaîtront) et le nombre des contraintes par  $2(m + s)$  (parce que pour chaque DMU  $k_0$ , qui est un maximum de colonne, les bornes supérieures et inférieures n'existent pas). Cette réduction dans le nombre des variables de décision et celui des contraintes augmentera l'efficacité du modèle.

En résumé, au cas où il existe un maximum de colonne pour chaque sortie et entrée, en appliquant les remplacements expliqués précédemment à la formulation (4.7), l'ensemble BORNES prend la forme suivante:

$$BORNES = \left\{ \begin{array}{l} \hat{y}_{rj}^L Y_{rk_0} \leq Y_{rj} \leq \hat{y}_{rj}^U Y_{rk_0}, Y_{rk_0} \geq \varepsilon, \forall j \neq k_0, \forall r \\ \hat{x}_{ij}^L X_{ik_0} \leq X_{ij} \leq \hat{x}_{ij}^U X_{ik_0}, X_{ik_0} \geq \varepsilon, \forall j \neq k_0, \forall i \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

#### 4.2.2.2. Le Modèle de Despotis et Smirlis

Pour traiter les données bornées dans la DEA, Despotis et Smirlis proposent un modèle alternatif à celui de Cooper et al. [19]. Ils transforment le modèle non-linéaire de DEA à un équivalent linéaire en utilisant une formulation simple complètement différente de celle de Cooper et al. L'approche qu'ils proposent consiste en pas suivants:

1. Les transformations suivantes sont appliquées aux variables  $x_{ij}$  et  $y_{rj}$ , ce qui leur permet de prendre seulement des valeurs qui se trouvent entre leurs bornes supérieure et inférieure.

$$y_{rj}^L \leq y_{rj} \leq y_{rj}^U \Leftrightarrow y_{rj} = y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L), \forall r, j \text{ où } 0 \leq t_{rj} \leq 1$$

$$x_{ij}^L \leq x_{ij} \leq x_{ij}^U \Leftrightarrow x_{ij} = x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L), \forall i, j \text{ où } 0 \leq s_{ij} \leq 1$$

Comme représenté ci-dessus, les variables  $y_{rj}$  et  $x_{ij}$  sont définies en utilisant des variables auxiliaires  $t_{rj}$  et  $s_{ij}$ , qui localisent les quantités des sorties et des entrées dans les intervalles bornées  $[y_{rj}^L, y_{rj}^U]$  et  $[x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ , respectivement.

2. Par les transformations faites dans le premier pas, le modèle de DEA reste encore non-linéaire du aux produits des variables  $u_r t_{rj}$  et  $v_i s_{ij}$ . Pour surmonter ce problème de non-linéarité, ces produits sont remplacés par de nouvelles

variables  $p_{rj}$  et  $q_{ij}$ , respectivement. Par ces remplacements, la somme pondérée des sorties produites par la DMU  $j$  prend la forme suivante:

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} = \sum_{r=1}^s u_r [y_{rj}^L + t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L)] = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + u_r t_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L)$$

où  $0 \leq p_{rj} \leq u_r$ , puisque  $t_{rj} = p_{rj} / u_r$ ;  $u_r \geq \varepsilon$  et  $0 \leq p_{rj} \leq 1$  pour  $\forall r, j$ .

De la même façon, la somme pondérée des entrées consommées par la DMU  $j$  est formulée comme représenté ci-dessous:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = \sum_{i=1}^m v_i [x_{ij}^L + s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L)] = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + v_i s_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L) = \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + q_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L)$$

où  $0 \leq q_{ij} \leq v_i$ , puisque  $s_{ij} = q_{ij} / v_i$ ;  $v_i \geq \varepsilon$  et  $0 \leq s_{ij} \leq 1$  pour  $\forall i, j$ .

En appliquant les substitutions indiquées ci-dessus au modèle de CCR DEA, Despotis et Smirlis ont obtenu le modèle linéaire suivant:

$$\begin{aligned} \max \quad & h_{j_0} = \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0}(y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L) \\ \text{sic} \quad & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0}(x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L) = 1 \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L + p_{rj}(y_{rj}^U - y_{rj}^L) - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L + q_{ij}(x_{ij}^U - x_{ij}^L) \leq 0, \quad \forall j \\ & p_{rj} - u_r \leq 0, \quad \forall r, j \\ & q_{ij} - v_i \leq 0, \quad \forall i, j \\ & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, i \\ & p_{rj}, q_{ij} \geq 0, \quad \forall r, i, j \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le modèle de CCR DEA traitant les données exactes est un cas spécial du modèle de Despotis et Smirlis. En effet, les données exactes peuvent être représentées en forme de données bornées ayant des bornes supérieures et inférieures égales (c.à.d,  $y_{rj}^L = y_{rj}^U$  pour

les sorties et  $x_{ij}^L = x_{ij}^U$  pour les entrées). Quand les bornes supérieure et inférieure coïncident pour toutes les entrées et les sorties, les intervalles bornés ont tous la longueur zéro, ce qui fait disparaître le deuxième terme des sommes pondérées des sorties et des entrées existant dans la formulation 4.9. La disparition des variables  $p_{rj}$  et  $q_{ij}$  rend les contraintes  $p_{rj} - u_r \leq 0$  et  $q_{ij} - v_i \leq 0$  superflues (redundant), donc on les élimine du modèle. Le modèle résultant est le modèle original de CCR DEA. Donc, il est évident que le modèle de Despotis et Smirlis peut traiter une mixture de données exactes et de données bornées.

Le modèle de Despotis et Smirlis produit non seulement les valeurs des poids d'entrées et de sorties, mais aussi les valeurs des variables auxiliaires  $p_{rj}$  et  $q_{ij}$ , par lesquelles les quantités des sorties et d'entrées ( $y_{rj}$  et  $x_{ij}$ ) sont calculées. Dans [19], on montre que les variables  $p_{rj}$  et  $q_{ij}$  prennent les valeurs suivantes dans une solution optimale produite par le modèle:

$$p_{rj} = \begin{cases} u_r & \text{pour la DMU évaluée} \\ 0 & \text{pour les autres} \end{cases}, \text{ aboutissant à } y_{rj} = \begin{cases} y_{rj}^U & \text{pour la DMU évaluée} \\ y_{rj}^L & \text{pour les autres} \end{cases}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pour la DMU évaluée} \\ v_i & \text{pour les autres} \end{cases}, \text{ aboutissant à } x_{ij} = \begin{cases} x_{ij}^L & \text{pour la DMU évaluée} \\ x_{ij}^U & \text{pour les autres} \end{cases}$$

Comme indiqué ci-dessus, le modèle égalise la quantité de l'entrée  $i$  consommée (respectivement, la sortie  $r$  produite) par une DMU évaluée à sa valeur la plus basse (respectivement, haute) possible alors qu'il égalise les quantités de l'entrée  $i$  consommée (respectivement, la sortie  $r$  produite) par les autres DMUs à leurs valeurs la plus haute (respectivement, basse) possible. Ce résultat n'est pas surprenant puisque le modèle de DEA choisit l'arrangement de données d'entrées et de sorties en faveur de la DMU évaluée, ce qui sera défavorable pour les autres.

### 4.2.2.3. Comparaison des Modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis

Les nombres des contraintes et de variables de décision des modèles d'IDEA traitant les données bornées, qui ont été formulés par l'approche d'alternation de variables, sont indiqués dans le tableau 4.8. Le modèle de Despotis et Smirlis contient moins de contraintes que celui de Cooper et al. tandis que ses variables de décision sont plus nombreuses que celles du modèle de Cooper et al. en cas d'existence d'un maximum de colonne pour chaque entrée et sortie (c.à.d, Formulation (4.6) avec (4.8)). Quand il n'existe un maximum de colonne pour aucune sortie ou entrée, les deux modèles ont le même nombre de variables de décision. Comme le nombre des contraintes réduit l'efficacité du modèle plus que le nombre des variables de décision la réduit, le modèle de Despotis et Smirlis paraît plus efficace que celui de Cooper et al.

**Tableau 4.8** Comparaison des modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis selon leur nombre de contraintes et de variables de décision

Le Modèle	Le nombre des contraintes	Le nombre des variables de décision
Le modèle de Cooper et al. (pas de maximums de colonne) (Formulation (4.6) avec (4.7))	$2n(m + s) + (n + 1)$	$n(m + s) + (m + s)$
Le modèle de Cooper et al. (en cas d'existence de maximums de colonne) (Formulation (4.6) avec (4.8))	$2(n - 1)(m + s) + (n + 1)$	$n(m + s)$
Le modèle de Despotis et Smirlis (Formulation (4.9))	$n(m + s) + (n + 1)$	$n(m + s) + (m + s)$

Pour comparer les résultats des modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis, un exemple numérique qui consiste à évaluer 10 DMUs selon 2 sorties bornées et 2 entrées bornées sera considéré. Les quantités des sorties et des entrées des DMUs et leurs valeurs normalisées par la normalisation de valeur maximale sont données dans les tableaux 4.9 et 4.10, respectivement.

Les scores d'efficacité obtenus par les modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis (considérant  $\varepsilon = 0$ ) sont indiqués dans le tableau 4.11 d'où on peut observer que

tous les deux modèles produisent les mêmes scores d'efficacité. Donc, les deux modèles sont équivalents.

**Tableau 4.9** Les données d'entrées et de sorties bornées

DMU j	Sortie 1	Sortie 2	Entrée 1	Entrée 2
1	[15, 30]	[0.2, 0.5]	[40, 70]	[200, 250]
2	[20, 45]	[0.1, 0.3]	80	[50, 100]
3	[5, 10]	[0.2, 0.4]	[50, 60]	[150, 200]
4	[10, 20]	[0.3, 0.6]	[30, 50]	[150, 200]
5	50	[0.7, 1]	[15, 20]	250
6	[10, 15]	1	[10, 20]	[200, 250]
7	[5, 15]	[0.3, 0.4]	[15, 30]	[200, 250]
8	[40, 50]	[0.7, 1]	[40, 60]	[100, 150]
9	[20, 25]	[0.4, 0.5]	[50, 80]	[200, 250]
10	[40, 45]	[0.8, 0.9]	[35, 50]	[100, 150]

**Tableau 4.10** Les données d'entrées et de sorties bornées normalisées par la normalisation de valeur maximale

DMU j	Sortie 1	Sortie 2	Entrée 1	Entrée 2
1	[0.3, 0.6]	[0.2, 0.5]	[0.5, 0.875]	[0.8, 1]
2	[0.4, 0.9]	[0.1, 0.3]	1	[0.2, 0.4]
3	[0.1, 0.2]	[0.2, 0.4]	[0.625, 0.75]	[0.6, 0.8]
4	[0.2, 0.4]	[0.3, 0.6]	[0.375, 0.625]	[0.6, 0.8]
5	1	[0.7, 1]	[0.1875, 0.25]	1
6	[0.2, 0.3]	1	[0.125, 0.25]	[0.8, 1]
7	[0.1, 0.3]	[0.3, 0.4]	[0.1875, 0.375]	[0.8, 1]
8	[0.8, 1]	[0.7, 1]	[0.5, 0.75]	[0.4, 0.6]
9	[0.4, 0.5]	[0.4, 0.5]	[0.625, 1]	[0.8, 1]
10	[0.8, 0.9]	[0.8, 0.9]	[0.4375, 0.625]	[0.4, 0.6]

**Tableau 4.11** Les scores d'efficacité obtenus par les modèles de Cooper et al. et de Despotis et Smirlis pour  $\varepsilon = 0$

DMU j	Cooper et al.	Despotis et Smirlis
1	0.647	0.647
2	1.000	1.000
3	0.500	0.500
4	0.871	0.871
5	1.000	1.000
6	1.000	1.000
7	0.635	0.635
8	1.000	1.000
9	0.542	0.542
10	1.000	1.000

### 4.3. La Conversion des Données Imprécises en Données Exactes

#### 4.3.1. Des Données Ordinales en Données Exactes

Quand les entrées ou les sorties sont connues à satisfaire seulement quelques relations ordinales, le modèle standard de DEA devient un programme non-linéaire. Pour éviter la non-linéarité, Zhu [20, 21] propose la conversion des données ordinales en données exactes en se servant des caractéristiques de l'analyse d'enveloppement de données. Cette approche permet l'utilisation de n'importe quel modèle de DEA traitant les données exactes pour évaluer l'efficacité des DMUs.

Les données ordinales faibles et fortes ont été définies dans le chapitre 2. Pour simplifier la présentation, sans perte de généralité, on suppose que les DMUs sont numérotées de 1 à  $n$ , dans l'ordre croissant, selon la quantité de la sortie qu'elles produisent ou de l'entrée qu'elles consomment. C'est-à-dire, on va attribuer le numéro 1 à la DMU produisant (ou consommant) le moins d'une sortie (ou d'une entrée) particulière. Alors, on peut représenter les relations ordinales faibles selon la sortie  $r$  et l'entrée  $i$ , respectivement, comme ci-dessous:

$$y_{r1} \leq y_{r2} \leq \dots \leq y_{rk} \leq \dots \leq y_{rj}, \quad r \in WORDO \quad (4.10)$$

$$x_{i1} \leq x_{i2} \leq \dots \leq x_{ik} \leq \dots \leq x_{ir}, \quad i \in WORDI$$

où  $y_{rj}$  et  $x_{ij}$  indiquent les quantités de sortie  $r$  produite et d'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$ , respectivement, pour  $j=1,2,\dots,n$ ;  $WORDO$  est l'ensemble des sorties ordinales faibles,  $WORDI$  est l'ensemble des entrées ordinales faibles.

On peut aussi représenter les relations ordinales fortes d'une façon simple, en remplaçant dans la formulation (4.10) le signe  $\leq$  par le signe  $<$ , et les ensembles  $WORDO$  et  $WORDI$  par les ensembles  $SORDO$  et  $SORDI$ , indiquant respectivement les ensembles des sorties ordinales fortes et des entrées ordinales fortes.

Zhu [21] prouve que les données ordinales faibles peuvent être converties en données exactes par les remplacements suivants:

$$y_{rj} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j = 1, 2, \dots, k-1 \\ 1 & \text{pour } j = k, \dots, n \end{cases}, r \in \text{WORDO} \quad (4.11)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = 1, 2, \dots, k \\ M & \text{pour } j = k+1, \dots, n \end{cases}, i \in \text{WORDI}$$

où la DMU  $k$  est la DMU évaluée, et  $M$  est un nombre positif suffisamment grand. En général, on prend  $M$  égal à  $n$ ,  $n$  indiquant le nombre des DMUs.

Après avoir fait les remplacements ci-dessus pour chaque DMU évaluée, on obtient  $n$  ensemble de données exactes, chacun étant spécifique à une DMU particulière. Ensuite, on applique à chaque ensemble de données exactes un modèle linéaire de DEA pour déterminer les scores d'efficacité des DMUs.

Zhu a aussi étudié la conversion des données ordinales fortes en données exactes. On peut trouver les explications théoriques et les résultats de cette approche dans [20].

#### 4.3.2. Des Données Bornées en Données Exactes

Le modèle original de DEA a pour but de maximiser le score d'efficacité de la DMU évaluée. Donc, il attribuera aux variables de décision les valeurs qui sont favorables pour la DMU évaluée, ce qui sera défavorable pour les autres DMUs. Ainsi, quand les données bornées sont présentes, les bornes supérieures (respectivement, inférieures) des sorties bornées (respectivement, des entrées) seront choisies pour la DMU évaluée tandis que les bornes inférieures (respectivement, supérieures) des sorties bornées (respectivement, des entrées) seront choisies pour les autres DMUs par le modèle. Cette caractéristique du modèle de DEA nous permet d'identifier un ensemble de données exactes à partir des données bornées et appliquer ensuite l'un des modèles linéaires de

DEA à cet ensemble de données exactes, comme par exemple le modèle de CCR DEA [19, 21].

L'identification de l'ensemble de données exactes à partir des données bornées est faite séparément pour chaque DMU évaluée, la DMU  $j_0$ , par les affectations suivantes:

$$y_{rj_0} = y_{rj_0}^U, \forall r \text{ et } x_{ij_0} = x_{ij_0}^L, \forall i \text{ pour la DMU } j_0,$$

$$y_{rj} = y_{rj}^L, \forall r \text{ et } x_{ij} = x_{ij}^U, \forall i \text{ pour toutes les DMU } j \neq j_0.$$

où  $y_{rj}^U$  et  $y_{rj}^L$  indiquent respectivement les bornes supérieure et inférieure de  $y_{rj}$ , qui est la quantité de sortie bornée  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $x_{ij}^U$  et  $x_{ij}^L$  indiquent respectivement les bornes supérieure et inférieure de  $x_{ij}$ , qui est la quantité d'entrée bornée  $i$  consommée par la DMU  $j$ .

Une fois que les substitutions indiquées ci-dessus sont faites pour chaque DMU  $j_0$  (c.à.d, pour  $j_0 = 1, 2, \dots, n$ ),  $n$  ensembles de données exactes seront obtenus, et un modèle linéaire de DEA sera formulé pour chaque DMU  $j_0$  prenant en compte l'ensemble de données propre à elle, comme ci-dessous:

$$\begin{aligned} \max E_{j_0} &= \sum_r u_r y_{rj_0}^U \\ \text{sic} \quad &\sum_i v_i x_{ij_0}^L = 1 \\ &\sum_r u_r y_{rj_0}^U - \sum_i v_i x_{ij_0}^L \leq 0, \\ &\sum_r u_r y_{rj}^L - \sum_i v_i x_{ij}^U \leq 0, \forall j \neq j_0 \\ &u_r \geq \varepsilon, \forall r \\ &v_i \geq \varepsilon, \forall i \end{aligned} \tag{4.12}$$

Le score d'efficacité qu'une DMU recevra dépend de l'ensemble de données exactes qu'on identifie pour elle. Puisque, dans le modèle ci-dessus, les valeurs exactes des entrées et des sorties sont choisies en faveur de la DMU évaluée  $j_0$  tandis qu'elles sont ajustées de manière agressive contre les autres DMUs, on peut considérer le score d'efficacité obtenu par ce modèle,  $E_{j_0}^*$ , comme la borne supérieure des scores d'efficacité possibles que la DMU évaluée peut recevoir.

Le modèle (4.12) aboutit aux mêmes scores d'efficacité que les modèles de Cooper et al. et Despotis et Smirlis présentés dans le sous-chapitre 4.2, qui sont des modèles d'IDEA ayant le pouvoir de traiter des données bornées formulés via l'approche d'alternance de variables. Une différence fondamentale entre l'approche de conversion des données bornées en exactes et l'approche d'alternance de variables est que dans la première, les valeurs des sorties et des entrées sont ajustées par l'analyste de décision et présentées explicitement au modèle de DEA tandis que dans le modèle formulé par la deuxième approche, les valeurs des sorties et des entrées sont définies comme des variables de décision et le modèle lui-même leur affecte les valeurs appropriés. En conséquence, le modèle (4.12) a seulement " $m+s$ " variables de décision ( $m$  indiquant le nombre des entrées,  $s$  indiquant le nombre des sorties) et " $n+1$ " contraintes ( $n$  indiquant le nombre des DMUs), qui sont moins nombreuses que celles des modèles d'IDEA, comme l'indique le tableau 4.8. Donc, comparée à l'approche d'alternation de variables, l'approche de conversion des données bornées en exactes aboutit à un modèle plus efficace selon les nombres des variables de décision et des contraintes.

Dans les situations où le modèle (4.12) évalue beaucoup de DMUs comme efficaces, la borne inférieure des scores d'efficacité possibles peut être prise en compte afin qu'on puisse faire une discrimination plus forte parmi les DMUs [19]. On peut calculer la borne inférieure des scores d'efficacité possible (c.à.d, le score d'efficacité le plus bas possible) d'une DMU  $j$ , indiquée par  $E_j^L$ , par le modèle suivant où les valeurs des sorties et des entrées bornées sont ajustées de façon agressive contre la DMU évaluée, tandis qu'en faveur des autres DMUs, contrairement au modèle (4.12):

$$\begin{aligned}
& \max E_{j_0} = \sum_r u_r y_{rj_0}^L \\
\text{sic} \quad & \sum_i v_i x_{ij_0}^U = 1 \\
& \sum_r u_r y_{rj_0}^L - \sum_i v_i x_{ij_0}^U \leq 0, \\
& \sum_r u_r y_{rj}^U - \sum_i v_i x_{ij}^L \leq 0, \forall j \neq j_0 \\
& u_r \geq \varepsilon, \forall r \\
& v_i \geq \varepsilon, \forall i
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Grâce aux modèles (4.12) et (4.13), on obtient pour chaque DMU  $j$  un intervalle borné  $[E_j^L, E_j^*]$  où son score d'efficacité se situe. Prenant en compte les bornes inférieure et supérieure de ces intervalles, on peut classier les DMUs en trois catégories suivantes [19]:

$$\begin{aligned}
E^{++} &= \{j \mid E_j^L = 1\} \\
E^+ &= \{j \mid E_j^L < 1 \text{ and } E_j^* = 1\} \\
E^- &= \{j \mid E_j^* < 1\}
\end{aligned}$$

Comme défini ci-dessus,  $E^{++}$  contient les DMUs qui sont efficaces dans tous les cas (c.à.d, pour n'importe quel ensemble de données exactes qui pourrait être identifié pour elle à partir des données bornées).  $E^+$  contient celles qui ne sont efficaces que dans quelques cas, autrement dit, celles qui ne peuvent pas maintenir leur efficacité pour quelques ensembles de données exactes possibles qu'on peut identifier. Finalement,  $E^-$  consiste en DMUs qui ne sont efficaces dans aucun cas.

Puisque les bornes supérieures et inférieures influencent les scores d'efficacité des DMUs à évaluer, on peut faire une analyse de sensibilité pour examiner les effets de ces bornes sur les scores d'efficacité. Par exemple, comme les bornes inférieures des sorties des DMUs sont associées à l'efficacité de la DMU évaluée, si nous diminuons les bornes inférieures des sorties des DMUs efficaces sans changer leurs bornes supérieures, elles

resteront toujours efficaces, tandis que l'efficacité des DMUs inefficaces aura la tendance à augmenter, ce qui pourrait même les rendre efficaces. De même, si nous augmentons les bornes inférieures des sorties de quelques DMUs efficaces, alors les scores d'efficacité des DMUs inefficaces auront la tendance à diminuer, et même certaines DMUs efficaces peuvent devenir inefficaces. Une information détaillée concernant les effets de changements des bornes supérieures et inférieures des sorties bornées sur les scores d'efficacité peut être trouvée dans [18].

#### **4.4. La Conversion des Données Floues en Données Ordinales ou Bornées**

##### **4.4.1. Des Données Floues en Données Ordinales**

Dans des problèmes de décision où seulement une information vague est disponible sur certaines entrées ou sorties, ce manque de précision peut être représenté par des nombres flous. Mais, l'incorporation directe des entrées ou sorties floues dans le modèle de DEA aboutira à un modèle de programmation mathématique flou, qui peut être très difficile à résoudre. Donc, au lieu de formuler un modèle de DEA flou, on peut adopter l'approche qui consiste à convertir d'abord les données floues en données ordinales via une méthode de classement des nombres flous (fuzzy number ranking method), et utiliser ensuite un modèle d'IDEA traitant les données ordinales, comme les modèles de Cook et al. et Cooper et al. présentés dans le sous-chapitre 4.2.1.

Dans une étude récente, Karsak [22] a adressé le problème de choix de robots où une sortie à considérer a été représentée par des nombres flous triangulaires. Il a d'abord appliqué la méthode de Kim et Park [29] pour classer ces nombres flous triangulaires et il a utilisé ensuite le modèle de Cook et al. [15] pour calculer les scores d'efficacité relative des robots, avec lesquels il a conduit une analyse d'efficacité croisée. Dans une étude plus récente, Karsak [23] a utilisé la méthode de valeur intégrale (integral value method) [30] pour classer les nombres flous triangulaires représentant une entrée des systèmes flexibles de production (Flexible Manufacturing Systems-FMSs) qu'on veut évaluer, et il a formulé ensuite un modèle d'IDEA en intégrant le concept d'efficacité de minimax au modèle de Cook et al. pour calculer l'efficacité relative des FMSs.

#### 4.4.2. Des Données Floues en Données Bornées

Pour traiter les données floues dans l'analyse d'enveloppement de données, on peut utiliser une approche qui consiste à exprimer les données floues en données bornées pour quelques valeurs d'appartenance (c'est-à-dire,  $\alpha$ -coupes), comme une alternative à l'approche de conversion des données floues en données ordinales via une méthode de classement des nombres flous.

L'approche proposée consiste en pas suivants:

1<sup>er</sup> Pas: L'expression des données floues en forme des données bornées

Les nombres flous trapézoïdaux ou triangulaires, qui ont été présentés dans le Chapitre 2, peuvent être représentés par la famille de toutes leurs  $\alpha$ -coupes [31]. Pour chaque  $\alpha \in (0,1]$ ,  $\alpha$ -coupe d'un nombre flou trapézoïdal  $A = (a, b, c, d)$  est l'intervalle fermé suivant,  ${}_{\alpha}A$ , qui peut être tiré d'une façon très simple de sa fonction d'appartenance (Formulation (2.1)) en mettant  $\mu_A(x) = \alpha$ .

$${}_{\alpha}A = [a + \alpha(b - a), d + \alpha(c - d)]$$

De même,  $\alpha$ -coupe d'un nombre flou triangulaire  $A = (a, b, c)$ , tiré de la Formulation (2.2), est l'intervalle fermé suivant:

$${}_{\alpha}A = [a + \alpha(b - a), c + \alpha(b - c)]$$

Si les quantités de sortie  $r$  produite et d'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$  sont représentées par les nombres flous trapézoïdaux  $(a_{rj}^1, b_{rj}^1, c_{rj}^1, d_{rj}^1)$  et  $(a_{ij}^2, b_{ij}^2, c_{ij}^2, d_{ij}^2)$ , respectivement, utilisant la représentation de  $\alpha$ -coupe expliquée ci-dessus, les substitutions suivantes peuvent être faites pour une certaine  $\alpha$ -coupe,  $0 < \alpha \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
y_{rj}^L &= a_{rj}^1 + \alpha(b_{rj}^1 - a_{rj}^1) \text{ et } y_{rj}^U = d_{rj}^1 + \alpha(c_{rj}^1 - d_{rj}^1) \text{ for } r \in FUZO \\
x_{ij}^L &= a_{ij}^2 + \alpha(b_{ij}^2 - a_{ij}^2) \text{ et } x_{ij}^U = d_{ij}^2 + \alpha(c_{ij}^2 - d_{ij}^2) \text{ for } i \in FUZI
\end{aligned} \tag{4.14}$$

où  $y_{rj}^L$  et  $y_{rj}^U$  sont les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle qui représente la quantité de sortie  $r$  produite par la DMU  $j$  pour un certain  $\alpha$ ;  $x_{ij}^L$  et  $x_{ij}^U$  sont les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle qui représente la quantité d'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$  pour un certain  $\alpha$ ;

De même, si les quantités de sortie  $r$  produite et d'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$  sont représentées par les nombres flous triangulaires  $(a_{rj}^1, b_{rj}^1, c_{rj}^1)$  et  $(a_{ij}^2, b_{ij}^2, c_{ij}^2)$ , respectivement, les bornes inférieures et supérieures de ces données pour un certaine  $\alpha$ -coupe ( $0 < \alpha \leq 1$ ) peuvent être calculées comme ci-dessous:

$$\begin{aligned}
y_{rj}^L &= a_{rj}^1 + \alpha(b_{rj}^1 - a_{rj}^1) \text{ et } y_{rj}^U = c_{rj}^1 + \alpha(b_{rj}^1 - c_{rj}^1) \text{ pour } r \in FUZO \\
x_{ij}^L &= a_{ij}^2 + \alpha(b_{ij}^2 - a_{ij}^2) \text{ et } x_{ij}^U = c_{ij}^2 + \alpha(b_{ij}^2 - c_{ij}^2) \text{ pour } i \in FUZI
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dû aux substitutions ci-dessus, les données floues sont exprimées en forme des intervalles dont les bornes supérieures et inférieures sont en fonction de  $\alpha$ . En attribuant à  $\alpha$  certaines valeurs, on obtiendra certains intervalles (c.à.d, données bornées) qu'on utilisera pour représenter les données floues.

2<sup>ème</sup> Pas: L'utilisation d'un modèle d'IDEA approprié

Comme toutes les données floues sont exprimées en forme de données bornées, un modèle d'IDEA ayant le pouvoir de traiter des données bornées, comme les modèles de Cooper et al. ou Despotis et Smirlis présentés dans le sous-chapitre 4.2.2, sera formulé et résolu séparément pour chaque ensemble de données bornées obtenu dans le 1<sup>er</sup> pas. Alors, l'état d'efficacité des DMUs pour des valeurs différentes de  $\alpha$  sera analysé et les DMUs seront classées selon leur score d'efficacité moyen.

## 5. Les Applications de DEA et d'IDEA

### 5.1. 1<sup>er</sup> Cas: La DEA avec des Sorties Exactes Multiples et une Seule Entrée Exacte

La Formulation (3.1), introduite dans le Chapitre 3, est le modèle classique de CCR DEA non-linéaire [1] ayant le pouvoir de traiter des sorties exactes multiples et des entrées exactes multiples. Dans le cas où une seule entrée existe, cette formulation prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \max E_0 &= \frac{\sum_{r=1}^m \mu_r y_{rj_0}}{w x_{j_0}} \\ \text{slc} & \\ & \frac{\sum_{r=1}^m \mu_r y_{rj}}{w x_j} \leq 1, \forall j \\ & \mu_r \geq \varepsilon, \forall r \\ & w \geq \varepsilon \end{aligned} \tag{5.1}$$

où  $\mu_r$  indique le poids attribué à la sortie  $r$ ,  $w$  indique le poids attribué à l'entrée unique,  $y_{rj}$  est la quantité de sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ,  $x_j$  est la quantité de l'entrée unique consommée par la DMU  $j$ , et  $\varepsilon$  est un constant non-négatif.

La formulation (5.1) est aussi non-linéaire. Pour la convertir en un programme linéaire, on fait la transformation  $\mu_r / w = u_r$ , pour  $\forall r$ , ce qui aboutit à la formulation suivante:

$$\begin{aligned}
 \max E_0 &= \frac{\sum_{r=1}^m u_r y_{rj_0}}{x_{j_0}} \\
 \text{sic} & \\
 & \frac{\sum_{r=1}^m u_r y_{rj}}{x_j} \leq 1, \forall j \\
 & u_r \geq \varepsilon, \forall r
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dans le modèle ci-dessus,  $y_{rj}$  est la quantité de sortie  $r$  produite par la DMU  $j$  et  $x_j$  est la quantité de la seule entrée consommée par la DMU  $j$ . Comme on sait la valeur exacte de ces données, on peut arranger le modèle ci-dessus en remplaçant  $y_{rj} / x_j$  par  $R_{rj}$ , qui donc indiquera la proportion de la sortie  $r$  à la seule entrée pour la DMU  $j$ , aboutissant à la formulation suivante:

$$\begin{aligned}
 \max E_0 &= \sum_{r=1}^m u_r R_{rj_0} \\
 \text{sic} & \\
 & \sum_{r=1}^m u_r R_{rj} \leq 1, \forall j \\
 & u_r \geq \varepsilon, \forall r
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dans le modèle ci-dessus, comme  $u_r$  peut être considéré comme le poids d'importance attribué à la proportion de sortie à entrée  $r$ , et comme cette proportion-ci est un critère à maximiser (c.à.d, un critère de bénéfice), l'objectif de ce modèle ressemble à celui de la théorie d'utilité à multi attributs (Multi Attribute Utility Theory-MAUT). La différence fondamentale entre ce modèle de DEA et la MAUT est que dans le modèle de DEA, les poids d'importance des critères sont inconnus et donc, ils sont définis comme des variables de décision dont la valeur sera estimée par le modèle. Autrement dit, ils sont des sorties de la DEA alors qu'ils sont des entrées pour la MAUT. En résumé, la MAUT est appliquée lorsqu'on connaît les poids d'importance, tandis que la DEA est appliquée lorsque ceux-ci sont inconnus.

On peut définir  $d_j$  comme la déviation de la valeur d'efficacité de la DMU  $j, E_j$ , de la valeur d'efficacité idéale qui est 1 (c.à.d,  $d_j = 1 - E_j$ ), qu'on appelle brièvement déviation de l'efficacité de la DMU  $j$ . On peut écrire une formulation équivalente à la formulation (5.3) en utilisant les variables  $d_j$ , comme ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 & \min d_{j_0} \\
 \text{sic} \quad & \sum_{r=1}^m u_r R_{rj} + d_j = 1, \forall j \\
 & u_r \geq \varepsilon, \quad \forall r \\
 & d_j \geq 0, \quad \forall j
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

L'objectif du modèle ci-dessus est spécifique à une DMU particulière. Donc, pour déterminer les valeurs d'efficacité de toutes les  $n$  DMUs, on a besoin de formuler  $n$  modèles, chacun ayant pour but de minimiser la déviation de l'efficacité d'une DMU particulière.

La formulation (5.4) est équivalente à la formulation (5.3). Car, l'objectif de minimiser  $d_{j_0}$ , la déviation de l'efficacité d'une DMU particulière de l'efficacité idéale, est équivalent à l'objectif de maximiser sa valeur d'efficacité (c.à.d,  $E_{j_0}$ ), comme illustré ci-dessous:

$$d_{j_0} = 1 - E_{j_0} = 1 - \sum_{r=1}^m u_r R_{rj_0} \Rightarrow \min d_{j_0} \Leftrightarrow \max \sum_{r=1}^m u_r R_{rj_0}$$

Par la formulation (5.3) ou (5.4), plus d'une DMUs peuvent recevoir la valeur d'efficacité idéale 1, ce qui mettra en difficulté le décideur qui doit choisir une seule DMU. Un tel problème peut être surmonté en utilisant autres mesures d'efficacité, qui ont un pouvoir de discrimination plus haut, comme par exemple les mesures d'efficacité de minimax et minisomme (minisum). La mesure d'efficacité classique (ou simple) a pour but de maximiser la valeur d'efficacité d'une DMU particulière (autrement dit, de minimiser la déviation de son efficacité de l'efficacité idéale), tandis que la mesure

d'efficacité de minimax a pour but de minimiser la déviation maximale parmi les déviations de l'efficacité de toutes les DMUs, et la mesure d'efficacité de minisomme a pour but de minimiser la somme des déviations de l'efficacité de toutes les DMUs. Les mesures d'efficacité de minimax et minisomme auront un pouvoir de discrimination plus fort que la mesure d'efficacité classique, parce qu'elles ont un objectif général concernant toutes les DMUs en même temps, ce qui limite la liberté d'une DMU particulière pour choisir les poids d'importance des critères en sa propre faveur.

En outre, comme les mesures d'efficacité de minimax et minisomme n'ont pas un objectif spécifique à une DMU particulière, elles ne nécessitent pas la formulation de  $n$  modèles pour déterminer les valeurs d'efficacité de toutes les  $n$  DMUs. Les scores d'efficacité de toutes les DMUs peuvent être obtenus en résolvant un seul modèle, ce qui permet l'évaluation d'efficacité des DMUs par des poids d'importance communs, contrairement à la DEA qui évalue les DMUs par de différents poids d'importance.

Les formulations (5.5) et (5.6) sont les modèles d'efficacité de minisomme et de minimax à poids communs, respectivement [32].

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{j=1}^n d_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^m u_r R_{rj} + d_j = 1, \forall j \\
 & u_r \geq \varepsilon, \forall r \\
 & d_j \geq 0, \forall j
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 & \min M \\
 \text{s.t.} \quad & M \geq d_j, \forall j \\
 & \sum_{r=1}^m u_r R_{rj} + d_j = 1, \forall j \\
 & u_r \geq \varepsilon, \forall r \\
 & d_j \geq 0, \forall j
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

où  $M$  représente la déviation maximale de l'efficacité et  $M \geq d_j$  (pour  $\forall j$ ) sont les contraintes qui sont ajoutées dans le modèle pour assurer que  $M = \max_j d_j$ .

Une fois qu'on résout la formulation (5.5) ou (5.6), les scores d'efficacité de toutes les DMUs peuvent être déterminés en calculant  $1 - d_j$ , pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Dans le cas où le modèle d'efficacité de minimax (formulation (5.6)) évalue plus d'une DMUs comme efficaces, il est possible de réduire le nombre des DMUs efficaces à un en changeant la fonction objectif, c.à.d en définissant une autre mesure d'efficacité étant plus distinctive, comme suit [32]:

$$\min M - k \sum_{j \in EF} d_j \quad (5.7)$$

sous les contraintes de la Formulation (5.6)

où  $EF$  est l'ensemble des DMUs minimax efficaces, c.à.d, les DMUs qui sont considérées comme efficaces par le modèle d'efficacité de minimax (Formulation (5.6)) et  $k$  est un paramètre de discrimination dont la valeur sera décidée par l'analyste de décision.

La mesure d'efficacité introduite ci-dessus minimise la déviation maximale de l'efficacité en même temps qu'elle maximise les déviations de l'efficacité des DMUs qui ont été considérés comme efficaces par le modèle d'efficacité de minimax. Comme cette nouvelle mesure d'efficacité évalue les DMUs qui sont minimax efficaces d'une manière agressive, le nombre des DMUs efficaces aura la tendance à diminuer. On attribuera au paramètre de discrimination  $k$  des valeurs de 0 à 1 augmentant d'une grandeur de pas prédéterminée jusqu'à ce que le modèle évalue une seule DMU comme efficace. Notez que la formulation (5.7) est équivalente à la formulation (5.6) pour  $k=0$ .

En conclusion, dans les situations où les DMUs seront évaluées selon des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte, on propose l'utilisation de la mesure d'efficacité de minimax ou  $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$  ayant les avantages suivants:

1. Elle assure une discrimination plus forte parmi les DMUs, aboutissant à moins de DMUs efficaces (même à une seule DMU efficace, pour une valeur de  $k$  suffisamment haute) comparée à la mesure d'efficacité classique (c.à.d, le modèle de CCR DEA)
2. Elle ne nécessite pas la formulation de  $n$  modèles, contrairement au modèle de CCR DEA. Par une seule formulation, les scores d'efficacité de toutes les DMUs peuvent être déterminés. Car, toutes les DMUs seront évaluées par les mêmes poids d'importance.

Pour illustrer le pouvoir de discrimination des mesures d'efficacité définies précédemment, on considérera un problème de décision hypothétique qui consiste à évaluer 12 DMUs en prenant en compte quatre sorties exactes et une seule entrée exacte. Les quantités des sorties produites et de l'entrée consommée par les DMUs sont données dans le tableau 5.1. Après avoir obtenu les valeurs normalisées des données par la normalisation de valeur maximale, que l'on donne dans le tableau 5.2, les formulations (5.4), (5.5) et (5.6) (pour  $\varepsilon = 0$ ) sont utilisées pour calculer, respectivement, les scores d'efficacité classique, d'efficacité de minisomme et d'efficacité de minimax des DMUs, qui sont donnés dans les deuxième, troisième et quatrième colonnes du tableau 5.3, respectivement.

**Tableau 5.1** Les données pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes

DMU $j$	Sortie 1	Sortie 2	Sortie 3	Sortie 4	Entrée 1
1	20	42	5.00	1.5	80000
2	18	22	7.50	2	56000
3	17	9	15.00	1.1	42000
4	8	8	5.00	0.75	21000
5	16	10	15.00	0.55	30000
6	13	30	7.50	0.675	60000
7	17	45	6.00	0.7	65000
8	12	5	25.00	1.25	42000
9	13	12.5	12.00	1.25	45000
10	14	50	6.00	1.25	65000
11	17	50	12.00	0.75	51000
12	12	35	15.00	1.5	43000

**Tableau 5.2** Les données normalisées pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes

DMU $j$	Sortie 1	Sortie 2	Sortie 3	Sortie 4	Entrée 1
1	1.0000	0.8400	0.2000	0.7500	1.0000
2	0.9000	0.4400	0.3000	1.0000	0.7000
3	0.8500	0.1800	0.6000	0.5500	0.5250
4	0.4000	0.1600	0.2000	0.3750	0.2625
5	0.8000	0.2000	0.6000	0.2750	0.3750
6	0.6500	0.6000	0.3000	0.3375	0.7500
7	0.8500	0.9000	0.2400	0.3500	0.8125
8	0.6000	0.1000	1.0000	0.6250	0.5250
9	0.6500	0.2500	0.4800	0.6250	0.5625
10	0.7000	1.0000	0.2400	0.6250	0.8125
11	0.8500	1.0000	0.4800	0.3750	0.6375
12	0.6000	0.7000	0.6000	0.7500	0.5375

**Tableau 5.3** Les scores de certaines mesures d'efficacités (pour  $\varepsilon = 0$ ) pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes

DMU $j$	L'efficacité classique Formulation (5.4)	L'efficacité de Minisomme Formulation (5.5)	L'efficacité de minimax Formulation (5.6)	L'efficacité de $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ pour $k = 0.1$ Formulation (5.7)	L'efficacité de $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ pour $k = 0.2$ Formulation (5.7)	L'efficacité croisée agressive moyenne Formulation (5.10)
1	0.711	0.697	0.711	0.711	0.599	0.509
2	1	0.926	0.871	0.871	0.74	0.679
3	0.934	0.876	0.832	0.832	0.503	0.646
4	1	1	0.946	0.946	0.735	0.748
5	1	1	1	1	0.482	0.732
6	0.6	0.566	0.6	0.6	0.482	0.434
7	0.747	0.683	0.744	0.744	0.603	0.505
8	1	0.727	0.655	0.655	0.482	0.660
9	0.813	0.762	0.717	0.717	0.559	0.598
10	0.842	0.737	0.779	0.779	0.762	0.589
11	1	0.912	1	1	0.845	0.732
12	1	1	1	1	1	0.891

Selon la mesure d'efficacité classique, six DMUs (les DMUs 2, 4, 5, 8, 11 et 12) sont considérées comme efficaces, alors que le nombre des DMUs efficaces réduit à 3 selon les mesures d'efficacité de minisomme et de minimax, ce qui justifie le pouvoir de discrimination plus haute de celles-ci. Comme indiqué précédemment, il est aussi possible d'obtenir une seule DMU efficace (autrement dit, de déterminer la meilleure

DMU) en utilisant la mesure d'efficacité proposée (c.à.d.,  $\min M - k \sum_{j \in BF} d_j$ ). Pour cet exemple numérique, la grandeur de pas pour la valeur de  $k$  qui existe dans la formulation (5.7) est déterminée comme 0.1. Comme l'indique le tableau 5.3, les scores d'efficacité obtenus en prenant en compte les DMUs minimax efficaces (c.à.d, les DMUs 5, 11 et 12) et mettant  $k=0.1$  dans la formulation (5.7), ne diffèrent pas de ceux obtenus par le modèle d'efficacité de minimax. D'autre part, pour  $k=0.2$ , seulement la DMU 12 reste efficace, ce qui le fait la meilleure DMU.

Pour évaluer la fiabilité du modèle d'efficacité proposé (c.à.d, formulation (5.7)), on conduira l'analyse d'efficacité croisée agressive qui a largement apparu dans la littérature. Ensuite, on comparera les résultats des deux modèles.

Comme décrit dans le sous-chapitre 3.2, le modèle d'efficacité croisée agressive a deux buts: le but primaire est de maximiser la valeur d'efficacité de la DMU évaluée  $k$ , qui est assuré par la formulation (3.6), et le but secondaire est de minimiser la somme des valeurs d'efficacité des autres DMUs, qui est représenté par la formulation (3.7). Dans le cas où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en compte pour l'évaluation d'efficacité relative des DMUs, la formulation (3.6) et la formulation (3.7) peuvent être réarrangées, aboutissant aux formulations (5.8) et (5.9), respectivement:

$$\frac{\sum_r u_{rk} y_{rk}}{x_k} = E_{kk} \Rightarrow \sum_r u_{rk} R_{rk} = E_{kk} \quad (5.8)$$

où  $E_{kk}$  est le score d'efficacité classique de la DMU  $k$  déterminé par la formulation (5.3) ou (5.4),  $u_{rk}$  est le poids de la proportion de sortie à entrée  $r$  qui maximise le score d'efficacité de DMU  $k$  et  $R_{rk}$  est la valeur de la proportion de sortie à entrée  $r$  pour la DMU  $k$ .

$$\min \sum_{j \neq k} E_{kj} = \min \sum_{j \neq k} \frac{\sum_r u_{rk} y_{rj}}{x_j} = \min \sum_{j \neq k} \sum_r u_{rk} R_{rj} \quad (5.9)$$

En ajoutant la formulation (5.8) dans la formulation (5.3) et en remplaçant la fonction objectif de celui-ci par la formulation (5.9), on obtient le modèle d'efficacité croisée agressive suivant:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{j \neq k} \sum_r u_{rk} R_{rj}, k = 1, 2, \dots, n \\
 \text{sic} \quad & \sum_{r=1}^m u_{rk} R_{rj} \leq 1, \forall j \neq k \\
 & \sum_r u_{rk} R_{rk} = E_{kk} \\
 & u_r \geq \varepsilon, \forall r
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

En utilisant la formulation (5.10), les valeurs de  $E_{kj}$  (le score d'efficacité croisée agressive de la DMU  $j$  calculé avec les poids optimaux de la DMU  $k$ ) sont déterminées et la matrice d'efficacité croisée agressive, indiquée dans le tableau 5.4, est construite. Dans la dernière ligne du tableau 5.4, les scores d'efficacité croisée agressive moyens des DMUs calculés par la formulation (3.4) sont donnés.

**Tableau 5.4** La matrice d'efficacité croisée agressive pour le problème hypothétique où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes

DMU $j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.711	0.871	0.831	0.945	0.999	0.6	0.744	0.655	0.717	0.779	1	1
2	0.525	1	0.733	1	0.513	0.315	0.302	0.833	0.778	0.538	0.412	0.977
3	0.538	0.894	0.934	0.998	1	0.425	0.442	1	0.81	0.529	0.636	0.95
4	0.525	1	0.733	1	0.513	0.315	0.302	0.833	0.778	0.538	0.412	0.977
5	0.225	0.365	0.727	0.545	1	0.295	0.274	1	0.536	0.248	0.516	0.647
6	0.711	0.871	0.832	0.945	1	0.6	0.744	0.655	0.717	0.779	1	1
7	0.647	0.694	0.737	0.781	0.996	0.583	0.747	0.504	0.587	0.713	1	0.834
8	0.105	0.225	0.6	0.4	0.84	0.21	0.155	1	0.448	0.155	0.395	0.586
9	0.555	0.902	0.918	1	0.974	0.442	0.466	1	0.813	0.57	0.678	1
10	0.617	0.623	0.39	0.612	0.439	0.538	0.709	0.33	0.459	0.842	1	0.999
11	0.535	0.401	0.219	0.389	0.34	0.51	0.706	0.121	0.283	0.785	1	0.83
12	0.617	0.624	0.391	0.613	0.44	0.538	0.709	0.331	0.46	0.842	1	1
$e_j$	0.509	0.679	0.646	0.748	0.732	0.434	0.505	0.660	0.598	0.589	0.732	0.891

En observant les deux dernières colonnes du tableau 5.3, on aperçoit que le modèle d'efficacité proposé et l'analyse d'efficacité croisée agressive évaluent la même DMU (c.à.d, la DMU 12) comme la meilleure. En outre, l'analyse d'efficacité croisée

agressive nécessite la résolution de  $2n$  formulations ( $n$  étant le nombre des DMUs qu'on évalue) qui incluent  $n$  formulations du modèle de CCR DEA et  $n$  formulations du modèle d'efficacité croisée agressive, tandis que la mesure d'efficacité proposée (c.à.d,  $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ ) nécessite la résolution d'une seule formulation pour chaque valeur de  $k$  jusqu'à ce que le nombre des DMUs efficaces se réduise à un. Par exemple, pour ce problème de décision hypothétique, celle-ci a nécessité la résolution de trois formulations (pour  $k = 0, 0.1$  et  $0.2$ , respectivement) tandis que l'analyse d'efficacité croisée agressive a nécessité la résolution de 24 formulations. Donc, la formulation (5.7) qui est un modèle de décision multicritère à poids commun (car, toutes les DMUs sont évaluées par les mêmes poids d'importance), peut être considérée comme un modèle efficace alternatif à l'analyse d'efficacité croisée agressive.

## 5.2. 2<sup>ème</sup> Cas: L'IDEA avec des Sorties Exactes ou Ordinales Multiples et une Seule Entrée Exacte

La formulation (5.2) est appropriée au cas où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte existent. Cependant, il est possible d'ajuster cette formulation à mesure qu'il pourra traiter aussi des sorties ordinales, en remplaçant  $u_r y_{rj}$  par  $w_r^l \gamma_{rj}$  pour des sorties ordinales, comme indiqué ci-dessous:

$$\max E_0 = \frac{\sum_{r \in EXO} u_r y_{rj_0} + \sum_{r \in ORDO} w_r^l \gamma_{rj_0}}{x_{j_0}}$$

slc

$$\frac{\sum_{r \in EXO} u_r y_{rj} + \sum_{r \in ORDO} w_r^l \gamma_{rj}}{x_j} \leq 1, \forall j \quad (5.11)$$

$$u_r \geq \varepsilon, r \in EXO$$

$$w_r^l \in \Psi = \{w_{r,l+1}^1 - w_r^1 \geq \varepsilon, w_r^1 \geq \varepsilon, l = 1, 2, \dots, L-1; r \in ORDO\}$$

où  $u_r$  est la variable de poids d'importance attribuée à la sortie  $r$  (ou à la proportion de sortie à entrée  $r$ );  $w_r^l$  est le vecteur de valeur pondérée incluant les variables  $w_{rl}^1$  ( $w_{rl}^1$  indiquant la valeur pondérée d'être rangée au  $l$ ème rang selon la sortie  $r$ );  $\gamma_{rj}$  est le vecteur indiquant le score attribué à la DMU  $j$  selon la sortie  $r$ ;  $y_{rj}$  est la quantité de sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $x_j$  est la quantité d'entrée consommée par la DMU  $j$ ;  $\varepsilon$  est un constant positif. Finalement, EXO et ORDO sont les ensembles de sorties exactes et de sorties ordinales, respectivement.

La formulation (5.11) est équivalente à la formulation (5.12), où  $d_j$  est la déviation de l'efficacité de la DMU  $j$ . On peut formuler les modèles d'efficacité de minisomme, de minimax ou de  $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ , d'une façon très simple, en changeant la fonction objectif de la formulation (5.12) par la mesure d'efficacité désirée, comme on avait fait dans le sous-chapitre précédent.

min  $d_0$

slc

$$\frac{\sum_{r \in EXO} u_r y_{rj} + \sum_{r \in ORDO} w_r^1 \gamma_{rj}}{x_j} + d_j = 1, \quad \forall j \quad (5.12)$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r \in EXO$$

$$w_r^l \in \Psi = \{w_{rl+1}^1 - w_{rl}^1 \geq \varepsilon, w_{rl}^1 \geq \varepsilon, \quad l = 1, 2, \dots, L-1; r \in ORDO\}$$

$$d_j \geq 0, \quad \forall j$$

Dans le modèle ci-dessus,  $\varepsilon$  est considéré comme un paramètre de discrimination entre deux rangs consécutifs aussi bien qu'il soit la borne inférieure du poids d'importance,  $u_r$ . Si on veut maximiser la discrimination parmi les rangs consécutifs et l'importance minimale associée aux sorties, la valeur qu'on attribuera à  $\varepsilon$  peut être déterminée en résolvant le modèle suivant:

$$\max \varepsilon \quad (5.13)$$

sous les contraintes de la formulation (5.11) ou (5.12)

où  $\varepsilon$  n'est plus un constant, mais une variable de décision

Pour illustrer les résultats de la formulation (5.12) et du modèle d'efficacité proposé (ayant pour but  $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ ), on va ajouter deux sorties ordinales hypothétiques au problème de décision étudié dans le sous-chapitre précédent. Les scores reçus par les DMUs selon ces sorties ordinales, aussi bien que les données normalisées des critères exacts, sont indiqués dans le tableau 5.5. Les sorties ordinales sont représentées par l'échelle à 5 points, le score 5 représentant 'le meilleure' et le score 1 représentant 'le pire'.

**Tableau 5.5** Les données normalisées pour le problème hypothétique où des sorties exactes et ordinales multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes

DMU j	Sortie ordinaire 1	Sortie ordinaire 2	Sortie Exacte 1	Sortie Exacte 2	Sortie Exacte 3	Sortie Exacte 4	Entrée exacte
1	2	4	1.0000	0.8400	0.2000	0.7500	1.0000
2	1	1	0.9000	0.4400	0.3000	1.0000	0.7000
3	1	1	0.8500	0.1800	0.6000	0.5500	0.5250
4	3	3	0.4000	0.1600	0.2000	0.3750	0.2625
5	4	3	0.8000	0.2000	0.6000	0.2750	0.3750
6	2	5	0.6500	0.6000	0.3000	0.3375	0.7500
7	1	4	0.8500	0.9000	0.2400	0.3500	0.8125
8	1	5	0.6000	0.1000	1.0000	0.6250	0.5250
9	5	2	0.6500	0.2500	0.4800	0.6250	0.5625
10	5	4	0.7000	1.0000	0.2400	0.6250	0.8125
11	3	5	0.8500	1.0000	0.4800	0.3750	0.6375
12	2	1	0.6000	0.7000	0.6000	0.7500	0.5375

On applique d'abord la formulation (5.13) aux données indiquées dans le tableau 5.5 et on obtient  $\varepsilon = 0.036$ . Ensuite, mettant  $\varepsilon = 0.036$  dans la formulation (5.12), les scores d'efficacité classique des DMUs, indiqués dans la deuxième colonne du tableau 5.6, sont calculés. Selon ces scores, six DMUs parmi douze sont évaluées comme efficaces. Pour faire une discrimination plus forte parmi les DMUs, on prends en compte la mesure d'efficacité de  $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ . D'abord, en mettant  $k = 0$ , les scores d'efficacité de minimax, indiqués dans la troisième colonne du tableau 5.6, sont

calculés. La mesure d'efficacité de minimax a réduit le nombre des DMUs efficaces à 4 (les DMUs 4, 5, 9 et 11). En prenant en compte ces quatre DMUs efficaces et en mettant  $k = 0.1$ , les scores d'efficacité des DMUs sont recalculés par l'utilisation du modèle d'efficacité de  $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ , ce qui aboutit enfin à une seule DMU efficace qui est la DMU 4.

**Tableau 5.6.** Les scores de certaines mesures d'efficacités (pour  $\varepsilon = 0.036$ ) pour le problème hypothétique où des sorties exactes et ordinales multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes

DMU $j$	L'efficacité classique Formulation (5.12)	L'efficacité de minimax (minM)	L'efficacité de $\min M - 0.1(d_4 + d_5 + d_9 + d_{11})$	L'efficacité croisée agressive moyenne
1	0.564	0.346	0.328	0.362
2	0.26	0.26	0.26	0.249
3	0.318	0.299	0.302	0.293
4	1	1	1	0.991
5	1	1	0.863	0.866
6	0.747	0.744	0.433	0.565
7	0.631	0.364	0.332	0.381
8	1	0.991	0.589	0.761
9	1	1	0.593	0.635
10	1	0.838	0.524	0.615
11	1	1	0.613	0.775
12	0.424	0.424	0.399	0.397

Pour but de comparaison, l'analyse d'efficacité croisée agressive est conduite. D'une façon très simple, le modèle d'efficacité croisée agressive, qui a été formulé dans le sous-chapitre précédent pour le cas où des sorties exactes multiples et une seule entrée exacte existent, est réarrangé au point d'être capable aussi de traiter des sorties ordinales, et la matrice d'efficacité croisée agressive, donnée dans le tableau 5.7, est construite.

Comme l'indique le tableau 5.6, l'analyse d'efficacité croisée agressive considère comme la meilleure la même DMU que le modèle d'efficacité proposé ayant pour but  $\min M - k \sum_{j \in EF} d_j$ . En outre, elle nécessite la résolution de 24 formulations, tandis que le modèle proposé nécessite la résolution de 2 formulations au total (l'un pour  $k = 0$  et l'autre pour  $k = 1$ ). Donc, on peut considérer le modèle d'efficacité proposé comme un modèle de décision multicritère à poids commun efficace.

**Tableau 5.7** La matrice d'efficacité croisée agressive pour le problème hypothétique où des sorties exactes et ordinales multiples et une seule entrée exacte sont prises en comptes

DMU j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.564	0.258	0.298	0.998	0.868	0.747	0.631	1	0.59	0.823	1	0.418
2	0.328	0.26	0.302	1	0.863	0.433	0.332	0.589	0.593	0.524	0.613	0.399
3	0.322	0.25	0.318	0.999	0.896	0.438	0.333	0.623	0.6	0.521	0.625	0.409
4	0.316	0.239	0.287	1	0.867	0.427	0.325	0.571	0.586	0.519	0.613	0.378
5	0.316	0.239	0.287	0.979	1	0.427	0.325	0.571	0.675	0.581	0.605	0.378
6	0.341	0.256	0.296	1	0.87	0.747	0.356	1	0.591	0.548	0.999	0.417
7	0.563	0.257	0.297	0.996	0.867	0.746	0.631	1	0.589	0.822	0.999	0.416
8	0.316	0.239	0.287	0.979	0.852	0.727	0.325	1	0.576	0.512	0.958	0.378
9	0.316	0.239	0.287	0.979	0.852	0.427	0.325	0.571	1	0.806	0.605	0.378
10	0.474	0.239	0.287	0.979	0.852	0.637	0.519	0.872	1	1	0.852	0.378
11	0.341	0.257	0.297	0.997	0.868	0.747	0.358	1	0.59	0.549	1	0.417
12	0.346	0.260	0.299	1.000	0.871	0.455	0.364	0.578	0.592	0.555	0.659	0.424
$e_j$	0.362	0.248	0.293	0.991	0.866	0.565	0.381	0.761	0.635	0.615	0.775	0.397

### 5.3. 3<sup>ème</sup> Cas: L'IDEA avec des Sorties et des Entrées Exactes, Ordinales, Bornées et Floues Multiples

Les problèmes de décision concernant l'évaluation des unités de prise de décision selon plusieurs sorties ou entrées exactes, ordinales, bornées ou floues triangulaires/trapézoïdales nécessitent la formulation d'un modèle d'IDEA approprié qui peut traiter ces données. En utilisant l'approche de Cook et al. pour les données ordinales, l'approche de Despotis et Smirlis pour les données bornées et l'approche de convertir les données floues en données bornées (présentés tous dans le Chapitre 4), un modèle d'IDEA général ayant le pouvoir de traiter un mélange de données exactes et de données imprécises est formulé comme ci-dessous:

$$\max h_0 = \sum_{r \in EXO} u_r y_{rj_0} + \sum_{r \in ORDO} w_r^1 \gamma_{rj_0} + \sum_{r \in INTO \cup FUZO} (u_r y_{rj_0}^L + p_{rj_0} (y_{rj_0}^U - y_{rj_0}^L))$$

slc

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in EXI} v_i x_{ij_0} + \sum_{i \in ORDI} w_i^2 \delta_{ij_0} + \sum_{i \in INTI \cup FUZI} (v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L)) = 1 \\ & \sum_{r \in EXO} u_r y_{rj} + \sum_{r \in ORDO} w_r^1 \gamma_{rj} + \sum_{r \in INTO \cup FUZO} (u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L)) \\ & - \sum_{i \in EXI} v_i x_{ij} - \sum_{i \in ORDI} w_i^2 \delta_{ij} - \sum_{i \in INTI \cup FUZI} (v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L)) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$u_r \geq \varepsilon \text{ pour } r \in EXO \cup INTO \cup FUZO$$

$$v_i \geq \varepsilon \text{ pour } i \in EXI \cup INTI \cup FUZI$$

$$p_{rj} \leq u_r, p_{rj} \geq 0 \text{ pour } r \in INTO \cup FUZO$$

$$q_{ij} \leq v_i, q_{ij} \geq 0 \text{ pour } i \in INTI \cup FUZI$$

$$w_r^1, w_i^2 \in \Psi = \begin{cases} w_{r_{l+1}}^1 - w_{r_l}^1 \geq \varepsilon, w_{r_l}^1 \geq \varepsilon, & \text{pour } l = 1, 2, \dots, L-1; r \in ORDO \\ w_{i_{l+1}}^2 - w_{i_l}^2 \geq \varepsilon, w_{i_l}^2 \geq \varepsilon & \text{pour } l = 1, 2, \dots, L-1; i \in ORDI \end{cases}$$

où  $u_r$  et  $v_i$  sont les variables de poids d'importance attribuées à la sortie  $r$  et à l'entrée  $i$ , respectivement;  $w_r^1$  et  $w_i^2$  sont les vecteurs de valeur pondérée incluant respectivement les variables  $w_{r_l}^1$  et  $w_{i_l}^2$ , qui indiquent les valeurs pondérées d'être associé au rang  $l$  (ou, d'avoir reçu le score  $l$ ) selon la sortie  $r$  et l'entrée  $i$ , respectivement;  $\gamma_{rj}$  et  $\delta_{ij}$  sont les vecteurs indiquant le rang (ou le score) attribué à la DMU  $j$  selon la sortie  $r$  et l'entrée  $i$ , respectivement;  $p_{rj}$  et  $q_{ij}$  sont les variables auxiliaires qui assurent que le modèle assigne à la sortie  $r$  et à l'entrée  $i$  une valeur entre leurs bornes supérieures et inférieures;  $y_{rj}$  est la quantité de sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $x_{ij}$  est la quantité d'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$ ;  $y_{rj}^L$  et  $y_{rj}^U$  sont, respectivement, les bornes inférieures et supérieures de la quantité de sortie  $r$  produite par la DMU  $j$ ;  $x_{ij}^L$  et  $x_{ij}^U$  sont, respectivement, les bornes inférieures et supérieures de la quantité d'entrée  $i$  consommée par la DMU  $j$  et  $\varepsilon$  est un constant positif. Finalement, EXO, ORDO, INTO et FUZO sont les ensembles des sorties exactes, ordinales, bornées et floues, respectivement. De même, EXI, ORDI, INTI et FUZI sont les ensembles des entrées exactes, ordinales, bornées et floues, respectivement.

Comme on a expliqué en détails dans le sous-chapitre 4.4.2, si les données floues qu'on étudie sont trapézoïdales, les substitutions données dans la formulation (4.14) seront utilisées dans la formulation (5.14) pour obtenir les bornes inférieures et supérieures des données bornées représentant ces données floues pour une certaine  $\alpha$ -coupe ( $0 < \alpha \leq 1$ ). De même, si les données floues sont triangulaires, les substitutions données dans la formulation (4.15) seront utilisées.

Comme on a noté précédemment, ces substitutions permettent aux données floues d'être exprimées en forme de données bornées pour une certaine  $\alpha$ -coupe. Pour quelques valeurs de  $\alpha$ , le programme linéaire ci-dessus sera résolu et l'état d'efficacité des DMUs pour des valeurs différentes de  $\alpha$  sera analysé. Les DMUs seront classées selon leurs scores d'efficacité moyens calculés en prenant le moyen des scores d'efficacité qu'elles reçoivent pour des valeurs différentes de  $\alpha$ .

Comparé aux modèles de DEA qui traite seulement des données exactes, les modèles d'IDEA ont un pouvoir de discrimination plus faible. Car, aussi bien que les poids d'importance des facteurs, les données imprécises des entrées et des sorties sont aussi définies comme des variables, ce qui augmente la liberté de la DMU évaluée pour choisir les valeurs des variables en sa propre faveur, donc, contre la faveur des autres DMUs, ce qui augmente par conséquent la probabilité d'être évaluée comme efficace. Une façon d'augmenter le pouvoir de discrimination de la formulation (5.14) est d'attribuer la valeur la plus haute possible à  $\varepsilon$ , ce qui maximisera la discrimination entre deux rangs consécutifs aussi bien que les bornes inférieures des poids d'importance des facteurs. La valeur admissible maximale qui assure la formulation (5.14) peut être déterminée en résolvant les  $n$  formulations suivantes pour  $\alpha_{\max} = \max \alpha$ , c.à.d, pour la valeur maximale de  $\alpha$  (car, une valeur plus haute attribuée à  $\alpha$  convertit le nombre flou en un intervalle plus étroit, ce qui restreint plus la région admissible de la formulation (5.14)) et mettant ensuite  $\varepsilon_{\max} = \min_{j=1,2,\dots,n} \{\hat{\varepsilon}_j\}$ .

$$\max \hat{\varepsilon}_j = \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

sous les contraintes de la formulation (5.14)

(5.15)

Dans le cas où la Formulation (5.14) pour la valeur maximale de  $\varepsilon$  évalue beaucoup de DMUs comme efficaces, on peut prendre en compte le concept d'efficacité de minimax ayant un pouvoir de discrimination plus haut. Comme présenté dans des sous-chapitres précédents, la mesure d'efficacité de minimax a pour but de déterminer les poids optimaux qui minimisent la déviation maximale de l'efficacité. Comme elle minimise la déviation maximale plutôt que la déviation de l'efficacité d'une DMU particulière (autrement dit, comme elle concerne toutes les DMUs en même temps en prenant en compte les déviations de l'efficacité de toutes les DMUs), la flexibilité d'une DMU particulière pour choisir les valeurs des variables en sa propre faveur est limitée. Ainsi, il est plus difficile pour une DMU de réaliser l'efficacité de minimax que de réaliser l'efficacité classique [13]. En somme, la mesure d'efficacité de minimax distingue mieux parmi les DMUs. Li et Reeves a incorporé la mesure d'efficacité de minimax aussi bien que d'autres mesures dans le modèle de DEA traitant des données exactes. De même, le concept d'efficacité de minimax peut être incorporé dans le modèle d'IDEA comme indiqué ci-dessous:

min  $M$

sic

$$M \geq d_j$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in EXI} v_i x_{ij_0} + \sum_{i \in ORDI} w_i^2 \delta_{ij_0} + \sum_{i \in INTI \cup FUZI} (v_i x_{ij_0}^L + q_{ij_0} (x_{ij_0}^U - x_{ij_0}^L)) = 1 \\ & \sum_{r \in EXO} u_r y_{rj} + \sum_{r \in ORDO} w_r^1 \gamma_{rj} + \sum_{r \in INTO \cup FUZO} (u_r y_{rj}^L + p_{rj} (y_{rj}^U - y_{rj}^L)) \\ & - \sum_{i \in EXI} v_i x_{ij} - \sum_{i \in ORDI} w_i^2 \delta_{ij} - \sum_{i \in INTI \cup FUZI} (v_i x_{ij}^L + q_{ij} (x_{ij}^U - x_{ij}^L)) + d_j = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$u_r \geq \varepsilon \text{ pour } r \in EXO \cup INTO \cup FUZO$$

$$v_i \geq \varepsilon \text{ pour } i \in EXI \cup INTI \cup FUZI$$

$$p_{rj} \leq u_r, p_{rj} \geq 0 \text{ pour } r \in INTO \cup FUZO$$

$$q_{ij} \leq v_i, q_{ij} \geq 0 \text{ pour } i \in INTI \cup FUZI$$

$$w_r^1, w_i^2 \in \Psi = \begin{cases} w_{r_{l+1}}^1 - w_{r_l}^1 \geq \varepsilon, w_{r_l}^1 \geq \varepsilon, & \text{pour } l = 1, 2, \dots, L-1; r \in ORDO \\ w_{i_{l+1}}^2 - w_{i_l}^2 \geq \varepsilon, w_{i_l}^2 \geq \varepsilon & \text{pour } l = 1, 2, \dots, L-1; i \in ORDI \end{cases}$$

$$d_j \geq 0$$

où  $d_j$  indique la déviation de l'efficacité de la DMU  $j$  et  $M$  indique la déviation maximale.

La formulation (5.16) est formulée séparément pour chaque DMU  $j_0$  pour une certaine  $\alpha$ -coupe et le score d'efficacité de minimax de la DMU  $j_0$  est calculée par  $1 - d_{j_0}$ .

Pour illustrer les résultats des modèles d'IDEA présentés dans ce sous-chapitre, on étudie un problème de décision hypothétique concernant l'évaluation de l'efficacité de 15 DMUs selon une sortie exacte, une sortie ordinale, deux sorties trapézoïdales, une entrée exacte, une entrée ordinale et une entrée triangulaire. Les données de ce problème sont indiquées dans le tableau 5.8. Toutes ces données sauf les données ordinales sont normalisées par la normalisation de valeur maximale et elles sont données dans le tableau 5.9.

**Tableau 5.8** Les données pour le problème hypothétique où des sorties exactes et imprécises multiples et des entrées exactes et imprécises multiples sont prises en comptes

DMU $j$	Sortie exacte	Sortie ordinale	Sortie floue trapézoïdale 1	Sortie floue trapézoïdale 2	Entrée exacte	Entrée ordinale	Entrée floue triangulaire
1	25	3	(400,410,430,450)	(30,35,40,45)	650	5	(7,10,12)
2	45	1	(730,750,780,800)	(18,25,30,38)	730	4	(17,20,22)
3	48	5	(370,390,410,430)	(42,55,70,80)	680	5	(12,15,18)
4	14	4	(290,300,320,340)	(15,20,25,30)	425	4	(5,8,10)
5	50	2	(520,550,570,590)	(45,50,58,65)	510	2	(15,18,20)
6	18	3	(370,400,430,460)	(10,16,20,28)	630	3	(12,15,18)
7	12	5	(340,350,370,390)	(40,45,48,55)	450	4	(17,20,22)
8	46	5	(570,600,620,640)	(20,28,34,45)	720	1	(7,10,12)
9	28	5	(410,420,440,460)	(18,24,30,36)	475	5	(20,22,25)
10	24	2	(570,590,610,640)	(36,40,48,56)	780	4	(14,18,21)
11	50	4	(370,400,420,450)	(14,20,26,34)	490	5	(3,5,7)
12	22	2	(320,350,370,390)	(30,36,42,50)	760	4	(5,8,10)
13	50	4	(610,630,660,690)	(25,30,35,40)	800	2	(15,17,20)
14	15	1	(310,350,370,400)	(24,28,32,38)	550	4	(7,9,12)
15	10	4	(510,540,560,580)	(40,48,53,58)	530	2	(10,12,15)

**Tableau 5.9** Les données normalisées pour le problème hypothétique où des sorties exactes et imprécises multiples et des entrées exactes et imprécises multiples sont prises en comptes

DMU $j$	Sortie		Sortie floue trapézoïdale 1		Sortie floue trapézoïdale 2		Entrée		Entrée floue	
	exacte	Sortie ordinaire	Sortie floue trapézoïdale 1		Sortie floue trapézoïdale 2		exacte	ordinaire	triangulaire	
1	0.50	3	(0.5000, 0.5125, 0.5375, 0.5625)	(0.3750, 0.4375, 0.5000, 0.5625)	0.81250	5	(0.28, 0.40, 0.48)			
2	0.90	1	(0.9125, 0.9375, 0.9750, 1.0000)	(0.2250, 0.3125, 0.3750, 0.4750)	0.91250	4	(0.68, 0.80, 0.88)			
3	0.96	5	(0.4625, 0.4875, 0.5125, 0.5375)	(0.5250, 0.6875, 0.8750, 1.0000)	0.85000	5	(0.48, 0.60, 0.72)			
4	0.28	4	(0.3625, 0.3750, 0.4000, 0.4250)	(0.1875, 0.2500, 0.3125, 0.3750)	0.53125	4	(0.20, 0.32, 0.40)			
5	1.00	2	(0.6500, 0.6875, 0.7125, 0.7375)	(0.5625, 0.6250, 0.7250, 0.8125)	0.63750	2	(0.60, 0.72, 0.80)			
6	0.36	3	(0.4625, 0.5000, 0.5375, 0.5750)	(0.1250, 0.2000, 0.2500, 0.3500)	0.78750	3	(0.48, 0.60, 0.72)			
7	0.24	5	(0.4250, 0.4375, 0.4625, 0.4875)	(0.5000, 0.5625, 0.6000, 0.6875)	0.56250	4	(0.68, 0.80, 0.88)			
8	0.92	5	(0.7125, 0.7500, 0.7750, 0.8000)	(0.2500, 0.3500, 0.4250, 0.5625)	0.90000	1	(0.28, 0.40, 0.48)			
9	0.56	5	(0.5125, 0.5250, 0.5500, 0.5750)	(0.2250, 0.3000, 0.3750, 0.4500)	0.59375	5	(0.80, 0.88, 1.00)			
10	0.48	2	(0.7125, 0.7375, 0.7625, 0.8000)	(0.4500, 0.5000, 0.6000, 0.7000)	0.97500	4	(0.56, 0.72, 0.84)			
11	1.00	4	(0.4625, 0.5000, 0.5250, 0.5625)	(0.1750, 0.2500, 0.3250, 0.4250)	0.61250	5	(0.12, 0.20, 0.28)			
12	0.44	2	(0.4000, 0.4375, 0.4625, 0.4875)	(0.3750, 0.4500, 0.5250, 0.6250)	0.95000	4	(0.20, 0.32, 0.40)			
13	1.00	4	(0.7625, 0.7875, 0.8250, 0.8625)	(0.3125, 0.3750, 0.4375, 0.5000)	1.00000	2	(0.60, 0.68, 0.80)			
14	0.30	1	(0.3875, 0.4375, 0.4625, 0.5000)	(0.3000, 0.3500, 0.4000, 0.4750)	0.68750	4	(0.28, 0.36, 0.48)			
15	0.20	4	(0.6375, 0.6750, 0.7000, 0.7250)	(0.5000, 0.6000, 0.6625, 0.7250)	0.66250	2	(0.40, 0.48, 0.60)			

D'abord, les données des sorties floues trapézoïdales et de l'entrée flou triangulaire sont exprimées en cinq intervalles, en attribuant à  $\alpha$  des valeurs de 0.2 à 1 augmentant d'une grandeur de pas de 0.2. Ensuite, pour déterminer la valeur maximale de  $\varepsilon$ , on utilise la formulation (5.15) pour l'ensemble des données obtenu attribuant à  $\alpha$  la valeur 1, qui est sa valeur maximale, et on obtient  $\varepsilon = 0.0916$ .

Les formulations (5.14) et (5.16) pour  $\varepsilon = 0.0916$  sont appliquées séparément à chacun de cinq ensemble de données. Les scores d'efficacité classique et d'efficacité de minimax obtenus pour chaque ensemble de données sont indiqués dans les tableaux 5.10 et 5.11, respectivement.

Des tableaux 5.10 et 5.11, on observe que quand la valeur de  $\alpha$  augmente, les scores d'efficacité ont la tendance à diminuer, c'est-à-dire, la discrimination parmi les DMUs augmente. Par exemple, selon les scores d'efficacité classique, huit DMUs sont considérées comme efficaces pour  $\alpha = 0.2$ , tandis que ce nombre réduit à sept pour  $\alpha = 0.4$ , à six pour  $\alpha = 0.6$  et à cinq pour les autres valeurs de  $\alpha$ . Bien que les scores d'efficacité les plus bas (c'est-à-dire les scores ayant le pouvoir de discrimination le plus haut) soient ceux qui sont obtenus pour  $\alpha = 1$ , il est mieux d'évaluer les DMUs selon les scores d'efficacité moyens plutôt que les scores obtenus pour  $\alpha = 1$ . Car, plus on augmente le nombre des valeurs différentes prises en compte pour  $\alpha$  (c.à.d, plus de  $\alpha$ -coupes sont prises en comptes), plus la robustesse de l'évaluation des données floues en les convertissant en des données bornées augmente.

Selon les scores d'efficacité classique moyens, le classement des DMUs parmi lesquelles cinq sont évaluées comme efficaces est indiqué ci-dessous:

DMU 5, DMU 7, DMU 8, DMU 11, DMU 15 > DMU 4 > DMU 13 > DMU 12 > DMU 9 > DMU 3 > DMU 14 > DMU 1 > DMU 6 > DMU 10 > DMU 2

D'autre part, le modèle d'efficacité de minimax permet plus de discrimination parmi les DMUs, réduisant le nombre des DMUs efficaces à 2, comme on peut voir dans le

tableau 5.11. Le classement obtenu selon les scores d'efficacité de minimax moyens est indiqué ci-dessous:

DMU 8, DMU 15 > DMU 7 > DMU 5 > DMU 13 > DMU 9 > DMU 11 > DMU 4 >  
DMU 3 > DMU 6 > DMU 1 > DMU 12 > DMU 14 > DMU 10 > DMU 2

**Tableau 5.10** Les scores d'efficacité classique des DMUs pour certaines  $\alpha$  – coupes

DMU j	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$	L'efficacité classique moyenne
1	0.940	0.748	0.604	0.497	0.479	0.654
2	0.423	0.398	0.378	0.366	0.355	0.384
3	0.778	0.746	0.718	0.695	0.675	0.722
4	1.000	1.000	0.980	0.963	0.947	0.978
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	0.676	0.661	0.649	0.640	0.631	0.651
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.888	0.865	0.837	0.812	0.788	0.838
10	0.547	0.511	0.480	0.453	0.430	0.484
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	1.000	1.000	1.000	0.814	0.635	0.890
13	1.000	0.983	0.937	0.897	0.861	0.936
14	0.948	0.753	0.601	0.516	0.476	0.659
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

**Tableau 5.11** Les scores d'efficacité de minimax des DMUs pour certaines  $\alpha$  – coupes

DMU j	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$	L'efficacité de minimax moyenne
1	0.566	0.540	0.465	0.455	0.448	0.495
2	0.419	0.396	0.375	0.361	0.351	0.380
3	0.694	0.684	0.655	0.655	0.654	0.668
4	0.721	0.601	0.692	0.679	0.667	0.672
5	0.949	0.925	0.916	0.908	0.900	0.920
6	0.641	0.607	0.590	0.569	0.539	0.589
7	1.000	0.980	0.942	0.915	0.891	0.946
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.826	0.808	0.792	0.776	0.758	0.792
10	0.513	0.481	0.454	0.388	0.379	0.443
11	0.795	0.773	0.753	0.733	0.715	0.754
12	0.622	0.512	0.481	0.368	0.357	0.468
13	1.000	0.959	0.918	0.805	0.787	0.894
14	0.496	0.465	0.444	0.424	0.406	0.447
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

## 6. Conclusion

L'analyse d'enveloppement de donnée évalue l'efficacité relative des entités de prise de décision prenant en considération des entrées et des sorties multiples. Les modèles standards de DEA exigent qu'on connaisse les valeurs exactes des entrées et des sorties selon lesquelles les DMUs seront évaluées. Cependant, dans certains cas, les valeurs des entrées et des sorties peuvent être imprécises, comme des données ordinales, bornées ou flous. Dans ces cas, comme les valeurs des entrées et des sorties ne sont pas connues précisément, elles sont incluses aux modèles de DEA comme des variables de décision, ce qui cause l'apparition des produits de deux variables dans le modèle, l'une indiquant la valeur de l'entrée ou de la sortie imprécise et l'autre indiquant son poids d'importance. Par conséquent, le modèle de DEA devient un programme non-linéaire et non convexe. Ce problème de non-linéarité peut être résolu par deux approches fondamentales dont l'une est de faire des transformations de variables qui permettront la conversion du modèle d'IDEA non-linéaire en un modèle linéaire, et l'autre est de convertir d'abord les données imprécises (ordinales ou bornées) en données exactes et après, de se servir d'un modèle standard de DEA linéaire.

Dans ce mémoire, on a d'abord présenté les approches d'IDEA déjà apparues dans la littérature, et ensuite, on a comparé les modèles d'IDEA ayant le pouvoir de traiter un certain type de données imprécises, selon leur pouvoir de discrimination et leur efficacité (mesurée par les nombres de variables de décision et de contraintes). Quand on a comparé le modèle de Cook et al. au modèle de Cooper et al. ayant le pouvoir de traiter les données ordinales, on a observé que la différence fondamentale entre l'efficacité du modèle de Cook et al. et celle du modèle de Cooper et al. est que dans le modèle de Cook et al., le nombre des variables de décision et le nombre des contraintes exprimant les relations ordinales dépendent particulièrement du 'nombre de catégories (scores) possibles', tandis que dans le modèle de Cooper et al., ils dépendent du nombre des DMUs ( $n$ ). Donc, en cas d'existence des entrées ou sorties ordinales exprimées par

l'échelle à  $L$  points, l'efficacité du modèle de Cook et al. sera supérieure à celle du modèle de Cooper et al., car en général  $L < n$ . En outre, lorsque les critères à considérer sont fortement ordinaux et qu'ils sont exprimés par une échelle à  $L$  points, si quelques scores de cette échelle ne sont attribués à aucune DMU, les contraintes représentant les relations ordinales du modèle de Cook et al. seront plus restrictives que celles du modèle de Cooper et al, ce qui aboutira à une discrimination plus forte parmi les DMUs. Ces résultats sont illustrés via un exemple numérique.

Quand on compare le modèle de Despotis et Smirlis au modèle de Cooper et al., ayant tous les deux le pouvoir de traiter les données bornées, on voit que le modèle de Despotis et Smirlis contient moins de contraintes que celui de Cooper et al. tandis que ses variables de décision sont plus nombreuses que celles du modèle de Cooper et al. en cas d'existence d'un maximum de colonne pour chaque entrée et sortie. Quand il n'existe un maximum de colonne pour aucune sortie ou entrée, les deux modèles ont le même nombre de variables de décision. Puisque le nombre des contraintes réduit l'efficacité du modèle plus que le nombre des variables de décision la réduit, le modèle de Despotis et Smirlis paraît plus efficace que celui de Cooper et al. En outre, via un exemple numérique, on a montré que tous les deux modèles produisent les mêmes scores d'efficacité, donc, ils ont le même pouvoir de discrimination.

Comparé aux modèles de DEA qui traite seulement des données exactes, les modèles d'IDEA ont un pouvoir de discrimination plus faible. Car, aussi bien que les poids d'importance des facteurs, les données imprécises des entrées et des sorties sont aussi définies comme des variables, ce qui augmente la liberté de la DMU évaluée pour choisir les valeurs des variables en sa propre faveur, ce qui augmente par conséquent la probabilité d'être évaluée comme efficace.

Dans ce mémoire, on a introduit une mesure d'efficacité nouvelle, ayant un pouvoir de discrimination haut, qui pourrait être utilisée pour les problèmes de décision où on prend en considération plusieurs sorties exactes ou imprécises et une seule entrée exacte pour évaluer les DMUs. Cette mesure d'efficacité a pour but de minimiser la déviation maximale de l'efficacité, et en même temps, de maximiser les déviations de l'efficacité

des DMUs qui ont été considérés comme efficaces selon la mesure d'efficacité de minimax. Comme cette nouvelle mesure évalue les DMUs qui sont minimax efficaces, d'une manière agressive, elle évalue moins de DMUs comme efficaces comparée à la mesure d'efficacité de minimax. Donc, elle est plus distinctive. Utilisant cette mesure d'efficacité nouvelle et une transformation de variables, on a converti le modèle de CCR DEA en un modèle de décision multicritère à poids commun ayant deux avantages principales: premièrement, ce modèle nous permet de calculer les scores d'efficacité de toutes les DMUs en une seule fois (c.à.d, d'évaluer les DMUs par des poids d'importance communs), contrairement au modèle de DEA qui nécessite la résolution de  $n$  formulations (c.à.d, qui évalue les DMUs par de différents poids d'importance); deuxièmement, il a un pouvoir de discrimination très haut, qui permet l'identification de la meilleure DMU. Pour évaluer la fiabilité du modèle d'efficacité proposé, on l'a comparé à l'analyse d'efficacité croisée agressive, via deux exemples numériques. L'analyse d'efficacité croisée agressive a considéré comme la meilleure la même DMU que le modèle d'efficacité proposé. En plus, elle a nécessité la résolution de beaucoup plus de formulations. Donc, le modèle d'efficacité proposé peut être considéré comme un modèle de décision multicritère efficace.

Dans ce mémoire, pour traiter les données floues dans la DEA, on a introduit aussi une nouvelle approche qui consiste d'abord à convertir des données floues en données bornées pour quelques  $\alpha$ -coupes, et utiliser ensuite un modèle d'IDEA approprié qui peut traiter ces données bornées. Après, en se servant de l'approche de Cook et al. pour les données ordinales, de l'approche de Despotis et Smirlis pour les données bornées et de l'approche de convertir les données floues en données bornées, on a formulé un modèle d'IDEA général ayant le pouvoir de traiter des problèmes de décision concernant l'évaluation des DMUs selon plusieurs sorties ou entrées exactes, ordinales, bornées ou floues. Pour augmenter le pouvoir de discrimination de ce modèle d'IDEA, en plus d'attribuer la valeur maximale à  $\varepsilon$ , on y a incorporé le concept d'efficacité de minimax. Pour illustrer le pouvoir de discrimination de ces modèles, on a utilisé un exemple numérique. On a pris en considération cinq valeurs pour  $\alpha$  et on a observé que quand la valeur de  $\alpha$  augmente, les scores d'efficacité ont la tendance à diminuer. C'est-à-dire, la discrimination parmi les DMUs augmente. Bien que les scores

d'efficacités les plus bas (donc, les plus distinctifs) soient ceux qui sont obtenus pour la valeur maximale de  $\alpha$  (c.à.d, pour  $\alpha = 1$ ), on a évalué les DMUs selon les scores d'efficacité moyens plutôt que les scores obtenus pour  $\alpha = 1$ . Car, plus de  $\alpha$ -coupes sont prises en comptes, plus la robustesse de l'évaluation des données floues en les convertissant en des données bornées augmente. En somme, selon les scores d'efficacité classique moyens, cinq DMUs sont évaluées comme efficaces, alors que le modèle d'efficacité de minimax a permis plus de discrimination parmi les DMUs, réduisant le nombre des DMUs efficaces à 2.



## Bibliographie

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., "Measuring the efficiency of decision making units", *European Journal of Operational Research*, 2 (6), 429-444, (1978)
- [2] Yeh, Q.J., "The application of data envelopment analysis in conjunction with financial ratios for bank performance evaluation", *Journal of the Operational Research Society*, 47, 980-988, (1996).
- [3] Tofallis, C., "Input efficiency profiling: an application to airlines", *Computers & Operations Research*, 24 (3), 253-258, (1997).
- [4] Khouja, M., "The use of data envelopment analysis for technology selection", *Computers & Industrial Engineering*, 28 (1), 123-132, (1995).
- [5] Sarkis, J., Weinrach, J., "Using data envelopment analysis to evaluate environmentally conscious waste treatment technology", *Journal of Cleaner Production*, 9 (5), 417-427, (2001).
- [6] Parkan, C., Wu, M.L., "Decision-making and performance measurement models with applications to robot selection", *Computers & Industrial Engineering*, 36 (3), 503-523, (1999).
- [7] Shang, J., Sueyoshi, T., "A unified framework for the selection of a flexible manufacturing system", *European Journal of Operational Research*, 85 (2), 297-315, (1995).

- [8] Sinuany-Stern, Z., Mehrez, A., Hadad, Y., "An AHP/DEA methodology for ranking decision making units", *International Transactions in Operational Research*, 7 (2), 109-124, (2000).
- [9] Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R.G., Thanassoulis, E., "Weight restrictions and value judgements in data envelopment analysis: evolution, development and future directions", *Annals of Operations Research*, 73, 13-34, (1997).
- [10] Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J., *Data envelopment analysis: critique and extensions. In Measuring efficiency: an assessment of data envelopment analysis*, edited by R.H. Silkman, San Francisco: Jossey-Bass, (1986).
- [11] Doyle, J., Green, R., "Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivations, meanings and uses", *Journal of the Operational Research Society*, 45 (5), 567-578, (1994).
- [12] Baker, R.C., Talluri, S., "A closer look at the use of data envelopment analysis for technology selection", *Computers & Industrial Engineering*, 32 (1), 101-108, (1997).
- [13] Li, X.B., Reeves, G.R., "A multiple criteria approach to data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research*, 115 (3), 507-517, (1999).
- [14] Cook, W.D., Kress, M., Seiford, L.M., "On the use of ordinal data in data envelopment analysis", *Journal of the Operational Research Society*, 44 (2), 133-140, (1993).
- [15] Cook, W.D., Kress, M., Seiford, L.M., "Data envelopment analysis in the presence of both quantitative and qualitative factors", *Journal of the Operational Research Society*, 47 (7), 945-953, (1996).
- [16] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G., "IDEA and AR\_IDEA: models for dealing with imprecise data in DEA", *Management Science*, 45 (4), 597-607, (1999).

- [17] Kim, S.H., Park, C.G., Park, K.S., "An application of data envelopment analysis in telephone offices evaluation with partial data", *Computers & Operations Research*, 26 (1), 59-72, (1999).
- [18] Cooper, W.W., Park, K.S., Yu, G., "An illustrative application of IDEA (imprecise data envelopment analysis) to a Korean mobile telecommunication company", *Operations Research*, 49 (6), 807-820, (2001).
- [19] Despotis, D.K., Smirlis, Y.G., "Data envelopment analysis with imprecise data", *European Journal of Operational Research*, 140 (1), 24-36, (2002).
- [20] Zhu, J., "Efficiency evaluation with strong ordinal input and output measures", *European Journal of Operational Research*, 146 (3), 477-485, (2003).
- [21] Zhu, J., "Imprecise data envelopment analysis (IDEA): a review and improvement with an application", *European Journal of Operational Research*, 144 (3), 513-529, (2003).
- [22] Karsak, E.E., "A DEA-based robot selection procedure incorporating fuzzy criteria values", *1999 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, Tokyo, Japan, (1999).
- [23] Karsak, E.E., "Using data envelopment analysis for the selection of a flexible manufacturing system in the presence of both quantitative and qualitative data", *16<sup>th</sup> International Conference on Production Research*, Prague, Czech Republic, (2001).
- [24] Sarkis, J., Talluri, S., "A decision model for evaluation of flexible manufacturing systems in the presence of both cardinal and ordinal factors", *International Journal of Production Research*, 37 (13), 2927-2938, (1999).
- [25] Zadeh, L.A., "Fuzzy Sets", *Information and Control*, 8, 338-353, (1965).

- [26] Farrell, M.J., "The measurement of productive efficiency", *Journal of the Royal Statistic Society Ser. A*, 120, 253-281, (1957)
- [27] Sarkis, J., "A comparative analysis of DEA as a discrete alternative multiple criteria decision tool", *European Journal of Operational Research*, 123 (3), 543-557, (2000).
- [28] Karsak, E.E., Ahiska, S.S., "Ayrım Yapma Özelliği İyileştirilmiş Veri Zarflama Analizi ile Çimento Sektöründeki Şirketlerin Görelî Kârlılık Performanslarının Değerlendirilmesi", *Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 23. Ulusal Kongresi*, İstanbul, Türkiye, (2002).
- [29] Kim, K., Park, K.S., "Ranking fuzzy numbers with index of optimism", *Fuzzy Sets and Systems*, 35, 143-150, (1990).
- [30] Liou, T.S., Wang, M.J., "Ranking fuzzy numbers with integral value", *Fuzzy Sets and Systems*, 50, 247-255, (1992).
- [31] Klir, G. J., Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall PTR, New Jersey, (1995).
- [32] Karsak, E.E., Ahiska, S.S., "A practical common weight MCDM approach with an improved discriminating power", *Unpublished manuscript*.

**Appendice A** Le programme de GAMS du modèle de Cook et al. pour la DMU 1 de l'exemple numérique étudié dans le sous-chapitre 4.2.1.3

Sets

n "decision making units" /1\*10/

r "ordinal outputs" /1\*3/

i "ordinal inputs" /1\*3/

l "5 point scale" /1\*5/;

table outdata(n,r,l) "assessments wrt ordinal outputs"

	1	2	3	4	5
1.1	0	0	0	1	0
1.2	0	1	0	0	0
1.3	0	0	0	0	1
2.1	0	0	0	0	1
2.2	0	0	0	0	1
2.3	0	1	0	0	0
3.1	0	0	0	0	1
3.2	0	0	0	0	1
3.3	0	0	0	0	1
4.1	0	0	1	0	0
4.2	0	0	1	0	0
4.3	0	0	1	0	0
5.1	0	1	0	0	0
5.2	0	0	1	0	0
5.3	0	0	0	0	1
6.1	0	0	0	1	0
6.2	1	0	0	0	0
6.3	0	0	0	0	1
7.1	0	0	0	0	1

7.2	0	1	0	0	0
7.3	0	0	0	0	1
8.1	0	0	0	0	1
8.2	1	0	0	0	0
8.3	0	0	1	0	0
9.1	1	0	0	0	0
9.2	0	0	0	1	0
9.3	0	1	0	0	0
10.1	1	0	0	0	0
10.2	0	1	0	0	0
10.3	0	1	0	0	0;

table indata(n,i,l) "assessments wrt ordinal inputs"

	1	2	3	4	5
1.1	0	0	0	0	1
1.2	0	1	0	0	0
1.3	1	0	0	0	0
2.1	0	0	1	0	0
2.2	0	0	0	0	1
2.3	0	1	0	0	0
3.1	1	0	0	0	0
3.2	0	1	0	0	0
3.3	1	0	0	0	0
4.1	0	0	0	1	0
4.2	0	0	1	0	0
4.3	0	1	0	0	0
5.1	0	0	0	0	1
5.2	1	0	0	0	0
5.3	0	0	0	1	0
6.1	1	0	0	0	0
6.2	0	1	0	0	0
6.3	0	1	0	0	0

7.1	0	0	0	0	1
7.2	0	0	0	1	0
7.3	0	0	1	0	0
8.1	0	0	1	0	0
8.2	0	0	1	0	0
8.3	0	0	1	0	0
9.1	0	0	0	1	0
9.2	0	1	0	0	0
9.3	0	0	0	0	1
10.1	0	0	0	0	1
10.2	0	0	0	0	1
10.3	0	0	0	0	1;

scalar ep "epsilon" /0.03/;

variables

wout(r,l) "weight given to rank l for output r"

win(i,l) "weight given to rank l for input i"

z efficiency score of the test DMU;

wout.lo(r,'1')=ep;

win.lo(i,'1')=ep;

Equations

eff objective function value

inpsum total weighted input equals to 1 for test DMU

norm(n) efficiency score no greater than 1 for DMUn

outordrel1(r), outordrel2(r), outordrel3(r), outordrel4(r)

inpardrel1(i), inpardrel2(i), inpardrel3(i), inpardrel4(i);

```

eff..      z =e= sum((r,l), wout(r,l)*outdata('1',r,l));
inpsum..   sum((i,l), win(i,l)*indata('1',i,l))=e=1;
norm(n)..  sum((r,l), wout(r,l)*outdata(n,r,l))- sum((i,l), win(i,l)*indata(n,i,l))=l=0;

```

```

outordrel1(r).. wout(r,'5')-wout(r,'4')=g=ep;
outordrel2(r).. wout(r,'4')-wout(r,'3')=g=ep;
outordrel3(r).. wout(r,'3')-wout(r,'2')=g=ep;
outordrel4(r).. wout(r,'2')-wout(r,'1')=g=ep;

```

```

inpordrel1(i).. win(i,'5')-win(i,'4')=g=ep;
inpordrel2(i).. win(i,'4')-win(i,'3')=g=ep;
inpordrel3(i).. win(i,'3')-win(i,'2')=g=ep;
inpordrel4(i).. win(i,'2')-win(i,'1')=g=ep;

```

```

Model ordinalDEA /all/;
Solve ordinalDEA using lp maximizing z;
Display wout.l, win.l, z.l;

```

**Appendice B** Le programme de GAMS du modèle de Cooper et al. pour la DMU 1 de l'exemple numérique étudié dans le sous-chapitre 4.2.1.3

Sets

j "decision making units" /1\*10/

r "ordinal outputs" /1\*3/

i "ordinal inputs" /1\*3/;

scalar ep "epsilon" /0.03/;

variables

Y(r,j) "weighted value given to DMUj for output r"

X(i,j) "weighted value given to DMUj for input i"

z efficiency score of the test DMU;

Equations

eff objective function value

inpsum total weighted input equals to 1 for test DMU

norm(j) efficiency score no greater than 1 for DMUn

outord11, outord12, outord13, outord14, outord15, outord16, outord17,  
outord18, outord19, outord110

outord21, outord22, outord23, outord24, outord25, outord26, outord27  
outord28, outord29, outord210

outord31, outord32, outord33, outord34, outord35, outord36, outord37  
outord38, outord39, outord310

inpord11, inpord12, inpord13, inpord14, inpord15, inpord16, inpord17,  
inpord18, inpord19, inpord110

inpord21, inpord22, inpord23, inpord24, inpord25, inpord26, inpord27  
inpord28, inpord29, inpord210

inpord31, inpord32, inpord33, inpord34, inpord35, inpord36, inpord37  
inpord38, inpord39, inpord310;

eff..  $z = e = \text{sum}(r, Y(r, '1'));$   
 inpsum..  $\text{sum}(i, X(i, '1')) = e = 1;$   
 norm(j)..  $\text{sum}(r, Y(r, j)) - \text{sum}(i, X(i, j)) = 1 = 0;$

outord11..  $Y('1', '2') - Y('1', '3') = e = 0;$   
 outord12..  $Y('1', '3') - Y('1', '7') = e = 0;$   
 outord13..  $Y('1', '7') - Y('1', '8') = e = 0;$   
 outord14..  $Y('1', '8') - Y('1', '1') = g = ep;$   
 outord15..  $Y('1', '1') - Y('1', '6') = e = 0;$   
 outord16..  $Y('1', '6') - Y('1', '4') = g = ep;$   
 outord17..  $Y('1', '4') - Y('1', '5') = g = ep;$   
 outord18..  $Y('1', '5') - Y('1', '9') = g = ep;$   
 outord19..  $Y('1', '9') - Y('1', '10') = e = 0;$   
 outord110..  $Y('1', '10') = g = ep;$

outord21..  $Y('2', '2') - Y('2', '3') = e = 0;$   
 outord22..  $Y('2', '3') - Y('2', '9') = g = ep;$   
 outord23..  $Y('2', '9') - Y('2', '4') = g = ep;$   
 outord24..  $Y('2', '4') - Y('2', '5') = e = 0;$   
 outord25..  $Y('2', '5') - Y('2', '1') = g = ep;$   
 outord26..  $Y('2', '1') - Y('2', '7') = e = 0;$   
 outord27..  $Y('2', '7') - Y('2', '10') = e = 0;$   
 outord28..  $Y('2', '10') - Y('2', '6') = g = ep;$

outord29..  $Y(2,'6')-Y(2,'8')=e=0;$

outord210..  $Y(2,'8')=g=ep;$

outord31..  $Y(3,'1')-Y(3,'3')=e=0;$

outord32..  $Y(3,'3')-Y(3,'6')=e=0;$

outord33..  $Y(3,'6')-Y(3,'7')=e=0;$

outord34..  $Y(3,'7')-Y(3,'4')=g=ep;$

outord35..  $Y(3,'4')-Y(3,'8')=e=0;$

outord36..  $Y(3,'8')-Y(3,'2')=g=ep;$

outord37..  $Y(3,'2')-Y(3,'9')=e=0;$

outord38..  $Y(3,'9')-Y(3,'10')=e=0;$

outord39..  $Y(3,'10')-Y(3,'5')=g=ep;$

outord310..  $Y(3,'5')=g=ep;$

inpord11..  $X(1,'1')-X(1,'5')=e=0;$

inpord12..  $X(1,'5')-X(1,'7')=e=0;$

inpord13..  $X(1,'7')-X(1,'10')=e=0;$

inpord14..  $X(1,'10')-X(1,'4')=g=ep;$

inpord15..  $X(1,'4')-X(1,'9')=e=0;$

inpord16..  $X(1,'9')-X(1,'2')=g=ep;$

inpord17..  $X(1,'2')-X(1,'8')=e=0;$

inpord18..  $X(1,'8')-X(1,'3')=g=ep;$

inpord19..  $X(1,'3')-X(1,'6')=e=0;$

inpord110..  $X(1,'6')=g=ep;$

inpord21..  $X(2,'2')-X(2,'10')=e=0;$

inpord22..  $X(2,'10')-X(2,'7')=g=ep;$

inpord23..  $X(2,'7')-X(2,'4')=g=ep;$

inpord24..  $X(2,'4')-X(2,'8')=e=0;$

inpord25..  $X(2,'8')-X(2,'1')=g=ep;$

inpord26..  $X(2,'1')-X(2,'3')=e=0;$

inpord27..  $X(2,'3')-X(2,'6')=e=0;$

inpord28..  $X(2,'6')-X(2,'9')=e=0;$   
inpord29..  $X(2,'9')-X(2,'5')=g=ep;$   
inpord210..  $X(2,'5')=g=ep;$

inpord31..  $X(3,'9')-X(3,'10')=e=0;$   
inpord32..  $X(3,'10')-X(3,'5')=g=ep;$   
inpord33..  $X(3,'5')-X(3,'7')=g=ep;$   
inpord34..  $X(3,'7')-X(3,'8')=e=0;$   
inpord35..  $X(3,'8')-X(3,'2')=g=ep;$   
inpord36..  $X(3,'2')-X(3,'4')=e=0;$   
inpord37..  $X(3,'4')-X(3,'6')=e=0;$   
inpord38..  $X(3,'6')-X(3,'1')=g=ep;$   
inpord39..  $X(3,'1')-X(3,'3')=e=0;$   
inpord310..  $X(3,'3')=g=ep;$

Model ordinalDEA /all/;

Solve ordinalDEA using lp maximizing z;

Display Y.l, X.l, z.l;

## Biographie

Semra Şebnem AHISKA est née le 30 janvier 1978 à İstanbul. En 1989, elle a commencé ses études secondaires à l'école Sainte Pulchérie et après être diplômée de cette école, elle a continué ses études secondaires au lycée Saint Joseph jusqu'à 1997.

Elle a étudié génie industriel à l'Université Technique d'Istanbul d'où elle est diplômée en 2001 avec le succès d'être rangée la première dans le département du génie industriel. A la suite, elle a commencé ses études de mastère en génie industriel à l'Université Galatasaray. Elle a préparé son mémoire de mastère sur l'analyse d'enveloppement de données imprécises, sous la direction de Prof.Dr.E. Ertuğrul KARSAK.

Depuis décembre 2001, elle travaille comme assistante de recherche à l'Université Galatasaray. Elle a fait des recherches sur les applications de la décision multicritère et des modèles d'optimisation de portfolio. Au 23<sup>ème</sup> Congrès National de Recherche Opérationnelle/Génie Industriel (YA/EM'02), qui a eu lieu à l'Université Yeditepe en juillet 2002, elle a fait deux présentations préparées avec Prof.Dr.E. Ertuğrul KARSAK, dont l'une a pour titre 'Ayrım Yapma Özelliği İyileştirilmiş Veri Zarflama Analizi ile Çimento Sektöründeki Şirketlerin Görelî Kârlılık Performanslarının Değerlendirilmesi' et l'autre, 'Farklı Risk Ölçütü İçeren Portföy Seçimi Modellerinin Çok Ölçütlü Karar Verme Yöntemleriyle Bütünleşik Uygulamaları'. Elle est aussi co-auteur de l'article intitulé 'Integrated Portfolio Selection Procedure Incorporating Multi-Criteria Decision Making Techniques and Alternative Measures of Risk' qui a été présenté à la Conférence Internationale IEMS 2003.