

158744

T.C. GALATASARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİŞİM SİSTEM PROJESİ SEÇİMİNDE YENİ BİR BULANIK ÇOK AMAÇLI
KARAR VERME PROSEDÜRÜ
(UNE NOUVELLE PROCEDURE DE DECISION MULTI-OBJECTIF FLOUE POUR
LA SELECTION DE SYSTEME D'INFORMATIQUE)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

End.Müh. Yavuz Boğaç TÜRKOĞULLARI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06 Ocak 2004

Tezin Savunulduğu Tarih : 20 Ocak 2004

Tez Danışmanı : Prof. Dr. E. Ertuğrul KARSAK

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ethem TOLGA

Yrd. Doç. Dr. Ruhi TUNCER

E. Karşak 29/01/2004

Ethem Tolga 30/01/2004

R. Tuncer 29/01/2004

OCAK 2004

Préface

La théorie des ensembles flous est une méthode efficace de modéliser l'incertitude. Dans cette thèse la théorie est appliquée au problème multicritère de sélection parmi les projets de système d'informatique (SI). Pour choisir sans erreur la solution qui convient le plus au décideur parmi les solutions non dominées du programme multi-objectif considéré, une nouvelle procédure basée sur la programmation compromise dans le cas où les données sont floues est développée.

A l'introduction la littérature relative au sujet considéré est présentée. Les bases de la théorie des ensembles flous, la programmation mathématique floue sont expliquées aux chapitres 2 et 3 respectivement. Au chapitre 4 une nouvelle méthode de transformation en forme linéaire pour résoudre les programmes mathématiques non linéaires binaires apparaissant dans la procédure est développée. Au chapitre 5 un nouveau modèle de dm flou pour la sélection parmi les projets de SI est proposé. Au chapitre 6, une nouvelle procédure de dm floue basée sur la programmation floue compromise est développée. Au chapitre 7 toute la procédure est appliquée à un exemple étendu pour que les détails soient mieux compris. Au chapitre 8, les conclusions et des directions pour les recherches au future sont présentés.

J'aimerais remercier Professeur Dr. E. Ertuğrul Karsak pour son soutien scientifique et moral pendant toute la préparation de la thèse.

Yavuz Boğaç Türkoğulları

29/12/2003

Table des Matières

Préface	(ii)
Table des Matières	(iii)
Liste des notations	(v)
Liste des Figures	(vi)
Liste des tableaux	(vii)
Résumé	(ix)
Özet	(xii)
1. Introduction	(1)
2. Les fondamentaux de la théorie des ensembles flous	(6)
3. La programmation linéaire floue	(11)
3.1. La programmation linéaire floue proposée par Zimmermann [34]	(11)
3.2. La programmation linéaire floue en utilisant le théorème de représentation	(13)
3.3. La programmation linéaire floue avec des méthodes de classement	(14)
3.4. La programmation linéaire floue proposée par Yu et Li [41]	(16)
4. Une nouvelle procédure pour la solution d'un programme non linéaire ayant des variables binaires	(18)
4.1. Les bases théoriques	(18)
4.2. Une procédure pas à pas transformant en forme linéaire le modèle de la sélection parmi les projets de SI d'une façon efficace	(29)
5. Un nouveau modèle de dm flou pour la sélection parmi les projets de SI	(31)
6. Une nouvelle procédure de dm floue pour la sélection parmi les projets de SI	(35)
6.1. La programmation floue compromis avec des ordres de priorité parmi les objectifs	(35)
6.2. La procédure de décision	(38)

7. Un exemple de sélection parmi les projets de SI	(42)
8. Conclusion	(44)
Bibliographie	(46)
Appendice <i>A</i> . Les preuves des propositions	(50)
Appendice <i>B</i> . La solution en détail de l'exemple de sélection parmi les projets de SI	(57)
Appendice <i>C</i> . Exemple de transformation en forme linéaire	(63)
Biographie	(72)



Liste des Notations

dm: décision multicritère

mra: méthode de réseau analytique

R&D: recherche et développement

SI: système d'informatique



Liste des Figures

Figure 2.1. Le nombre flou trapézoïdal \tilde{A}

(6)



Liste des Tableaux

- Tableau 7.1. Les données des projets de SI (42)
- Tableau 7.2. Les interactions des projets de SI (43)
- Tableau 7.3. Les points idéals et pires pour les objectifs en compétition (43)
- Tableau 7.4. Les ordres de priorité et les solutions de compromis correspondantes (43)
- Tableau B.1. Pour l'attitude pessimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux (57)
- Tableau B.2. Pour l'attitude optimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux (58)
- Tableau B.3. Pour l'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources des ensembles de projet optimaux données par la méthode de classement nommée distance marquée (58)
- Tableau B.4. Pour l'attitude pessimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux (58)
- Tableau B.5. Pour l'attitude optimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux (58)
- Tableau B.6. Pour l'ordre de priorité (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources des ensembles de projet optimaux données par la méthode de classement nommée distance marquée (59)

Tableau B.7. Pour l'attitude pessimiste de risque et d'ordre de priorité
(bénéfice ≥ 2 risque, risque ≥ 3 coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux (59)

Tableau B.8. Pour l'attitude optimiste de risque et d'ordre de priorité
(bénéfice ≥ 2 risque, risque ≥ 3 coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux (59)

Tableau B.9. Pour l'ordre de priorité (bénéfice ≥ 2 risque, risque ≥ 3 coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources des ensembles de projet optimaux données par la méthode de classement nommée distance marquée (59)



Résumé

La sélection parmi les projets de système d'informatique (SI) est choisir l'ensemble de projets optimisant les objectifs de la compagnie sans dépasser les limites de ressources parmi les projets candidats. De ce point de vue c'est une décision d'investissement stratégique pouvant soumettre la compagnie à des dépendances à long terme. Dans les décennies au passé récent des nombreux chercheurs ont analysé des différents aspects du problème qui est encore une domaine de recherche active; parce que les échecs de sélection parmi les projets de SI est encore un phénomène étendu.

Deux des causes principales des échecs de sélection parmi les projets de SI est l'estimation incorrecte des données des projets et les objectifs des décideurs. Par contre dans la littérature il n'y a pas de procédure de décision spécifique au problème de sélection parmi les projets de SI développée pour modéliser l'incertitude utilisant la théorie des ensembles flous. Dans cette thèse, le but principal est développer une procédure de décision modélisant les données des projets et les objectifs des décideurs d'une façon exacte et efficace en utilisant la théorie des ensembles flous.

Dans un problème de sélection parmi les projets de SI fondamentalement il y a trois objectifs en compétition pour les ressources limitées comme la maximisation du bénéfice, la minimisation du risque et des coûts qui ne sont pas prédéterminés dans le budget: des coûts divers. Les ressources limitées sont les budgets de hardware et de logiciel. De plus il y a des contraintes logiques comme l'obligation de choisir un projet et pour choisir un certain projet, l'obligation de choisir le projet dont il dépend. Un facteur important compliquant le problème causant des erreurs d'estimation c'est les interactions entre les projets. Certains projets quand choisis ensemble fournissent une amélioration synergique dans les objectifs. Cette amélioration est à la forme d'une augmentation de bénéfice ou de diminution des coûts divers. Aussi certains projets fournissent une économie en partageant les ressources quand choisis ensemble. Le

problème est de choisir l'ensemble satisfaisant les contraintes et optimisant les objectifs parmi N projets de SI candidats.

Pour le problème décrit globalement ci-dessus, une nouvelle procédure de dm flou est proposée. Pour modéliser l'incertitude dans les données des projets comme le bénéfice, le point de risque, les coûts divers, les coûts de hardware et de logiciel individuel, l'augmentation du bénéfice ou la diminution des coûts divers synergique fournie quand ils sont choisis avec d'autres projets, les ressources partagés, la théorie des ensembles flous est utilisée. Cette théorie traite l'incertitude rigoureusement et d'une façon efficace. Dans la thèse les nombres flous trapézoïdaux sont utilisés. Les interactions sont représentés dans l'objectif et les contraintes avec des termes non linéaires et il n'y a pas de limite pour le nombre de projet en interaction. Au résumé dans la thèse, un nouveau modèle mathématique multicritère, non linéaire, flou contenant le problème avec tous ses détails est proposée.

Les programmes multicritères n'ont pas de solution optimale unique. Ils ont un ensemble de solutions non dominé. Le problème est de choisir la solution reflétant correctement les préférences du décideur. L'approche générale est de déterminer la fonction d'utilité du décideur ou d'exiger qu'il exprime les poids qu'il attache aux objectifs ou les niveaux de but numériquement pour les objectifs. En revanche ces méthodes causent des échecs parce que la détermination numérique d'utilité, des poids ou des niveaux d'objectifs est très encline à erreur. Dans cette thèse la méthode de programmation compromis exigeant seulement du décideur un ordre de priorité parmi les objectifs, un point idéal et pire pour chaque objectif est utilisée. Le décideur peut fournir ces données sans faute et facilement. Dans cette méthode, l'ensemble de projet le plus proche du point idéal dans l'espace des objectifs est trouvée par une fonction de distance. Aux applications de la programmation floue compromis dans d'autres problèmes, la sélection est faite parmi un petit nombre de choix. Dans le problème de sélection parmi les projets de SI, le nombre de choix, les ensembles de projets possibles à choisir, peut être des milliards si bien qu'une nouvelle méthode basée sur la programmation mathématique pour la programmation compromis est théoriquement développée et appliquée dans cette thèse.

La procédure proposée basée sur la programmation compromis nécessite la solution des programmes mathématiques ayant un seul objectif. Dans la littérature fondamentalement il y a deux approches de résolutions: l'une en utilisant le théorème de représentation, l'autre en utilisant les méthodes de classement. Dans la thèse la méthode choisie et développée basée sur le théorème de représentation est théoriquement présentée. La méthode de classement nommée distance marquée ayant des supériorités prouvées quand elle est comparée aux autres méthodes, récemment développée est ajoutée à la procédure de décision en indiquant rigoureusement les domaines et ses limites d'applications. En conclusion il est remarquée que la supériorité d'utiliser la méthode de classement nommée distance marquée c'est le fait d'être indépendant des suppositions du degré de possibilité et de l'attitude de risque du décideur. L'insuffisance de la méthode est qu'il peut choisir des ensembles de projet donnant des valeurs d'objectif loin de celles des ensembles de projets choisis par l'attitude pessimiste ou optimiste du théorème de représentation. C'est pourquoi l'ensemble de projet convenable à l'attitude de risque de la direction et aux besoins financiers de la compagnie doit être choisi en utilisant le théorème de représentation. Par contre la performance de sélection de la compagnie doit être évaluée en comparant les valeurs d'objectifs obtenues avec ce qui seraient données par l'ensemble de projet proposé par la méthode de classement nommée distance marquée. Une autre utilisation de la méthode de classement nommée distance marquée est dans l'évaluation de l'attitude de risque de la compagnie.

Pour la résolution des programmes non linéaires à variables entières étant un pas dans l'application de la procédure, une nouvelle méthode de transformation en forme linéaire efficace spécifique aux propriétés des programmes considérés nécessitant beaucoup moins de variables et de contraintes auxiliaires que les autres méthodes plus générales est développée et présentée à la forme d'une procédure pas à pas pour faciliter son application. La nouvelle méthode peut nécessiter 5 fois moins de variables et de contraintes auxiliaires que les autres méthodes plus générales. Si le nombre de projet, d'objectif et de contrainte augmente l'économie devient de plus en plus grande. Il faut aussi remarquer que le résultat obtenu avec la transformation en forme linéaire est l'optimum global du programme ce qui est une supériorité importante quand la méthode est comparée avec celles heuristiques.

Özet

Bilişim sistemi (BS) projesi seçimi aday projeler arasından işletmenin amaçlarını kaynak sınırlarını aşmadan en iyileyen proje kümesini seçmektir. Bu açıdan bakıldığında işletmeyi uzun vadeli bağımlılıklara sokabilecek önemli ve stratejik bir yatırım kararıdır. Geçmiş onyıllarda birçok araştırmacı BS projesi seçimi sorunsalının birçok yönünü incelemişlerdir. Sorunsal hâlen güncel bir araştırma konusudur; çünkü BS projesi seçim başarısızlıkları günümüzde de çok yaygın bir olaydır.

BS projesi seçim başarısızlıklarının en temel nedenlerinden ikisi proje verilerinin veya kullanıcı amaçlarının hatalı tahminidir. Buna karşılık literatürde BS proje seçim sorunsalına özel ve belirsizlikleri modellemek amacıyla geliştirilmiş bulanık küme kuramı kullanan bir karar verme prosedürü yoktur. Bu tezde temel amaç bulanık küme kuramı kullanarak proje verilerini ve kullanıcı amaçlarını daha gerçekçi ve etkin bir şekilde modelleyen bir karar verme prosedürü geliştirmektir.

Temel olarak bir proje seçim sorunsalında kârın en çoklanması, riskin ve bütçede öngörülme-yen giderlerin en azlanması gibi birbirleriyle kısıtlı kaynaklar için rekabet eden amaçlar bulunur. Bütçede öngörülme-yen giderleri, diğer giderler, ana donanım haricindeki gereçler, testler için gerekli bilgisayar süresi ve danışmanlık ücretleri gibi giderler oluşturur. Kısıtlı kaynaklar bilgisayar donanım ve yazılım bütçeleridir. Ayrıca bazı projelerin seçiminin zorunlu olması, bir projenin bir diğeri seçilmeden proje kümesine dahil edilememesi gibi mantıksal kısıtlar bulunur. Sorunsalı karmaşıklaştıran ve tahmin hatalarına yol açan önemli bir etken projeler arasındaki etkileşimlerdir. Bazı projeler birlikte seçildiklerinde proje amaçlarında sinerjik bir iyileşme sağlarlar. Bu iyileşme kâr artışı veya öngörüle-meyen gider azalması şeklindedir. Yine bazı projeler kaynakları ortak kullandıklarından birlikte seçildiklerinde kaynak tasarrufu sağlarlar. Sorunsal N aday BS projesi arasından kısıtları sağlayan ve amaçları en iyileyen kümeyi seçmektir.

Yukarıda ana hatlarıyla tarif edilen sorunsal için bu tezde yeni bir bulanık çok amaçlı karar verme prosedürü önerilmiştir. Tek başına seçildiğinde sağlanması beklenen kâr, proje kümesine eklediği risk skoru, bütçede öngörülmeyen giderleri, donanım ve yazılım masrafı, başka projelerle birlikte seçildiğinde sağladığı sinerjik kâr artışı veya bütçede öngörülmeyen gider azalması, paylaşılan kaynaklar gibi proje verilerindeki belirsizliği modellemek için bulanık küme kuramı kullanılmıştır. Bulanık küme kuramı belirsizliği matematiksel kesinlikle ve etkin şekilde ele alır. Tezde yamuk bulanık sayılar kullanılmıştır. Etkileşimler, kısıtlarda ve amaçlarda doğrusal olmayan terimlerle temsil edilmiştir ve etkileşen proje sayısı için bir sınır yoktur. Özetle tezde sorunsal tüm detaylarıyla kapsayan yeni bir bulanık, çok amaçlı, doğrusal olmayan tamsayılı matematik model geliştirilmiştir.

Bilindiği gibi çok amaçlı programların bir en uygun sonucu yoktur; bir etkin çözüm kümesi vardır. Sorun bu küme içinden kullanıcı tercihlerini en doğru yansıtan çözümü seçmektir. Genel yaklaşım kullanıcının yararlılık işlevini belirlemek veya kullanıcıdan birbirleriyle rekabet eden amaçlar için önem derecelerini veya hedef seviyelerini sayısal olarak ifade etmesini istemektir. Ancak bu yöntemler yararlılık işlevini, önem derecelerini veya hedef seviyelerini doğru belirlemenin hataya çok açık olması nedeniyle proje seçim başarısızlıklarına yol açmaktadırlar. Bu tezde karar vericiden yalnızca amaçlar arasında bir öncelik ilişkisi ve her amaç için bir ideal ve en kötü nokta isteyen bulanık ara çözüm programlaması yöntemi kullanılmıştır. Karar verici bu verileri hatasız şekilde kolaylıkla sağlayabilir. Bu yöntemde ideal noktaya amaç işlevleri uzayında en yakın proje kümesi bir uzaklık işlevi yardımıyla bulunur. Bulanık ara çözüm programlamasının başka sorunsallardaki uygulamalarında çok az sayıda alternatif arasından seçim yapılmıştır. Bir BS projesi seçim sorunsalında farklı alternatif sayısı milyarları bulabilir. Bu nedenle bulanık ara çözüm programlaması için yeni bir matematik program çözüm yöntemi bu tezde kuramsal olarak geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Yöntem karar vericinin öncelik ilişkilerini ve ağırlık vektörünün elemanlarının toplamının bire eşit olması koşulunu sağlayan ağırlık vektörlerinin Paelinck kuramının verdiği tepe noktalarının dışbükey alanı içinde olması gerekliliğinden yola çıkan bir önerme üzerine oturur. Önerme ve kanıtı tezde ayrıntılarıyla bulunmaktadır.

Önerilen bulanık ara çözüm programlamasına dayalı prosedür tek amaçlı bulanık matematik programların çözümünü gerektirir. Temel olarak literatürde iki çözüm yaklaşımı vardır: temsil kuramı kullanarak çözüm ve sıralama yöntemleriyle çözüm. Tezde bulanık küme kuramının temel kavramları anlatıldıktan ve literatürde bulunan temel bulanık programlama yöntemleri açıklandıktan sonra tercih edilerek geliştirilen temsil kuramını temel alan yöntem kuramsal olarak ortaya konmuştur. İşaretlenmiş uzaklık adlı yeni geliştirilmiş ve diğer yöntemlere göre kanıtlanmış üstünlükleri olan bir sıralama yöntemi de karar verme prosedürüne kullanım alan ve sınırları dikkatlice belirlenerek dahil edilmiştir. Sonuç olarak görülmüştür ki işaretlenmiş uzaklık sıralama yöntemini kullanmanın üstünlüğü karar vericinin olabirlik derecesi kabullerinden ve risk tutumundan bağımsız olunmasıdır. Yöntem akla yatkın şekilde bulanık programı temsil eden bulanık olmayan bir program verir. Tezde ele alınan kapsamlı örnek göstermiştir ki örnekte ele alınan üç öncelik ilişkisi için sıralama yönteminin seçtiği proje kümesi ideal noktadan uzaklığı, en olabir iyimser ve en olabir kötümser proje kümelerinin ideal noktadan uzaklıkları arasında bir değerdedir. Olabirlikleri oranında hiçbir proje kümesinin ideal noktadan uzaklığı ve kaynak kullanımları işaretlenmiş uzaklık sıralama yönteminin verdiği en uygun proje kümesininkilerden uzak değildir. İşaretlenmiş uzaklık sıralama yönteminin verdiği en uygun proje kümesi tüm sorunsalı bulanık anlamda en çok temsil eden çözümdür. Fark edilmelidir ki başka uygulamalarda bulanık verilerin yapısına göre, olabirlik dağılımlarının şekillerine bağlı olarak, işaretlenmiş uzaklık sıralama yöntemi ideal noktaya uzaklığı düşük olabirlik derecesinde iyimser veya kötümser en uygun proje kümelerinin ideal noktaya uzaklığına yakın bir en uygun proje kümesi verebilir. Yöntemin eksikliği, temsil kuramının kötümser ve iyimser karar verici tutumunun seçtiği proje kümelerinin verdiği amaç değerlerine uzak amaç değerleri veren proje kümeleri seçebilmesidir. Bu nedenle karar verici risk tutumuna ve işletmenin parasal ihtiyaçlarına uygun proje kümesini temsil kuramı kullanarak seçmelidir. Buna karşılık seçim yapıldıktan ve uygulama sonucunda belirsizlik ortadan kalktıktan sonra işletmenin seçim performansını işaretlenmiş uzaklık sıralama yönteminin önerdiği proje kümesinin verdiği amaç değerleri ile karşılaştırmalıdır. İşaretlenmiş uzaklık sıralama yönteminin bir diğer kullanımı işletmenin risk tutumunun değerlendirilmesidir. Varsayalım ki işletmenin risk tutumu analizciyi kötümser düşük olabirlik derecesi proje kümeleri seçmeye zorlasın. Bulanık veriler iyimser proje kümelerinin ideal noktaya çok yakın olduğu içerikteyse, o zaman

rakip işletmelerde düşünülduğünde ideal noktadan uzakta kalınması, bir başka deyişle daha az kâr elde edilmesi, daha fazla diğer gider ödenmesi veya daha riskli bir proje kümesi taşınması olabilirliğini somutlaştırmanın en anlamlı yolu işaretlenmiş uzaklık sıralama yöntemi sonucu kullanmak ve işletmenin risk tutumunun BS proje seçim sorunsalını bulanık anlamda en fazla temsil eden çözümden çok uzakta bir seçimin nedeni olduğunu matematiksel olarak göstermektir. Tüm tez boyunca standart bulanık aritmetik yerine sınırlandırılmış bulanık aritmetik kullanılmıştır. İki yöntem arasındaki en temel fark sınırlandırılmış bulanık aritmetikte bulanık sayılarla bir işlem yapılırken ifadede bulanık sayı birden çok yerde kullanılıyorsa, çözümleme ilkesi ile bulanık sayının bulunması sırasında bulanık sayının aynı derece olabilir sol ve sağ uçlarından yalnız birinin kullanılmasıdır. Standart bulanık aritmetik belirsizliği gereksizce arttırır. Tezde sınırlandırılmış bulanık aritmetiğin temelleri ve üstünlükleri detaylıca anlatılmıştır.

Yine prosedürün uygulanmasında bir adım olan tamsayılı doğrusal olmayan program çözümü için programların yapısına özgü daha genel yöntemlere göre çok daha az yardımcı değişken ve kısıt gerektiren yeni, etkin bir doğrusallaştırma yöntemi hem kuramsal olarak geliştirilmiş hem de uygulamasını kolaylaştırmak amacıyla adım adım bir prosedür halinde sunulmuştur. Önerilen yeni doğrusallaştırma prosedürü tezde ispatlanmış 4 kuram üzerine oturmaktadır. Birinci kuram bir kısıt denkleminde bulunan 0-1 tamsayılı değişkeniyle sürekli veya doğrusal kesikli değişkenin çarpımını etkin şekilde doğrusallaştırır. İkinci kuram bir kısıt denkleminde bulunan 0-1 tamsayılı iki değişkenle sürekli veya doğrusal kesikli değişkenin çarpımını etkin şekilde doğrusallaştırır. Üçüncü kuram hem kısıt denkleminde hem de amaç içinde bir çarpım teriminin parçası olarak veya tek başına bulunan 0-1 tamsayılı iki değişken çarpımını kısıttaki terimi doğrusallaştırmak için gerekli olanların dışında hiç yeni kısıt veya yardımcı değişken ekmeden doğrusallaştırır. Dördüncü kuram kısıtlarda veya amaç işlevinde ortak terimleriyle çarpanlara ayrıldığında doğrusal bir ifade vermeyen çarpım terimlerini etkin şekilde doğrusallaştırır. Yöntem diğer daha genel yöntemlere göre 5 kat daha az ek kısıt ve değişken gerektirebilmektedir. Proje ve amaç sayısı arttıkça tasarruf sayısı daha büyük olacaktır. Fark edilmelidir ki bir BS proje seçim sorunsalında aday proje sayısı 500 den, çoğu zaman da 200 den azdır. Dolayısıyla matematik programa hiç yeni 0-1 tamsayılı değişken eklemeyen geliştirilen yeni etkin doğrusallaştırma

yöntemi, günümüz teknolojisinin vasat bir bilgisayarıyla ve artık çok yaygın şekilde kullanılan bir doğrusal program çözücüsüyle prosedürün ilgili adımında ortaya çıkan matematik programı birkaç saniye işlem süresinde çözer. Yine fark edilmelidir ki doğrusallaştırma ile elde edilen sonuç matematik programın global en uygun sonucudur. Bu da bazı sezgisel temelli yöntemlere göre önemli bir üstünlüktür.

Önerilen yeni bulanık karar verme prosedürü ana hatlarıyla şu adımları içerir:

i. Önerilen yeni çok amaçlı modelin bulanık amaçları, kısıtları ve bulanık olmayan mantıksal kısıtları ile ilgili verileri toplama. ii. Her amaç için bulanık halde en kötü ve en iyi nokta verilerini ve amaçlar arasında bir öncelik ilişkisini elde etme. iii. İşletme yönetimi ek bilgi verebiliyorsa onu da verilere ekleme. iv. Uzaklık işlevinin denge parametresini belirleme. Denge parametresi arttıkça bazı amaçlarda ideal noktadan büyük sapma gösteren proje kümeleri daha fazla cezalandırılırlar. v. İdeal noktaya en yakın proje kümesini bulma. Bunun için tezde kanıtlandığı gibi üç tek amaçlı bulanık programı temsil kuramı ve işaretlenmiş uzaklık sıralama yöntemi kullanarak çözmeye. En uygun sonuç üç programın en az değerini verendir. Tüm bu adımlar kuramsal altyapıları ve ayrıntılarıyla tezde sunulmuştur.

Önerilen yeni bulanık çok amaçlı karar verme prosedürü gerçeği yansıtan kapsamlı bir örneğe uygulanarak ayrıntılarının anlaşılması sağlanmaya çalışılmıştır. Örnek geçmişte uygulanmış bir gerçek hayat sorunsalının verileri bulanık hâle getirilmiş şeklidir. Örnek iki farklı öncelik ilişkisi ve bir ek bilgi için bütün ayrıntılarıyla çözülmüş ve ortaya çıkan sonuçlar yorumlanmıştır. Örnek geliştirilen yeni bulanık karar verme prosedürünün kolay uygulanabilir olduğunun ve karar vericinin önceliklerine göre doğru seçimi etkinlikle yaptığının açık kanıtıdır. Geliştirilen doğrusallaştırma yönteminin örnekteki bir uygulaması eklerden birinde ayrıntılarıyla verilmiştir.

Bulanık olmayan veri durumu hali tezde geliştirilen modelin bir alt durumudur dolayısıyla geliştirilen yeni karar verme prosedürüyle çözülebilir. Tezde geliştirilen prosedür BS projesi seçim sorunsalının dışında bir çok benzer yöneylem araştırması sorunsalına küçük değişikliklerle uygulanabilir. Bunların başında araştırma ve geliştirme (Ar&Ge) projesi seçim sorunsalı gelmektedir. Tezde gelecekte prosedürün geliştirilmesine yönelik yapılabilecek çalışmalar da belirtilmiştir. Bazı Ar&Ge proje

seçim sorunsallarında aday projeler birçok işletme biriminde farklı zamanlarda işlem görürler. Toplam bitiş süresini enazlama amacı bir iş sıralama sorunsalının çözümünü gerektirir. Dolayısıyla gelecekte yapılacak bir çalışma bu amacı da prosedüre eklemek ve çözümü için uygun bir sezgisel yöntem geliştirmek üzerine olmalıdır.



1. Introduction

La sélection parmi des projets de SI est choisir l'ensemble des projets qui optimisent les objectifs de la compagnie et qui ne dépassent pas ses limites des ressources parmi les projets candidats. De ce point de vue, c'est une décision stratégique et importante d'investissement des ressources pouvant engager la compagnie à des dépendances à long terme. Pendant des décennies au passé récent, beaucoup de chercheurs ont étudié les différents aspects du sujet Schmidt et Freeland [1], Santhanam et Kyparisis [2], Badri et al. [3], Lee et Soung [4] et il est encore une domaine active de recherche; parce que les échecs des projets de SI sont encore des phénomènes communs Gibbs [5], Keil [6], Flowers [7], Glass [8, 9].

La sélection parmi des projets de SI est un problème de dm pour le quel plusieurs modèles et méthodes de solution ont été proposées par beaucoup d'auteurs. Mukherjee [10] a utilisé la programmation linéaire avec des variables entières étant en interaction avec le décideur. Lee et Guignard [11] ont proposé une méthode de solution avec les multiplicateurs de Lagrange. Santhanam et Kyparissis [2] ont développé un modèle multicritère non linéaire ayant des variables entières qui contient dans ses objectifs et ses contraintes des interactions jusqu'au degré trois. Après, Santhanam et Kyparissis ont développé un modèle avec un seul objectif contenant dans son objectif et ses contraintes des interactions parmi les projets de degré sans limite Santhanam et Kyparissis [12]. Badri et al. [3] ont fait avancer le modèle de Santhanam et Kyparissis [2] en augmentant le nombre d'objectif et de contrainte et en l'appliquant à un autre problème de la vie réelle. Klapka et Pinos [13] ont appliqué la fonction spéciale d'échelle présentée dans Stewart [14] optimisée avec la méthode de gradient efficace, basée sur le point de référence modifiée en la généralisant, à une version développée du modèle multicritère de Santhanam et Kyparissis [2]. Lee et Kim [15] ont appliqué la mra qu'ils utilisent comme un chemin d'obtenir une meilleure programmation de but reflétant les dépendances entre les projets et les objectifs. Lee et Soung [4] est une

version améliorée de Lee et Kim [15] contenant dans l'objectif et les contraintes de la programmation de but, des interactions non linéaires.

Bien que ces contributions précieuses aident les décideurs à choisir l'ensemble de projet optimum, elles ont toutes une insuffisance commune. Elles sont toutes basées sur des données brusques, pas floues. Comme il est montré dans Zhang et al. [16] avec des réseaux neuronaux, une mauvaise estimation des données des projets de SI et les objectifs de l'utilisateur sont deux des causes principales des échecs de sélection parmi des projets de SI. La théorie des ensembles flous fournit une méthode rigoureuse et efficace pour la modélisation de l'incertitude provenant des données des projets dans les objectifs et les contraintes. Coffin et Taylor [17] est l'application unique de la théorie des ensembles flous à la sélection parmi des projets de recherche & développement (R&D). Par contre au lieu de modéliser l'incertitude des données des projets, elle est utilisée comme une fonction d'utilité attribuant des points aux valeurs des objectifs d'un ensemble de projet. C'est pourquoi c'est une application faible.

Dans cette thèse, une nouvelle procédure de dm pour la sélection parmi des projets de SI basée sur la programmation floue compromis va être proposée. La technique de dm appelée la programmation compromis est l'idée de Zeleny [18]. Dans cette technique, le décideur ne donne pas une fonction d'utilité. Il définit un point idéal et un point pire dans l'espace des fonctions d'objectif et la distance du point idéal aux ensembles de projet candidats est calculée par une fonction de distance. Bardossy et Duckstein [19] ont étendu la fonction de distance de la façon que ses éléments soient flous et ont obtenu la méthode de la programmation floue compromis. Dans ces deux approches le décideur doit fournir un vecteur de poids brusque. Récemment, Merino et al. [20] ont unifié la méthode de la programmation floue compromis et l'ouvrage de Yakowitz et Lane [21] et ont obtenu une méthode de trouver un compromis flou où le décideur fournit une relation de priorité parmi les objectifs à la place d'un vecteur de poids. Il faut remarquer que le terme la programmation floue compromis utilisé par Bardossy et Duckstein [19] ou Merino et al. [20] ne veut pas dire trouver une solution unique au problème de dm flou; parce que comme il va être expliqué, en traitant une programmation mathématique floue, d'après l'attitude de risque ou le degré de possibilité que le décideur accepte, il existe des solutions optimales différentes. Dans

cette thèse, comme il l'est en Bardossy et Duckstein [19] ou Merino et al. [20], le terme la programmation floue compromis va être utilisé dans le sens du développement de la technique de dm appelée la programmation compromis, proposée par Zeleny [18] par l'intermédiaire de la logique floue. Au résumé, la programmation floue compromis est trouver l'ensemble de projet dont la distance du point idéal est minimum dans le cas où les données sont floues sans exiger une fonction d'utilité du décideur. Les distances au point idéal sont calculées à l'aide d'une fonction de distance.

Le modèle flou, contenant des interactions parmi ses projets dans la fonction d'objectif et les contraintes va donner des programmes non linéaires avec des variables entières. Ces programmes vont être résolus avec une nouvelle méthode de transformation en forme linéaire qui va être développée dans la thèse. Les techniques de transformation en forme linéaire visant une solution exacte remonte à Glover [22]. Pour les programmes ayant des contraintes linéaires et contenant des termes produits de deux ou trois variables entières et continues Oral et Kettani [23] ont présenté une méthode efficace de transformation en forme linéaire. Pour les programmes mathématiques formés par des variables entières et continues contenant dans l'objectif et les contraintes des termes produits des variables sans limite de nombre, Li [24] et Chang et Chang [25] ont développé une technique de transformation en forme linéaire plus générale. Pour une analyse plus détaillée des procédures de transformation en forme linéaire et leur performance comparative Chang et Chang [25] peut être consulté.

Les objectifs, contributions et l'organisation de la thèse sont:

a) Pour traiter d'une manière efficace l'incertitude inhérente au problème, développer un nouveau modèle multicritère flou de sélection parmi des projets de SI. Chapitre 2 établit les bases de la théorie des ensembles flous. Chapitre 3 explique la programmation linéaire floue. Chapitre 5 développe le modèle.

b) Développer une nouvelle procédure de décision qui trouve une solution compromis au nouveau modèle multicritère, ce qui veut dire qui choisit dans l'ensemble des solutions efficaces du modèle multicritère celle convenable. Pour réaliser cet objectif, la méthode de Merino et al. [20] va être développée et une approche de programmation mathématique va être proposée pour choisir l'ensemble de projet de SI optimum parmi

une grande quantité de projets. Il va être remarqué que la nouvelle procédure a des supériorités importantes quand elle est comparée avec les autres méthodes comme la programmation de but de Santhanam et Kyparisis [2], mra + la programmation de but de Lee et Kim [4, 15], la méthode de Mukherjee [10] étant en interaction avec le décideur, la méthode de Klapka et Pinos [13] nécessitant à chaque itération un dialogue avec le décideur, parce qu'elle modélise l'incertitude et à la place d'un vecteur de poids ou des niveaux de but, elle seulement exige un ordre de priorité parmi les objectifs du décideur qui peut toujours être obtenu correctement. Même mra + la programmation de but de Lee et Kim [4, 15], est enclin à erreur dans le sens de refléter correctement les préférences du décideur parmi les objectifs; parce que les éléments des matrices servant à trouver les poids utilisés dans la programmation de but sont obtenus par un nombre donné par le décideur quantifiant l'interaction parmi les objectifs ou l'effet des autres projets à la réalisation d'un objectif par un projet. Le chapitre 6 présente les détails de la nouvelle procédure de dm floue.

c) Résoudre les programmes non linéaires ayant des variables entières et des termes de produit de variables sans limite de nombre dans l'objectif et les contraintes que la procédure de décision nécessite à résoudre avec une nouvelle méthode de transformation en forme linéaire développée en tenant compte des propriétés du problème considéré qui ajoute beaucoup moins de variables et de contraintes auxiliaires que les autres méthodes plus générales. Jusqu'aujourd'hui, la seule méthode de solution spécifique aux problèmes non linéaires ayant des variables entières considérés a été proposée par Schmidt [26]. En revanche, la méthode de se ramifier et borner proposée par Schmidt [26] peut être problématique si le nombre de projet et d'interaction parmi eux augmente. Si le problème non linéaire ayant des variables entières est transformée en forme linéaire d'une façon efficace, il peut être facilement résolu par des logiciels développés afin de résoudre les programmes linéaires et actuellement utilisés extensivement, considérant le fait que dans le problème de sélection parmi les projets de SI le nombre de projet candidat est plus petit que 500. Dans Santhanam et Kyparisis [2] et Lee et Kim [4], les méthodes de Danzig [27], Watters [28] et Glover et Woolsey [29] qui ont perdu leurs efficacités sont utilisées. La nouvelle méthode de transformation en forme linéaire va être présentée au chapitre 4 avec ses bases théoriques et une procédure pas à pas pour une application efficace.

Pour mieux faire comprendre les détails, la nouvelle procédure floue de décision va être concrétisée en l'appliquant à un exemple numérique étendu au chapitre 7. Au dernier chapitre 8, les conclusions de la thèse et les nouveaux chemins de recherche qu'elle ouvre vont être indiqués.



2. Les fondamentaux de la théorie des ensembles flous

Dans ce chapitre les concepts fondamentaux de la théorie des ensembles flous sont resumés. Pour plus d'information sur la théorie Terano aa. [30], Klir et Yuan [31], Li et Yen [32] sont certaines des sources à consulter.

Définition 1. Soit R l'ensemble des nombres réels. La fonction $\mu : R \rightarrow [0,1]$ est donnée le sous indice \tilde{A} et \tilde{A} est appelé un ensemble flou de R . μ est appelée la fonction d'appartenance de \tilde{A} .

Définition 2. Pour l'ensemble flou $\tilde{A} = (a,b,c,d)$ si $a \leq b \leq c \leq d$, l'ensemble est défini sur R et la fonction d'appartenance est comme ci-dessous, cet ensemble flou est nommé un nombre flou trapézoïdal. Figure 2.1 montre le nombre flou trapézoïdal \tilde{A} .

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ R_{\tilde{A}}(x) = \frac{d-x}{d-c} & , c \leq x \leq d \\ 0 & , x < a \text{ ou } x > d \end{cases} \quad (2.1)$$

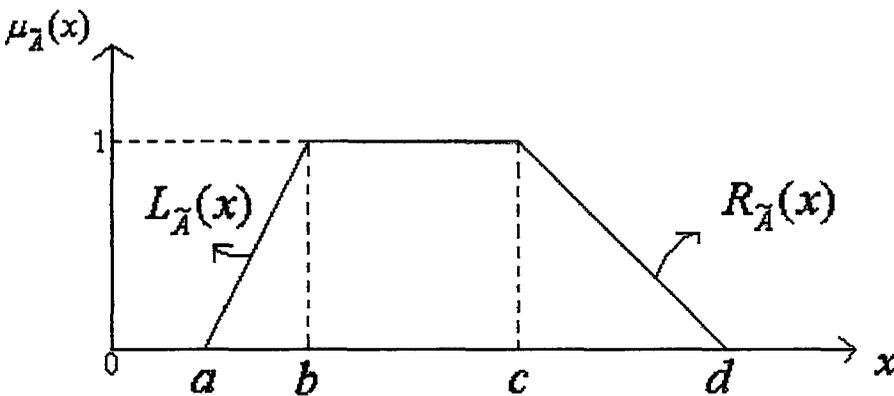


Figure 2.1. Le nombre flou trapézoïdal \tilde{A}

Dans la thèse le nombre flou trapézoïdal \tilde{A} va être désigné par l'ensemble ordonné de 6 éléments $(a, b, c, d, L_{\tilde{A}}(x), R_{\tilde{A}}(x))$.

Définition 3. Pour un ensemble flou \tilde{A} , l'ensemble $A_\alpha = \{x / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$ est appelé α – coupe de \tilde{A} .

Définition 4. $\forall \alpha \in [0,1]$ $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \supset A_{\alpha_2}$. Un ensemble ayant cette propriété est appelé un ensemble emboité. Le théorème de représentation dit qu'à chaque ensemble emboité correspond un ensemble flou Li et Yen [32].

Principe de décomposition. Si $\alpha\tilde{A}_\alpha$ est un ensemble flou ayant la fonction d'appartenance donnée ci-dessous:

$$\mu_{\alpha\tilde{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in A_\alpha \\ 0, & x \notin A_\alpha \end{cases} \quad (2.2)$$

alors $\tilde{A} = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha\tilde{A}_\alpha$ Terano et al. [30].

Ce la veut dire que pour $\forall \alpha \in [0,1]$ si les α – coupes de \tilde{A} sont sues, pour $\forall \alpha \in [0,1]$ les ensembles flous $\alpha\tilde{A}_\alpha$ peuvent être formés en utilisant (2.2) et la fonction d'appartenance de \tilde{A} peut être obtenue en unifiant les extrémités des fonctions d'appartenance de $\alpha\tilde{A}_\alpha$'s.

L'arithmétique standard avec des nombres flous trapézoïdaux. Soit \tilde{A} et \tilde{B} deux nombres flous trapézoïdaux. Les intervalles $[L_A^{-1}(\alpha), R_A^{-1}(\alpha)]$ et $[L_B^{-1}(\alpha), R_B^{-1}(\alpha)]$ sont les α – coupes de ces nombres pour $\forall \alpha \in [0,1]$. Soit k un constant brusque.

En utilisant le principe de décomposition

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \tilde{C} = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha \tilde{C}_\alpha \quad (2.3)$$

tel que

$$\mu_{\alpha \tilde{C}_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in C_\alpha = [L^{-1}_A(\alpha) + L^{-1}_B(\alpha), R^{-1}_A(\alpha) + R^{-1}_B(\alpha)] \\ 0, & x \notin C_\alpha \end{cases} \quad (2.4)$$

Similairement,

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \tilde{C} = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha \tilde{C}_\alpha \quad (2.5)$$

tel que

$$\mu_{\alpha \tilde{C}_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in C_\alpha = [L^{-1}_A(\alpha) - R^{-1}_B(\alpha), R^{-1}_A(\alpha) - L^{-1}_B(\alpha)] \\ 0, & x \notin C_\alpha \end{cases} \quad (2.6)$$

Aussi,

$$k \otimes \tilde{A} = \tilde{C} = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha C_\alpha \quad (2.7)$$

tel que

$$\mu_{\alpha \tilde{C}_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in C_\alpha = [k \cdot L^{-1}_A(\alpha), k \cdot R^{-1}_A(\alpha)] \\ 0, & x \notin C_\alpha \end{cases}, k \geq 0 \quad (2.8)$$

$$\mu_{\alpha\tilde{C}_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in C_\alpha = [k \cdot R^{-1}_A(\alpha), k \cdot L^{-1}_A(\alpha)] \\ 0, & x \notin C_\alpha \end{cases}, k < 0 \quad (2.9)$$

Arithmétique contrainte avec des nombres flous trapézoïdaux. L'arithmétique standard ne tient pas compte de la contrainte que dans une expression mathématique, si le nombre flou \tilde{A} est utilisé plusieurs fois, il doit être représenté par une seule des $L_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$ et $R_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$. Ce la veut dire que pour un degré de possibilité donné, \tilde{A} peut avoir un équivalent non-flou unique: $L_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$ ou $R_{\tilde{A}}^{-1}(\alpha)$. L'exemple classique indiquant cette situation est que d'après les règles de l'arithmétique standard:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{A} \neq 0 \quad (2.10)$$

L'arithmétique floue standard cause plus d'incertitude que nécessaire. Pour surmonter cette insuffisance, la méthode d'arithmétique floue contrainte a été développée. La plus grande différence entre l'arithmétique floue standard et l'arithmétique floue contrainte est que dans le dernier, en menant une opération arithmétique avec des nombres flous, si dans l'expression un nombre flou est utilisé plusieurs fois, en trouvant le nombre flou correspondant à l'expression avec le principe de décomposition, le même côté de α – coupe $L^{-1}(\alpha)$ ou $R^{-1}(\alpha)$ du nombre flou est utilisé. En utilisant l'arithmétique floue contrainte

$$\tilde{A} \ominus \tilde{A} = \tilde{C} = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} \alpha \tilde{C}_\alpha \quad (2.11)$$

tel que

$$\mu_{\alpha\tilde{C}_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in C_\alpha = [L^{-1}_A(\alpha) - L^{-1}_A(\alpha), R^{-1}_A(\alpha) - R^{-1}_A(\alpha)] = 0 \\ 0, & x \notin C_\alpha \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \tilde{A} \ominus \tilde{A} = \tilde{C} = 0$$

Dans la thèse pour ne pas augmenter inutilement l'incertitude, l'arithmétique floue contrainte va être utilisée. Information plus détaillée sur la méthode peut être trouvée dans Klir [33].



3. La programmation linéaire floue

Le problème de la programmation linéaire floue a été formulé des différents points de vue. Dans ce chapitre les principaux d'eux vont être présentés et la liaison de la méthode préférée et développée dans la thèse avec ces méthodes fondamentales va être établie.

3.1. La programmation linéaire floue proposée par Zimmermann [34]

Soit le programme linéaire ci-dessous:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= c^T x \\ \text{tel que} \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$c, x \in R^n, b \in R^m, A \in R^{m \times n}$

Si le décideur peut exprimer son degré de satisfaction pour les valeurs prises par l'objectif et les contraintes avec les nombres flous ci-dessous:

$$\text{Pour l'objectif } (d_1, d_1, d_1, d_1 + p_1) \tag{3.2}$$

$$\text{Pour les contraintes } (e_i, e_i + l_i, e_i + l_i, e_i + l_i) \quad \text{de } i = 1 \text{ à } m \tag{3.3}$$

Alors d'après la définition de décision de Bellman et Zadeh [35]

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_{\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m} (u_{\tilde{\sigma}}(x), u_{\tilde{\alpha}_1}(x), u_{\tilde{\alpha}_2}(x) \dots u_{\tilde{\alpha}_m}(x)) \tag{3.4}$$

Dans (3.4) $u_{\tilde{c}_0}$ désigne la fonction d'appartenance de l'objectif, $u_{\tilde{c}_1}, u_{\tilde{c}_2} \dots u_{\tilde{c}_m}$ désignent les fonctions d'appartenance des contraintes. Avec la supposition que le décideur veut maximizer son degré de satisfaction λ le vecteur x optimum est trouvé avec

$$\lambda = \max_x \min_{\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_m} (u_{\tilde{c}_0}(x), u_{\tilde{c}_1}(x), u_{\tilde{c}_2}(x) \dots u_{\tilde{c}_m}(x)) \quad (3.5)$$

la solution de (3.5) est donnée par le programme linéaire ci-dessous:

Max λ

tel que

$$p_1 \lambda + c^T x \leq d_1 + p_1 \quad (3.6)$$

$$-l_i \lambda + a_i x \geq e_i \quad i \text{ de } 1 \text{ à } m \quad (3.7)$$

$$\lambda, z \geq 0 \quad (3.8)$$

dans (3.7) a_i est le vecteur horizontal de la matrice A correspondant à la contrainte i . La méthode de Zimmermann [34] peut être facilement élargie de façon à contenir les modèles de la programmation linéaires multi-objectif flous. Si le décideur peut exprimer son degré de satisfaction avec des nombres flous comme dans (3.2) pour chaque valeur des objectifs, tout ce qu'il faut faire est dans le programme ci-dessus ajouter des contraintes similaires à (3.6).

3.2. La programmation linéaire floue en utilisant le théorème de représentation

Dans le modèle (3.1), les coefficients de l'objectif et des contraintes et des limites des ressources soient des nombres flous:

$$c^T = [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n] ; A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Dans ce modèle, les fonctions d'appartenance des nombres flous désignent les degrés de possibilité des coefficients. D'après la règle d'intersection de Bellman et Zadeh Zadeh [36]:

$$\alpha = \min_{k,i,j} (\mu_{\tilde{c}_k}, \mu_{\tilde{a}_{ij}}, \mu_{\tilde{b}_l}), \quad (3.10)$$

$$k, j = 1, 2, \dots, n, \quad i, l = 1, 2, \dots, m$$

Il peut être facilement prouvé que pour une valeur de α donnée, pour la solution optimisant (3.1) avec les coefficients flous dans (3.9)

$$\alpha = \mu_{\tilde{c}_k} = \mu_{\tilde{a}_{ij}} = \mu_{\tilde{b}_l}, \quad (3.11)$$

$$k, j = 1, 2, \dots, n, \quad i, l = 1, 2, \dots, m$$

Pour un degré α donné, les α -coupes des éléments flous des matrices dans (3.9) ont deux côtés non-flous $L^{-1}(\alpha)$, $R^{-1}(\alpha)$ possibles au même degré α . C'est pourquoi il correspond $2^{m \cdot n + m \cdot n}$ programmes linéaires non-flous à (3.1) donnant une solution possible au degré α . Herrera et Verdegay [37] suppose que la solution optimale est celle qui minimize tous ces programmes. Pour (3.1) Lee et Li [38] utilise le programme linéaire formé par les côtés des α -coupes minimisant l'objectif et les contraintes.

En réalité, le choix de côté de α – coupe dépend de l’attitude de risque du décideur. Dans cette thèse, pour l’attitude optimiste du décideur le program de Lee et Li [38], où les côtés des α – coupes minimisant l’objectif et les contraintes sont choisis, pour l’attitude pessimiste du décideur le programme formé par les côtés des α – coupes maximisant l’objectif et les contraintes vont être utilisés. Ces programmes déterminent les limites de la valeur de l’objectif. Les autres programmes qui sont possibles au même degré donnent une valeur d’objectif entre celles de ces deux programmes. Le décideur, en raison de ses expériences du passé, de l’information supplémentaire, d’une attitude de risque entre le pessimiste et l’optimiste ou d’autres causes, peut préférer un modèle formé par les autres côtés des α – coupes. La programmation linéaire floue en utilisant le théorème de représentation peut être appliquée aux modèles multicritères linéaires comme dans Lee et Li [38], Karsak et Kuzgunkaya [39] en définissant les degrés de possibilité et les degrés d’importance à la forme des ensembles flous avec le but de maximiser la satisfaction moyenne en gardant l’équilibre entre la possibilité et la satisfaction minimum. Dans cette thèse, une nouvelle procédure de décision, pouvant aussi donner au décideur des valeurs d’objectif plus basses au degré de possibilité plus bas ou des valeurs d’objectif plus hautes au degré de possibilité plus haut, brièvement, une procédure plus convenable à l’essence du théorème de représentation va être développée.

3.3. La programmation linéaire floue avec des méthodes de classement

Soit le programme linéaire de (3.1) avec la supposition que seulement les coefficients de l’objectif c^T sont flous:

$$c^T = [\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \dots \tilde{c}_n] \quad (3.12)$$

$$X_1^F = \{x / Ax \leq b \text{ et } x \geq 0\} \quad (3.13)$$

l’ensemble X_1^F est celui des solutions réalisables de (3.1).

$$O = \{c^T x / x \in X_1^F\} \quad (3.14)$$

l'ensemble O est celui des objectifs flous correspondant aux solutions réalisables de (3.1).

Définition 5. La fonction f dont l'ensemble de définition est formée par des nombres flous et dont l'image est un nombre réel est appelée une fonction de classement. Pour $\tilde{o}_i, \tilde{o}_j \in O$

$$\begin{aligned} f(\tilde{o}_i) > f(\tilde{o}_j) &\Rightarrow \tilde{o}_i > \tilde{o}_j \\ f(\tilde{o}_i) < f(\tilde{o}_j) &\Rightarrow \tilde{o}_i < \tilde{o}_j \\ f(\tilde{o}_i) = f(\tilde{o}_j) &\Rightarrow \tilde{o}_i = \tilde{o}_j \end{aligned} \quad (3.15)$$

Définition 6. Pour $\forall x \in X_1^F$ si $f(c^T x) \geq f(c^T x^*)$, $x^* \in X_1^F$ est la solution optimale de (3.1) Herrera et Verdegay [37].

En utilisant les définitions ci-dessus, l'objectif flou de (3.1) est projeté à l'ensemble des nombres réels et le programme linéaire non flou apparaissant est résolu.

Dans (3.1), les limites des ressources et les coefficients des contraintes soient des nombres flous.

$$X_2^F = \{x / f(\tilde{a}_i x) \leq f(\tilde{b}_i) \forall i \text{ et } x \geq 0\} \quad (3.16)$$

\tilde{a}_i et \tilde{b}_i sont respectivement les horizontales i des matrices de contraintes A et de limite de ressources b dans (3.9).

Définition 7. Pour $\forall x \in X_2^F$, $f(c^T x) \geq f(c^T x^*)$ $x^* \in X_2^F$ est la solution optimale de
(3.1)

En utilisant la définition ci-dessus, l'objectif, les contraintes et les limites de ressources floues sont projetés à l'ensemble des nombres réels et le programme linéaire non flou apparaissant est résolu.

Jusqu'aujourd'hui beaucoup de méthodes de classement sont proposées (Herrera et Verdegay [37]). Dans cette thèse, la méthode de classement nommée distance marquée de Yao et Wu [40] ayant des supériorités prouvées quand elle est comparée aux autres méthodes va être utilisée. Par contre, il faut se rendre compte que la domaine d'application de la programmation floue avec des méthodes de classement est limitée: la réduction de tout le nombre flou à un seul nombre réel est une simplification à l'extrême et peut causer des erreurs. Dans cette thèse, les supériorités, les domaines d'utilisation et les limites de la méthode de distance marquée vont être expliquées en détail.

3.4. La programmation linéaire floue proposée par Yu et Li [41]

Pour la forme du programme linéaire de (3.1) où les coefficients sont flous, Yu et Li [41] propose le modèle de la programmation de but ci-dessous:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n w_i^c \delta_i^c + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} w_{ij}^a \delta_{ij}^a + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i^b \delta_i^b \quad (3.17)$$

tel que

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ \mu_{\tilde{a}_{ij}}(a_{ij}) + \delta_{ij}^a &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \\ \mu_{\tilde{c}_i}(c_i) + \delta_i^c &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \mu_{\tilde{b}_i}(b_i) + \delta_i^b &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x, \delta_{ij}^a, \delta_i^c, \delta_i^b &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dans ce modèle, l'objectif est de minimiser la déviation du plus possible des sommes attachées des poids: w_i^c , $\lambda_{ij}w_{ij}^a$, $\beta_i w_i^b$ sont des constants déterminant les poids des déviations du plus possible des éléments flous des matrices c^T, A, b dans (3.9). Mais ce modèle de programmation de but peut choisir des valeurs de coefficient de degré de possibilité différente pour les contraintes et l'objectif flous. Par exemple, dans la fonction $\tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 \dots + \tilde{c}_n x_n$, une valeur non floue possible au degré 0.6 correspondante à \tilde{c}_1 et une valeur non floue possible au degré 0.4 correspondante à \tilde{c}_2 peuvent être obtenues. D'après la règle fondamentale de l'arithmétique floue, deux nombres flous ne peuvent pas être additionnés s'ils sont possibles aux degrés différents. Ce modèle n'est pas correct.



4. Une nouvelle procédure pour la solution d'un programme non linéaire ayant des variables binaires

Le nouveau modèle de sélection parmi des projets de SI quand il est rendu non-flou, va donner des programmes non linéaires binaires ayant dans son objectif et ses contraintes des termes de produits des variables sans limite de nombre. Dans ce chapitre une nouvelle méthode de transformation en forme linéaire spécifique aux propriétés du problème considéré exigeant beaucoup moins de variables et de contraintes auxiliaires que les autres méthodes de transformation en forme linéaire plus générales va être théoriquement développée et une procédure pas à pas va être proposée pour que la méthode soit appliquée d'une façon efficace.

4.1. Les bases théoriques

Dans ce sous chapitre les bases théoriques de la nouvelle méthode de transformation en forme linéaire spécifique aux propriétés du problème considéré vont être rigoureusement établies et il va être démontré qu'il exige beaucoup moins de variables et de contraintes auxiliaires que les autres méthodes de transformation en forme linéaire plus générales.

La méthode de transformation en forme linéaire proposée par Chang et Chang [25] étant la plus développée des méthodes générales et avec la quelle la nouvelle méthode proposée dans ce chapitre est comparée serait appliquée aux programmes mathématiques non linéaires considérés dans cette thèse comme expliquée ci-dessous:

Chang et Chang [25] ont démontré que si $c_i \geq 0$ est une constante, x_1, x_2, \dots, x_n sont des variables binaires, le terme de produit $c_i x_1 x_2 \dots x_n$ d'un objectif de minimisation peut être remplacé par une variable continue non négative z en ajoutant

la contrainte ci-dessous au programme mathématique:

$$z \geq c_i - c_i \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (4.1)$$

Si $c_i < 0$, le $c_i x_1 x_2 \cdots x_n$ d'un objectif de minimisation peut être remplacé par une variable continue sans signe imposé z en ajoutant les contraintes ci-dessous au programme mathématique:

$$\begin{aligned} z &\geq |c_i| \left(\sum_{i=1}^n x_i - n \right) + c_i \\ z &\geq -|c_i| x_1 \\ &\vdots \\ z &\geq -|c_i| x_n \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si $c_i x_1 x_2 \cdots x_n$ est dans les contraintes, indépendant du signe de c_i , il peut être remplacé par une variable continue sans signe imposé z en ajoutant les contraintes ci-dessous au programme mathématique:

$$|c_i| \left(\sum_{i=1}^n x_i - n \right) + c_i \leq z \leq |c_i| \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) + c_i \quad (4.3)$$

$$-|c_i| x_i \leq z \leq |c_i| x_i, \forall i \quad (4.4)$$

Tous les termes $(c_i x_1 x_2 \cdots x_n)_i$ du programme mathématique sont remplacés par z_i en ajoutant des contraintes en accord avec les règles expliquées ci-dessus et un programme mathématique linéaire équivalent donnant le même résultat optimal est obtenu.

Proposition 1. Dans une contrainte du programme mathématique formé par (4.5) et (4.6) en transformant en forme linéaire le produit $x_i y$ où $x_i \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est 0 ou 1, la variable y borné du dessus par D^+ et du dessous par D^- est discrète, égale à $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ou continue, si la méthode de Oral et Kettani [23] est étendue comme ci-dessous, elle exige une nouvelle variable non-négative et une contrainte linéaire auxiliaire. En revanche la méthode de Chang et Chang [25] (4.3), (4.4) exige une variable sans signe imposé et 4 contraintes linéaires auxiliaires.

$$\text{Min } g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.5)$$

tel que

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_i y \leq A \quad (4.6)$$

⋮

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$$

Dans (4.5) et (4.6), $g(\vec{x})$ et $k(\vec{x})$ sont formés par une combinaison des produits de x_i , $x_i \in (x_1, x_2, \dots, x_n)$, A est une constante. Si les contraintes (4.7) et (4.8) sont ajoutées à (4.6), $v + D^- x_i$ peut remplacer $x_i y$: il donne le même résultat optimal.

$$y + (D^+ - D^-) x_i - v \leq D^+ \quad (4.7)$$

$$v \geq 0 \quad (4.8)$$

La preuve de la proposition est dans l'appendice A.

Il est supposé que dans une contrainte l'expression suivante est présente:

$$\dots c_i x_1 x_2 + c_j x_1 x_3 + c_k x_1 x_4 \dots \leq A \quad (4.9)$$

Dans (4.9) c_i, c_j, c_k et A sont des constantes. Si la méthode de Chang et Chang [25] (4.3), (4.4) est utilisée, les 3 termes sont transformés en forme linéaire en ajoutant 3 variables sans signe imposé et 18 contraintes linéaires auxiliaires. En revanche, si l'expression est factorisée comme

$$x_1(c_i x_2 + c_j x_3 + c_k x_4) \quad (4.10)$$

et le résultat de la proposition 1 est utilisé, l'expression est transformée en forme linéaire avec une variable non négative et une contrainte auxiliaire: les 3 termes sont remplacés par $v + D^- x_1$ en ajoutant la contrainte ci-dessous:

$$c_i x_2 + c_j x_3 + c_k x_4 + (D^+ - D^-) x_1 - v \leq D^+ \quad (4.11)$$

$$v \geq 0 \quad (4.12)$$

Oral et Kettani [23] proposent la méthode suivante pour transformer en forme linéaire le produit $c_i x_i x_t f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ étant dans l'objectif:

Le terme $c_i x_i x_t f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où f est une fonction linéaire bornée du dessus par D^+ et du dessous par D^- peut être remplacé par un terme linéaire en ajoutant 2 variables non négatives et 2 contraintes linéaires auxiliaires de façon que le même résultat optimal soit

obtenu :

si $c_i > 0$

$c_i x_i x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est remplacé par $c_i D^- x_i + \varphi$ en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$c_i D^- x_i + c_i (D^+ - D^-) x_i + c_i v - \varphi \leq c_i D^+ \quad (4.13)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) + (D^+ - D^-) x_i - v \leq D^+ \quad (4.14)$$

$$\varphi, v \geq 0$$

si $c_i < 0$

$c_i x_i x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est remplacé par $c_i D^+ x_i + \varphi$ en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$c_i D^+ x_i + c_i (D^- - D^+) x_i - c_i v - \varphi \leq c_i D^- \quad (4.15)$$

$$-f(x_1, x_2, \dots, x_n) + (D^+ - D^-) x_i - v \leq -D^- \quad (4.16)$$

$$\varphi, v \geq 0$$

Proposition 2. Ce résultat est correct pour un terme $c_i x_i x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se trouvant dans une \leq contrainte.

La preuve de cette proposition est similaire à celle de la première et peut être facilement obtenue si la première preuve est suivie attentivement.

Il est supposé que dans une contrainte, l'expression ci-dessous est présente:

$$\dots c_i x_1 x_2 x_3 + c_j x_1 x_2 x_4 + c_k x_1 x_2 x_5 \dots \leq A \quad (4.17)$$

Dans (4.17) c_i, c_j, c_k et A sont des constantes. Si la méthode de Chang et Chang [25] (4.3), (4.4) est appliquée les 3 termes sont transformés en forme linéaire en ajoutant 3 variables sans signe imposé et 24 contraintes linéaires auxiliaires. Par contre si l'expression est factorisée comme

$$x_1 x_2 (c_i x_3 + c_j x_4 + c_k x_5) \quad (4.18)$$

et le résultat de la proposition 2 est utilisé l'expression peut être transformée en forme linéaire avec 2 variables non négatives et 2 contraintes auxiliaires: les trois termes sont remplacés par $D^- x_2 + \varphi$ en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$D^- x_1 + (D^+ - D^-) x_2 + v - \varphi \leq D^+ \quad (4.19)$$

$$c_i x_3 + c_j x_4 + c_k x_5 + (D^+ - D^-) x_1 - v \leq D^+ \quad (4.20)$$

$$\varphi, v \geq 0$$

Proposition 3. Pour les éléments de l'objectif et les contraintes dans (4.21) et (4.22)

$$\text{Min } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_t x_1 x_2 x_3 \dots x_n \quad (4.21)$$

tel que

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) + c_k x_1 x_2 \leq A \quad (4.22)$$

si les constantes c_t et c_k sont plus grandes que zéro $x_1 x_2$ peut être remplacé avec v , si les constantes c_t et c_k sont plus petites que zéro $x_1 x_2$ peut être remplacé avec $(x_1 - v)$ dans l'objectif et la contrainte. Ce la veut dire qu'il est possible de diminuer le terme de

produit de un degré dans l'objectif sans ajouter de variable et de contrainte auxiliaire aux contraintes (4.23) et (4.24) nécessaires à transformer en forme linéaire le terme de produit de deux variables dans la contrainte.

$$\begin{array}{ll}
 c_t \text{ et } c_k \text{ plus grand que } 0 & c_t \text{ et } c_k \text{ plus petit que } 0 \\
 x_1 + x_2 - v \leq 1 & x_1 - x_2 - v \leq 0 \quad (4.23)
 \end{array}$$

$$v \geq 0 \quad v \geq 0 \quad (4.24)$$

La preuve de la proposition est dans l'appendice A .

Proposition 4. Dans les contraintes ou l'objectif, indépendant de la direction d'optimisation et les signes de c_i , l'expression $\sum_i c_i (x_k x_l \dots x_p)_i$ est équivalente à l'expression $\sum_i c_i v_i$; l'expression linéaire $\sum_i c_i v_i$ peut être utilisée à la place de l'expression non linéaire $\sum_i c_i (x_k x_l \dots x_p)_i$ sans changer le résultat optimal à condition d'ajouter les contraintes (4.25), (4.26), (4.27), (4.28). Ici, c_i est une constante et $(x_k x_l \dots x_p)_i$ est un terme formé par le produit d'un sous ensemble quelconque des variables de décision binaires du programme mathématique. Le nombre de variable de décision binaire formant chaque $(x_k x_l \dots x_p)_i$ est montré par n_i . Les v_i 's sont des variables continues non négatives.

$$y_i - v_i \leq n_i - 1 \quad \forall i \quad (4.25)$$

$$n_{S_t} x_t \geq \sum_{i \in S_t} v_i \quad \text{pour } \forall x_t \text{ présent dans } \sum_i c_i (x_k x_l \dots x_p)_i \quad (4.26)$$

$x \geq v_i \quad \forall i$ pour au moins une variable binaire x formant $(x_k x_l \dots x_p)_i$ qui est remplacé par v_i (4.27)

$$v_i \geq 0 \quad (4.28)$$

Dans les inégalités (4.25)-(4.28) y_i est la somme des variables binaires formant $(x_k x_l \dots x_p)_i$. S_i est l'ensemble des $(x_k x_l \dots x_p)_i$'s contenant la variable x_i . n_{S_i} est la cardinalité de cet ensemble.

La preuve de la proposition est dans l'appendice A.

Ce résultat va être utilisé comme expliqué ci-dessous:

Il est supposé que dans l'objectif ou dans une \leq contrainte l'expression ci-dessous est présente:

$$\text{Min} \dots 2x_1 x_2 x_3 x_4 - 4x_1 x_2 x_3 x_5 - 6x_1 x_2 x_3 x_6 - 8x_1 x_2 x_3 x_7 \dots \quad (4.29)$$

l'application de la méthode de transformation en forme linéaire présentée dans Chang et Chang [25] (4.1), (4.2) nécessite 4 variables : 3 variables sans signe imposé, 1 variable non négative et 16 contraintes linéaires auxiliaires si l'expression est dans l'objectif. Si l'expression est dans une \leq contrainte elle nécessite l'addition de 4 variables sans signe imposé et 40 contraintes linéaires auxiliaires (4.3), (4.4). En revanche, l'expression peut être factorisée comme ci-dessous:

$$x_1 x_2 x_3 (2x_4 - 4x_5 - 6x_6 - 8x_7) \quad (4.30)$$

et en appliquant la proposition 4, $x_1 x_2 x_3$ peut être transformé en forme linéaire, si l'expression est dans l'objectif, la méthode proposée par Oral et Kettani [23] pour transformer en forme linéaire le produit de deux variables peut être utilisée.

Dans un objectif de minimisation, le terme xy où x est 0 ou 1, y est une fonction linéaire $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ borné du dessous par D^- et du dessus par D^+ , peut être remplacé par une variable continue v non négative en ajoutant la contrainte (4.31) au programme mathématique.

$$y + (D^+ - D^-)x - v \leq D^+ \quad (4.31)$$

Si l'expression est dans une \leq contrainte, le résultat de la proposition 1 peut être utilisé. Ainsi soit dans l'objectif ou dans la contrainte, la même expression peut être transformée en forme linéaire avec 2 variables non négatives et 5 contraintes linéaires auxiliaires. Cela est une amélioration importante. Dans un objectif de minimisation ou une \leq contrainte, si la fonction linéaire $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ dans la parenthèse est non négative pour chaque élément de son ensemble de définition, en appliquant le résultat de la proposition 4, les inégalités (4.26) et (4.27) peuvent être négligées. La preuve de cette proposition doit être très facile si les précédentes sont suivies attentivement et la logique derrière est comprise. Il faut remarquer que si la fonction linéaire $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ change de signe dans un objectif de minimisation, la méthode la plus efficace de transformation en forme linéaire de l'expression $x_1 x_2 \dots x_n f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ pour $n \geq 3$ est transformer en forme linéaire $x_1 x_2 \dots x_n$ en utilisant la proposition 4 et après appliquer la méthode proposée par Oral et Kettani [23] pour un produit de deux termes (4.31) à l'expression qui apparait. Si l'expression $x_1 x_2 \dots x_n f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ est dans une \leq contrainte, premièrement $x_1 x_2 \dots x_n$ est transformé en forme linéaire en utilisant le résultat de la proposition 4 et après le résultat de la proposition 1 est appliqué pour transformer en forme linéaire l'expression à deux termes qui apparait.

Quand le résultat de la proposition 4 est appliqué aux termes ayant des coefficients négatives et des variables communes qui ne donnent pas une expression linéaire s'ils sont factorisés par elles, il est aussi plus efficace que la méthode de transformation en forme linéaire de Chang et Chang [25]. Il est supposé que dans un

objectif de minimisation ou une \leq contrainte l'expression ci-dessous est présente:

$$-2x_1x_2x_3x_4 - 4x_1x_2x_5x_6 - 6x_1x_2x_7x_8 \quad (4.32)$$

Si le résultat de la proposition 4 est appliqué à l'expression ci-dessus, il nécessite l'addition de 3 variables non négatives continues et 11 contraintes auxiliaires. Si l'expression est dans l'objectif, la méthode de Chang et Chang [25] (4.2) nécessite 3 variables sans signe imposé et 15 contraintes auxiliaires. Si l'expression est dans une contrainte elle nécessite 3 variables sans signe imposé et 30 contraintes auxiliaires (4.3), (4.4).

Il faut remarquer que comme dans l'expression ci-dessus, si les termes de produit formant l'expression contiennent leurs propres variables comme x_3 du premier terme, x_5 du deuxième terme et x_7 du quatrième terme, les inégalités (4.27) de la proposition 4 deviennent redondantes parce qu'elles sont déjà contenues dans les inégalités (4.26).

Si la méthode de Chang et Chang [25] (4.2) est appliquée à un seul terme $c_i x_1 x_2 \dots x_n$ où $c_i < 0$ dans un objectif de minimisation, elle nécessite autant de contraintes auxiliaires que l'application de la proposition 4; mais la variable supplémentaire est sans signe imposé. La variable supplémentaire de la proposition 4 est non négative. C'est pour ça que en transformant en forme linéaire ces termes dans l'objectif, la proposition 4 va être utilisée. Il y a deux exceptions à cette règle: Les termes de produit de deux ou trois variables ayant des coefficients négatifs pour lesquels la méthode proposée dans Oral et Kettani [23] va être utilisée. Dans le cas de deux variables la méthode d'Oral et Kettani [23] économise deux contraintes. Dans le cas de trois variables, bien qu'elle nécessite 2 variables supplémentaires au lieu de 1 elle économise 2 contraintes. Si la méthode de Chang et Chang [25] (4.3), (4.4) est appliquée à un seul terme $c_i x_1 x_2 \dots x_n$ où $c_i < 0$ dans une \leq contrainte, elle nécessite $n+1$ contraintes de plus que l'application de la proposition 4, si elle est appliquée à un seul terme $c_i x_1 x_2 \dots x_n$ où $c_i > 0$ elle nécessite $2n+1$ contraintes de plus que

l'application de la proposition 4. La différence provient du fait qu'en appliquant le résultat de la proposition 4 à un seul terme

$c_i x_1 x_2 \dots x_n$ où $c_i > 0$ les inégalités (4.26) sont négligées. C'est pourquoi dans une \leq contrainte en transformant en forme linéaire ces termes aussi le résultat de la proposition 4 va être utilisé. Cette règle a deux exceptions aussi: Les termes de produit de deux ou trois variables avec $c_i < 0$ pour les quels les résultats des propositions 1 et 2 vont respectivement être utilisés. Le résultat de la proposition 1 exige deux contraintes de moins dans le cas de produit de deux variables que la proposition 4. Dans le cas de produit de trois variables le résultat de la proposition 2 exige une variable auxiliaire de plus que la proposition 4 mais il économise 2 contraintes.

Une autre utilisation peut être comme ci-dessous:

Il est supposé que l'objectif et une contrainte possède les termes ci-dessous:

$$\text{Min } g(x_1 x_2 \dots x_n) + c_t x_1 x_2 \dots x_m x_a x_b + c_p x_1 x_2 \dots x_m x_c x_d + c_l x_1 x_2 \dots x_m x_e x_f \quad (4.33)$$

tel que

$$k(x_1 x_2 \dots x_n) + c_k x_1 x_2 \dots x_m \leq A \quad (4.34)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$, les sous indices $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $2 \leq m < a, b, c, d, e, f \leq n$.

En transformant en forme linéaire le terme $c_k x_1 x_2 \dots x_m$ dans la contrainte utilisant la proposition 4 le degré des termes contenant les produits $x_1 x_2 \dots x_m$ dans l'objectif est diminué de $m - 1$ sans utiliser de variable ou de contrainte auxiliaire. Seulement dans le cas où $m = 2$ et les signes des coefficients c_t, c_p, c_l, c_k sont égaux il faut utiliser la proposition 3; car elle exige deux contraintes de moins que la proposition 4.

4.2. Une procédure pas à pas transformant en forme linéaire le modèle de la sélection parmi les projets de SI d'une façon efficace

Dans ce sous chapitre une procédure pas à pas transformant en forme linéaire le modèle de la sélection parmi les projets de SI va être proposée. Les bases théoriques, les détails d'application et les efficacités de ces pas sont expliqués au sous chapitre précédent.

Pas 1: Transformer en forme linéaire les contraintes premièrement. Transformer toutes les contraintes en \leq contraintes et pour les termes donnant l'expression $x_1 x_2 \cdots x_n f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ pour $n \geq 3$ quand ils sont factorisés, transformer en forme linéaire $x_1 x_2 \cdots x_n$ en utilisant le résultat de la proposition 4 et après appliquer le résultat de la proposition 1 au produit de deux variables apparaissant. Utiliser directement le résultat de la proposition 2 pour $n = 2$ et le résultat de la proposition 1 pour $n = 1$. Utiliser le résultat de la proposition 4 pour les termes ayant des variables communes et qui ne donnent pas une expression linéaire quand ils sont factorisés par eux. Pour les $c_i x_1 x_2 \cdots x_n$ termes qui restent appliquer le résultat de la proposition 4. Exceptionnellement dans le cas où $c_i < 0$, pour $n = 2$ ou $n = 3$ appliquer les résultats des propositions 1 ou 2 respectivement.

Pas 2: Dans un objectif et une contrainte ayant les termes (4.33) et (4.34) diminuer de $m - 1$ le degré des termes contenant le produit $x_1 x_2 \cdots x_m$ dans l'objectif sans ajouter de variables ou de contraintes à celles nécessaires à transformer en forme linéaire le terme $c_k x_1 x_2 \cdots x_m$ dans la contrainte avec la proposition 4. Exceptionnellement dans le cas où $m = 2$ et les signes des coefficients c_i, c_p, c_l, c_k sont égaux utiliser la proposition 3.

Pas 3: Continuer avec l'objectif. Pour les termes donnant l'expression $x_1 x_2 \cdots x_n f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ pour $n \geq 3$ quand ils sont factorisés, transformer en forme linéaire $x_1 x_2 \cdots x_n$ en utilisant le résultat de la proposition 4 et après appliquer le résultat de Oral et Kettani [23] pour un produit de deux variables (4.31) à l'expression à deux termes qui apparait. Pour $n = 2$, utiliser le résultat de Oral et Kettani [23] pour le

produit de trois variables (4.13)-(4.16) et pour $n = 1$ utiliser le résultat de Oral et Kettani [23] pour le produit de deux variables (4.31). Utiliser le résultat de la proposition 4 pour les termes ayant des variables communes et qui ne donnent pas une expression linéaire quand ils sont factorisés par eux. Pour les termes $c_i x_1 x_2 \dots x_n$ qui restent appliquer le résultat de la proposition 4. Exceptionnellement, dans le cas où $c_i < 0$, $n = 2$ ou $n = 3$, utiliser respectivement les résultats de Oral et Kettani [23] (4.31) ou (4.13)-(4.16).



5. Un nouveau modèle de dm floue pour la sélection parmi les projets de SI

Le cas non flou du problème est très général et très connu dans la littérature. N projets de SI se font compétition pour les budgets limités de hardware et de logiciel d'ordinateur. En dehors de budget, il y a aussi les contraintes de dépendance (le fait qu'un projet ne peut pas être choisi si le projet dont il dépend n'est pas choisi) et d'obligation (le fait qu'un projet doit être choisi). Ces deux dernières contraintes sont appelées les contraintes logiques. Les objectifs sont la maximisation du bénéfice, minimisation du risque et des coûts divers (les matériaux en dehors de hardware, la durée du temps de calcul pour les tests, des coûts de consultation etc). Puisqu'il n'y a pas de budget prédéterminé pour les coûts divers, ils ont été modélisés comme un objectif à minimiser comme dans Santhanam et Kyparisis [2]. Il est supposé que certains projets choisis ensemble peuvent créer un effet de synergie dans les objectifs et les contraintes. La synergie est utilisée dans le sens de l'amélioration des projets en dehors de leurs effets individuels dans les valeurs des objectifs et de l'économie dans les utilisations des ressources. Une autre supposition du modèle est que les données des projets comme le bénéfice, le point de risque, les coûts divers, l'utilisation du budget de hardware et du budget de logiciel sont connues sous la forme des nombres flous trapézoïdaux. Le problème est de choisir l'ensemble de projets optimisant les trois objectifs et satisfaisant les contraintes. Il faut remarquer que l'objectif et les contraintes du modèle proposé peut changer d'une administration à une autre mais le modèle peut être facilement modifié dans la direction des nécessités d'un contexte spécifique de décision.

Pour la sélection parmi des projets de SI le modèle flou ci-dessous est proposé:

Les variables de décision

$$x_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{si le projet } i \text{ choisi} \\ 0 & , \quad \text{si le projet } i \text{ n'est pas choisi} \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.1)$$

Les objectifs

Si l'objectif flou de bénéfice est indiqué par \tilde{O}_B , les objectifs flous de risque et de coûts divers sont indiqués par \tilde{O}_R et \tilde{O}_C respectivement,

$$\tilde{O}_B(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \tilde{b}_i x_i + \sum_{k=1}^{K_b} \tilde{b}_{s_{b_k}} \prod_{i \in s_{b_k}} x_i \quad (5.2)$$

$$\tilde{O}_R(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \tilde{r}_i x_i \quad (5.3)$$

$$\tilde{O}_C(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \tilde{c}_i x_i - \sum_{k=1}^{K_c} \tilde{c}_{s_{c_k}} \prod_{i \in s_{c_k}} x_i \quad (5.4)$$

dans les expressions ci-dessus $\tilde{b}_i, \tilde{r}_i, \tilde{c}_i$ montrent les valeurs floues individuelles de bénéfice, risque et de coûts divers du projet i respectivement. $s_{b_k}, k \in 1, 2, \dots, K_b$ et $s_{c_k}, k \in 1, 2, \dots, K_c$ sont les ensembles de sous indice $\in \{1, 2, \dots, N\}$ indiquant les projets qui fournissent l'augmentation synergique floue de bénéfice $\tilde{b}_{s_{b_k}}$ ou la diminution de coûts divers de $\tilde{c}_{s_{c_k}}$ quand ils sont choisis ensemble. Pour faciliter la compréhension de la notation l'exemple suivant peut être donné. Dans un problème avec 5 projets candidats il est suppose que les projets 1, 2, 4 et 3, 4 quand choisis ensemble, fournissent respectivement \tilde{a} et \tilde{b} unités d'augmentation de bénéfice floue. Aussi, les projets 1, 5 quand choisis ensemble économisent \tilde{d} unités de coûts divers. Alors, $K_b = 2, K_c = 1,$

$s_{b_1} = \{1, 2, 4\}, s_{b_2} = \{3, 4\}, s_{c_1} = \{1, 5\}$. Ainsi $\sum_{k=1}^{K_b} \tilde{b}_{s_{b_k}} \prod_{i \in s_{b_k}} x_i = \tilde{a} x_1 x_2 x_4 + \tilde{b} x_3 x_4$ et

$$- \sum_{k=1}^{K_c} \tilde{c}_{s_{c_k}} \prod_{i \in s_{c_k}} x_i = -\tilde{d} x_1 x_5.$$

Les contraintes

Les contraintes de ressources de hardware et de logiciel:

$$\sum_{i=1}^N \tilde{c}_i^H x_i - \sum_{k=1}^{K_c^H} \tilde{c}_{s_{c_k^H}}^H \prod_{i \in s_{c_k^H}} x_i \leq R^H \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \tilde{c}_i^S x_i - \sum_{k=1}^{K_c^S} \tilde{c}_{s_{c_k^S}}^S \prod_{i \in s_{c_k^S}} x_i \leq R^S \quad (5.6)$$

dans les expressions ci-dessus \tilde{c}_i^H et \tilde{c}_i^S montrent l'utilisation individuelle floue de ressource de hardware et de logiciel du projet i respectivement. $s_{c_k^H}, k \in 1, 2, \dots, K_c^H$ et $s_{c_k^S}, k \in 1, 2, \dots, K_c^S$ sont les ensembles de sous indice $\in \{1, 2, \dots, N\}$ des projets qui économisent de la ressource de hardware floue de $\tilde{c}_{s_{c_k^H}}^H$ et de la ressource de logiciel floue de $\tilde{c}_{s_{c_k^S}}^S$ en les partageant quand choisis ensembles. R^H et R^S sont les limites des budgets pour le hardware et le logiciel.

Les contraintes de dépendance:

$$\sum_{i \in A_j} x_i \leq |A_j| x_j, \quad \forall j \in A_I \quad (5.7)$$

dans l'expression ci-dessus $A_j \in \{1, 2, \dots, N\}$ est l'ensemble des projets dépendant de j , $|A_j|$ est le cardinalité de cet ensemble. $A_I \in \{1, 2, \dots, N\}$ est l'ensemble de sous indice des projets dont les autres dépendent.

Les contraintes des projets obligatoires:

$$x_i = 1, \quad \forall i \in A_M \quad (5.8)$$

dans l'expression ci-dessus $A_M \in \{1, 2, \dots, N\}$ est l'ensemble de sous indice indiquant les projets obligatoires.

Au résumé, le nouveau modèle flou de dm de la sélection parmi les projets de SI proposé dans cette thèse a trois objectifs flous (5.2), (5.3), (5.4) en compétition pour les ressources limitées et qui subissent les contraintes floues (5.5), (5.6) et les contraintes non floues logiques (5.7), (5.8). Les variables de décision prenant les valeurs de 0 ou 1 sont celles exprimées dans (5.1).



6. Une nouvelle procédure de dm floue pour la sélection parmi les projets de SI

Dans ce chapitre les théorèmes formant les bases de la nouvelle procédure de dm floue vont être présentés et la procédure va être exprimée pas à pas en détail pour une application efficace.

6.1. La programmation floue compromis avec des ordres de priorité parmi les objectifs

Il est supposé qu'un décideur a m objectifs flous $\tilde{v}_1(\bar{x}), \tilde{v}_2(\bar{x}), \dots, \tilde{v}_m(\bar{x})$ qu'il veut maximiser. En Bardossy et Duckstein [19] pour trouver la distance floue entre le point idéal $\vec{Z}^* = (\tilde{v}_1^*, \tilde{v}_2^*, \dots, \tilde{v}_m^*)$ et le point formé par les valeurs des objectifs d'un ensemble de projet $\bar{x}^* (\tilde{v}_1(\bar{x}^*), \tilde{v}_2(\bar{x}^*), \dots, \tilde{v}_m(\bar{x}^*))$ dans l'espace des objectifs la fonction de distance ci-dessous est proposée:

$$\left\{ w_1 \left(\frac{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_1(\bar{x})}{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_{1*}} \right)^p + w_2 \left(\frac{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_2(\bar{x})}{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_{2*}} \right)^p + \dots + w_m \left(\frac{\tilde{v}_m^* - \tilde{v}_m(\bar{x})}{\tilde{v}_m^* - \tilde{v}_{m*}} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (6.1)$$

dans cette expression les points $(\tilde{v}_1^*, \tilde{v}_2^*, \dots, \tilde{v}_m^*)$ et $(\tilde{v}_{1*}, \tilde{v}_{2*}, \dots, \tilde{v}_{m*})$ sont ceux qui sont formés par les valeurs des objectifs considérées comme idéales et pires par le décideur respectivement. w_1, w_2, \dots, w_m sont les poids attachés à chaque objectif (les coefficients d'importance relative) et ils satisfont l'égalité ci-dessous:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1 \quad (6.2)$$

Le paramètre p s'appelant le coefficient d'équilibre détermine la fonction de distance utilisée dans la calcul de la distance floue.

Merino et al. [20] considèrent le cas où le décideur fournit les relations ci-dessous à la place d'un ensemble de poids parfait

$$w_1 \geq c_2 w_2, \quad w_2 \geq c_3 w_3 \cdots w_{m-1} \geq c_m w_m \quad (6.3)$$

tel que $c_2, c_3, \dots, c_m \geq 1$

D'après la définition de Merino et al. [20] le cas où $c_2, c_3, \dots, c_m = 1$ s'appelle la relation de priorité parmi les objectifs les autres cas s'appellent l'information supplémentaire. Dans Merino et al. [20], l'approche d'énumération est utilisée pour un petit nombre de projet candidat. Les valeurs de distance floue au point idéal de toutes les solutions réalisables sont comparées en utilisant (6.1). En revanche, dans un problème de sélection parmi les projets de SI, une compagnie peut avoir 100 projets candidats et les 2^{100} différents choix correspondants ne peuvent pas être évalués avec l'approche d'énumération. Avant de présenter un modèle de programmation mathématique, le théorème de Paelinck va être brièvement répété.

Le théorème de Paelinck

D'après le théorème de Paelinck (Yakowitz et Lane [21], Claessens et al. [42]) les ensembles de vecteur \vec{w} satisfaisant (6.2) et (6.3) se trouvent dans la région convexe

formée par les sommets ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\
 \bar{w}_2 &= \left(\frac{c_2}{1+c_2}, \frac{1}{1+c_2}, 0, \dots, 0 \right) \\
 &\vdots \\
 \bar{w}_m &= \left(\frac{\prod_{i=1}^m c_i}{c_1}, \frac{\prod_{i=2}^m c_i}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_m} \right) \\
 &= \left(\frac{c_1}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{c_i} \prod_{n=i}^m c_n \right)}, \frac{c_2}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{c_i} \prod_{n=i}^m c_n \right)}, \dots, \frac{1}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{c_i} \prod_{n=i}^m c_n \right)} \right)
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Proposition 5.

L'ensemble de projet \bar{x}^* minimisant (6.1) et satisfaisant les contraintes (6.2), (6.3) est

$$\min_{\bar{x} \in X^F} (\min \tilde{O}_1(\bar{x}), \min \tilde{O}_2(\bar{x}), \dots, \min \tilde{O}_m(\bar{x})) \tag{6.5}$$

Ici X^F montre l'ensemble des \bar{x} 's réalisables satisfaisant les contraintes de (5.5) à (5.8) et $(\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \dots, \tilde{O}_m)$ sont comme ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 \tilde{O}_1 &= \left[\left(\frac{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_1(\bar{x})}{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_{1*}} \right)^P \right]^{\frac{1}{p}} \\
 \tilde{O}_2 &= \left[\left(\frac{c_2}{1+c_2} \right) \left(\frac{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_1(\bar{x})}{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_{1*}} \right)^P + \left(\frac{1}{1+c_2} \right) \left(\frac{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_2(\bar{x})}{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_{2*}} \right)^P \right]^{\frac{1}{p}} \\
 &\vdots \\
 &\tag{6.6}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{O}_m = \left[\left(\frac{\prod_{i=1}^m c_i}{c_1} \right) \left(\frac{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_1(\bar{x})}{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_{1*}} \right)^P + \left(\frac{\prod_{i=2}^m c_i}{c_2} \right) \left(\frac{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_2(\bar{x})}{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_{2*}} \right)^P + \dots + \left(\frac{1}{c_m} \right) \left(\frac{\tilde{v}_m^* - \tilde{v}_m(\bar{x})}{\tilde{v}_m^* - \tilde{v}_{m*}} \right)^P \right]^{\frac{1}{p}}$$

La preuve de la proposition est dans l'appendice A.

6.2. La procédure de décision

Pas 1: Rassembler les données relatives aux objectifs et aux contraintes floues, et aux contraintes logiques non floues du modèle de dm présenté au chapitre cinq.

Pas 2: Pour chaque objectif, obtenir les données du point idéal et pire sous la forme floue et un ordre de priorité parmi les objectifs. Si la direction de la compagnie peut fournir une information supplémentaire, ajouter ce la aux données. Quand (6.6) est observé il peut facilement être remarqué que pour les objectifs de la sélection parmi les projets de SI les valeurs d'objectif du point idéal ne doit être atteint par aucun ensemble de projet. Ce n'est pas juste de pénaliser une valeur de bénéfice donnée par un ensemble de projet réalisable parce qu'elle est plus grande que celle du point idéal. La même règle est valide pour les objectifs relatifs au risque et aux coûts divers du modèle. Les valeurs des objectifs du point pire non plus ne doivent être atteintes par aucun ensemble de projet pour réduire l'échelle des valeurs de distance données par (6.6) à un nombre entre 0 et 1.

Pas 3: Déterminer le coefficient d'équilibre p . Comme il est démontré dans Merino et al. [20] quand p augmente, les ensembles de projet ayant une grande déviation du point idéal dans certains objectifs sont pénalisés de plus en plus. Mais dans la plupart des cas la fonction de distance d'Euclide, $p = 2$, est un choix convenable. Remplacer les trois objectifs du modèle présenté au chapitre cinq, en compétition pour les ressources limitées par (6.6) et obtenir trois programme flous à variables binaires non linéaire ayant un seul objectif. Avant d'utiliser (6.6) les objectifs de minimisation comme le risque et les coûts divers doivent être transformés en des objectifs de maximisation utilisant le fait que $Min \bar{v}(\bar{x}) = Max - \bar{v}(\bar{x})$

Pas 4: Résoudre les trois programmes flous à variables binaires non linéaire obtenus ayant un seul objectif:

a) La résolution en utilisant le théorème de représentation. Pour l'attitude optimiste du décideur:

Pas 4.a.1: Obtenir la supposition du degré de possibilité α du décideur.

Pas 4.a.2: Obtenir les α – coupes des coefficients flous dans les contraintes. Pour les utilisations individuelles des ressources comme \tilde{c}_i^H , \tilde{c}_i^S prendre les valeurs les plus à gauche des coupes. Pour les coefficients montrant l'économie des ressources comme $\tilde{c}_{s_{ck}^H}^H$ et $\tilde{c}_{s_{ck}^S}^S$ prendre les valeurs les plus à droite des coupes.

Pas 4.a.3: Obtenir les α – coupes des coefficients flous dans les objectifs. Prendre les valeurs les plus à droite des coupes pour les coefficients des bénéfices individuels \tilde{b}_i . Pour les coefficients de risque et de coûts divers individuels \tilde{r}_i , \tilde{c}_i , prendre les valeurs les plus à gauche des coupes. Pour les coefficients de l'augmentation synergique du bénéfice et de la diminution des coûts divers \tilde{b}_{sbk} , \tilde{c}_{sck} prendre les valeurs les plus à droite des coupes.

Pas 4.a.4: Obtenir α – coupe du point idéal \tilde{v}_i^* et pire \tilde{v}_{i*} de chaque objectif. Dans le problème considéré $c > b$. Les valeurs prises par les objectifs sont plus grandes que

celles des points pires si bien que $\frac{\partial \frac{a-c}{a-b}}{\partial \alpha} > 0$. C'est pourquoi pour minimiser $\frac{\tilde{v}_i^* - \tilde{v}_i}{\tilde{v}_i^* - \tilde{v}_{i*}}$

en accord avec les principes de l'arithmétique contrainte prendre les valeurs des α coupes les plus à gauche de \tilde{v}_i^* et \tilde{v}_{i*} .

Pas 4.a.5: Former les programmes mathématiques non flous équivalents en utilisant les objectifs dans (6.6) et les contraintes données dans (5.5)–(5.8) avec les coefficients non flous obtenus dans les pas 4.a. Résoudre ces programmes avec la méthode développée au chapitre 4. La solution optimale est celle donnée par (6.5).

Il faut remarquer que ce qui est fait dans tous les pas de l'attitude optimiste du décideur est choisir les valeurs des α – coupes minimisant l'objectif donné dans (6.6). Dans le cas de l'attitude pessimiste du décideur, pour maximiser les objectifs donnés dans (6.6) il faut prendre les autres extrémités des α – coupes dans les pas 4.a.

b) La résolution avec la méthode de classement nommée distance marquée.

Pas 4.b.1: Projeter les objectifs donnés dans (6.6) et les contraintes données dans (5.5), (5.6) à l'ensemble des nombres réels avec l'opération de (6.7). Ici, $L^{-1}(\alpha)$ et $R^{-1}(\alpha)$

$$\int_0^1 \frac{(L^{-1}(\alpha) + R^{-1}(\alpha))}{2} d\alpha \quad (6.7)$$

sont les côtés de gauche et de droite des α – coupes de l'objectif (6.6) et les contraintes (5.5), (5.6) étant des nombres flous pour en ensemble de projet.

Pas 4.b.2: Former les programmes mathématiques non flous équivalents en ajoutant les contraintes (5.7), (5.8) aux objectifs et aux contraintes non floues obtenus dans le pas 4.b.1. Résoudre ces programmes avec la méthode développée au chapitre 4. La solution optimale est celle donnée par (6.5).

La supériorité d'utiliser la méthode de classement nommée distance marquée (signed distance) au pas 4 c'est le fait d'être indépendant des suppositions du degré de possibilité et de l'attitude de risque du décideur. La méthode donne un programme non flou représentant le programme flou d'une façon plausible. L'insuffisance de la méthode est qu'il peut choisir des ensembles de projet donnant des valeurs d'objectif loins de celles des ensembles de projets choisis par l'attitude pessimiste et optimiste du théorème de représentation. C'est pourquoi l'ensemble de projet convenable à l'attitude de risque de la direction et aux besoins financiers de la compagnie doit être choisi en utilisant le théorème de représentation au pas 4: 4.a.1-4.a.5. Par contre après avoir fait la sélection, à la fin de l'application après que l'incertitude disparaisse, la performance de sélection de la compagnie doit être évaluée en comparant les valeurs d'objectifs obtenues avec ce qui seraient données par l'ensemble de projet proposé par la méthode de classement nommée distance marquée. Une autre utilisation de la méthode de classement nommée distance marquée est dans l'évaluation de l'attitude de risque de la compagnie. Il est supposé que l'attitude de risque de la compagnie est pessimiste et oblige l'analyste à choisir des ensembles de projet de bas degré de possibilité. Si les données floues sont à la forme que les ensembles de projet optimistes sont très proches du point idéal, la façon la plus significative de concrétiser la possibilité de rester loin du point idéal, ce qui veut dire obtenir moins de bénéfice, payer plus des coûts divers ou avoir un ensemble de projet de haut risque quand les compagnies concurrentes sont considérées est d'utiliser le résultat de la méthode de classement nommée distance marquée et de montrer mathématiquement que l'attitude de risque de la compagnie est

la cause de la sélection très loin de la solution représentant le plus le problème de la sélection parmi les projets de SI au sens flou.



7. Un exemple de sélection parmi les projets de SI

Les données de l'exemple sont similaires à celle présentée dans Santhanam et Kyparisis [2, 12]. La différence fondamentale est que les données sont transformées en forme floue. Une compagnie considère 14 projets candidats. Au tableau 7.1 les bénéfices, les points de risque, les coûts divers, les coûts de hardware et de logiciel des projets sont donnés sous forme des nombres flous. La deuxième colonne du même tableau montre les relations de dépendance. Le tableau 7.2 contiennent les interactions des projets comme le bénéfice supplémentaire, les coûts de hardware et de logiciel partagés pour les groupes de projet donnés dans la première colonne. Le projet 1 est obligatoire. Les limites des budgets pour les coûts de hardware et de logiciel sont respectivement 20,000,000\$ et 5,000,000\$. Le tableau 7.3 présente les points idéals et pires du décideur sous forme des nombres flous trapézoïdaux pour chaque objectif. Pour le coefficient d'équilibre p deux est choisi.

Tableau 7.1. Les données des projets de SI (Toutes les valeurs de bénéfice et de coûts divers sont multipliées par cent milles dollars)

Projet	Dépend de	Bénéfice	Coût de hardware	Coût de logiciel	Coûts divers	Point de risque
1	-	(1 ⁹ ,14,18,20)	(130,150,170,180)	(26,30,35,40)	0	(4,4,5,5,5,6)
2	1	(3,4,4,5,6)	(2,5,4,6,7)	(8,10,12,15)	0	(3,3,5,4,5,5)
3	2	(1.75,1.9,2.2,2.5)	(2.5,3,4,5.5)	(3,3.5,4,4.5)	0	(2,2.5,3.5,4)
4	2	(1.75,1.9,2.2,2.5)	(2.5,4,6,7)	(3,4,6,8)	0	(2,2.5,3.5,4)
5	-	(18,24,28,32)	(15,20,30,40)	(20,25,30,40)	0	(2,2.5,3.5,4)
6	-	(6,7,8,8.5)	(5,8,12,14)	(6,8,12,15)	0	(2,2.5,3.5,4)
7	5	(0.06,0.1,0.12,0.14)	0	(0.15,0.25,0.3,0.35)	0	(0,0.5,1.5,2)
8	5	(0.06,0.1,0.12,0.14)	0	(0.15,0.25,0.3,0.35)	0	(0,0.5,1.5,2)
9	5	(0.02,0.03,0.04,0.05)	0	(0.05,0.06,0.08,0.1)	0	(0,0.5,1.5,2)
10	5	(0.12,0.16,0.2,0.22)	0	(0.25,0.4,0.5,0.55)	0	(0,0.5,1.5,2)
11	1	(250,350,450,500)	0	0	(70,90,110,140)	(1,1.5,2.5,3)
12	11	(8,10,14,18)	0	0	(1.5,2.5,3.5,4)	(0,0,0.5,1)
13	11	(20,25,35,40)	0	0	(5,6,9,12)	(0,0.5,1.5,2)
14	11	(40,60,100,110)	0	0	(12,15,25,30)	(0,0,0.5,1)

Tableau 7.2. Les interactions des projets de SI (Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

Les projets en interaction	Le bénéfice supplémentaire	Le coût de hardware économisé	Le coût de logiciel économisé
2,3	0	0	(120,150,160,180)
2,4	0	0	(175,200,250,300)
3,4	(40,80,90,110)	(150,250,300,350)	(140,180,200,220)
4,5	0	(250,300,400,500)	(150,175,225,275)
4,6	0	(100,200,300,350)	(100,150,200,225)
5,6	0	(100,200,300,350)	(75,100,150,200)
12,13,14	(2800,3200,3600,4200)	0	0
2,3,4,5,6	0	(100,200,300,350)	(80,100,150,175)
1,5,7,8,9,10	(800,1000,1400,1600)	0	0

Tableau 7.3. Les points idéals et pires pour les objectifs en compétition (Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

Les objectifs	Le point pire	Le point idéal
Bénéfice	(800,800,800,1000)	(80000,90000,90000,90000)
Risque	(50,60,60,60)	(3,3,3,4)
Coûts divers	(20000,25000,25000,25000)	0

A l'attitude pessimiste du décideur, la nouvelle procédure de dm floue développée au chapitre 6 donne les solutions compromises au tableau 7.4 pour trois ordres de priorité. Appendice B contient la solution de l'exemple en détail. Les programmes non linéaires obtenus ont été résolus avec la méthode développée au chapitre 4. Pour que les détails d'application de la méthode soient bien comprises la solution du programme non linéaire correspondant à l'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) et à l'attitude de risque pessimiste au degré de possibilité $\alpha = 0.25$ est présentée à l'appendice C.

Tableau 7.4. Les ordres de priorité et les solutions de compromis correspondantes

L'ordre de priorité	Solution compromis
(bénéfice \geq risque \geq coûts divers)	1,11,12,13,14
(bénéfice \geq coûts divers \geq risque)	1,11
(bénéfice \geq 2risque, risque \geq 3coûts divers)	1,6,11,12,13,14

8. Conclusion

Dans cette thèse une nouvelle procédure de dm floue pour la sélection parmi les projets de SI a été développée. Les contributions de la thèse sont les suivantes:

a) Un nouveau modèle de dm flou permettant à tout degré d'interaction dans les objectifs et les contraintes, traitant l'incertitude dans les données des projets a été proposé. Comme il est expliqué au chapitre 5 le nouveau modèle flou peut être facilement modifié de façon qu'il contienne les objectifs et les contraintes différents d'un autre contexte de décision.

b) Une nouvelle procédure de décision pour la sélection parmi les projets de SI basée sur la programmation floue compromis a été développée. Le décideur ne fournit pas un ensemble de poids special. Un simple ordre de priorité parmi les objectifs ou s'il peut être fourni, un ordre de priorité avec au moins un des coefficients plus grand que un, l'information supplémentaire, est suffisant. Cela est un avancement important quand il est comparé avec les approches développées avant, dépendantes des poids, du niveau de but ou du point du décideur présenté à l'introduction. Pour atteindre ce but, la méthode présentée dans Merino et al. [20] a été théoriquement développée et un nouveau programme mathématique a été proposé pour que la méthode de décision puisse faire la sélection parmi un grand nombre de projet candidat ce qui est le cas dans la sélection parmi les projets de SI. Au pas du procédure relatif à la résolution des programmes flous, deux méthodes ont été proposées: une basée sur le théorème de représentation, l'autre utilisant la méthode de classement nommée distance marquée et leurs domaines d'usage ont rigoureusement été spécifiées.

c) Pour la résolution du programme non linéaire à variables entières étant un pas dans l'application de la procédure une nouvelle méthode efficace de transformation en forme linéaire spécifique aux propriétés des programmes considérés nécessitant moins de variables et de contraintes auxiliaires que les autres méthodes plus générales a été théoriquement développée et pour faciliter son application elle est présentée sous forme d'une procédure pas à pas. Comme dans l'exemple de l'appendice C la méthode peut

nécessiter 5 fois moins de contraintes et de variables auxiliaires que la méthode de Chang et Chang [25]. Il est évident qu'avec l'augmentation du nombre de projet, d'objectif ou de contrainte la différence va devenir plus grand. Il faut remarquer que dans le problème de sélection parmi les projets de SI le nombre de projet candidat est moins de 500 et dans la plupart des cas moins de 200 si bien que la nouvelle méthode efficace de transformation en forme linéaire développée qui n'ajoute aucune variable binaire supplémentaire au programme mathématique peut résoudre le programme mathématique apparaissant aux pas 4.a.5 et 4.b.2 de la procédure en très peu de seconde de calcul avec des logiciels résolvant les programmes linéaires utilisés abondamment et avec un ordinateur moyen de la technologie actuelle. Il faut aussi remarquer que la solution obtenue avec la transformation en forme linéaire est la solution optimale globale du programme mathématique. C'est une supériorité importante quand la méthode est comparée avec les méthodes heuristiques.

. Le cas où les données sont non floues est contenu dans le modèle présenté dans cette thèse. C'est pourquoi il peut être résolu avec la procédure présentée. Aussi la nouvelle procédure de décision floue présentée dans la thèse peut être appliquée aux problèmes de sélection parmi les projets de R&D. Dans les recherches qui suivront cette thèse pour développer la procédure, un objectif flou relatif au temps doit être ajouté au modèle: minimiser la date finale de la terminaison de l'ensemble de projet. Par exemple comme dans le modèle proposé par Coffin et Taylor [17] dans le cas où les projets de R&D candidats sont traités dans de différents complexes industriels aux durées différentes, l'objectif de minimiser la date finale de la terminaison de l'ensemble de projet doit être ajouté au modèle. Puisque cet objectif nécessite la programmation de l'ordre, quand le nombre de projet augmente il devient obligatoire d'utiliser une méthode heuristique à la place d'une méthode donnant une solution exacte. La recherche au future doit être sur le développement d'une méthode heuristique convenable pour que la nouvelle procédure de dm floue développée dans cette thèse soit applicable aux problèmes de sélection parmi les projets de R&D ayant un objectif de la date finale de terminaison.

Bibliographie

- [1] Schmidt, R.J et Freeland, J.R. "Recent progress in modelling R&D project selection processes", *IEEE Transactions on Engineering Management*, 39,189-201, (1992).
- [2] Santhanam R., Kyparisis J, "A multiple criteria decision model for information system project selection", *Computers Ops. Res*, 22 (8), 807-818, (1995).
- [3] Badri M.A., Davis D., Davis D, "A comprehensive 0-1 goal programming model for project selection", *International Journal of Project Management*, 19, 243-252, (2001).
- [4] Lee J.W. Soung K.H, "An integrated approach for interdependent information system project selection", *International Journal of Project Management*, 19, 111-118, (2001).
- [5] Gibbs W.W., "Software's chronic crisis", *Scientific American*, 271 (3), 86-95, (1994).
- [6] Keil M., "Pulling the plug: Software project management and the problem of project escalation", *MIS quarterly*, 19 (4), 421-447, (1995).
- [7] Flowers S., "Software failure: management failure", John Wiley & Sons, Chicester, (1996).
- [8] Glass R.L., "Software runaways. Some surprising findings", *The Data Base for Advances in Information Systems*, 28 (3), 16-19, (1997).
- [9] Glass R.L., "Software runaways", Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, (1998).
- [10] Mukherjee K, "Application of an interactive method for MOILP in project selection", *International Journal of Production Economics*, 36, 203-211, (1994).
- [11] Lee H., Guignard M, "Project selection and project scheduling", *Journal of the Operational Society*, 46 (12), 1418-1432, (1995).
- [12] Santhanam R., Kyparisis J, "A decision model for interdependent information system project selection", *European Journal of Operational Research*, 89, 380-399, (1996).

- [13] Klapka J. Pinos P., "Decision support system for multicriterial R&D and information systems project selection", *European Journal of Operational Research*, 140, 434-446, (2002).
- [14] Stewart T.J., "A multi-criteria decision support system for research and development project selection", *Journal of the Operational Research Society*, 42 (1), 17-26, (1991).
- [15] Lee J.W., Kim S.H., "Using analytic network process and goal programming for interdependent information project selection", *Computers & Operations Research*, 27, 367-382, (2000).
- [16] Zhang G.P., Keil M., Rai A., Mann J., "Predicting information technology project escalation: A neural network approach", *European Journal of Operational Research*, 146, 115-129, (2003).
- [17] Coffin M. A., Taylor B., "Multiple criteria R&D Project selection and scheduling using fuzzy logic", *Computers Ops. Res.*, 23 (3), 207-220, (1996).
- [18] Zeleny M., "Compromise programming", dans J.L. Cochrane, M. Zeleny (Eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia, SC., 263-301, (1982).
- [19] Bardossy A., Duckstein L., "Analysis of a karstic aquifer management problem by fuzzy composite programming", *Water Resour. Bull.*, 28 (1), 63-73, (1992).
- [20] Merino G.G., Jones D.D., Clements D.L., Miller D., "Fuzzy compromise programming with precedence order in the criteria", *Applied Mathematics and Computation*, 134, 185-205, (2003).
- [21] Yakowitz D.S., Lane L.J., "Multi-attribute decision making: dominance with respect to an importance order of attributes", *Applied Mathematics and Computation*, 54, 167-181, (1993).
- [22] Glover F., "Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problems", *Management Science*, 22 (4), 455-460, (1975).
- [23] Oral M., Kettani O., "A linearization procedure for quadratic and cubic mixed integer problems", *Operations Research Society of America*, 40 (1), 109-116, (1992).
- [24] Li H.L., "Global optimization for mixed 0-1 programs with convex or separable continuous functions", *Journal of the Operational Research Society*, 45(9), 1068-1076, (1994).

- [25] Chang C.T., Chang C.C., "A linearization method for mixed 0-1 polynomial programs", *Computers & Operations Research*, 27, 1005-1016, (2000).
- [26] Schmidt R.L., "A model for R&D project selection with combined benefit, outcome and resource interactions", *IEEE Transactions on Engineering Management*, 40 (4), 403-410, (1993).
- [27] Dantzig G.B., "On integer and partial integer linear programming problems", Paper P-1410. The Rand Corporation June (1958).
- [28] Watters L.J. "Reduction of integer polynomial programming problems to zero-one linear programming problems", *Operations Research*, 15 : 1171-1174, (1967).
- [29] Glover F. Woolsey R.E., "Converting the 0-1 polynomial programming problem to a 0-1 linear problem", *Operations Research*, 22 (1), 180-182, (1974).
- [30] Terano T, Asai K et Sugeno M. "Fuzzy systems theory and its applications", traduit par Aschmann CG, III. Academic Press Inc. Harcourt Brace & Company, (1992).
- [31] Klir G.J. et Yuan B, "Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications", Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ, (1995).
- [32] Li H.X. et Yen V.C., "Fuzzy sets and fuzzy decision making", CRC Press, Inc: Boca Raton, Florida (1995).
- [33] Klir G.J. "The role of constrained fuzzy arithmetic in engineering", Uncertainty Analysis in Engineering and Sciences : fuzzy logic, statistics, and neural network approach, dans Ayyub B.M., (éditeurs), 1-19, M.M. Kluwer Academic Publishers, (1997).
- [34] Zimmermann H. J., "Fuzzy set theory and its applications", Kluwer Academic Publishers, (1991).
- [35] Bellman R, Zadeh L.A. "Decision making in a fuzzy environment", *Management Science*, 17 (4), 141-164, (1970).
- [36] Zadeh L.A. "PRUF-A Meaning representation language for natural languages", dans Mamdani et Gaines, 1-66, (1981).
- [37] Herrera F., Verdegay J.L, "Fuzzy boolean programming problems with fuzzy costs: a general study", *Fuzzy Sets and Systems*, 81, 57-76, (1996).
- [38] Lee E.S., Li R.J., "Fuzzy multiple objective programming and compromise programming with Pareto optimum", *Fuzzy Sets and Systems*, 53, 275-288, (1993).

- [39] Karsak E.E., Kuzgunkaya O, “A fuzzy multiple objective programming approach for the selection of a flexible manufacturing system”, *International Journal of Production Economics*, 79, 101-111, (2002).
- [40] Yao J-S, Wu K., “Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance”, *Fuzzy Sets and Systems*, 116, 275-288, (2000).
- [41] Yu C.S., Li H.L., “An algorithm for generalized fuzzy binary linear programming problems”, *European Journal of Operational Research*, 133, 496-511, (2001).
- [42] Claessens, MNAJ, Lootsma F.A., Vogt F.J. “An elementary proof of Paelinck’s theorem on the convex hull of ranked criterion weights”, *European Journal of Operational Research*, 52, 255-258, (1991).



Appendice A . Les preuves des propositions

La preuve de la proposition 1

Il faut remarquer que le programme mathématique défini par (4.5) et (4.6) a au moins un

résultat optimal $\vec{X}_{opt} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix}$ ayant une valeur d'objectif donné par (4.5) plus petite ou

égale que celles de tous les \vec{X} 's réalisables "L'ensemble des $x_1, x_2 \dots x_n$ réalisables a un nombre fini d'élément $\leq 2^n$. L'objectif (4.5) est formé des termes de produit de x_i . Il a une valeur réelle pour chaque $x_1, x_2 \dots x_n$. Au moins l'un des éléments du sous ensemble des $x_1, x_2 \dots x_n$ satisfaisant les contraintes a la valeur minimale". De plus, la variable v ajoutée n'est pas présente dans l'objectif si bien qu'elle ne change pas la valeur de l'objectif.

$$\text{Si } x_i^* = 0, \text{ de (4.7) } v + D^- x_i^* = v \geq y^* - D^+ \quad (\text{A.1})$$

$$\text{puisque } y^* - D^+ \leq 0, \text{ de (4.8) et (A.1) } v \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

Il est supposé qu'au programme défini par (4.5) et (4.6) pour \vec{X}_{opt} la contrainte (4.6) est égale à la valeur limite:

$$k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) + x_i^* y^* = A \quad (\text{A.3})$$

Au programme mathématique défini par (4.5) et (4.6) puisque le cas où $x_i^* = 0$ pour

\vec{X}_{opt} est considéré (A.3) est égale à l'expression ci dessous:

$$k(x^*_1, x^*_2 \cdots x^*_n) = A \quad (\text{A.4})$$

Avec la transformation en forme linéaire proposée pour x_i, y l'expression ci-dessous est obtenue pour \vec{X}_{opt} :

$$k(x^*_1, x^*_2 \cdots x^*_n) + v = A \quad (\text{A.5})$$

de (A.2) $v \geq 0$. De (A.4) et (A.5) $v = 0$.

Au programme mathématique défini par (4.5) et (4.6) pour \vec{X}_{opt} si la contrainte est moins que sa valeur limite:

$$k(x^*_1, x^*_2 \cdots x^*_n) + x^*_i y^* < A \quad (\text{A.6})$$

Au programme mathématique défini par (4.5) et (4.6) puisque le cas où $x^*_i = 0$ pour \vec{X}_{opt} est considéré (A.6) est égale à l'expression ci dessous:

$$k(x^*_1, x^*_2 \cdots x^*_n) < A \quad (\text{A.7})$$

Avec la transformation en forme linéaire proposée pour x_i, y l'expression ci-dessous est obtenue pour \vec{X}_{opt} :

$$k(x^*_1, x^*_2 \cdots x^*_n) + v < A \quad (\text{A.8})$$

de (A.2) $v \geq 0$. De (A.7) et (A.8) $0 \leq v < A - k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*)$, puisque v n'est pas dans l'objectif, sa valeur ne change pas $g(\bar{X}_{opt})$. La contrainte n'est pas égale non plus à sa valeur limite. \bar{X}_{opt} reste le même.

$$\text{Si } x_i^* = 1, \quad v + D^- x_i^* = v + D^-. \quad \text{De (4.7) } v \geq y^* - D^-. \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Puisque } y^* - D^- \geq 0, \text{ de (4.8) et (A.9) } v \geq y^* - D^-. \quad (\text{A.10})$$

Il est supposé qu'au programme défini par (4.5) et (4.6) pour \bar{X}_{opt} la contrainte (4.6) est égale à la valeur limite:

$$k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) + x_i^* y^* = A \quad (\text{A.11})$$

puisque le cas où $x_i^* = 1$ est considéré, pour le résultat du programme mathématique défini par (4.5) et (4.6), (A.11) devient égale à l'expression ci dessous:

$$k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) + y^* = A \quad (\text{A.12})$$

Avec la transformation en forme linéaire proposée pour x_i, y l'expression ci-dessous est obtenue pour \bar{X}_{opt} :

$$k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) + v + D^- = A \quad (\text{A.13})$$

de (A.10) $v \geq y^* - D^-$. De (A.12) et (A.13) $v + D^- = y^*$ est obtenu.

Au programme mathématique défini par (4.5) et (4.6) pour \bar{X}_{opt} si la contrainte est

moins que sa valeur limite:

$$k(x_1^*, x_2^* \cdots x_n^*) + x_i^* y^* < A \quad (\text{A.14})$$

puisque le cas où $x_i^* = 1$ est considéré, pour le résultat optimal du programme mathématique défini par (4.5) et (4.6), (A.14) devient égale à l'expression ci dessous:

$$k(x_1^*, x_2^* \cdots x_n^*) + y^* < A \quad (\text{A.15})$$

Avec la transformation en forme linéaire proposée pour $x_i y$ l'expression ci-dessous est obtenue pour \vec{X}_{opt} :

$$k(x_1^*, x_2^* \cdots x_n^*) + v + D^- < A \quad (\text{A.16})$$

de (A.10) $v \geq y^* - D^-$. De (A.15) et (A.16) $y^* \leq v + D^- < A - k(x_1^*, x_2^* \cdots x_n^*)$. Puisque v n'est pas présent dans l'objectif, sa valeur ne change pas $g(\vec{X}_{opt})$. La contrainte n'est pas égale non plus à sa valeur limite. \vec{X}_{opt} reste le même.

La preuve de la proposition 3

Pour le cas où c_i et c_k sont plus grands que zéro:

$$\text{de (4.23) } x_1^* = 0 \Rightarrow v \geq x_2^* - 1 \quad (\text{A.17})$$

puisque $x_2^* - 1 \leq 0$, de (4.24) et (A.17), $v \geq 0$. $c_i x_3^* \cdots x_n^* \geq 0$, l'objectif est minimisation $\Rightarrow v = 0$. Il faut remarquer que pour transformer en forme linéaire $x_1 x_2$ dans la contrainte d'après le résultat de la proposition 1 aussi les contraintes dans (4.23) et (4.24) sont ajoutées. D'après la preuve de la proposition 1 si la contrainte est à sa

valeur limite pour \vec{X}_{opt} du programme mathématique défini par (4.21) et (4.22) $v = 0$.

Si la contrainte est moins que sa valeur limite $0 \leq v < A - k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*)$. L'objectif est minimisation $\Rightarrow v = 0$ dans les contraintes aussi.

$$\text{De (4.23) } x_1^* = 1 \Rightarrow v \geq x_2^* \quad (\text{A.18})$$

puisque $x_2^* \geq 0$, de (4.24) et (A.18), $v \geq x_2^*$. $c_1 x_3^* \dots x_n^* \geq 0$, l'objectif est minimisation $\Rightarrow v = x_2^*$. D'après la preuve de la proposition 1 si la contrainte est à sa valeur limite pour \vec{X}_{opt} du programme mathématique défini par (4.21) et (4.22) $v + D^- = y^*$. Dans le cas considéré $D^- = 0 \Rightarrow v = y^* = x_2^*$. Si la contrainte est moins que sa valeur limite, $y^* \leq v + D^- < A - k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) \Rightarrow y^* \leq v < A - k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*)$ l'objectif est minimisation $\Rightarrow v = y^* = x_2^*$ dans la contrainte aussi. Ce la veut dire que \vec{X}_{opt} et $g(\vec{X}_{opt})$ ne changent pas. La preuve est terminée.

Pour le cas où c_t et c_k sont plus petits que zéro:

$$\text{de (4.23) } x_1^* = 0 \Rightarrow v \geq -x_2 \quad (\text{A.19})$$

puisque $-x_2 \leq 0$, de (4.24) et (A.19), $v \geq 0 \Rightarrow -v \leq 0$. $c_1 x_3^* \dots x_n^* \leq 0$, l'objectif est minimisation $\Rightarrow -v = 0$. Il faut remarquer que pour transformer en forme linéaire $-x_1 x_2$ dans la contrainte d'après le résultat de la proposition 1 aussi les contraintes dans (4.23) et (4.24) sont ajoutées. D'après la preuve de la proposition 1 si la contrainte est à sa valeur limite pour \vec{X}_{opt} du programme mathématique défini par (4.21) et (4.22) $v = 0$. Si la contrainte est moins que sa valeur limite, $0 \leq v < A - k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) \Rightarrow -A + k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) < -v \leq 0$, $c_1 x_3^* \dots x_n^* \leq 0$, l'objectif est minimisation $\Rightarrow -v = 0$ dans la contrainte aussi.

$$\text{De (4.23) } x_1^* = 1 \Rightarrow v \geq 1 - x_2^* \quad (\text{A.20})$$

puisque $1 - x_2^* \geq 0$, de (4.24) et (A.20), $v \geq 1 - x_2^* \Rightarrow -v \leq x_2^* - 1$. $c_i x_3^* \dots x_n^* \leq 0$, l'objectif est minimisation $\Rightarrow -v = x_2^* - 1 \Rightarrow x_1^* - v = 1 + x_2^* - 1 = x_2^*$. D'après la preuve de la proposition 1 pour \vec{X}_{opt} du programme mathématique défini par (4.21) et (4.22) si la contrainte est à sa valeur limite $v + D^- = y^*$. Dans le cas considéré $D^- = -1, y^* = -x_2^* \Rightarrow v - 1 = y^* = -x_2^* \Rightarrow x_1^* - v = 1 - (1 - x_2^*) = x_2^*$. Si la contrainte est moins que sa valeur limite,

$$y^* \leq v + D^- < A - k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) \Rightarrow -x_2^* \leq v - 1 \leq A - k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*) \Rightarrow$$

$$x_2^* \geq 1 - v > -A + k(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*), c_i x_3^* \dots x_n^* \leq 0, \text{ l'objectif est minimisation } \Rightarrow$$

$x_1^* - v = 1 - v = x_2^*$ dans la contrainte aussi. Ce la veut dire que \vec{X}_{opt} et $g(\vec{X}_{opt})$ ne changent pas. La preuve est terminée.

La preuve de la proposition 4

Si les variables binaires, $(x_k, x_l \dots x_p)_i$, formant $(x_k x_l \dots x_p)_i$ sont toutes égales à 1, les inégalités (4.26) deviennent redondantes. Des inégalités (4.25) $y_i = n_i \Rightarrow v_i \geq 1$ et des inégalités (4.27) $v_i \leq 1 \Rightarrow v_i = 1$.

Si au moins 1 des variables binaires, $(x_k, x_l \dots x_p)_i$, formant $(x_k x_l \dots x_p)_i$ est égale à 0, les inégalités (4.25) deviennent redondantes. Des inégalités (4.26) $v_i \leq 0$ et des inégalités (4.28) $v_i \geq 0 \Rightarrow v_i = 0$. La preuve est terminée.

La preuve de la proposition 5

Il faut remarquer que l'expression

$$w_1 \left(\frac{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_1(\vec{x})}{\tilde{v}_1^* - \tilde{v}_{1*}} \right)^P + w_2 \left(\frac{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_2(\vec{x})}{\tilde{v}_2^* - \tilde{v}_{2*}} \right)^P + \dots + w_m \left(\frac{\tilde{v}_m^* - \tilde{v}_m(\vec{x})}{\tilde{v}_m^* - \tilde{v}_{m*}} \right)^P \quad (\text{A.21})$$

est un nombre flou ayant des α – coupes correspondant à des nombres réels plus grand que zéro et la fonction $f(y) = y^{\frac{1}{p}}$ est croissante pour $y \geq 0$ et $p \geq 1$ si bien que le vecteur \bar{x} minimisant (A.21) minimise aussi (6.1). Pour un $\bar{x} = \bar{x}^*$ donné l'expression (A.21) est une fonction linéaire de $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$. Du théorème de Paelinck les poids \bar{w} satisfaisant (6.2) et (6.3) sont dans la région convexe des sommets donnés dans (6.4). Alors, les poids \bar{w}^* minimisant le programme linéaire formé par (A.21), (6.2) et (6.3) pour un \bar{x}^* donné $\in \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m\}$. C'est pourquoi pour $\bar{x} \in X^F$ la valeur minimale de (6.1) est

$$\min_{\bar{x} \in X^F} (\min \tilde{O}_1(\bar{x}), \min \tilde{O}_2(\bar{x}), \dots, \min \tilde{O}_m(\bar{x})) \quad (\text{A.22})$$

**Appendice B . La solution en détail de l'exemple de sélection parmi les projets
de SI**

Quand la nouvelle procédure de dm floue développée au chapitre 6 est appliquée et les programmes non linéaires obtenus sont résolus avec la méthode développée au chapitre 4, les résultats obtenus pour deux ordres de priorité différents (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) et (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) sont présentés aux Tableaux B.1-B.6 respectivement. Les Tableaux B.7-B.9 montrent les résultats correspondants à l'ordre de priorité (bénéfice \geq 2risque, risque \geq 3coûts divers): à l'information supplémentaire. Puisqu'il ya trois objectifs les solutions ont été obtenues avec les trois vecteurs de poids donnés par (6.6). Aux Tableaux B.1-B.9 seulement l'ensemble de projet optimal donné par (6.5), celui correspondant à un des vecteurs de poids, a été présenté.

Tableau B.1. Pour l'attitude pessimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux
(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

α	Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
0	1,11,12,13,14	35600	13.0	18600	0.46	18000	4000
0.25	1,11,12,13,14	38975	12.4	17638	0.43	17750	3875
0.5	1,11,12,13,14	42350	11.8	16675	0.40	17500	3750
0.75	1,11,12,13,14	45725	11.1	15713	0.37	17250	3625
1	1,11,12,13,14	49100	10.5	14750	0.34	17000	3500

Tableau B.2. Pour l'attitude optimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux

(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

α	Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
0	1,5,7,8,9,10,11,12,13,14	77855	7.0	8850	0.03	14500	4660
0.25	1,5,7,8,9,10,11,12,13,14	75778	8.0	9475	0.08	15125	4894
0.5	1,11,12,13,14	69150	5.8	10100	0.14	14000	2800
0.75	1,11,12,13,14	67225	6.1	10725	0.17	14500	2900
1	1,11,12,13,14	65300	6.5	11350	0.20	15000	3000

Tableau B.3. Pour l'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources des ensembles de projet optimaux données par la méthode de classement nommée distance marquée

(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
1,11,12,13,14	55750	8.8	13388	0.30	15750	3275

Tableau B.4. Pour l'attitude pessimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux

(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

α	Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
0	1	1000	6.0	0	0.58	18000	4000
0.25	1,11	28600	8.8	13250	0.54	17750	3875
0.5	1,11	31200	8.5	12500	0.50	17500	3750
0.75	1,11	33800	8.3	11750	0.47	17250	3625
1	1,11	36400	8.0	11000	0.43	17000	3500

Tableau B.5. Pour l'attitude optimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux

(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

α	Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
0	1,5,7,8,9,10,11,12,13,14	77855	7.0	8850	0.03	14500	4660
0.25	1,5,7,8,9,10,11,12,13,14	75778	8.0	9475	0.08	15125	4894
0.5	1,2,3,4,6,11,12,13,14	71070	15.8	10100	0.17	14925	4208
0.75	1,2,3,4,6,11,12,13,14	69075	16.6	10725	0.21	15613	4474
1	1,2,3,4,6,11,12,13,14	67080	17.5	11350	0.26	16300	4740

Tableau B.6. Pour l'ordre de priorité (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources des ensembles de projet optimaux données par la méthode de classement nommée distance marquée
(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
1,2,3,4,11,12,13,14	56685	18.8	13388	0.35	16838	4731

Tableau B.7. Pour l'attitude pessimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq 2risque, risque \geq 3coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux
(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

α	Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
0	1,11,12,13,14	35600	13.0	18600	0.51	18000	4000
0.25	1,11,12,13,14	38975	12.4	17638	0.48	17750	3875
0.5	1,11,12,13,14	42350	11.8	16675	0.45	17500	3750
0.75	1,11,12,13,14	45725	11.1	15713	0.41	17250	3625
1	1,11,12,13,14	49100	10.5	14750	0.38	17000	3500

Tableau B.8. Pour l'attitude optimiste de risque et d'ordre de priorité (bénéfice \geq 2risque, risque \geq 3coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources en fonction de α des ensembles de projet optimaux
(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

α	Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
0	1,5,7,8,9,10,11,12,13,14	77855	7.0	8850	0.03	14500	4660
0.25	1,5,7,8,9,10,11,12,13,14	75778	8.0	9475	0.08	15125	4894
0.5	1,6,11,12,13,14	69975	8.0	10100	0.15	14650	3500
0.75	1,6,11,12,13,14	68038	8.5	10725	0.19	15225	3650
1	1,6,11,12,13,14	66100	9.0	11350	0.23	15800	3800

Tableau B.9. Pour l'ordre de priorité (bénéfice \geq 2risque, risque \geq 3coûts divers) les valeurs d'objectif et les utilisations des ressources des ensembles de projet optimaux données par la méthode de classement nommée distance marquée
(Toutes les valeurs de bénéfice et des coûts divers sont multipliées par mille dollars)

Ensemble de projet optimal	Bénéfice	Risque	Coûts divers	Distance à l'ideal	Coût de hardware	Coût de logiciel
1,11,12,13,14	55750	8.8	13388	0.34	15750	3275

Les Tableaux B.1 et B.2 montrent que pour l'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) au cas pessimistique à tous degrés de α et au cas optimistique pour $0.5 \leq \alpha \leq 1$ l'ensemble de projet optimal $1, 11, 12, 13, 14$ est une solution compromis entre les objectifs de bénéfice et risque: la distance la plus proche du point idéal est celle donnée par les poids $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Au cas optimistique pour $\alpha = 0.25$ en raison de la diminution d'utilisation des ressources, un ensemble de projet plus grand et fournissant plus de bénéfice $1, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ devient la nouvelle solution compromis entre les objectifs de bénéfice et risque: la distance la plus proche au point idéal est encore celle donnée par les poids $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Au cas optimistique pour $\alpha = 0$ en raison de l'augmentation de bénéfice quand α descend de 0.25 à 0 l'ensemble de projet optimal $1, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ est obtenu seulement de l'objectif de bénéfice: la distance la plus proche du point idéal est celle donnée par les poids $(1, 0, 0)$.

Les Tableaux B.4 et B.5 montrent que au cas pessimistique pour l'ordre de priorité (bénéfice \geq coûts divers \geq risque) l'ensemble de projet optimal pour $\alpha = 0$ et pour les autres α 's $1, 11$, est une solution compromis parmi les trois objectifs: la distance la plus proche du point idéal est celle donnée par les poids $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Car au cas pessimistique les ressources ne sont pas suffisantes à choisir un ensemble de projet de haut bénéfice ou constituant une bonne solution compromis entre les objectifs de bénéfice et les coûts divers. Par contre, au cas optimistique, au résultat de la diminution des utilisations des ressources et de l'augmentation des bénéfices de larges ensembles de projet de haut bénéfice, pour $0.5 \leq \alpha \leq 1$ $1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 13, 14$ et pour $0 \leq \alpha \leq 0.25$ $1, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$, deviennent optimaux: la distance la plus proche du point idéal est celle donnée par les poids $(1, 0, 0)$. Il faut remarquer que même au cas optimistique la distance au point idéal de l'ensemble de projet optimal donné par les poids $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, la solution compromis entre les objectifs de bénéfice et les coûts divers, est plus loin de celle obtenue par les poids $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: la solution compromis entre les trois objectifs. Car les projets de haut bénéfice ont de hauts coûts divers. Il faut remarquer que comme

il était attendu à chaque degré α au cas optimistique et pessimistique d'attitude de risque les coûts divers de l'ensemble de projet optimal sont plus petits ou égaux que ceux de l'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers).

Les Tableaux B.7 et B.8 montrent qu'au cas pessimistique à chaque degré α avec l'information supplémentaire (bénéfice ≥ 2 risque, risque ≥ 3 coûts divers) fournie par le décideur, l'ensemble de projet optimal $1,11,12,13,14$ est une solution compromis entre les objectifs de bénéfice et risque donnée par les poids $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. Au cas optimistique pour $0.5 \leq \alpha \leq 1$ et $\alpha = 0.25$ avec la diminution des utilisations de ressource et l'augmentation des bénéfices, des ensembles de projet plus larges et fournissant plus de bénéfice $1,6,11,12,13,14$ et $1,5,7,8,9,10,11,12,13,14$ respectivement deviennent optimaux. Ces ensembles sont des solutions compromis entre les objectifs de bénéfice et de risque donnés encore par les poids $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. Pour $\alpha = 0$, en raison de l'augmentation des bénéfices quand α diminue de 0.25 à 0, l'ensemble de projet optimal $1,5,7,8,9,10,11,12,13,14$ est celui de l'objectif de bénéfice obtenu par les poids de $(1,0,0)$. Quand les résultats de l'ordre de priorité (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) et de l'information supplémentaire (bénéfice ≥ 2 risque, risque ≥ 3 coûts divers) sont comparés il est remarqué que l'information supplémentaire a eu deux effets: le premier, au cas optimistique pour $0.5 \leq \alpha \leq 1$ la sélection d'un ensemble de projet compromis fournissant plus de bénéfice mais ayant plus de risque comme optimal ce qui est un résultat attendu des poids de $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. La deuxième, avec l'information supplémentaire, le fait que les poids utilisés pour trouver une solution compromis entre les objectifs de bénéfice et risque et parmi tous les objectifs $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ et $(\frac{6}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10})$ respectivement donnent les mêmes ensembles de projet optimaux aux cas optimistique et pessimistique à chaque degré α parce qu'ils sont approximativement égaux.

Tableaux B.3, B.6, B.9 montrent qu'à tous les trois cas, l'ensemble de projet choisi par la méthode de classement nommée distance marquée donne une valeur de distance du point idéal entre celles des ensembles des projets du plus possible optimistique et du plus possible pessimistique. En proportion de leurs possibilités la distance du point

idéal et les utilisations de ressource d'aucun ensemble de projet n'est loin de ceux de l'ensemble de projet optimal donné par la méthode de classement nommée distance marquée. L'ensemble de projet optimal donné par la méthode de classement nommée distance marquée est la solution représentant le plus tout le problème au sens flou. Il faut remarquer que dans d'autres applications d'après les propriétés des données floues, d'après les formes des nombres flous, la méthode de classement nommée distance marquée peut donner un ensemble de projet optimal dont la distance au point idéal est proche de celles des ensembles de projet optimaux de bas degré de possibilité des cas optimistique ou pessimistique.



Appendice C . Exemple de transformation en forme linéaire

Pour l'ordre (bénéfice \geq risque \geq coûts divers) et pour $\alpha = 0.25$ au cas pessimistique l'ensemble de projet le plus proche du point idéal est une solution compromis entre les objectifs de bénéfice et de risque. L'objectif donnant cette solution est celle correspondante aux poids $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ de ce qui sont donnés à (6.6). Ce programme mathématique contiennent dans son objectif et ses contraintes les termes non linéaires ci-dessous:

Min

$$\begin{aligned}
 & \dots - 0.029649x_{12}x_{13}x_{14} - 0.009389x_1x_5x_7x_8x_9x_{10} + 0.004498x_1x_{10} + 0.010708x_1x_{11} + 0.002216x_1x_{12} \\
 & + 0.002722x_1x_{14} + 0.011734x_1x_2 + 0.009316x_1x_3 + 0.009316x_1x_4 + 0.009378x_1x_6 + 0.004497x_1x_7 \\
 & - 0.000567x_3x_4 + 0.004496x_1x_9 + 0.000402x_1x_{12}x_{13}x_{14} + 0.000118x_1x_5x_7x_8x_9x_{10} + 0.003974x_{11}x_{12} \\
 & + 0.016632x_{11}x_{14} + 0.005167x_3x_{11} + 0.005167x_4x_{11} + 0.006714x_6x_{11} + 0.002224x_7x_{11} + 0.002208x_9x_{11} \\
 & + 0.002245x_{10}x_{11} + 0.000671x_{10}x_{12} + 0.001438x_{10}x_{13} + 0.000677x_{10}x_{14} + 0.002966x_3x_{10} + 0.002966x_4x_{10} \\
 & + 0.002966x_6x_{10} + 0.001435x_7x_{10} + 0.001435x_9x_{10} + 0.000897x_{12}x_{13} + 0.000795x_{12}x_{14} + 0.001403x_3x_{12} \\
 & + 0.001403x_4x_{12} + 0.001451x_6x_{12} + 0.00067x_7x_{12} + 0.00067x_9x_{12} + 0.001875x_{13}x_{14} + 0.003013x_3x_{13} \\
 & + 0.003013x_4x_{13} + 0.003133x_6x_{13} + 0.001437x_7x_{13} + 0.001435x_9x_{13} + 0.001485x_3x_{14} + 0.001485x_4x_{14} \\
 & + 0.001738x_6x_{14} + 0.000674x_7x_{14} + 0.000671x_9x_{14} + 0.003731x_2x_{10} + 0.006847x_2x_{11} + 0.001776x_2x_{12} \\
 & + 0.001925x_2x_{14} + 0.007717x_2x_3 + 0.007717x_2x_4 + 0.007735x_2x_6 + 0.003731x_2x_7 + 0.003731x_2x_9 \\
 & + 0.006142x_3x_6 + 0.002965x_3x_7 + 0.002965x_3x_9 + 0.006142x_4x_6 + 0.002965x_4x_7 + 0.002965x_4x_9 \\
 & + 0.002968x_5x_{10} + 0.011309x_5x_{11} + 0.001593x_5x_{12} + 0.003488x_5x_{13} + 0.00249x_5x_{14} + 0.00779x_2x_5 \\
 & + 0.006172x_4x_5 + 0.006282x_5x_6 + 0.002966x_5x_9 + 0.002965x_6x_9 + 0.000005x_{10}x_{12}x_{13}x_{14} \\
 & + 0.000119x_2x_{12}x_{13}x_{14} + 0.000065x_3x_{12}x_{13}x_{14} + 0.000065x_4x_{12}x_{13}x_{14} + 0.000713x_5x_{12}x_{13}x_{14} \\
 & + 0.000001x_9x_{12}x_{13}x_{14} + 0.002948x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{11} + 0.000091x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{12} + 0.000003x_8x_{12}x_{13}x_{14} \\
 & + 0.000228x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{13} + 0.000482x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{14} + 0.000035x_1x_2x_5x_7x_8x_9x_{10} \\
 & + 0.000019x_1x_4x_5x_7x_8x_9x_{10} + 0.000067x_1x_5x_6x_7x_8x_9x_{10} + 0.000311x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{12}x_{13}x_{14} + 0.000007x_1x_3x_4 \\
 & + 0.000173x_3x_4x_{11} + 0.000013x_3x_4x_{13} + 0.000028x_3x_4x_{14} + 0.000002x_2x_3x_4 + 0.000002x_3x_4 + 0.000012x_3x_4x_5 \\
 & + 0.000004x_3x_4x_6 + 0.000018x_3x_4x_{12}x_{13}x_{14} + 0.000005x_1x_3x_4x_5x_7x_8x_9x_{10} + 0.002967x_5x_7 + 0.002966x_6x_7 \\
 & + 0.001435x_7x_9 + 0.001435x_8x_{10} + 0.002224x_8x_{11} + 0.00067x_8x_{12} + 0.001437x_8x_{13} + 0.000674x_8x_{14} \\
 & + 0.002965x_3x_8 + 0.002965x_4x_8 + 0.002967x_5x_8 + 0.002966x_6x_8 + 0.001435x_7x_8 + 0.001435x_8x_9 \\
 & + 0.000005x_3x_4x_{12} + 0.000003x_7x_{12}x_{13}x_{14} + 0.003731x_2x_8 + 0.000019x_1x_3x_5x_7x_8x_9x_{10} + 0.000173x_3x_4x_{11} \\
 & + 0.000229x_6x_{12}x_{13}x_{14} + 0.010057x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} + 0.006172x_3x_5 + 0.009562x_1x_5 + 0.006132x_3x_4 \\
 & + 0.003818x_2x_{13} + 0.009569x_{11}x_{13} + 0.00479x_1x_{13} + 0.004497x_1x_8
 \end{aligned}$$

(C.1)

tel que

La contrainte de budget de hardware doit être satisfaite:

$$\dots - 262.5x_4x_5 - 125x_4x_6 - 125x_5x_6 - 175x_3x_4 - 125x_2x_3x_4x_5x_6 \leq 20000 \quad (\text{C.2})$$

La contrainte de budget de logiciel doit être satisfaite:

$$\dots - 127.5x_2x_3 - 181.25x_2x_4 - 156.25x_4x_5 - 112.5x_4x_6 - 81.25x_5x_6 - 150x_3x_4 - 85x_2x_3x_4x_5x_6 \leq 5000 \quad (\text{C.3})$$

⋮

$$x_1, x_2 \dots x_{14} = 0 \text{ ou } 1$$

La procédure de transformation en forme linéaire du sous chapitre 4.2 est appliquée comme ci-dessous:

Pas 1 :

La transformation en forme linéaire commence par les termes de contrainte. Dans la contrainte de budget de hardware (C.2) le terme $-262.5x_4x_5 - 125x_4x_6$ est factorisé comme

$x_4(-262.5x_5 - 125x_6)$ et en utilisant le résultat de la proposition 1 il est remplacé par le terme linéaire $1.0v_1 - 387.5x_4$ en ajoutant la contrainte ci-dessous au programme:

$$-125x_6 - 262.5x_5 + 387.5x_4 - v_1 \leq 0 \quad (\text{C.4})$$

De la même façon dans la contrainte de budget de hardware $-125x_5x_6$ est remplacé par $+1.0v_2 - 125x_5$, dans la contrainte de budget de logiciel $-127.5x_2x_3 - 181.25x_2x_4$ est remplacé par $+1.0v_3 - 308.75x_2$, $-112.5x_4x_6 - 156.25x_4x_5$ est remplacé par $+1.0v_4 - 268.75x_4$, $-81.25x_5x_6$ est remplacé par $+1.0v_5 - 81.25x_5$ en ajoutant les contraintes

ci-dessous respectivement:

$$-125x_6 + 125x_5 - v_2 \leq 0 \quad (\text{C.5})$$

$$-127.5x_3 - 181.25x_4 + 308.75x_2 - v_3 \leq 0 \quad (\text{C.6})$$

$$-112.5x_6 - 156.25x_5 + 268.75x_4 - v_4 \leq 0 \quad (\text{C.7})$$

$$-81.25x_6 + 81.25x_5 - v_5 \leq 0 \quad (\text{C.8})$$

Dans les contraintes de budget de hardware et de logiciel, d'après le résultat de la proposition 4, les termes $-125x_2x_3x_4x_5x_6$ et $-85x_2x_3x_4x_5x_6$ sont remplacés par $-125y_4$ et $-85y_4$ respectivement en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - y_4 \leq 4 \quad (\text{C.9})$$

$$y_4 - x_2 \leq 0 \quad (\text{C.10})$$

$$y_4 - x_3 \leq 0 \quad (\text{C.11})$$

$$y_4 - x_4 \leq 0 \quad (\text{C.12})$$

$$y_4 - x_5 \leq 0 \quad (\text{C.13})$$

$$y_4 - x_6 \leq 0 \quad (\text{C.14})$$

Pas 2:

Le terme x_3x_4 est présent dans les deux contraintes, dans les produits de l'objectif et dans l'objectif individuellement. Dans l'objectif il y a des termes de produit pour les quels les signes sont différents de ceux des termes de contraintes contenant tous x_3x_4 si bien que x_3x_4 est transformé en forme linéaire en utilisant la proposition 4 dans la contrainte: il est remplacé par y_3 en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$x_3 + x_4 - y_3 \leq 1 \quad (C.15)$$

$$y_3 - x_3 \leq 0 \quad (C.16)$$

$$y_3 - x_4 \leq 0 \quad (C.17)$$

Ainsi, le terme x_3x_4 dans l'objectif est transformé en forme linéaire et les termes de produit contenant x_3x_4 sont diminués de un degré sans ajouter de variables et de contraintes auxiliaires.

Pas 3:

Il est continué avec l'objectif. Dans l'objectif, pour l'expression ci-dessous donnant une expression linéaire quand elle est factorisée par $x_{12}x_{13}x_{14}$, la proposition 4 est utilisée et

$$\begin{aligned} &+0.000005x_{10}x_{12}x_{13}x_{14}+0.010057x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}+0.000119x_{2}x_{12}x_{13}x_{14}+0.000065x_{3}x_{12}x_{13}x_{14} \\ &+0.000713x_{5}x_{12}x_{13}x_{14}+0.000229x_{6}x_{12}x_{13}x_{14}+0.000003x_{7}x_{12}x_{13}x_{14}+0.000003x_{8}x_{12}x_{13}x_{14} \\ &+0.000001x_{9}x_{12}x_{13}x_{14} +0.000065x_{4}x_{12}x_{13}x_{14} \end{aligned} \quad (C.18)$$

$x_{12}x_{13}x_{14}$ est remplacé par y_1 en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} - y_1 \leq 2 \quad (\text{C.19})$$

$$y_1 - x_{12} \leq 0 \quad (\text{C.20})$$

$$y_1 - x_{13} \leq 0 \quad (\text{C.21})$$

$$y_1 - x_{14} \leq 0 \quad (\text{C.22})$$

quand l'expression qui apparait est factorisée par y_1 :

$$y_1(0.000005x_{10}+0.010057x_{11}+0.000119x_2+0.000065x_3+0.000065x_4+0.000713x_5+0.000229x_6+0.000003x_7+0.000003x_8+0.000001x_9) \quad (\text{C.23})$$

l'expression à deux termes ci-dessus est obtenue. En utilisant le résultat de Oral et Kettani [23] (4.31) cette expression est remplacée par $+1.0v_{17}$ en ajoutant la contrainte ci-dessous:

$$0.000005x_{10}+0.010057x_{11}+0.000119x_2+0.000065x_3+0.000065x_4 + 0.000713x_5 + 0.000229x_6+0.000003x_7+0.000003x_8+0.000001x_9+0.016106y_1-v_{17} \leq 0.016106 \quad (\text{C.24})$$

De la même façon, dans l'objectif pour l'expression ci-dessous donnant une expression linéaire quand elle est factorisée par $x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}$, la proposition 4 est utilisée et

$$+0.002948x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{11}+0.000091x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{12}+0.000228x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{13}+0.000035x_1x_2x_5x_7x_8x_9x_{10}+0.000019x_1x_3x_5x_7x_8x_9x_{10}+0.000019x_1x_4x_5x_7x_8x_9x_{10}+0.000311x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}y_1+0.000482x_1x_5x_7x_8x_9x_{10}x_{14}+0.000067x_1x_5x_6x_7x_8x_9x_{10} \quad (\text{C.25})$$

$x_1 x_5 x_7 x_8 x_9 x_{10}$ est remplacé par y_2 en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$x_1 + x_5 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} - y_2 \leq 5 \quad (\text{C.26})$$

$$y_2 - x_1 \leq 0 \quad (\text{C.27})$$

$$y_2 - x_5 \leq 0 \quad (\text{C.28})$$

$$y_2 - x_7 \leq 0 \quad (\text{C.29})$$

$$y_2 - x_8 \leq 0 \quad (\text{C.30})$$

$$y_2 - x_9 \leq 0 \quad (\text{C.31})$$

$$y_2 - x_{10} \leq 0 \quad (\text{C.32})$$

Quand l'expression qui apparait est factorisée par y_2 :

$$y_2(0.002948x_{11}+0.000091x_{12}+0.000228x_{13}+0.000482x_{14}+0.000035x_2+0.000019x_3+0.000019x_4+0.000067x_6+0.000311y_1) \quad (\text{C.33})$$

l'expression à deux termes ci-dessus est obtenue. En utilisant le résultat de Oral et Kettani [23] (4.31) cette expression est remplacée par $+1.0v_{18}$ en ajoutant la contrainte ci-dessous:

$$0.002948x_{11}+0.000091x_{12}+0.000228x_{13}+0.000482x_{14}+0.000035x_2+0.000019x_3+0.000019x_4+0.000067x_6+0.000311y_1 + 0.0042y_2 - v_{18} \leq 0.0042 \quad (\text{C.34})$$

Dans l'objectif, les termes restant sont factorisés par

$x_1, x_{11}, x_{10}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_3, x_7, x_8$ et en utilisant le résultat de Oral et Kettani

[23] (4.31) les expressions à deux termes obtenues sont remplacées par

$$+1.0v_6+1.0v_7+1.0v_8+1.0v_9+1.0v_{10}+1.0v_{11}+1.0v_{12}+1.0v_{13}+1.0v_{14}+1.0v_{15}+1.0v_{16}+1.0v_{19}+1.0v_{20}+1.0v_{21}$$

respectivement en ajoutant les contraintes ci-dessous:

$$\begin{aligned} &0.004498x_{10} + 0.010708x_{11} + 0.002216x_{12} + 0.00479x_{13} + 0.002722x_{14} + 0.011734x_2 + 0.009316x_3 \\ &+ 0.009316x_4 + 0.009378x_6 + 0.004497x_7 + 0.004497x_8 + 0.004496x_9 + 0.000402y_1 + 0.000118y_2 \\ &+ 0.078688x_{1-v_6} \leq 0.078688 \end{aligned} \quad (C.35)$$

$$\begin{aligned} &0.003974x_{12} + 0.009569x_{13} + 0.016632x_{14} + 0.005167x_3 + 0.005167x_4 + 0.006714x_6 + 0.002224x_7 \\ &+ 0.002208x_9 + 0.051655x_{1-v_7} \leq 0.051655 \end{aligned} \quad (C.36)$$

$$\begin{aligned} &0.002245x_{11} + 0.000671x_{12} + 0.001438x_{13} + 0.000677x_{14} + 0.002966x_3 + 0.002966x_4 + 0.002966x_6 \\ &+ 0.001435x_7 + 0.001435x_9 + 0.016799x_{10-v_8} \leq 0.016799 \end{aligned} \quad (C.37)$$

$$\begin{aligned} &0.000897x_{13} + 0.000795x_{14} + 0.001403x_3 + 0.001403x_4 + 0.001451x_6 + 0.00067x_7 + 0.00067x_9 \\ &+ 0.007289x_{12-v_9} \leq 0.007289 \end{aligned} \quad (C.38)$$

$$\begin{aligned} &0.001875x_{14} + 0.003013x_3 + 0.003013x_4 + 0.003133x_6 + 0.001437x_7 + 0.001435x_9 + 0.013906x_{13} \\ &-v_{10} \leq 0.013906 \end{aligned} \quad (C.39)$$

$$\begin{aligned} &0.001485x_3 + 0.001485x_4 + 0.001738x_6 + 0.000674x_7 + 0.000671x_9 + 0.006053x_{14} \\ &-v_{11} \leq 0.006053 \end{aligned} \quad (C.40)$$

$$\begin{aligned} &0.003731x_{10} + 0.006847x_{11} + 0.001776x_{12} + 0.003818x_{13} + 0.001925x_{14} + 0.007717x_3 \\ &+ 0.007717x_4 + 0.007735x_6 + 0.003731x_7 + 0.003731x_9 + 0.048728x_{2-v_{12}} \leq 0.048728 \end{aligned} \quad (C.41)$$

$$0.006132x_4 + 0.006142x_6 + 0.002965x_7 + 0.002965x_9 + 0.018204x_{3-v_{13}} \leq 0.018204 \quad (C.42)$$

$$0.006142x_6 + 0.002965x_7 + 0.002965x_9 + 0.012072x_4 - v_{14} \leq 0.012072 \quad (\text{C.43})$$

$$0.009562x_1 + 0.002968x_{10} + 0.011309x_{11} + 0.001593x_{12} + 0.003488x_{13} + 0.00249x_{14} + 0.00779x_2 \\ + 0.006172x_3 + 0.006172x_4 + 0.006282x_6 + 0.002966x_9 + 0.060792x_5 - v_{15} \leq 0.060792 \quad (\text{C.44})$$

$$0.002965x_9 + 0.002965x_6 - v_{16} \leq 0.002965 \quad (\text{C.45})$$

$$0.000007x_1 + 0.000173x_{11} + 0.000005x_{12} + 0.000013x_{13} + 0.000028x_{14} + 0.000002x_2 + 0.000012x_5 \\ + 0.000004x_6 + 0.000018y_1 + 0.000005y_2 + 0.000267y_3 - v_{19} \leq 0.000267 \quad (\text{C.46})$$

$$0.002967x_5 + 0.002966x_6 + 0.001435x_9 + 0.007368x_7 - v_{20} \leq 0.007368 \quad (\text{C.47})$$

$$0.001435x_{10} + 0.002224x_{11} + 0.00067x_{12} + 0.001437x_{13} + 0.000674x_{14} + 0.003731x_2 + 0.002965x_3 \\ + 0.002965x_4 + 0.002967x_5 + 0.002966x_6 + 0.001435x_7 + 0.001435x_9 + 0.024904x_8 \\ - v_{21} \leq 0.024904 \quad (\text{C.48})$$

Au résumé, la procédure de transformation en forme linéaire proposée remplace les termes non linéaires du programme mathématique (C.1)-(C.3) par les équivalents linéaires ci-dessous:

Min

$$\dots - 0.029649y_1 - 0.009389y_2 - 0.000565y_3 + 1.0v_6 + 1.0v_7 + 1.0v_8 + 1.0v_9 + 1.0v_{10} + 1.0v_{11} + 1.0v_{12} + 1.0v_{13} \\ + 1.0v_{14} + 1.0v_{15} + 1.0v_{16} + 1.0v_{17} + 1.0v_{18} + 1.0v_{19} + 1.0v_{20} + 1.0v_{21} \quad (\text{C.49})$$

tel que

La contrainte de budget de hardware doit être satisfaite:

$$\dots + 1.0v_1 - 387.5x_4 + 1.0v_2 - 125x_5 - 175y_3 - 125y_4 \leq 20000 \quad (\text{C.50})$$

La contrainte de budget de logiciel doit être satisfaite:

$$\dots + 1.0v_3 - 308.75x_2 + 1.0v_4 - 268.75x_4 + 1.0v_5 - 81.25x_5 - 150y_3 - 85y_4 \leq 5000 \quad (\text{C.51})$$

⋮

les contraintes auxiliaires de transformation en forme linéaire doivent être satisfaites:

(C.4)-(C.17), (C.19)-(C.22), (C.24), (C.26)-(C.32), (C.34)-(C.48)

$$x_1, x_2, \dots, x_{14} \in \{0,1\}; \quad v_1, v_2, \dots, v_{21}, y_1, y_2, \dots, y_4 \geq 0$$

La méthode développée au chapitre 4 transforme en forme linéaire le programme mathématique de (C.1)-(C.3) avec 25 variables non négatives auxiliaires et 42 contraintes supplémentaires. La méthode de Chang et Chang [25] (4.1)-(4.4) transforme en forme linéaire le même programme avec 124 variables non négatives auxiliaires, 15 variables auxiliaires sans signe imposé et 222 contraintes supplémentaires. La méthode développée fournit une importante économie. Si le nombre de projet, d'objectif et de contrainte augmente l'économie devient de plus en plus grande.

Biographie

Yavuz Boğaç Türkoğulları est né à İstanbul / Turquie en 1977. Il a terminé ses études à l'école primaire de Kurtuluş à Rize / Turquie. Il est diplômé du lycée de Galatasaray à İstanbul / Turquie. Il a deux diplômes de licence de l'Université de Boğaziçi à İstanbul / Turquie: l'un en génie civil et l'autre en génie industriel avec le degré de grand honneur. Il a un degré de master en génie civil de l'institut de technologie de California à Pasadena /CA /Etats Unis.

