T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

θ-TETA FONKSİYONLARININ $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ PERİYOT ÇİFTLERİNE GÖRE DÖNÜŞÜMLERİ

Esra BURDURLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2011
DÜZCE

T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

θ-TETA FONKSİYONLARININ $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ PERİYOT ÇİFTLERİNE GÖRE DÖNÜŞÜMLERİ

Esra BURDURLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2011
DÜZCE

Esra BURDURLU tarafından hazırlanan θ-Teta fonksiyonlarının $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ periyot çiftlerine göre dönüşümleri adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr .İsmet YILDIZ ……………………………………

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İsmet YILDIZ …..……………………………

Matematik Anabilim Dalı, Düzce Üniversitesi

Prof. Dr. İsmet YILDIZ …………………………………..

Matematik Anabilim Dalı, Düzce Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA ………………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Düzce Üniversitesi

Yrd.Doç. Dr. Mustafa KAYIKÇI …………………………………..

Düzce Üniversitesi

Tarih: 13/07/2011

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Refik KARAGÜL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Esra BURDURLU

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ ’a ve canım aileme en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Temmuz 2011

Esra BURDURLU

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	:Kompleks düzlem
IL	:Düzlemsel latis
H	:Üst yarı düzlem
$\mathbf{H}^*$	:Genişletilmiş üst yarı düzlem
$\boldsymbol{\Gamma}$	:Homojen modüler grup
$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}$	: İnhomojen modüler grup
L	:Lineer dönüşüm
$\mathbf{L}_{\mathbf{A}}$	:Homojen lineer dönüşüm
$\mathbf{A}^*$	:Çarpmaya göre tersi mevcut olan matrisler grubu
$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u})$	:Weierstrass fonksiyonu
$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{u})$	: Weierstrass zeta fonksiyonu
$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$	: Weierstrass sigma fonksiyonu
$\mathbb{Z}$	:Tamsayılar halkası
$\boldsymbol{\theta}$ *- Teta*	:Teta fonksiyonu

θ - TETA FONKSİYONLARININ $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ PERİYOT ÇİFTLERİNE GÖRE DÖNÜŞÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Esra BURDURLU

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2011

ÖZ

Bu çalışmada birinci mertebeden θ - *Teta* fonksiyonunun

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\,2)$$

karakteristik değerleri için $\frac{\pi}{2^r}$ ve $\frac{\pi\tau}{2^r}$ periyotları kullanılarak iki teorem ifade edildi ve ispatlandı. Ayrıca bu periyotlara göre θ - Teta fonksiyonlarının dönüşüm ve genişlemeleri elde edildi.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler : Teta fonksiyonları, periyot parçaları, karakteristik

Sayfa Adeti : 69

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İsmet YILDIZ

TRANSFORMATIONS OF THETA FUNCTIONS ASSOCIATED WITH THE PERIODS $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$

(M.Sc. Thesis)

Esra BURDURLU

DUZCE UNIVERSITY
INSTITUE OF ART AND SCIENCE
July 2011

ABSTRACT

In this study, two theorems that first order theta functions provide according to associated periods of $\frac{\pi}{2^r}$ and $\frac{\pi\tau}{2^r}$ for characteristics values of

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}2)$$

were expressed and proved. In addition, multiplicative factors and transformation of theta functions were obtained by these associated periods.

Science Code :
Key Words : Theta functions, period pairs, characteristic
Page Number: 69
Adviser : Prof. Dr. İsmet YILDIZ

1.GİRİŞ

Bilindiği gibi, eliptik fonksiyonlar Jacobi fonksiyonları ve $Weierstrass^{'}$ fonksiyonlarından faydanılarak kurulmuştur. Oysa bugün Jacobi'nin θ-$Teta$ fonksiyonları ile $Weierstrass^{'}$ın $\sigma - sigma$ fonksiyonlarının birbirine denkliği bilinmektedir (Dutta ve Lebnath,1965). Yine de, Jacobi ve $Weierstrass^{'}$ eliptik fonksiyonlarının oluşturulmaları birbirinden farklıdır. Bu çalışmada, $\mathbb{C}$ kompleks düzlem ve IL düzlemsel latis olmak üzere $\mathbb{C} - IL$ nin kompakt alt cümleleri üzerinde düzgün yakınsak olan $P(u)$ ve $\zeta(u)$ fonksiyonları arasındaki bağıntıya kısaca değindikten sonra, gerek $Weierstrass^{'}$ın $P(u)$ fonksiyonunun ve gerekse birinci dereceden genelleştirilmiş θ-$Teta$ fonksiyonunun çeşitli özellikleri ele alınmış ve θ-$Teta$ fonksiyonunun $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ periyot çiftine göre yeni dönüşümleri elde edilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2. 1. GENEL KAVRAMLAR

Tanım 2. 1: $\mathbb{C}$ nin boş kümeden farklı ve toplamaya göre her değişmeli alt grubuna $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası üzerinde bir modül denir.

Tanım 2. 2: Sonlu düzlemde yığılma noktası bulunmayan bir modüle latis denir. Sıfırdan farklı bir yığılma noktası olan her modül için sıfır da bir yığılma noktasıdır (Şeker,1976). O halde IL latisi için sıfır bir yığılma noktası değildir. Buna göre sıfırdan farklı elemanları, mutlak değerce alttan sınırlı olan her değişmeli grup bir latis olmalıdır. Düzlemsel latisler,

a) $IL_0 = \{ mw : m = 0,\ w \neq 0,\ m \in \mathbb{Z},\ w \in \mathbb{C} \}$

şeklinde tanımlı ise, sıfır boyutlu ya da sıfır latis denir.

b) $IL_1 = \{ mw : m \neq 0,\ w \neq 0,\ m \in \mathbb{Z},\ w \in \mathbb{C} \}$

şeklinde tanımlı ise, bir boyutlu ya da basit latis denir.

c) $IL_2 = \left\{ mw_1 + nw_2 : (m,n) \neq (0,0),\ m,n \in \mathbb{Z},\ w_1, w_2 \in \mathbb{C},\ \dfrac{w_2}{w_1} = \tau \notin \mathbb{R} \right\}$

şeklinde tanımlı ise, iki boyutlu ya da çift latis denir.

Buradaki w_1, w_2 kompleks sayıları lineer bağımsız olup (w_1, w_2) çiftine IL latisi için bir baz denir ve $\mathrm{Im}(\frac{w_2}{w_1} = \tau) > 0$ alınır.

Tanım 2. 3 : $u \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u + IL = \{ u + w : w \in IL \}$$

cümlesine $\mathrm{mod}IL$ ye göre kalan sınıf denir. Her kalan sınıfın yalnız bir elemanını içeren bölgeye ilgili latisin temel bölgesi denir. IL latisinin temel bölgesi de bir kalan sınıfıdır.

Buna göre;

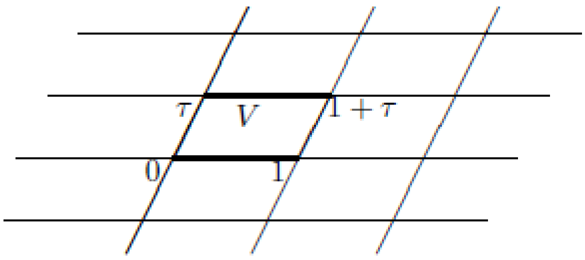
a) IL_0 latisinin temel bölgesi bütün düzlem,

b) IL_1 latisinin temel bölgesi, paralel iki doğru ile sınırlanmış sonsuz bir şerit,

c) IL_2 latisinin temel bölgesi ise değişik geometrik şekiller olabilir (Ocak,1982). Bu geometrik şekle örnek olarak $\tau(\operatorname{Im}\tau > 0) \in \mathbb{C}$ olmak üzere Şekil 2. 1 ile gösterilen $IL = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ latisinin

$$V = \{z = t_1 + t_2\tau \in \mathbb{C} : 0 \le t_1, t_2 < 1\}$$

esas paralelkenarı verilebilir (Franz 2007).



Şekil 2. 1: $V = \{z = t_1 + t_2\tau \in \mathbb{C} : 0 \le t_1, t_2 < 1\}$ esas paralelkenarı

Bir diğer örnek olarak $a, b \in \mathbb{R}$ ve w_1, w_2; $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathbb{C}$ için bir baz oluşturmak üzere

$D = \{aw_1 + bw_2 : 0 \le a, b \le 1\}$ esas paralelkenarı verilebilir (Koblitz,1984).

Tanım 2. 4: Periyotları $2w$ şeklinde olan $f(u)$ periyodik fonksiyonu, basit periyodik fonksiyon ve bu $2w$ sayısına da $f(u)$ nun esas periyodu denir. $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere esas periyotları, $2w_1$, $2w_2$ olmak üzere periyodu

$$u = 2mw_1 + 2nw_2 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilen $f(u) = f(2mw_1 + 2nw_2)$ periyodik fonksiyonuna çifte periyodik fonksiyon denir. $2w_1$ ve $2w_2$ sayıları birer esas periyottur. u_0 ve $u_0 + 2w$ noktalarından geçen paralel iki doğru arasındaki şeride esas periyod şeridi denir. Köşeleri $u_0 + m2w_1 + n2w_2$ noktalarında bulunan latis ise periyod paralelkenarı veya kısaca u_0 latisi olarak isimlendirilir (Yıldız,1989) .

Tanım 2. 5: Bir B bölgesinin bütün u noktalarında $f(u)$ fonksiyonunun $f^{'}(u)$ türevi mevcutsa o zaman $f(u)$ fonksiyonu bu B bölgesinde analitiktir denir. Eğer

$$|u-u_0|<\delta \tag{2.2}$$

komşuluğunun bütün noktalarında $f^{'}(u)$ türevi mevcutsa o zaman $f(u)$ fonksiyonunun u_0 noktasında analitik olduğu söylenir.

Tanım 2. 6 : u bağımsız kompleks değişken ve w ilgili latisin temel bölgesinden seçilen bir kompleks değişken olmak üzere u nun w fonksiyonu

$$w=f(u) \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlansın. u bağımsız değişkeninin her bir değerine karşılık w nin ancak ve ancak bir değeri karşılık geliyorsa o zaman w ye u nun tek değerli bir fonksiyonu denir.

Tanım 2. 7 : $f(u)$, u düzleminin bir B bölgesinde tek değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(u+h)-f(u)}{h} \tag{2.4}$$

limiti mevcut ise o zaman bu limite $f(u)$ fonksiyonunun türevi denir ve

$$f^{'}(u)=\frac{df(u)}{du}=\lim_{h\to 0}\frac{f(u+h)-f(u)}{h} \tag{2.5}$$

şeklinde gösterilir.

Bu durumda $f(u)$ fonksiyonu u noktasında diferansiyellenebilir denir.

Tanım 2. 8 : $f(u)$, D bölgesinde analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(u-u_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(u-u_0)^{-n} \tag{2.6}$$

ifadesine $f(u)$ nun u_0 noktası civarındaki Laurent açılımı denir.

Laurent serisindeki negatif üslü terimin ilk b_1 katsayısı da $f(u)$ fonksiyonunun u_0 noktasındaki rezidüsüdür.

Tanım 2. 9: Bir $f(u)$ fonksiyonu $u=u_0$ noktasında analitik değil ise o zaman u_0 noktasına $f(u)$ fonksiyonunun singüler noktası denir. Singüler noktalar üç grupta toplanabilir:

a) $f(u)$ fonksiyonu $u=u_0$ noktasının civarında analitik değil; fakat sınırlı ise yani $f(u)$ fonksiyonu $u=u_0$ noktasında tanımsız; fakat

$$\lim_{u\to u_0} f(u) \tag{2.7}$$

limiti mevcutsa o zaman $u=u_0$ noktasına; $f(u)$ fonksiyonunun kaldırılabilir singüler noktası denir.

b) $f(u)$ fonksiyonu $u=u_0$ noktasının civarında sınırlı değil; fakat $\frac{1}{f(u)}$ analitik ise yani $f(u)$ fonksiyonunun

$$f(u)=a_0+a_1(u-u_0)+a_2(u-u_0)^2+...+\frac{b_1}{u-u_0}+\frac{b_2}{(u-u_0)^2}+... \tag{2.8}$$

şeklindeki Laurent açılımında esas kısmın diğer bir ifadeyle negatif üslü terimlerin sayısı sonlu ise o zaman $b_n \neq 0$ için $u=u_0$ noktasına $f(u)$ fonksiyonunun $n.$ dereceli kutbu denir.

c) $f(u)$ fonksiyonu $u=u_0$ noktası civarında sınırlı değil ise ve $u=u_0$ noktası, $f(u)$ ile $\frac{1}{f(u)}$ için singüler nokta ise; yani $u=u_0$ noktası civarındaki Laurent açılımı

(2.8) biçimindeki fonksiyonun esas kısmı

$$\frac{b_1}{u-u_0}+\frac{b_2}{(u-u_0)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(u-u_0)^n} \tag{2.9}$$

olmak üzere n sonlu değil ise o zaman $u=u_0$ noktasına, $f(u)$ fonksiyonunun esas singüler noktası denir (0cak, 2001).

Tanım 2. 10: Kutup noktalarından başka singüler noktası olmayan ve bütün kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara meromorf fonksiyonlar denir.

Tanım 2. 11: Sonsuz noktası hariç tutulan düzleme açık düzlem veya sonlu düzlem; sonsuz noktası dahil olan düzleme kapalı düzlem veya genişletilmiş düzlem denir.

Tanım 2. 12: Açık kompleks düzlemde çifte periyodik ve meromorf olan $f(u)$ fonksiyonuna eliptik fonksiyon denir. $\beta,\gamma>0$ iki reel sayı, $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olmak üzere

$$P(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{\substack{w\in\gamma\mathbb{Z}\oplus i\beta\mathbb{Z}\\ w\neq 0}}\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı γ ve $i\beta$ periyotlarına sahip *Weierstrass*' fonksiyonu eliptik fonksiyona örnek olarak verilebilir (Du Val,1973).

Tanım 2. 13: $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ için $|A|=ad-bc\neq 0$ olmak üzere $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ çarpmaya göre tersi mevcut olan matrisler grubu A^* olsun. Tersi mevcut olan $L:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ lineer dönüşümü için,

$$L_A\ :\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2;w=Au \tag{2.11}$$

ile verilen ifadeye, homojen lineer dönüşüm denir.

Au çarpımı A ile $u=\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^2$ nin matris çarpımıdır. Yani,

$$Au=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} au_1+bu_2\\ cu_1+du_2\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

için

$$u \to w = \overline{A}(u) = \frac{au+b}{cu+d} \qquad (2.13)$$

ifadesine de inhomojen lineer dönüşüm denir.

Elemanları tamsayılar ve $\det A = 1$ olan homojen lineer dönüşüme, homojen modüler dönüşüm denir. Homojen modüler dönüşümlerin teşkil ettiği gruba homojen modüler grup denir ve

$$\Gamma = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \det A = 1 \right\} \qquad (2.14)$$

bağıntısı ile verilir. İnhomojen modüler dönüşümler için

$$\overline{\Gamma} = \left\{ \overline{A} : A \in \Gamma \right\} \qquad (2.15)$$

grubuna inhomojen modüler grup denir.

Teorem 2. 1: Homojen modüler gruplar sonsuz kuvvetten $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve 4.kuvvetten $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ile gerilir. İnhomojen modüler dönüşümler ise, 2.dereceden $\overline{T}(u) = -\frac{1}{u}$ ve sonsuz dereceden $\overline{U}(u) = u+1$ dönüşümleri ile gerilir (Schoeneberg,1974).

Tanım 2. 14: H üst yarı düzlem ve $w_1, w_2 \in \mathrm{H}$, $\tau = \frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}, \operatorname{Im}\tau > 0$ olmak üzere bir $f(\tau)$ fonksiyonu

a) Bütün τ değerleri için genişletilmiş H^* üst yarı düzleminde analitiklik şartlarını sağlıyorsa ve

b) Her $\tau \in \mathrm{H}^*$ ve $A \in \Gamma$ için

$$f\left(A(\tau)\right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \qquad (2.16)$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu $f(\tau)$ fonksiyonuna k ağırlıklı bir modüler form denir. Özel olarak $k = 0$ alınırsa, $f(\tau)$ modüler fonksiyondur (Schoeneberg,1974).

2. 2. WEİERSTRASS SİGMA, ZETA VE ELİPTİK FONKSİYONLARI

$w_1,\ w_2 \in \mathbb{C}$, $\tau = \dfrac{w_2}{w_1}\left(\operatorname{Im}\tau > 0\right)$ ve $w = mw_1 + nw_2\left(m,n \neq 0\right)$olmak üzere $\left(w\right)$ noktaları kompleks düzlemde bir IL latisi oluşturur. λ nın reel değerleri için

$$\sum_{w}\frac{1}{|w|^{\lambda}} = \sum_{w\in IL-\{0\}}\frac{1}{|w|^{\lambda}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(mw_1 + nw_2\right)^{\lambda}} \qquad (2.17)$$

serilerini göz önüne alalım.

Teorem 2. 2 : $\lambda > 2$ olmak üzere $\sum_{w}|w|^{-\lambda}$ yakınsaktır.

İspat 2. 2: $k = 1,2,3,...$ için

$$S_k = \sum_{|m|\leq k,|n|\leq k}|w|^{-\lambda} \qquad (2.18)$$

kısmi toplamlarını ele alalım. $T_k = S_k - S_{k-1}$ olsun. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty}T_k$ serisi yakınsaksa $\sum_{w}|w|^{-\lambda}$ serisi de yakınsaktır. $\left(2k+1\right)^2 - 1 - \left\{\left(2k-2+1\right)^2 - 1\right\} = 8k$ olduğu için T_k daki terimlerin sayısı $8k$ dır.Bu terimler ya $|n| \leq k$ için $|kw_1 + nw_2|^{-\lambda}$ formunda ya da $|m| \leq k$ için $|mw_1 + kw_2|^{-\lambda}$ formundadır.

$\left(w\right)$ noktaları, köşeleri $kw_1 + kw_2, -kw_1 + kw_2, -kw_1 - kw_2$ ve $kw_1 - kw_2$ noktaları olan paralelkenarın sınırındadır. Böylece w, T_k daki terimlere karşılık gelecek şekilde, k dan bağımsız olan $a,b\left(a > 0, b > 0\right)$ sayıları mevcuttur. Şu halde $a.k < |w| < b.k$ olup buradan $8b^{-\lambda}k^{1-\lambda} < T_k < 8a^{-\lambda}k^{1-\lambda}$ olmasından görülür ki eğer $\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-\lambda}$ yakınsaksa; yani $\lambda > 2$ ise $\sum_{k=1}^{\infty}T_k$ serisi yakınsaktır.

Sonuç 2. 1: $R>0,\ \lambda>2$ ve $u\in\mathbb{C}$ için $\sum\limits_{w\in IL, w>2R}|u-w|^{-\lambda}$ serisi $|u|\le R$ çemberinde düzgün yakınsaktır. Böylece, $\lambda>2$ olmak üzere $\sum\limits_{w}|u-w|^{-\lambda}$ serileri yeterince sayıda terimlerin atılmasıyla sonlu yarıçaplı her çemberde düzgün yakınsaktır.

$$|u|<\frac{1}{2}|w| \tag{2.19}$$

ve

$$|u|+|w|\le\frac{3}{2}|w| \tag{2.20}$$

için

$$\frac{1}{|u-w|}\le\frac{1}{|w|-|u|}\le\frac{2}{|w|} \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{|u-w|}\ge\frac{1}{|w|+|u|}\ge\frac{2}{3}\frac{1}{|w|} \tag{2.22}$$

eşitsizliklerinden, $\lambda>0$ için

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\lambda}\frac{1}{|w|^{\lambda}}\le\frac{1}{|u-w|^{\lambda}}\le\frac{2^{\lambda}}{|w|^{\lambda}} \tag{2.23}$$

eşitsizliği elde edilir **(**Chandrasekharan,1980).

Sonuç 2. 2 : $u\notin IL$ için toplam, terimlerin mertebesinden bağımsız olacak şekilde

$$\sum_{w\in IL-\{0\}}\left\{\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\} \tag{2.24}$$

serileri düzgün yakınsaktır.

Sonlu her $R>0$ için $|u|\leq R$ çemberindeki seri, yeterince sayıda terimlerin atılmasıyla düzgün yakınsaktır.

Sonlu sayıda w noktası hariç $|w|>2R$ olup $|u|\leq R$ için

$$\left|2-\frac{u}{w}\right|\leq 2+\frac{1}{2} \tag{2.25}$$

ve

$$\left|1-\frac{u}{w}\right|^2\geq\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.26}$$

olmak üzere

$$\frac{|u|}{|w|}<\frac{1}{2} \tag{2.27}$$

olduğundan

$$\left|\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right|=\left|\frac{u(2w-u)}{w^2(u-w)^2}\right|\leq\frac{10.|u|}{|w|^3}\leq\frac{10.R}{|w|^3} \tag{2.28}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 2. 1 den $\sum\limits_{w\in IL-\{0\}}|w|^{-3}$ yakınsak olduğu için Sonuç 2. 2 elde edilir. Sonuç 2.2 den yola çıkarak $u\in\mathbb{C}$ için *Weierstrass'* eliptik fonksiyonu,

$$P(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{w\in IL-\{0\}}\left\{\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\} \tag{2.29}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu fonksiyon (w_1,w_2); IL latisinin bir baz çifti ve $w=mw_1+nw_2\;(m,n\neq 0)$ olmak üzere,

$$P(u;w_1,w_2)=\frac{1}{u^2}+\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{(0,0)\}}\left\{\frac{1}{(u-mw_1-nw_2)^2}-\frac{1}{(mw_1+nw_2)^2}\right\} \tag{2.30}$$

eşitliğiyle de verilebilir (D’Ambroise,2010).

Teorem 2. 3 : w_1 ve w_2 periyotlarına ve $u=w$ kutuplarına sahip $P(u)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $u=0$ noktasında $P(u)$ nun esas kısmı $\frac{1}{u^2}$ dir.

$$(ii)\ \lim_{u\to 0}\left(P(u)-\frac{1}{u^2}\right)=0 \tag{2.31}$$

$$(iii)\ P(u)=P(-u) \tag{2.32}$$

$$(iv)\ P'(u)=P'(-u) \tag{2.33}$$

İspat 2. 3: Sonuç 2.2 ve analitik fonksiyonların düzgün yakınsak serileri üzerine olan *Weierstrass'* teoreminden görülür ki $P(u), u=w=mw_1+nw_2$ noktasında çift kutbu olan meromorfik fonksiyondur. $u=0$ noktasının bir komşuluğunda $P(u)-\frac{1}{u^2}$ farkını alarak (i) ve (ii) elde edilir.

$$P(-u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{w\in IL-\{0\}}\left[\frac{1}{(u+w)^2}-\frac{1}{w^2}\right] \tag{2.34}$$

eşitliğinden ve $\{w\}$ noktaları kümesi ile $\{-w\}$ noktaları kümesinin aynı olmasından (iii) eşitliği elde edilir (Chandrasekharan,1980). Sonuç 2. 2 yi kullanarak $P(u)$ nun

$$P'(u)=-2\sum_{w\in IL-\{0\}}\frac{1}{(u-w)^3} \tag{2.35}$$

ile verilen türevindeki serilerin düzgün yakınsak olduğu görülür. $\{w-w_1\}$ noktaları kümesi ile $\{w\}$ noktaları kümesinin aynı olmasından

$$P'(u+w_1)=P'(u) \tag{2.36}$$

$$P'(u+w_2)=P'(u) \tag{2.37}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $P'(u)$ eliptik bir fonksiyondur. Bu eşitlikleri integre edersek

$$P(u+w_1)=P(u)+c \tag{2.38}$$

$$P(u+w_2)=P(u)+c \tag{2.39}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.38) eşitliğinde $u=-\frac{w_1}{2}$ alınırsa,

$$P\left(\frac{w_1}{2}\right)=P\left(-\frac{w_1}{2}\right)+c \tag{2.40}$$

Eşitliği elde edilir. P, çift fonksiyon olduğundan $c=0$ olur. Böylece,

$$P(u+w_1)=P(u) \tag{2.41}$$

ve benzer şekilde

$$P(u+w_2)=P(u) \tag{2.42}$$

olmasından görülür ki $P(u)$; $w_1, w_2\left(\operatorname{Im}\frac{w_2}{w_1}>0\right)$ periyotlarına sahip eliptik fonksiyondur.

Basit kutuplara sahip olan *Weierstrass'* $\zeta-$fonksiyonunu tanımlamak için sonsuz serilerden faydalanalım. $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\frac{w_2}{w_1}>0$ olsun. O halde

$$\sum_{|w|>2R>0}\left\{\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right\} \tag{2.43}$$

serisi $|w| \geq 2R \geq 2|z|$ için $|u| \leq R$ çemberinde düzgün yakınsaktır. Teorem 2.2 den dolayı

$$\left|\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right| \leq \frac{|u|^2}{|w|^3\left(1-\frac{|u|}{|w|}\right)} \leq \frac{2|u|^2}{|w|^3} \qquad (2.44)$$

eşitsizliği mevcuttur ve $\sum_{w\neq 0}|w|^{-3}$ serisi yakınsaktır. Buradan da görülür ki

$$\frac{1}{u}+\sum_{w\in IL-\{0\}}\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right) \qquad (2.45)$$

serisi $u \neq w$ için mutlak yakınsaktır ve $|u| \leq R$ çemberinde seri düzgün yakınsaktır.

Eğer $\zeta(u)$ fonksiyonunu $w = mw_1 + nw_2$; $\operatorname{Im}\frac{w_2}{w_1} > 0$, $u \in \mathbb{C}$ ve $m,n = 0,\pm 1,\pm 2,...$ olmak üzere

$$\zeta(u) = \frac{1}{u}+\sum_{w\in IL-\{0\}}\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right) \qquad (2.46)$$

eşitliğiyle tanımlarsak $\zeta(u)$ fonksiyonunun $u = w$ noktaları hariç her yerde analitik olduğu görülür. Yukarıdaki seride w yerine $-w$ alırsak $\zeta-$fonksiyonunun tek fonksiyon olduğu görülür.

$\zeta-$fonksiyonunun u ya göre türevini alarak

$$\zeta'(u) = -P(u) \qquad (2.47)$$

eşitliği elde edilir.

$$P(u+w_1) = P(u) \qquad (2.48)$$

eşitliğini integre edersek η_1, u dan bağımsız olmak üzere,

$$\zeta(u+w_1)=\zeta(u)+2\eta_1 \qquad (2.49)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte, $u=-\dfrac{w_1}{2}$ alınırsa $\zeta(u)$, u nun tek fonksiyonu olduğundan,

$$\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right)=\zeta\left(-\frac{w_1}{2}+w_1\right)=\zeta\left(-\frac{w_1}{2}\right)+2\eta_1$$

$$=-\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right)+2\eta_1 \qquad (2.50)$$

eşitliğinden

$$\eta_1=\zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) \qquad (2.51)$$

eşitliği elde edilir. η_2, u dan bağımsız olmak üzere,

$$\zeta(u+w_2)=\zeta(u)+2\eta_2 \qquad (2.52)$$

eşitliği ile tanımlanırsa benzer şekilde,

$$\eta_2=\zeta\left(\frac{w_2}{2}\right) \qquad (2.53)$$

eşitliği elde edilir. Eğer

$$\eta_3=\eta_2+\eta_1 \qquad (2.54)$$

$$w_3=w_1+w_2 \qquad (2.55)$$

alınırsa,

$$\zeta(u+w_3)=\zeta(u)+2(\eta_1+\eta_2)=\zeta(u)+2(\eta_3) \qquad (2.56)$$

eşitliğinden

$$\eta_3 = \zeta\left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right) \qquad (2.57)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 2. 4 : u nun tek fonksiyonu olan *Weierstrass'* $\zeta-$ fonksiyonu $u = w$ noktaları hariç her yerde analitik bir fonksiyon , $w_3 = w_1 + w_2$, $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$, $\mathrm{Im}\frac{w_2}{w_1} > 0$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i)\ \zeta'(u) = -P(u) \qquad (2.58)$$

$$(ii)\ \eta_1 = \zeta\left(\frac{w_1}{2}\right) \text{ için } \zeta(u + w_1) = \zeta(u) + 2\eta_1 \qquad (2.59)$$

$$(iii)\ \eta_2 = \zeta\left(\frac{w_2}{2}\right) \text{ için } \zeta(u + w_2) = \zeta(u) + 2\eta_2 \qquad (2.60)$$

$$(ii)\ \eta_3 = \zeta\left(\frac{w_3}{2}\right) \text{ için } \zeta(u + w_3) = \zeta(u) + 2\eta_3 \qquad (2.61)$$

Ayrıca $k \geq 2$ için

$$G_k(IL) = \sum_{w \in IL - \{0\}} w^{-2k} \qquad (2.62)$$

olmak üzere $\zeta(u)$ fonksiyonu,

$$\zeta(u, IL) = \frac{1}{u} - \sum_{k \geq 2} G_k(IL) u^{2k-1} \qquad (2.63)$$

şeklinde bir açılıma sahiptir.

$$\zeta'(u) = -P(u) \qquad (2.64)$$

eşitliğinden görülür ki $P(u)$ fonksiyonu

$$P(u, IL) = \frac{1}{u^2} - \sum_{k\geq 2}(2k-1)G_k(IL)u^{2k-2} \tag{2.65}$$

eşitliğiyle tanımlanır (Husemöller,1987).

$P(u)$ fonksiyonunun ardışık türevleri alınırsa;

$$P^{'}(u) = -\frac{1.2}{u^3} + \sum_{k\geq 2}(2k-1)(2k-2)G_k u^{2k-3}$$

$$P^{''}(u) = -\frac{1.2.3}{u^4} + \sum_{k\geq 2}(2k-1)(2k-2)(2k-3)G_k u^{2k-4}$$

....

....

$$P^{(n)}(u) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{u^{n+2}} + \sum_{k\geq 2}(2k-1)(2k-2)....\left[2k-(n+1)\right]G_k u^{2k-(n+2)} \tag{2.66}$$

fonksiyonları elde edilir. Bu son ifade,

$$P^{(n)}(u) = (-1)^n . \frac{(n+1)!}{u^{n+2}} + \sum_{k\geq 2} G_k u^{2k-(n+2)} \prod_{i=0}^{n}\left[2k-(i+1)\right] \tag{2.67}$$

olarak yazılabilir. Şu halde,

$$P^{(2n-1)}(u) = -\frac{(2n)!}{u^{2n+1}} + \sum_{k\geq 2} G_k u^{2k-(2n+1)} \prod_{i=0}^{n}(2k-i) \tag{2.68}$$

$$P^{(2n-2)}(u) = \frac{(2n-1)!}{u^{2n}} + \sum_{k\geq 2} G_k u^{2k-2n} \prod_{i=0}^{2n-1}(2k-i) \tag{2.69}$$

eşitlikleriyle verilen tek ve çift mertebeli türev fonksiyonlarını oluşturarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2. 5: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için u_1 ve u_2 noktaları (2.67) ile ifade edilen fonksiyonun kutup yerleri olmak üzere , (2.68) ile (2.69) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{P^{(2n-1)}(u_1)+P^{(2n-1)}(u_2)}{P^{(2n-2)}(u_1)-P^{(2n-2)}(u_2)} &= 2\zeta(u_1-u_2)-2n\big(\zeta(u_1)-\zeta(u_2)\big) \\ \frac{P^{(2n-1)}(u_1)-P^{(2n-1)}(u_2)}{P^{(2n-2)}(u_1)-P^{(2n-2)}(u_2)} &= 2\zeta(u_1+u_2)+2n\big(\zeta(u_1)+\zeta(u_2)\big) \end{aligned} \tag{2.70}$$

bağıntıları elde edilir (Yıldız,1989).

Tüm sıfırları basit sıfır olan analitik *Weierstrass*' $\sigma-$fonksiyonunu tanımlamak için aşağıdaki lemmadan faydalanacağız:

Lemma 2. 1: Eğer $u \in \mathbb{C}$ için

$$E(u)=(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2} \tag{2.71}$$

ise,

$$|u| \le \frac{1}{2} \tag{2.72}$$

için

$$|E(u)-1| \le 2|u|^3 \tag{2.73}$$

eşitsizliği elde edilir.

(w_1, w_2), IL latisi için baz çifti; $w = mw_1 + nw_2 \in IL-\{0\}$ ise $|u| \le R$ için Lemma 2. 1 den

$$\sum_{|w|>2R}\left|E\left(\frac{u}{w}\right)-1\right| \le 2\sum_{|w|>2R}\left|\frac{u}{w}\right|^3 \tag{2.74}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin ikinci yanındaki seriler $|u| \le R$ çemberinde düzgün yakınsaktır.

Böylece,

$$u\prod_{w\in IL-\{0\}}\left(1-\frac{u}{w}\right)\exp\left\{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2\right\} \tag{2.75}$$

şeklinde tanımlanan $\sigma(u)$ fonksiyonu $|u|\leq R$ çemberinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Şu halde (2.75) eşitliğiyle tanımlanan $\sigma(u)$ fonksiyonu u nun analitik bir fonksiyonudur. Ayrıca,

$$\sigma(-u)=-\sigma(u) \tag{2.76}$$

eşitliğinden görülür ki $\sigma(u)$, tek fonksiyondur. (2.75) eşitliğinin logaritmik türevi alınarak *Weierstrass*' $\zeta(u)$ fonksiyonu,

$$\zeta(u)=\frac{d}{du}(\log\sigma(u))=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

$$=\frac{1}{u}+\sum_{w\in IL-\{0\}}\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right) \tag{2.77}$$

eşitliğiyle elde edilir.

$$\zeta(u+w_1)=\zeta(u)+2\eta_1 \tag{2.78}$$

eşitliğini integre ederek , c sabit olmak üzere

$$\sigma(u+w_1)=ce^{2\eta_1 u}\sigma(u) \tag{2.79}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $u=-\frac{w_1}{2}$ alınırsa, $\sigma(u)$, u nun tek fonksiyonu olduğundan,

$$\sigma\left(\frac{w_1}{2}\right)=-ce^{2\eta_1 w_1}\sigma\left(\frac{w_1}{2}\right) \tag{2.80}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $c = -e^{\eta_1 w_1}$ olduğu görülür ve $w_3 = w_1 + w_2$, $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$ olmak üzere,

$$\sigma(u + w_1) = -\sigma(u) e^{2\eta_1 (u + \frac{w_1}{2})} \tag{2.81}$$

eşitliği ve benzer şekilde

$$\sigma(u + w_2) = -\sigma(u) e^{2\eta_2 (u + \frac{w_2}{2})} \tag{2.82}$$

$$\sigma(u + w_3) = -\sigma(u) e^{2\eta_3 (u + \frac{w_3}{2})} \tag{2.83}$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 2. 6 : (2.75) ile tanımlı $\sigma(u)$ fonksiyonu u nun tek fonksiyonu olan, $u = w$ noktalarında sıfırları olan bir analitik fonksiyon olup, $w_3 = w_1 + w_2$, $\eta_3 = \eta_1 + \eta_2$ ve $\operatorname{Im} \frac{w_2}{w_1} > 0$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i)\ \zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \tag{2.84}$$

$$(ii)\ \sigma(u + w_1) = -\sigma(u) e^{2\eta_1 (u + \frac{w_1}{2})} \tag{2.85}$$

$$(iii)\ \sigma(u + w_2) = -\sigma(u) e^{2\eta_2 (u + \frac{w_2}{2})} \tag{2.86}$$

$$(iv)\ \sigma(u + w_3) = -\sigma(u) e^{2\eta_3 (u + \frac{w_3}{2})} \tag{2.87}$$

(Chandrasekharan,1980)

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamıza esas teşkil edecek olan $\theta - Teta$ fonksiyonları ve genel özellikleri hakkındaki temel bilgilere yer verilmiştir.

3. 1. TETA SERİLERİ

$\mathrm{P}(\mathrm{n})$ keyfi bir polinom; a, b, c ; n den bağımsız olmak üzere

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(n) \exp\left\{An^2 + Bn + C\right\} \tag{3.1}$$

serilerini göz önüne alalım. Eğer $\operatorname{Re}(A) < 0$ ise ,

$$\left|\frac{T_{n+1}}{T_n}\right| = \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| \exp\left\{(2n+1)\operatorname{Re}(A) + \operatorname{Re}(B)\right\} \tag{3.2}$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = 1 \tag{3.3}$$

olduğu için

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{T_{n+1}}{T_n}\right| = 0 \tag{3.4}$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{n \to -\infty} \left|\frac{T_{n-1}}{T_n}\right| = 0 \tag{3.5}$$

olur. Böylece (3.1) ile tanımlı seri mutlak yakınsaktır.

$\mathrm{P}(\mathrm{n})$ deki katsayılar ve A, B, C farklı değişkenlerin fonksiyonları ise, bu katsayıların sınırlı olduğu ve $\delta \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere $\operatorname{Re}(A) < -\delta$ olduğu değişken uzayın herhangi bir bölgesinde tanımlı seriler mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bizim şimdi çalışacağımız serilerde bağımsız değişkenler τ ve u olup; $A = \tau\pi i$; B ve C; τ ve u değişkenlerine göre yazılmış lineer polinomlardır. Eğer $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ ise $\operatorname{Re}(A) < 0$ olur ki τ ve u değişkenlerinin sınırlı olduğu ve herhangi bir $\delta \in \mathrm{R}^{+}$ için $\operatorname{Im}(\tau) > \delta$ olduğu uzayın herhangi bir bölgesinde seri düzgün yakınsaktır. Bu seri u, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin elemanı; τ , H üst yarı düzlemin elemanı olmak üzere analitik bir fonksiyon tanımlar. Bu tip serilere θ-*Teta* serileri denir.

Herhangi iki $\varepsilon, \varepsilon^{'}$ reel sayısı için genelleştirilmiş θ-*Teta* fonksiyonu

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^{'} \end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_{n} \exp\left\{ \left(n + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{2} \tau\pi i + 2i\left(n + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u - \frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right) \right\} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^{'} \end{bmatrix}$ gösterimine θ-*Teta* fonksiyonunun karakteristiği ve $\tau(\operatorname{Im}\tau > 0)$ değerine de fonksiyonun periyodu denir. Eğer (3.6) ile tanımlı eşitlikte $q = e^{\tau\pi i}$ alınırsa θ-*Teta* fonksiyonu

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^{'} \end{bmatrix}(u,q) = \sum_{n} q^{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}} e^{2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)} \tag{3.7}$$

olarak tanımlanır.

a ve b reel sayılar olmak üzere $\tau = a + ib$ alınırsa $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ için

$q = e^{\tau\pi i} = \left(e^{a+ib}\right)^{\pi i} = e^{\pi a i} e^{-\pi}$ olacağından $|q| = \left|e^{-\pi b}\right| < 1$ eşitsizliği elde edilir. Şu halde $u \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ olmak üzere $\tau \in \mathbb{C}$ ve q, $0 < |q| < 1$ olan birim çemberin yakınsaklık bölgesinde bulunmak üzere (3.3) ile tanımlı θ-*Teta* fonksiyonu analitiktir.

Eğer (3.2) nin her iki tarafının u ya göre kısmi diferansiyelini alırsak her bir T_n terimini $2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ile çarparız ve eğer ikinci kez diferansiyelini alırsak her terimi tekrar $2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ile çarparız; diğer taraftan τ ya göre kısmi diferansiyelini alırsak her bir T_n terimini $\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i$ ile çarparız Böylece her θ-$Teta$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\sum_n\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}=-4\sum_n\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\} \tag{3.9}$$

$$4i\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\pi\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} \tag{3.10}$$

eşitlikleri elde edilir.

Eğer $m\in\mathbb{Z}$ ise $\theta-Teta$ fonksiyonunda sırasıyla ε yerine $\varepsilon+2m$ ve ε' yerine $\varepsilon'+2m$ alırsak

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2m\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon+2m}{2}\right)^2 \pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon+2m}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n\exp\left\{\left(n+m+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \tau\pi i+2i\left(n+m+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.11}$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}+2m\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\tau\pi i+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon^{'}+2m}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\tau\pi i\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}\exp\pi i\left\{-(2nm+\varepsilon m)\right\}$$

$$=e^{-m\varepsilon\pi i}\sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\tau\pi i+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=e^{-m\varepsilon\pi i}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.12)$$

eşitliklerinden,

$$\left.\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2m\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u,\tau)&=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u,\tau)\\ \theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}+2m\end{bmatrix}(u,\tau)&=e^{-m\varepsilon\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u,\tau)\end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada eğer ε çift tamsayı ise $e^{-m\varepsilon\pi i}$ nin bir olduğu ve eğer ε tek tamsayı ise $(-1)^{m}$ olduğu görülür. Eğer (3.6) eşitliklerinde ε, $\varepsilon^{'}$ ve u nun işaretlerini değiştirirsek,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(-u,\tau)=\sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(-u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau+2i\left(-n-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_{n}\exp\left\{\left(-n-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau+2i\left(-n-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

Son eşitlikte n yerine $-n$ alınırsa ,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(-u,\tau) = \sum_{n}\exp\left\{\left(n-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau + 2i\left(n-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \theta\begin{bmatrix}-\varepsilon \\ -\varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u,\tau)$$

olduğundan

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(-u,\tau) = \theta\begin{bmatrix}-\varepsilon \\ -\varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.14}$$

eşitliği elde edilir.

Eğer $\varepsilon,\varepsilon^{'}$ tamsayılar ise,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(-u,\tau) = \sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(-u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

n yerine $-n$ alınırsa ,

$$= \sum_{n}\exp\left\{\left(-n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau + 2i\left(-n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(-u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

n yerine $-(n+\varepsilon)$ alınırsa ,

$$= \sum_{n}\exp\left\{\left(-(n+\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau + 2i\left(-(n+\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(-u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi+\varepsilon^{'}\pi\right)\right\}$$

$$= \sum_{n}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon^{'}\pi\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}\exp\left\{\pi\varepsilon\varepsilon' i\right\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon\varepsilon'}\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon\varepsilon'}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)$$

olduğundan

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(-u,\tau)=(-1)^{\varepsilon\varepsilon'}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir.

O halde genelleştirilmiş $\theta-Teta$ fonksiyonu, $\varepsilon\varepsilon'$ çarpımına göre tek veya çift fonksiyon olur (Rauch ve Du Val,1973).

Herhangi bir k reel sayısı için

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'-k\end{bmatrix}(u,\tau) &= \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{(\varepsilon'-k)}{2}\pi\right)\right\}\\ &= \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{k\pi}{2}-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}\\ &= \theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{k\pi}{2},\tau)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'-k\end{bmatrix}(u,\tau)=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{k\pi}{2},\tau) \tag{3.16}$$

eşitliği elde edilir.

Her hangi bir l reel sayısı için,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+l\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon+l}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon+l}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+\pi i\tau l\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{l^2}{4}\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{l\pi\tau}{2}-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$q=\exp\{\pi\tau i\} \tag{3.17}$$

eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+l\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=q^{\frac{l^2}{4}}e^{il\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)}\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{l\pi\tau}{2}-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=q^{\frac{l^2}{4}}e^{il\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{l\pi\tau}{2},\tau)$$

olduğundan

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+l\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=q^{\frac{l^2}{4}}e^{il\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{l\pi\tau}{2},\tau) \tag{3.18}$$

denklemi elde edilir. (3.17) denkleminde u yerine $u+\frac{1}{2}k\pi$ alırsak

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}(k+l\tau)\pi,\tau)=q^{-\frac{l^2}{4}}e^{-il\left(u-\frac{1}{2}(\varepsilon'-k)\pi\right)}\ \theta\begin{bmatrix}\varepsilon+l\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}k\pi,\tau) \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte (3.16) eşitliğinden

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+l\\ \varepsilon'-k\end{bmatrix}(u,\tau)=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+l\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{k\pi}{2},\tau) \tag{3.20}$$

olduğunu kullanırsak ,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}(k+l\tau)\pi,\tau)=q^{-\frac{l^2}{4}}e^{-il\left(u-\frac{1}{2}(\varepsilon'-k)\pi\right)}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+l\\ \varepsilon'-k\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.21)$$

eşitliği elde edilir (Du Val,1973).

(3.17) denkleminden

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2n\\ \varepsilon'-2m\end{bmatrix}(u,\tau)=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'-2m\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.22)$$

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'-2m\end{bmatrix}(u,\tau)=e^{m\varepsilon\pi i}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.23)$$

olduğu kullanılırsa

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2n\\ \varepsilon'-2m\end{bmatrix}(u,\tau)=e^{m\varepsilon\pi i}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.24)$$

eşitliği elde edilir. Şu halde $m, n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $k=2m$, $l=2n$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+(m+n\tau)\pi,\tau)&=q^{-n^2}e^{-2ni\left(u+\left(m-\frac{\varepsilon'}{2}\right)\pi\right)}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+2n\\ \varepsilon'-2m\end{bmatrix}(u,\tau)\\ &=q^{-n^2}e^{-2nui}e^{(m\varepsilon+n\varepsilon')\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+(m+n\tau)\pi,\tau)=q^{-n^2}e^{-2nui}e^{(m\varepsilon+n\varepsilon')\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.25)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer ε,ε' tamsayılar ise (3.23) eşitliğinden

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+(m+n\tau)\pi,\tau)=(-1)^{m\varepsilon+n\varepsilon'}\,q^{-n^2}e^{-2nui}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.26)$$

eşitliği elde edilir (Du Val,1973) .

Son olarak (3.19) denkleminde $(k,l)=(1,0),(0,1),(1,1)$ olarak alınırsa sırasıyla aşağıdaki yarı periyot geçiş formülleri elde edilir:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u+\frac{\pi}{2},\tau)=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}-1\end{bmatrix}(u,\tau) \\
&\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u+\frac{\tau\pi}{2},\tau)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iu}e^{\frac{1}{2}\varepsilon^{'}\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon+1 \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u,\tau) \\
&\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}(u+\frac{1}{2}\left(1+\tau\right)\pi,\tau)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iu}e^{\frac{1}{2}(\varepsilon^{'}-1)\pi i}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}-1\end{bmatrix}(u,\tau)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.27)$$

3.2. TETA FONKSİYONLARI İLE ELİPTİK FONKSİYONLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bu bölümde (3.6) eşitliğiyle tanımlanan genelleştirilmiş $\theta-Teta$ fonksiyonunda

$$\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}(\mathrm{mod}\,2) \qquad (3.28)$$

karakteristikleri dikkate alınarak $\theta-Teta$ fonksiyonları elde edilecek ve bu fonksiyonlar vasıtasıyla eliptik fonksiyonlar kurulacaktır. O halde verilen bu karakteristik değerler (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa , sırasıyla

$$\theta_1\left(u,\tau\right)=\theta\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}\left(u,\tau\right)=-i\sum_n\left(-1\right)^n\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi\tau i+\left(n+\frac{1}{2}\right)2iu\right\} \qquad (3.29)$$

$$\theta_2\left(u,\tau\right)=\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\left(u,\tau\right)=\sum_n\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi\tau i+\left(n+\frac{1}{2}\right)2iu\right\} \qquad (3.30)$$

$$\theta_3\left(u,\tau\right)=\theta\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}\left(u,\tau\right)=\sum_n\exp\left\{n^2\pi\tau i+2niu\right\} \qquad (3.31)$$

$$\theta_4(u,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n(-1)^n\exp\left\{n^2\pi\tau i+2niu\right\} \qquad (3.32)$$

serileri ile tanımlanan θ_1, θ_2, θ_3 ve θ_4 fonksiyonları elde edilir.

$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\in\Gamma$ olmak üzere $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}$ karakteristiğine göre

$$A\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\varepsilon+b\varepsilon'\\c\varepsilon+d\varepsilon'\end{bmatrix}\pmod 2 \qquad (3.33)$$

şeklinde yeni bir karakteristik tanımlanabilir. Eğer

$$\delta=a\varepsilon+b\varepsilon' \qquad (3.34)$$

$$\delta'=c\varepsilon+d\varepsilon' \qquad (3.35)$$

olarak seçilirse,

$$A\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta\\\delta'\end{bmatrix} \qquad (3.36)$$

olur. Gerçekten

$$\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

ve

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} \qquad (3.38)$$

olarak alınırsa,

$$A\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}(\bmod 2) \qquad (3.39)$$

eşitliğinden,

$$\begin{bmatrix}\delta \\ \delta^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} \qquad (3.40)$$

karakteristiği elde edilir. Bu karakteristik değerler için (3.29) ve (3.30) eşitlikleriyle tanımlı $\theta-Teta$ fonksiyonlarında u yerine $u+2\pi$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\theta_1(u+2\pi,\tau)&=\theta\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}(u+2\pi,\tau)=\theta\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}(u,\tau)\\ \theta_2(u+2\pi,\tau)&=\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}(u+2\pi,\tau)=\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}(u,\tau)\end{aligned} \qquad (3.41)$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde (3.31) ve (3.32) eşitlikleriyle tanımlı $\theta-Teta$ fonksiyonlarında u yerine $u+\pi$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\theta_3(u+\pi,\tau)&=\theta\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}(u+\pi,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}(u,\tau)\\ \theta_4(u+\pi,\tau)&=\theta\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}(u+\pi,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}(u,\tau)\end{aligned} \qquad (3.42)$$

eşitlikleri elde edilir. Sırasıyla (3.41) ve (3.42) eşitliklerinden 2π sayısının θ_1 ile θ_2 fonksiyonları için ve π sayısının θ_3 ile θ_4 fonksiyonları için bir periyot olduğu görülür (Ocak,1982).

Şimdi ise $\pi\tau$ sayısının $\theta-Teta$ fonksiyonları için periyot olup olmadığını incelemek için (3.6) ile tanımlı $\theta-Teta$ fonksiyonunda u yerine $u+\pi\tau$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\tau\pi i+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\pi\tau-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+n\varepsilon\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2uni+u\varepsilon i\right.$$

$$\left.+2n\pi\tau i+\pi\tau\varepsilon i-in\varepsilon'\pi-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\} \tag{3.43}$$

eşitliği elde edilir.(3.6) eşitliği,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

şeklinde verilmişti. Eşitlikte n yerine $n+1$ alınırsa ,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n \exp\left\{\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2\left(n+\frac{n\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2uni+2ui+u\varepsilon i-n\varepsilon'\pi i-\varepsilon'\pi i-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2n\pi i\tau+n\varepsilon\pi\tau i+\varepsilon\pi\tau i\right.$$

$$\left.+2uni+2ui+u\varepsilon i-n\varepsilon'\pi i-\varepsilon'\pi i-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon'}e^{(2ui+\pi\tau i)}\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2n\pi i\tau+n\varepsilon\pi\tau i+\varepsilon\pi\tau i\right.$$

$$\left.+2uni+u\varepsilon i-n\varepsilon' i-n\varepsilon'\pi i-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\} \tag{3.44}$$

eşitliği elde edilir.

(3.43) ve (3.44) eşitliklerinden

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=(-1)^{\varepsilon'}e^{-(\pi i\tau+2iu)}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.45}$$

eşitliği elde edilir.

Şu halde,

$$\alpha=\exp\{-(\pi\tau i+2iu)\} \tag{3.46}$$

ve

$$q=\exp\{\pi\tau i\} \tag{3.47}$$

olmak üzere genelleştirilmiş θ - *Teta* fonksiyonlarında u yerine $u+\pi\tau$ alınırsa ,

$$\theta_1(u+\pi\tau,\tau)=\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=-\alpha\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)=-q^{-1}e^{-2iu}\theta_1(u,\tau) \tag{3.48}$$

$$\theta_2(u+\pi\tau,\tau)=\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\alpha\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,\tau)=q^{-1}e^{-2iu}\theta_2(u,\tau) \tag{3.49}$$

$$\theta_3(u+\pi\tau,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\alpha\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau)=q^{-1}e^{-2iu}\theta_3(u,\tau) \tag{3.50}$$

$$\theta_4(u+\pi\tau,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=-\alpha\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)=-q^{-1}e^{-2iu}\theta_4(u,\tau) \tag{3.51}$$

eşitlikleri elde edilir (Toh,2008 ve Rainville,1960). Eğer (3.48) ve (3.49) eşitliklerinde u yerine $u+\pi\tau$ alınırsa ,

$$\theta_1(u+2\pi\tau,\tau)=\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u+2\pi\tau,\tau)=-\alpha\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\alpha^2\theta_1(u,\tau) \tag{3.52}$$

$$\theta_4(u+2\pi\tau,\tau)=\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u+2\pi\tau,\tau)=-\alpha\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\alpha^2\theta_4(u,\tau) \tag{3.53}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden görülüyor ki; α çarpanı ihmal edilirse; $\pi\tau$, $\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,\tau)$ ile $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau)$ fonksiyonları için ve $2\pi\tau$, $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)$ ile $\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)$ fonksiyonları için periyot olur.

O halde çifte periyodik fonksiyonları kurabilmek için bu α çarpanının yok edilmesi gerekmektedir. Jacobi yaklaşımında bu α çarpanı herhangi iki $\theta - Teta$ fonksiyonunun oranlanmasıyla yok edilmektedir. Bu oran meromorf fonksiyon olacağından çifte periyodik meromorf bir fonksiyon ; yani eliptik bir fonksiyon kurulmuş olur (Rainville,1960). Bu oranlamayı yapmak için modüler grup şartları altında (3.36) eşitliğinde elde edilen $\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}$ karakteristiğinden faydalanarak bu karakteristiğe göre $\theta - Teta$ fonksiyonu tanımlayalım. Buna göre $A\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ dönüşümünde elde edilen $\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}$ karakteristikleri $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrislerinden birine eşit olacaktır. Buradan, $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}$ karakteristiklerine göre bir f fonksiyonu ,

$$f\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}}(u,\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)}{\theta\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}(u,\tau)} \tag{3.54}$$

eşitliğiyle tanımlansın. Bu eşitliğin ikinci tarafı 2π ve $2\pi\tau$ periyotlarına sahip olduğu için (3.54) ifadesinde sırasıyla u yerine $u+2\pi$ ve $u+2\pi\tau$ alınırsa ;

$$f\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}}(u+2\pi,\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+2\pi,\tau)}{\theta\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}(u+2\pi,\tau)} = \frac{\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)}{\theta\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}(u,\tau)} = f\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}}(u,\tau) \tag{3.55}$$

$$f\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}}(u+2\pi\tau,\tau) = \frac{\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+2\pi\tau,\tau)}{\theta\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}(u+2\pi\tau,\tau)} = \frac{\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)}{\theta\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}(u,\tau)} = f\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}_{\begin{bmatrix} \delta \\ \delta' \end{bmatrix}}(u,\tau) \tag{3.56}$$

fonksiyonları elde edilir. Eğer, $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ için (3.39) eşitliği kullanılarak elde edilen $\begin{bmatrix}\delta\\ \delta^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ karakteristiği, (3.54) fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$f\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}(u,\tau)=\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)} \tag{3.57}$$

eşitliği elde edilir. Çifte periyodik ve meromorf olan bu fonksiyon, Jacobi'nin sn fonksiyonunu tanımlar. Eğer ,

$$u=\frac{t}{\pi\theta^{2}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}} \tag{3.58}$$

alınırsa aşağıdaki eşitliklerle,

$$snt=A_1\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}) \tag{3.59}$$

eşitliğiyle ve Jacobi' nin diğer eliptik fonksiyonları ,

$$cnt=A_2\frac{\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}) \tag{3.60}$$

$$dnt=A_3\frac{\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,\tau)}) \tag{3.61}$$

eşitlikleriyle elde edilmiş olur. Böylece genelleştirilmiş θ - *Teta* fonksiyonlarından faydalanılarak Jacobi eliptik fonksiyonları elde edilmiştir (Ocak,1982).

Weierstrass' tipinde eliptik fonksiyon elde etmek için (3.48), (3.49), (3.50) ve (3.51) formüllerindeki α çarpanını yok etmek gerekir. Bunun için herhangi bir θ - *Teta* fonksiyonunun logaritmik türevinin türevi alınmalıdır.

Weierstrass' tipinde eliptik fonksiyon,

$$IL_\pi = \{m\pi + n\pi\tau : m, n \in \mathbb{Z}, \operatorname{Im}\tau > 0\} \tag{3.62}$$

latisine göre (3.48), (3.49), (3.50) ve (3.51) dönüşüm formülleri göz önüne alınarak, genelleştirilmiş θ - *Teta* fonksiyonu yardımıyla elde edilecektir.

IL_π latisine göre genelleştirilmiş θ - *Teta* fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u + (m + n\tau)\pi, \tau) = (-1)^{m\varepsilon + n\varepsilon'} \exp\{-(2\pi i n^2 + 2niu)\}\ \theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u, \tau) \tag{3.63}$$

Bu eşitlikte her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u + (m + n\tau)\pi, \tau) = (-2\pi i n^2 - 2niu) + \log(-1)^{m\varepsilon + n\varepsilon'}$$

$$+\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u, \tau) \tag{3.64}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte kullanılan u değişkeni lineer olup iki defa türev almakla,

$$\frac{d^2}{du^2}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u + (m + n\tau)\pi, \tau) = \frac{d^2}{du^2}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u, \tau) \tag{3.65}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ile elde edilen fonksiyon $m\pi$ ve $n\pi\tau$ esas periyotları ile çifte periyodik ve meromorf bir fonksiyon olduğundan eliptik bir fonksiyondur.

Aslında *Weierstrass*' σ-sigma fonksiyonu ile Jacobi θ-*Teta* fonksiyonu arasında

$$u = 2w_1u_1 \tag{3.66}$$

olmak üzere,

$$\sigma(u,\tau) = \frac{2w_1}{\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)} \exp\left\{ -\frac{1}{6} \frac{\theta'''\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)}{\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)} u_1^{\,2} \right\} \theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau) \tag{3.67}$$

bağıntısı vardır (Ocak,1982).

Weierstrass' $P(\mathrm{u},\tau)$ fonksiyonu ,

$$P(\mathrm{u},\tau) = -\frac{1}{4w_1^{\,2}} \frac{d^2}{du_1^{\,2}} \left\{ -\frac{1}{6} \frac{\theta'''\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)}{\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)} u_1^{\,2} + \log\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau) \right\}$$

$$= \frac{1}{12w_1^{\,2}} \frac{\theta'''\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)}{\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(0,\tau)} - \frac{1}{4w_1^{\,2}} \frac{d^2}{du_1^{\,2}} \log\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau) \tag{3.68}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada eşitliğin ikinci yanının birinci terimi sabit ve ikinci terimi ise $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden logaritmik türevidir. O halde (3.68) eşitliği ,

$$P(\mathrm{u},\tau) = c_1 + c_2 \frac{d^2}{du_1^{\,2}} \log\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau) \tag{3.69}$$

olarak yazılabilir. Burada c_1 ve c_2 sabitleri, u_1 değişkeninden bağımsızdır.

Ayrıca;

$$\frac{d^2}{du_1^2}\log\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)=\frac{d}{du_1}\frac{\theta'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)}{\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)}$$

$$=\frac{\theta''\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)-\theta'^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)}{\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)} \qquad (3.70)$$

eşitliğinin sağ yanının payı,

$$\phi(u_1,\tau)=c_3\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)+c_4\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau) \qquad (3.71)$$

biçiminde yazılabileceğinden,

$$P(\mathrm{u},\tau)=c_1+c_2\frac{c_3\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)+c_4\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)}{\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)}$$

$$=d_1+d_2\frac{\theta^2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)}{\theta^2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u_1,\tau)} \qquad (3.72)$$

eşitliği elde edilir. c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabitleri ve dolayısıyla d_1 ve d_2 değerleri u_1 değişkeninden bağımsızdır. Böylece θ-*Teta* fonksiyonlarının ikinci mertebeden logaritmik türevi alınarak elde edilen fonksiyon aynı zamanda Jacobi tarzında verilmiş oldu. Yani, *Weierstrass*' $P(\mathrm{u},\tau)$ fonksiyonu da θ-*Teta* fonksiyonlarının oranı olarak ifade edildi (Ocak,1982)

3. 3. TETA FONKSİYONLARININ SIFIRLARI

(3.25) denkleminden her hangi bir $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiği için

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi,\tau)=\exp\{\varepsilon\pi i\}\,\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.73}$$

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=q^{-1}\exp\{-2ui\}\exp\{\varepsilon'\pi i\}\,\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)$$

$$=\exp\{-\pi\tau i+\varepsilon'\pi i-2ui\}\,\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.74}$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi,\tau)=\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)+\varepsilon\pi i \tag{3.75}$$

$$\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)-2iu+\left(-\pi\tau i+\varepsilon'\pi i\right) \tag{3.76}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemlerde $P=\varepsilon\pi i$, $Q=-\pi\tau i+\varepsilon'\pi i$ olarak seçilirse

$$\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi,\tau)=\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)+P \tag{3.77}$$

$$\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\log\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)-2ui+Q \tag{3.78}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada açıktır ki P,Q; q ya da τ ya bağlı olup u dan bağımsızdır.

Böylece tüm θ - *Teta* fonksiyonları sadece u nun bir fonksiyonu olarak

$$\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi,\tau)=\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.79}$$

$$\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)-2i \tag{3.80}$$

eşitliklerini sağlar.

ε,ε' tamsayı iseler (3.47) denklemindeki $(-1)^{m\varepsilon+n\varepsilon'}q^{-n^2}e^{-2nui}$ ya da eğer ε,ε' tamsayı değillerse $e^{(m\varepsilon+n\varepsilon')\pi i}q^{-n^2}e^{-2nui}$ çarpanı u nun hiç bir değeri için ne sıfır ne de sonsuz olur; böylece her τ ve $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ karakteristiği için $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+(m+n\tau)\pi,\tau)$ ya da $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)$ dan biri sıfır olursa, diğeri de sıfır olur; yani $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)$ nun sıfırları IL_π latisine göre bir ya da daha fazla rezidü sınıfındadır. Şimdi birim eğri etrafında eğrisel integrali kullanarak bu sıfırların aslında bir tek rezidü sınıfında olduğunu göstereceğiz:

z_0, θ - *Teta* fonksiyonunun sıfırlarından geçmemek üzere ;

$z_0,\ z_0+\pi;\ z_0+\pi,\ z_0+(1+\tau)\pi;\ z_0+(1+\tau)\pi,\ z_0+\pi\tau$ ve $z_0+\pi\tau,\ z_0$ yolu üzerinden geçen C eğrisi boyunca integral alalım.

$$\int_C\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)du=\int_{z_0}^{z_0+\pi}\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)du$$

$$+\int_{z_0+\pi}^{z_0+(1+\tau)\pi}\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)du+\int_{z_0+(1+\tau)\pi}^{z_0+\pi\tau}\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)du$$

$$+\int_{z_0+\pi\tau}^{z_0}\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)du \tag{3.81}$$

Bu eşitlikte

$$\int_{z_0+\pi}^{z_0+(1+\tau)\pi} \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\,du = \int_{z_0}^{z_0+\pi\tau} \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi,\tau)\,du \tag{3.82}$$

$$\int_{z_0+(1+\tau)\pi}^{z_0+\pi\tau} \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\,du = -\int_{z_0}^{z_0+\pi} \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)\,du \tag{3.83}$$

$$\int_{z_0+\pi\tau}^{z_0} \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\,du = -\int_{z_0}^{z_0+\pi\tau} \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\,du \tag{3.84}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\,du = {} \\
& \int_{z_0}^{z_0+\pi}\left\{\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) - \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)\right\}du \\
& + \int_{z_0}^{z_0+\pi\tau}\left\{\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi,\tau) - \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\right\}du \\
& = \int_{z_0}^{z_0+\pi}\left\{\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) - \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) + 2i\right\}du \\
& + \int_{z_0}^{z_0+\pi\tau}\left\{\frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) - \frac{d}{du}\log\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)\right\}du \\
& = 2\pi i
\end{aligned} \tag{3.85}$$

eşitliği elde edilir. Hiç bir kutba sahip olmayan bu fonksiyon C eğrisinde yalnız bir sıfıra sahiptir; yani sıfırlar IL_π latisine göre yalnızca bir rezidü sınıfındadır

(Du Val,1973)

3.4. TETA FONKSİYONLARININ FOURIER SERİLERİNE DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

$\varepsilon, \varepsilon'$ tamsayı değerleri $\mathrm{mod}\,2$ ye göre rezidü sınıfında olmak üzere $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiği $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak seçilirse $\theta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(u,q)$, $\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(u,q)$, $\theta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(u,q)$ ve $\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(u,q)$ şeklindeki temel θ - $Teta$ fonksiyonlarının Fourier serilerine dönüştürülebildiğini gösterelim:

(3.6) eşitliğiyle tanımlı θ - $Teta$ fonksiyonunda $q = \exp\{\pi\tau i\}$ alınırsa (3.7) eşitliği elde edilmişti. Bu eşitlikteki θ - $Teta$ karakteristiği $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak alınırsa

$$\theta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(u,q) = \sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{\pi}{2}\right)} \tag{3.86}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\theta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(u,q) = \sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui} e^{-n\pi i} e^{-\frac{\pi i}{2}}$$

$$= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}$$

$$= -i \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \exp\{(2n+1)ui\} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \exp\{(2n+1)ui\} \right\}$$

Birinci toplamda n yerine $-(n+1)$ alırsak

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \exp\{(2n+1)ui\} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \exp\{-(2n+1)ui\} \qquad (3.87)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, aşağıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,q) = -i\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \exp\{-(2n+1)ui\}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \exp\{(2n+1)ui\}\right\}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \left\{\frac{\exp\{(2n+1)ui\} - \exp\{-(2n+1)ui\}}{2i}\right\}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)u$$

eşitliğinden $\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,q)$ fonksiyonu

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(u,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)u \qquad (3.88)$$

biçiminde elde edilir. Diğer yandan, (3.7) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ olarak alınırsa

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,q) = \sum_n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui} \qquad (3.89)$$

eşitliği elde edilir.

Böylece,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,q)=\sum_{n} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}+\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}$$

Birinci toplamda n yerine $-(n+1)$ alırsak

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}=\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{-(2n+1)ui} \tag{3.90}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,q)=\sum_{n} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}+\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{-(2n+1)ui}+\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)ui}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left\{\frac{\exp\{(2n+1)ui\}+\exp\{-(2n+1)ui\}}{2}\right\}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)u$$

eşitliğinden $\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,q)$ fonksiyonu,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(u,q)=2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)u \tag{3.91}$$

biçiminde elde edilir.

Benzer şekilde (3.7) eşitliğinde $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak alınırsa ,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(u,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui} \tag{3.92}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(u,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui}$$

$$= (-1)^0 q^0 e^0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui}$$

Birinci toplamda n yerine $-n$ alınırsa,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{-2nui} \tag{3.93}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(u,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui}$$

$$= (-1)^0 q^0 e^0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui}$$

$$= (-1)^0 q^0 e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{-2nui} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{-2nui} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nui}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \left\{ \frac{e^{2nui} + e^{-2nui}}{2} \right\}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nu$$

eşitliğinden $\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,q)$ fonksiyonu ,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(u,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu \tag{3.94}$$

biçiminde elde edilir. Son olarak, (3.7) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon\\\varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ olarak alınırsa

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,q)=\sum_n q^{n^2}e^{2nui} \tag{3.95}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,q)=\sum_n q^{n^2}e^{2nui}$$

$$=q^0e^0+\sum_{n=-\infty}^{-1}q^{n^2}e^{2nui}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}e^{2nui}$$

Birinci toplamda n yerine $-n$ alınırsa,

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}q^{n^2}e^{2nui}=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}e^{-2nui} \tag{3.96}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,q)=\sum_n q^{n^2}e^{2nui}$$

$$=q^0e^0+\sum_{n=-\infty}^{-1}q^{n^2}e^{2nui}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}e^{2nui}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}e^{-2nui}+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}e^{2nui}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\left\{\frac{e^{2nui}+e^{-2nui}}{2}\right\}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nu$$

eşitliğinden $\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,q)$ fonksiyonu

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(u,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nu \tag{3.97}$$

biçiminde elde edilir. Böylece teta fonksiyonları Fourier serilerine dönüştürülmüş olur (Du Val,1973 ve Nesterenko,2007)

3.5. BİRİNCİ DERECEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ TETA FONKSİYONU

u kompleks sayısı, diğer τ kompleks sayısı $\operatorname{Im}(\tau)>0$ olacak şekilde üst yarı düzlemde ve elemanları tamsayılardan oluşan $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ 2×1 lik θ*-Teta* karakteristiği verilsin. Argumenti u olan, θ*-Teta* periyodu τ, karakteristiği $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ olan birinci dereceden θ*-Teta* fonksiyonunu

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_{n}\exp \pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\} \tag{3.98}$$

eşitliğiyle tanımlayalım. θ *- Tet* fonksiyonunun işareti; ε ve ε' değerlerinin rezidü sınıfları ile belirlenir (Rauch,1973).

Teorem 3. 1: Eğer $\varepsilon=2v'+\hat{\varepsilon}$ ve $\varepsilon'=2v'+\hat{\varepsilon}'$ ise o zaman

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=(-1)^{\varepsilon v'}\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}\\ \hat{\varepsilon}'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.99}$$

eşitliği elde edilir.

İspat 3. 1: (3.98) eşitliğinden,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\pm 2\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\pm 1\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\pm 1\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\}$$

$$=\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.100)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\theta\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (3.101)$$

sonucu elde edilir.

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\pm 2\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\pm 1\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\}\exp\{\pi i(2n+\varepsilon)\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}u,\tau \qquad (3.102)$$

eşitliği elde edilir. Böylece tüme varımla (3.99) eşitliği elde edilmiş olur. (3.74) ile belirlenmiş θ-*Teta* fonksiyonlarının u ve τ nün analitik fonksiyonları olduğunu ispatlamak için (3.98) ile verilen serinin yakınsaklığı gösterilmelidir. Kabul edelim ki u düzleminin ve τ üst yarı düzleminin kompakt alt kümelerinde u ve $\mathrm{Im}(\tau)>0$ eşitsizliğini sağlayan τ için (3.98) ile verilen seri düzgün yakınsak olsun. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3. 2 : $\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)$ fonksiyonu, $u\in\mathbb{C}$ ve $\tau\in\mathrm{H}$ olmak üzere; kompleks analitik bir fonksiyondur.

İspat 3. 2: *Weierstrass*' M-testi ile $M>0$, $\lambda>0$ olmak üzere $|u|\leq M$, $\mathrm{Im}(\tau)\geq\lambda$ olan (3.98) ile tanımlı serinin terimlerinin, yakınsak pozitif serinin terimlerinden mutlak değerce küçük olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$\begin{aligned}|\exp iz| &= |\exp\{i\,\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z\}| = |\exp\{-\mathrm{Im}\,z\}\exp\{i\,\mathrm{Re}\,z\}| \\ &= |\exp\{-\mathrm{Im}\,z\}||\exp\{i\,\mathrm{Re}\,z\}| \\ &= |\exp\{-\mathrm{Im}\,z\}| \\ &= \exp\{-\mathrm{Im}\,z\} \end{aligned} \tag{3.103}$$

eşitliğini serideki her bir terime uygulayalım:

$$\left|\exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right)\right\}\right|$$

$$=\exp\left\{-\pi\left(\mathrm{Im}\,\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\mathrm{Im}\,u\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\pi\,\mathrm{Im}\,\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right\}\exp\left\{(-2\pi)\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\mathrm{Im}\,u\right\} \tag{3.104}$$

eşitliği elde edilir. $\mathrm{Im}(\tau)\geq\lambda$ olduğundan,

$$\mathrm{Im}\,\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\geq\lambda\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \tag{3.105}$$

ya da

$$-\operatorname{Im}\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \le -\lambda\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \qquad (3.106)$$

ve

$$-2\pi\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{Im}u \le \left|2\pi\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{Im}u\right|$$

$$= 2\pi\sqrt{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\,|\operatorname{Im}u| \le 2\pi\sqrt{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\,M \qquad (3.107)$$

eşitsizlikleri mevcuttur. M ve λ değerlerine bağlı sonlu sayıda n hariç,

$$\left|n+\frac{\varepsilon}{2}\right| = \sqrt{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} > \frac{4M}{\lambda} \qquad (3.108)$$

eşitsizliği sağlandığı zaman

$$1-\frac{2M}{\lambda\sqrt{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}} > \frac{1}{2} \qquad (3.109)$$

olmak üzere üstel fonksiyonunun monotonluk özelliği kullanılırsa, (3.98) ile tanımlı serinin n. teriminin mutlak büyüklüğü için üst sınıra ulaşabiliriz:

$$\exp\left\{-\pi\left(\lambda\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - 2M\sqrt{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\right)\right\} = \exp\left\{-\pi\lambda\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\left[1-\frac{2M}{\lambda\sqrt{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}}\right]\right\}$$

$$\le \exp\left\{-\pi\frac{\lambda}{2}\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right\} \qquad (3.110)$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece (3.98) ile tanımlı serinin her bir teriminin mutlak değerce büyüklüğü için bir üst sınır bulunduğundan ve

$$\sum \exp\left\{-\pi \frac{\lambda}{2}\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right\} \tag{3.111}$$

serisi Cauchy *n.* kök testi ile yakınsak olduğundan *Weierstrass*' M testine göre (3.98) ile tanımlı seri yakınsaktır (Rauch,1973).

Teorem 3. 3: θ-*Teta* fonksiyonu için aşağıdaki fonksiyonel denklemler geçerlidir:

a) $$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+1,\tau)=(-1)^{\varepsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.112}$$

b) $$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\tau,\tau)=(-1)^{\varepsilon'}\,e^{\pi i(-2u-\tau)}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.113}$$

İspat 3. 3:

a) (3.98) den

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+1,\tau)=\sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+1+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right)\right\}\exp\{\pi i(2n+\varepsilon)\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon}\sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right)\right\} \tag{3.114}$$

eşitliği elde edilir.

(3.98) ve (3.114) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+1,\tau)=(-1)^{\varepsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.115}$$

eşitliği elde edilir.

b) (3.98) ile tanımlı seride n yerine $n+1$ alırsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right.$$

$$\left.+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\}\exp\left\{\pi i\left(\tau+2u+\varepsilon'\right)\right\} \tag{3.116}$$

eşitliği elde edilir.

(3.98) ile tanımlı seride u yerine $u+\tau$ alırsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\tau,\tau)=\sum_n \exp \pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\tau+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp \pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\tau\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right.$$

$$\left.+2\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\varepsilon'}{2}\right)\right\} \tag{3.117}$$

eşitliği elde edilir. (3.116) ve (3.117) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\tau,\tau)=\exp\left\{-\pi i\left(\tau+2u+\varepsilon'\right)\right\}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)$$

$$=(-1)^{\varepsilon'}\,e^{\pi i(-\tau-2u)}\quad\theta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{3.118}$$

eşitliği elde edilir (Rauch,1973).

4. BULGULAR

Birinci mertebeden θ-Teta fonksiyonunun, $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}$ karakteristiği, u argumenti ve τ periyodu olmak üzere

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau) = \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\} \qquad (3.74)$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Bu bölümde birinci mertebeden θ - T fonksiyonlarının periyotlarının $\frac{1}{2^r}$ katlarına göre dönüşümleri elde edilmiştir.

4.1. $\boldsymbol{\theta}$-TETA FONKSİYONLARININ $\left(\frac{\pi}{2^r},\frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ PERİYOT ÇİFTLERİNE GÖRE DÖNÜŞÜMLERİ

Teorem 4. 1: $\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki bağıntıları sağlar:

a) $$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi,\tau) = (-1)^{\varepsilon}\,\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (4.1)$$

b) $$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau) = (-1)^{\varepsilon'}\,e^{-(\pi i\tau+2iu)}\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

c) $$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u+\pi+\pi\tau) = (-1)^{\varepsilon-\varepsilon'}\,\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau) \qquad (4.3)$$

İspat 4. 1: a) (3.98) ile tanımlı seride u yerine $u+\pi$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi,\tau)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\pi-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)+2in\pi+i\varepsilon\pi\right\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon}\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)$$

olduğundan , (4.1) eşitliği elde edilir.

b) (3.98) ile tanımlı seride u yerine $u+\pi\tau$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\pi\tau-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+n\varepsilon\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2uni+u\varepsilon i\right.$$

$$\left.+2n\pi\tau i+\pi\tau\varepsilon i-in\varepsilon'\pi-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\} \qquad (4.4)$$

eşitliği elde edilir. (3.98) ile verilen seri toplamında n yerine $n+1$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_n \exp\left\{\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2\left(n+\frac{n\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\pi i\tau\right.$$

$$+2uni+2ui+u\varepsilon i-n\varepsilon^{'}\pi i-i\varepsilon^{'}\pi-\frac{\varepsilon\varepsilon^{'}}{2}\pi i\Bigg\}$$

$$=\sum_{n}\exp\Bigg\{n^{2}\pi i\tau+\pi i\tau+\frac{\varepsilon^{2}}{4}\pi i\tau+2n\pi i\tau+n\varepsilon\pi\tau i+\varepsilon\pi\tau i$$

$$+2uni+2ui+u\varepsilon i-n\varepsilon^{'}\pi i-i\varepsilon^{'}\pi-\frac{\varepsilon\varepsilon^{'}}{2}\pi i\Bigg\}$$

$$=\left(-1\right)^{\varepsilon^{'}}e^{\left(2ui+\pi\tau i\right)}\sum_{n}\exp\Bigg\{n^{2}\pi i\tau+\frac{\varepsilon^{2}}{4}\pi i\tau+2n\pi i\tau+n\varepsilon\pi\tau i+\varepsilon\pi\tau i$$

$$+2uni+u\varepsilon i-n\varepsilon^{'}i-n\varepsilon^{'}\pi i-\frac{\varepsilon\varepsilon^{'}}{2}\pi i\Bigg\} \qquad (4.5)$$

eşitliği elde edilir. (4.4) ve (4.5) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}\left(u+\pi\tau,\tau\right)=\left(-1\right)^{\varepsilon^{'}}e^{-\left(\pi i\tau+2iu\right)}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}\left(u,\tau\right) \qquad (4.2)$$

eşitliği elde edilir.

c) (3.98) ile tanımlı seride u yerine $u+\pi+\pi\tau$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}\left(u+\pi+\pi\tau,\tau\right)=\sum_{n}\exp\Bigg\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2}\pi i\tau$$

$$+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\pi+\pi\tau-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\Bigg\}$$

$$=\sum_{n}\exp\Bigg\{n^{2}\pi i\tau+n\varepsilon\pi i\tau+\frac{\varepsilon^{2}}{4}\pi i\tau+2uni+2n\pi i$$

$$+2n\pi\tau i-in\varepsilon^{'}\pi+u\varepsilon i+\pi\varepsilon i+\pi\tau\varepsilon i-\frac{\varepsilon\varepsilon^{'}}{2}\pi i\Bigg\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon}\sum_{n}\exp\left\{n^2\pi i\tau+n\varepsilon\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2uni+2n\pi\tau i\right.$$

$$\left.-in\varepsilon'\pi+u\varepsilon i+\pi\tau\varepsilon i-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\} \tag{4.6}$$

eşitliği elde edilir. (3.98) ile verilen seri toplamında n yerine $n+1$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)=\sum_{n}\exp\left\{\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_{n}\exp\left\{n^2\pi i\tau+\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2\left(n+\frac{n\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2uni+2ui+u\varepsilon i-n\varepsilon'\pi i-i\varepsilon'\pi-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\}$$

$$=\sum_{n}\exp\left\{n^2\pi i\tau+\pi i\tau+\frac{\varepsilon^2}{4}\pi i\tau+2n\pi i\tau+n\varepsilon\pi\tau i+\varepsilon\pi\tau i\right.$$

$$\left.+2uni+2ui+u\varepsilon i-n\varepsilon'\pi i-i\varepsilon'\pi-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\}$$

$$=(-1)^{\varepsilon'}\exp\{2ui+\pi\tau i\}\sum_{n}\exp\left\{n^2\pi i\tau+n\varepsilon\pi i\tau\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{4}+2uni+2n\pi\tau i\ -in\varepsilon'\ +u\varepsilon i+\pi\tau\varepsilon i-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i\right\} \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir. (4.6) ve (4.7) eşitliklerinden ,

$$\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u+\pi+\pi\tau,\tau)=(-1)^{\varepsilon-\varepsilon'}\exp\{-(2ui+\pi\tau i)\}\theta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) \tag{4.3}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4. 2: $r \in \mathbb{N}^{+}$ olmak üzere $\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}(u,\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\exp\left\{\frac{\pi i\varepsilon(1+\tau)}{2^r}\right\}\sum_n \exp\left\{\frac{2n\pi i(1+\tau)}{2^r}\right\}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\} \tag{4.8}$$

İspat 4. 2: (3.98) ile tanımlı seride u yerine $u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau\right.$$

$$+2i\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)$$

$$\left.+\frac{2n\pi i}{2^r}+\frac{2n\pi i\tau}{2^r}+\frac{\varepsilon\pi i}{2^r}+\frac{\varepsilon\tau\pi i}{2^r}\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2n\pi i}{2^r}(1+\tau)+\frac{\varepsilon\pi i}{2^r}(1+\tau)\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\pi i\varepsilon(1+\tau)}{2^r}\right\}\sum_n \exp\left\{\frac{2n\pi i(1+\tau)}{2^r}\right\}\exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\varepsilon^{'}}{2}\pi\right)\right\} \tag{4.8}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte, $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ alınırsa ,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}-\frac{1}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi\tau i+\frac{\pi\tau i}{4}+n\pi\tau i+2uin+\frac{2\pi ni}{2^r}+\frac{2\pi n\tau i}{2^r}\right.$$

$$\left.-\pi ni+ui+\frac{\pi i}{2^r}+\frac{\pi\tau i}{2^r}-\frac{\pi i}{2}\right\}$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\pi i\right\}\sum_n \exp(-in\pi)\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right\}$$

$$=-i\sum_n(-1)^n\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right\} \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir.

(4.8) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ alınırsa ,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\sum_n\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right\} \tag{4.10}$$

eşitliği elde edilir. (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\begin{cases}-i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right), n=2k\in\mathbb{Z}\\ i\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right), n=2k+1\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{4.11}$$

dönüşümleri elde edilir.

(4.8) denkleminde $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ alınırsa

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+2in\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\sum_n\exp\{-\pi ni\}\exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{2\pi ni}{2^r}+\frac{2\pi n\tau i}{2^r}\right\}$$

$$=(-1)^n\sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{2\pi ni}{2^r}+\frac{2\pi n\tau i}{2^r}\right\} \tag{4 . 12}$$

eşitliği elde edilir.

(4.8) denkleminde $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2in\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{2\pi ni}{2^r}+\frac{2\pi n\tau i}{2^r}\right\} \qquad (4.13)$$

denklemi elde edilir. (4.12) ve (4.13) denklemlerinden,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right)=\begin{cases} \theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right), n=2k\in\mathbb{Z} \\ -\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r},\tau\right), n=2k+1\in\mathbb{Z} \end{cases} \qquad (4.14)$$

dönüşümleri elde edilir.

Gerçekten, (4.8) eşitliğinde $r=2$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau\right.$$

$$\left.+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right\} \qquad (4.15)$$

eşitliği elde edilir. (3.98) ile verilen seri toplamında u yerine $u+\pi\tau$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\varepsilon'}{2}\pi\right)\right. \qquad (4.16)$$

eşitliği elde edilir.

(4.15) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ alınırsa ,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2in\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{2\pi ni}{4}+\frac{2\pi n\tau i}{4}\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{\frac{\pi ni}{2}\right\}\exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{\pi n\tau i}{2}\right\}$$

$$=\sum_n i^n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{\pi n\tau i}{2}\right\} \qquad (4.17)$$

eşitliği elde edilir.

(4.16) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2in\left(u+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{\pi n\tau i}{2}\right\} \qquad (4.18)$$

eşitliği elde edilir.

(4.17) ve (4.18) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\begin{cases}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=4k \in \mathbb{Z}\\ i\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+1)\in\mathbb{Z}\\ \theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+2)\in\mathbb{Z}\\ -i\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+3)\in\mathbb{Z}\end{cases} \qquad (4.19)$$

dönüşümleri elde edilir.

(4.15) eşitliğinde $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{n^2\pi\tau i+2in\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi\tau i+2inu+\frac{\pi ni}{2}+\frac{\pi n\tau i}{2}-in\pi\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{-\frac{in\pi}{2}\right\}\exp\left\{n^2\pi\tau i+2inu+\frac{\pi n\tau i}{2}\right\}$$

$$=\sum_n (-i)^n \exp\left\{n^2\pi\tau i+2inu+\frac{\pi n\tau i}{2}\right\} \qquad (4.20)$$

eşitliği elde edilir. Eğer (4.16) eşitliğinde $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{n^2\pi\tau i+2in\left(u+\frac{\pi\tau}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi\tau i+2inu+\frac{\pi n\tau i}{2}-in\pi\right\}$$

$$=\sum_n \exp\{-in\pi\}\exp\left\{n^2\pi\tau i+2inu+\frac{\pi n\tau i}{2}\right\}$$

$$=\sum_n (-1)^n \exp\left\{n^2\pi\tau i+2inu+\frac{\pi n\tau i}{2}\right\} \qquad (4.21)$$

eşitliği elde edilir.

(4.20) ve (4.21) eşitliklerinden ,

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\begin{cases}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=4k \ \in\mathbb{Z}\\ i\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+1)\in\mathbb{Z}\\ -\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+2)\in\mathbb{Z}\\ -i\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+3)\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad (4.22)$$

dönüşümleri elde edilir.

(4.15) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+n\pi\tau i+\frac{\pi}{4}\tau i+2uni\right.$$

$$\left.+\frac{\pi ni}{2}+\frac{\pi n\tau i}{2}+ui+\frac{\pi}{4}i+\frac{\pi}{4}\tau i\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{\pi ni}{2}\right\}\exp\left\{\frac{\pi}{4}i\right\}\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+n\pi\tau i\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}\tau i+2uni+\frac{\pi n\tau i}{2}+ui\right\}$$

$$=i^n\,\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+n\pi\tau i+\frac{\pi}{2}\tau i\right.$$

$$\left.+2uni+\frac{\pi n\tau i}{2}+ui\right\} \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir.

(4.16) denkleminde $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi\tau}{4}\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+n\pi\tau i+\frac{\pi}{2}\tau i\right.$$

$$\left.+2uni+\frac{\pi n\tau i}{2}+ui\right\} \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir. (4.23) ve (4.24) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\begin{cases}\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=4k \in\mathbb{Z} \\ i\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+1)\in\mathbb{Z} \\ -\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+2)\in\mathbb{Z} \\ -i\theta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+3)\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{4.25}$$

dönüşümleri elde edilir. (4.15) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4}-\frac{1}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+\pi n\tau i+\frac{\pi\tau i}{4}+2uni+\frac{\pi ni}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\pi n\tau i}{2}-in\pi+ui+\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi\tau i}{4}-\frac{\pi}{2}i\right\}$$

$$=\sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau+\frac{3\pi n\tau i}{2}+\frac{\pi\tau i}{2}+2uni-\frac{n\pi i}{2}+ui-\frac{\pi}{4}i\right\}$$

$$=\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\sum_n(-i)^n\exp\left\{n^2\pi i\tau+\frac{3\pi n\tau i}{2}+\frac{\pi\tau i}{2}+2uni+ui\right\}$$

$$=(-i)^n(-i)\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+\frac{3\pi n\tau i}{2}\right.$$

$$\left.+2uni+ui\right\} \qquad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. (4.16) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ alınırsa,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\sum_n\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi\tau}{4}-\frac{1}{2}\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+\pi n\tau i+\frac{\pi\tau i}{4}+2uni\right.$$

$$\left.+\frac{\pi n\tau i}{2}-in\pi+ui+\frac{\pi\tau i}{4}-\frac{\pi}{2}i\right\}$$

$$=\sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+\frac{3\pi n\tau i}{2}+\frac{\pi\tau i}{2}+2uni-\frac{n\pi i}{2}+ui-\frac{\pi}{4}i\right\}$$

$$=(-i)^n\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+\frac{3\pi n\tau i}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\pi\tau i}{2}+2uni+ui\right\}$$

$$=(-i)^n(-i)\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+\frac{3\pi n\tau i}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{\pi\tau i}{2}+2uni+ui\right\} \qquad (4.27)$$

eşitliği elde edilir.

(4.26) ve (4.27) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\tau}{4},\tau\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\begin{cases}\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\dfrac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=4k\in\mathbb{Z}\\ i\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\dfrac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+1)\in\mathbb{Z}\\ -\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\dfrac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=\left(4k+2\right)\in\mathbb{Z}\\ -i\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\dfrac{\pi\tau}{4},\tau\right), n=(4k+3)\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{4.28}$$

dönüşümleri elde edilir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Kompleks analizde önemli bir araştırma sahasını teşkil eden eliptik fonksiyonların çifte periyodik ve meromorf olmasından yola çıkılarak, $\theta-Teta$ fonksiyonlarının periyotlarının katları kullanılarak çifte periyodik olduğu ispatlanabilirse $\theta-Teta$ fonksiyonları yoluyla da çeşitli eliptik fonksiyonlar kurulabilir.

KAYNAKLAR

CHANDRASEKHARAN,K., 1980, Elliptic Functions, Springer-Verlag, New York, 3-540-15295-4.

D'AMBROISE, J.,2010, Applications of elliptic and theta functions to Friedman - Robertson-Lemaître-Walker cosmology with cosmological constant,Vol.57, 279-293.

DU VAL, P., 1973, Elliptic Functions and Elliptic Curves. Cambridge University, London, 0 521200369.

DUTTA,M. and DEBNATH, L., 1965, Elements of the theory of elliptic functions and associated functions with applications. The World Press, Calcutta, OL21931444M.

FRANZ, M., 2007, Theta Functions, Irish Math.Soc.,No.60,91-112.

HUSEMÖLLER, D., 1987, Elliptic Curves,Springer,New York,0-387-95490-2.

KOBLITZ,N.,1984, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms,Springer-Verlag,NewYork,0-387-96029-5.

NESTERENKO,Y.V., 2007, On Arithmetic Properties of Values of Theta-Constants,Journal of Mathematical Sciences,Vol.146,No.2,,5697-5716.

OCAK, R.,1982, *Genelleştirilmiş Teta Fonksiyonu Vasıtasıyla Eliptik Fonksiyon Teşkili ve Bazı Bağıntılar*, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

OCAK, R. , 2001, Kompleks Analiz, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

RAINVILLE, E. D.,1960, Special Functions,The Macmillan Company,New York,

60- 5115.

RAUCH, E. H., 1973, Elliptic Functions, Theta Functions, and Riemann Surfaces, The Williams and Wilkins Company, Baltimore, 683-07187-4.

SCHOENEBERG, B., 1974, Elliptic Modular Functions. New York, 3-540-06382-X.

ŞEKER, A., 1976, *Weierstrass ve Jacobi Fonksiyonlarının eşlenik kompleks periyodları ve yarı period için değer değişimleri*, Doktora tezi,Fen Bilimleri Enstitüsü.

TOH, P. C., 2008,Generalized m-th Order Theta Functions And The Macdonald Identities, Int.J.Number Theory,4(3), 461-474.

YILDIZ, İ., 1989, *Weierstrass Eliptik ve Yarı Eliptik Fonksiyonlarının* $\frac{1}{2^r}$ *Katlarına Göre Değer Değişimleri*. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

YILDIZ, İ.,1998,Kompleks Analiz. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: Burdurlu, Esra
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 11.09.1987, İstanbul
Medeni hali	: Bekâr
Telefon	: 0380 541 24 04 / 2236
Faks	: 0380 541 24 03
e-mail	: esraburdurlu@duzce.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Sakarya Üniversitesi/Matematik Bölümü	2009
Lise	Semiha Şakir Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-	Düzce Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce