T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKİ-GRÜSS EŞİTSİZLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAGİHAN BAŞAK

TEMMUZ 2012

DÜZCE

T.C

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

KABUL VE ONAY BELGESİ

Nagihan BAŞAK tarafından hazırlanan Kesirli İntegraller İçin Ostrowski-Grüss Eşitsizliği isimli Lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 06/07/2012 tarih ve 2012/221 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye

(Tez Danışmanı)

Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Üye	Üye
Prof. Dr. Kazım İLARSLAN	Doç. Dr. Nesip AKTAN
Kırıkkale Üniversitesi	Düzce Üniversitesi

Tezin savunulduğu tarih: 18/07/2012

<u>ONAY</u>

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Nagihan BAŞAK'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Doç. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

18.07.2012

Nagihan BAŞAK

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca dualarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz 2012 **Nagihan BAŞAK**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER

J_a^α	:	α. Dereceden Kesirli İntegral
D_a^α	:	α. Dereceden Kesirli Türev
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
β	:	Beta Fonksiyonu
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	$n-$ boyutlu Öklid Uzayı
I	:	$\mathbb{R}'$de Bir Aralık
I^0	:	I'nın İçi
f'	:	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$AC\,[a,b]$	:	Mutlak Sürekli Fonksiyonların Kümesi
$\Re\,(\alpha)$	:	Riemann-Liouville Kesirli integral veya türevinin sanal kısmı
$L_p\,(a,b)$	:	p. Dereceden (a,b) Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
D_{RL}^α	:	α. Dereceden Riemann-Liouville Kesirli Türevi

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKI-GRÜSS EŞİTSİZLİĞİ

Nagihan BAŞAK
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Temmuz 2012, 59 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kesirli integral ve kesirli türev kavramlarının nasıl oluştuğu, nasıl geliştiği ile ilgili birtakım bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım ve temel teoremlerden söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli integraller ve kesirli türevlerin elde edilişi ve bu konu hakkındaki çözüm yöntemleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, kesirli integraller kullanılarak Ostrowski-Grüss tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler, Ostrowski-Grüss Eşitsizliği.

ABSTRACT

OSTROWSKI-GRÜSS TYPE INEQUALITY FOR FRACTIONAL INTEGRALS

Nagihan BAŞAK
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2012, 59 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, there is definitions and the basic theorems have been mentioned which is necessary in this work. In the second chapter, there is information about how the concepts of fractional integral and fractional derivative are consist and how it evolves. The third chapter is about obtaining the fractional integrals and fractional derivatives and the solution methods about them. In the fourth chapter is divided into the implementation of Ostrowski-Grüss type inequality for the fractional integrals.

Keywords: Fractional Integrals and Fractional Derivatives, Ostrowski-Grüss Inequality.

EXTENDED ABSTRACT

OSTROWSKI-GRÜSS TYPE INEQUALITY FOR FRACTIONAL INTEGRALS

Nagihan BAŞAK
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki SARIKAYA
July 2012, 59 pages

1.INTRODUCTION

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, there is information about how the concepts of fractional integral and fractional derivative are consist and how it evolves. In the second chapter, there is definitions and the basic theorems have been mentioned which is necessary in this work. The third chapter is about obtaining the fractional integrals and fractional derivatives and the solution methods about them. In the fourth chapter is divided into the implementation of the fractional integrals for Ostrowski-Grüss type inequality.

Recently, several generalisations of the Ostrowski integral inequality for mappings of bounded variation and for Lipschitzian, monotonic, absolutely continuous and n-times differentiable mappings with error estimates for some special means and for some numerical quadrature rules are considered by many authors. For recent results and generalizations concerning Ostrowski's inequality see the references therein.

Fractional integrals have used for problems of estimating the time and currents which is formed by rain and snowmelts in Fırat river basin and also for financial mathematics. These are some examples of fractional integrals in applied field. In this study, we obtain new Ostrowski-Grüss type inequality by using fractional integrals.

1 GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Polya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pecaric ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır (Hardy et al. 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961'de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine "Inequalities" adı verilen kitaptır. Bunu Mitrinović'in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" (Mitrinović et al. 1991), "Classical and New Inequalities in Analysis" (Mitrinović et al. 1993), "Mathematical Inequalities" (Pachpatte 2005) ve "Convex Functions and Their Applications" (Niculescu and Perssons 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi ise C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri 1981 yılında Hermite tarafından elde edilen, Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" isimli kitapta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da S.S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan "Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration" isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler Ravi Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, Roberts and Varberg, N.S. Barnett, M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone şeklinde sıralanabilir.

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından duyuruldu. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için varmıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıktı. Euler kesirli türevi ele aldı. 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları hakkında birçok çalışma olmasına rağmen herhangi bir monografi yayınlanmamıştır. Bunun üzerine S.G. Samko ile A.A. Kilbas ve O.I. Marichev tarafından bu boşluk doldurulmuştur. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ile geniş kapsamlı bir monografi yayınlanmıştır.

Kesirli diferansiyel teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer bir çok alanda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada kesirli türev kavramı ile konveks fonksiyonlar kavramlarını birlikte ele alarak çalışmamızın son kısmını oluşturacak olan Ostrowski-Grüss tipli integral eşitsizlikleri elde edildi. Sonuçların elde edilmesi için klasik olarak bilinen Montgomery özdeşliğini kesirli integraller için elde edildi.

2 KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

Tanım 2.1. Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.2. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme *operatör* denir.

Tanım 2.3 (Gamma Fonksiyonu). Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralıyabiliriz.

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.

Tanım 2.4 (Konveks Fonksiyon). $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Konveks Fonksiyonların Temel Özellikleri:

i. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k), a_j > 0; (j = 1, 2, 3, ..., k)$$

fonksiyonuda konvekstir.

ii. $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ konkav ve $S=\{x:g(x)>0\}$ olsun. $f:S\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ olmak üzere f, S' de konvekstir.

iii. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ konveks olsun. Bu takdirde; $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=(g\circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

iv. $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ konveks ve h, $h(x)=Ax+B$ formunda $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x)=g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

v. f ve g J_- konveks ise $f(x)+g(x)$ de J_- konvekstir.

vi. f, $\overline{I'}$ 'de J_- konveks ve g, $\overline{I''}$ de J_- konveks ise bu takdirde $f(x)\,g(x)$ de $\overline{I}=\overline{I'}\cap\overline{I''}$ de J_- konvekstir.

Tanım 2.5. $f:L_1[a,b]$ olsun. $J^{\alpha}_{a+}f$ ve $J^{\alpha}_{b-}f$ Riemann-Liouville integralleri $\alpha>0$ ile $a\geq 0$ için tanımladığımızda,

$$J^{\alpha}_{a+}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\quad x>a$$

ve

$$J^{\alpha}_{b-}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt,\quad x<b$$

dır. $\Gamma(\alpha)$ bir Gamma fonksiyonu ve $J^{0}_{a+}f(x)=J^{0}_{b-}f(x)=f(x)$ dır.

Tanım 2.6 (Beta Fonksiyonu). $m,n>0$ için

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

biçiminde tanımlanan β fonksiyonuna $Beta\ fonksiyonu$ denir.

Tanım 2.7. V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise, V kümesi K cismi üstünde bir *vektör uzayı*dır, denir.

$(V1)$ V kümesinde $+$ ile gösterilen ve adına *toplama* denilen bir işlem tanımlanmıştır ve $(V,+)$ değişmeli gruptur.

(1) Her $u, v \in V$ için, $u+v$ tanımlıdır ve $u+v \in V$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

(2) Her $u, v, w \in V$ için, $(u+v)+w = u+(v+w)$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

(3) $[\exists 0 \in V, (\forall u \in V$ için, $u+0 = u$ ve $0+u = u)]$ dır. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin etkisiz (*birim*) elemanı vardır. Bu etkisiz elemanı 0 simgesi ile gösterdik.

(4) Her $u \in V$ için, V kümesinde $-u \in$ ile gösterilen ve

$$u+(-u) = 0 \text{ ve } (-u)+u = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesindeki her bir u elemanının toplamaya göre tersi vardır. u nun tersi $-u$ ile gösterilmiştir.

(5) Her $u, v \in V$ için, $u+v = v+u$ tir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

$(V2)$ $K \times V \to V$ $(a, u) \to au$ biçiminde, adına *skalerle* çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

(a) Her $a \in K$, her $u, v \in V$ için, $a(u+v) = au + av$.

(b) Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için, $(a+b)u = au + bu$.

(c) K nın çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre, V nin her elemanı için, $1u = u$ dır.

(d) Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için, $(ab)u = a(bu)$.

Tanım 2.8. V, reel sayı cismi üstünde vektör uzayı ise, bu vektör uzayına *reel vektör uzayı* denir. V, karmaşık sayı cismi üstünde vektör uzayı ise bu durumda V ye *kompleks vektör uzayı* denir.

Tanım 2.9. $\Omega_1 = [a, b], \Omega_2 = [c, d]$ $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x, y)$, $\Omega_1 \times \Omega_2$ üzrinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

şeklindeki eşitliğe $Dirichlet\ formülü$ denir.

Tanım 2.10 (Mutlak Süreklilik). $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve (x_k, y_k) sonlu bir aralık olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyleki,

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

dır.

Tanım 2.11. $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

şeklindeki eşitsizliğe *üçgen eşitsizliği* denir.

Tanım 2.12 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu). f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_b^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \ \ (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.13. E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi K sayısı için $f(x) > K$ olan $x \in E$ değerlerin kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna *Ölçülebilir fonksiyon* denir.

Teorem 2.1 (Lebesque integralinin varlık teoremi). Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise $Lebesque$ integrali vardır.

Tanım 2.14. $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna $sınırlı\ fonksiyon$ denir.

Tanım 2.15. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f : \left(\int_E |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \ \|f\|_\infty = \left(\int_E |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir $Banach$ uzayıdır.

Tanım 2.16. $f(x)$, $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlı ve 2π peryotlu bir fonksiyon olsun.

1. $f(x)$,$(-\pi,\pi)$ aralığında sürekli veya parçalı sürekli bir fonksiyondur.

2. $f(x)$ fonksiyonu bir peryot içerisindeki maksimum ve minumum sonlu sayıda olmalıdır.

3. $f(x)$ fonksiyonu bir peryot içerisinde mutlak integrallenebilir olmalıdır. Yani,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty$$

olmalıdır. Bu yukarıdaki şartlara *Dirichlet sartları* denir.

$f(t)$ fonksiyonu Dirichlet şartlarını sağlar ve $(-\infty,\infty)$ aralığı üzerinde mutlak integrallenebilirse

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < M$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa

$$F(w) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-iwt} dt$$

veya

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt} dw$$

integrallerine *Fourier integrali* denir. Burada $F(w)$ ya $f(t)$ fonksiyonunun *Fourier dönüsümü* denir.

Tanım 2.17. $n \in \mathbb{N}$ için,

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ ve } \left(D^{n-1} f\right)(x) \in AC[a,b] \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right) \right\}$$

dır.

Teorem 2.2 (Ostrowski Eşitsizliği). $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^{o}' de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f' \in L[a,b]$ olacak şekilde I sınırlı olsun. Burada $a < b$ ve $a, b \in I$ dır. Eğer $\left|f'(x)\right| \leq M$ ise

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq M(b-a)\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik literatürde Ostrowski Eşitsizliği olarak bilinir.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak,

$$P_1(x,t) := \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t < x \\ \frac{t-b}{b-a}, & x \leq t \leq b \end{cases}$$

Peano çekirdeği yardımıyla *Montgomery* özdeşliği olarak bilinen

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b P_1(x,t)\,f'(t)\,dt$$

ifadesi elde edilebilir. Burada $\left|f'(t)\right| < M$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| &\leq \int_a^b \left|P_1(x,t)\right| \left|f'(t)\right| dt \\
&\leq \frac{M}{b-a}\left[\int_a^x (t-a)\,dt + \int_x^b (b-t)\,dt\right] \\
&= \frac{M}{2(b-a)}\left[(x-a)^2 + (b-x)^2\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
(x-a)^2 + (b-x)^2 &= \left(x - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - a\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - x\right)^2 \\
&= \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - x\right) + \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \\
&= 2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\
&= 2(b-a)^2\left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]
\end{aligned}$$

kullanılarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3 (Grüss Eşitsizliği). f ve g, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $m,n,M,N\in\mathbb{R}$ ve $\forall x\in[a,b]$ için

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx-\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx\right|\leq\frac{1}{4}(M-m)(N-n)$$

dir. Bu eşitsizlik literatürde Grüss Eşitsizliği olarak bilinir.

3 MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde kesirli Riemann-Liouville integral ve kesirli türev operatörlerinin elde edilişini ve bazı özelliklerini vereceğiz.

3.1 KESİRLİ RİEMANN-LİOUVİLLE İNTEGRAL VE TÜREVLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Kesirli Riemann-Liouville integral operatörünü elde etmek için ilk olarak n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{1}$$

integralini ele alalım. Bu integralde integrasyon sırasını ve buna bağlı sınırları değiştirelim. Bunun için;

$$\begin{array}{ll} a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ ,..., & ,..., \\ a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\ a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x \end{array} \tag{2}$$

sınır değişimleri altında (1) ifadesi,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x ... \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 ... \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \tag{3}$$

şeklinde yazılır. (3) ifadesinin sag tarafı terim terim hesaplanırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{4}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ oluşu kullanılırsa,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{5}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n nin tamsayı olmaması durumunda (5) eşitliğinin sağ yanı için aşağıdaki kesirli Riemann-Liouville integral operatörünün tanımı verilebilir.

Tanım 3.1.1. $f(x) \in L_1(a,b)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (J_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > a \\ (J_{b-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x < b \end{aligned} \tag{6}$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α. mertebeden kesirli integral denir. Bu integral Riemann-Liouville kesirli integrali olarak bilinir. Burada $\left(J_{a^+}^0 f\right)(x) = f(x)$ ve $\left(J_{b^-}^0 f\right)(x) = f(x)$ dir.

Şimdi $f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integralini gözönüne alalım.

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > a.$$

Ele alınan bu integral kabuller altında;

$$(J_{a+}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}} (x-t))^{-\frac{1}{2}} dt, \qquad x > a$$

olarak yazılır. Şayet burada

$$t = a + (x-a)\tau$$

degişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1} d\tau = B(p,q)$$

şeklindeki Beta fonksiyonu yardımıyla,

$$\begin{aligned}
(J_{a+}^{\frac{1}{2}}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}}(x-t))^{-\frac{1}{2}}dt, \qquad x>a \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (x-a)^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{1}{2}+1}\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)B(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma(\frac{3}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x-a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

n. mertebeden türevlerin

$$f(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d^2f(x)}{dx^2},\ \frac{d^3f(x)}{dx^3},...,\frac{d^nf(x)}{dx^n},...$$

sonsuz dizisini gözönüne alalım. Bu dizi, keyfi mertebeden diferensiyel düşüncesi altında tekrarlanan diferensiyelin bir genelleştirilmesidir. Burada temel amaç $\frac{d^n}{dx^n}$ semboli ile gösterilen operatörün n tamsayı değerli parametresini, tamsayı olmayan bir α parametresiyle yer değiştirmektir.

Genel kesirli türevleri vermeden önce yarım türev de denen bir türev formülü elde ederek bir uygulama yapalım ve daha sonra daha genel kesirli türev formülleri verelim.

Bunun için, $f(x)=x^k$ şeklindeki fonksiyonu ele alalım. Burada k pozitif bir tamsayıdır. Ele aldığımız fonksiyonun a. mertebeden türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^k \\
f'(x) &= kx^{k-1} \\
f''(x) &= k(k-1)x^{k-2} \\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\
&\quad ... \\
f^{(a)}(x) &= k(k-1)(k-2)...(k-a+1)x^{k-a} \\
&= \frac{k!}{(k-a)!}x^{k-a}
\end{aligned}$$

yazılır. Yine burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a}$$

eşitliğini yazarız. Buradaki a sayısını herhangi bir pozitif sayı olarak seçerek fonksiyonun kesirli türevlerini hesaplayabiliriz.

Bir an için kabul edelimki $a = \frac{1}{2}$ ve $k = 2$ olsun. Bu durumda fonksiyonun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \text{ ve } a = \frac{1}{2} \;\; ise, \\
f^{(a)}(x) &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a} \text{ eşitliğinden yararlanarak,} \\
f^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} \\
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}},\; \Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(1+\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \\
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi elde edilen yarım türevin tekrar yarım türevi alınırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 \right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right) = 2x$$

olduğu kolayca görülür.

Yukarıda yaptığımız uygulamaya benzer olarak, $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ alalım ve bu fonksiyonun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğunu gösterelim. $a = 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali

$$(J^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > 0$$

olarak yazılır. Kabuller altında $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin,

$$\begin{aligned}(J^{\frac{1}{2}}f)(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_a^x \tfrac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt, \qquad x>0\\ &= \tfrac{8}{3\pi}\int\limits_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}}(x-ux)^{-\frac{1}{2}}xdu, \quad t=ux\\ &= \tfrac{8}{3\pi}x^2\int\limits_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du\\ &= \tfrac{8}{3\pi}x^2B(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2})\\ &= \tfrac{8}{3\pi}x^2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} = \tfrac{8}{3\pi}x^2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)}\\ &= x^2\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi kesirli türev için $0<\alpha<1$ olmak üzere,

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad x>a \tag{7}$$

Abel integral denklemini ele alalım.

(7) ifadasindesinin her iki yanında x yerine t, t yerine s yazarak, denklemini her iki yanını $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarparak a dan x e kadar integralini alırsak;

$$\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\int\limits_a^x \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds=\Gamma(\alpha)\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt$$

olur. Burada Dirichlet formülü olarak bilinen (İntegral sınırlarının yer değişimi)

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^x f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_y^b f(x,y)dx\right)dy$$

şeklindeki sınır değişimi formülünü uygularsak,

$$\int\limits_a^x \varphi(s)ds\int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}}=\Gamma(\alpha)\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt \tag{8}$$

olduğunu görürüz. (8) ifadesindesindeki iç integralde $t=s+\tau(x-s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}}=\int\limits_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau=B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (8) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int\limits_a^x \varphi(s)ds &= \Gamma(\alpha)\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\\ \int\limits_a^x \varphi(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki son eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt,\quad 0<\alpha<1 \tag{9}$$

elde edilir. Elde edilen (9) ifadesine α. mertebeden kesirli türev denir. Bu türeve Riemann-Liouville kesirli türevi de denmektedir.

Bu türev formülü daha genel olarak şu şekilde ifade edilir.

Tanım 3.1.2. f fonksiyonu her sonlu (a,x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m\in\mathbb{N}$, $m-1\leq\alpha<m$ olmak üzere $x>a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D^\alpha_{RL}f(x)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int\limits_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1}dt \tag{10}$$

şeklindedir.

3.2 SINIRLI BİR ARALIK ÜZERİNDE RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLER VE KESİRLİ TÜREVLER

İlk olarak, aşağıda toplanabilir ve sürekli fonksiyonlar uzayında reel eksenin sınırlı bir aralığı üzerinde Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integrallerin tanımlarını ve mevcut olan bazı özelliklerini vereceğiz.

$\Omega = [a,b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) üzerinde sınırlı bir aralık olsun. Bu durumda, yukarda elde ettiğimiz gibi α ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrallerini;

$$\left(J_{a+}^{\alpha} f\right)(x) := \int_{a}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a;\ \Re(\alpha) > 0) \tag{11}$$

ve

$$\left(J_{b-}^{\alpha} f\right)(x) := \int_{x}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b;\ \Re(\alpha) > 0) \tag{12}$$

şeklinde alalım. Burada $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ dır. $\Gamma(\alpha)$ bir Gamma fonksiyonudur. Bu integrallere kesirli integrallerin sol ve sağ kısım integralleri olarak da tanımlanır. $\alpha = n \in \mathbb{N}$ olduğunda (11) ve (12) tanımları yukardaki kısımda ele aldığımız gibi n-katlı integral olarak aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \left(J_{a+}^{n} f\right)(x) &= \int_{a}^{x} dt_1 \int_{a}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{a}^{t_{n-1}} dt_n \qquad (13) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(J_{b-}^{n} f\right)(x) &= \int_{x}^{b} dt_1 \int_{t_1}^{b} dt_2 \ldots \int_{t_{n-1}}^{b} dt_n \qquad (14) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x}^{b} (t-x)^{n-1} f(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

α. ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri, $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\Re(\alpha) \geq 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{a^+}^{n-\alpha} f\right)(x) \qquad (15) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \ \ (n = [\Re(\alpha)] + 1; x > a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{b^-}^{n-\alpha} f\right)(x) \qquad (16) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \ \ (n = [\Re(\alpha)] + 1; x < b) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[\Re(\alpha)]$, $\Re(\alpha)$ nın tam değeri anlamındadır. Özellikle, $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} \left(D_{a^+}^{0} f\right)(x) &= \left(D_{b^-}^{0} f\right)(x) = f(x); \ \left(D_{a^+}^{n} f\right)(x) = f^n(x), \qquad (17) \\ \left(D_{b^-}^{n} f\right)(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x) \ \ (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

dır. Burada $f^{(n)}(x)$ adi anlamda türevlerdir. Eğer $0 < \Re(\alpha) < 1$ ise, bu durumda

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} dt, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; \ x > \alpha) \qquad (18)$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} dt, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; x < b) \qquad (19)$$

dır. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ iken, (15) ve (16) ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (n \in [\alpha] + 1; x > a) \qquad (20)$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt,\quad (n\in[\alpha]+1;x<b) \tag{21}$$

olduğundan, (18) ve (19) verildiğinden,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt,\quad (0<\alpha<1;x>a) \tag{22}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\quad (0<\alpha<1;x<b) \tag{23}$$

olarak yazılabilir.

$\Re(\alpha)=0\ \ (\alpha\neq 0)$ ise, (15) ve (16) ifadelerindeki kesirli türevlerin yalnızca sanal kısmı sağlanılır:

$$\left(D_{a^+}^{i\theta}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}}dt\quad (\theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\};x>a) \tag{24}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{i\theta}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{i\theta}}dt\quad (\theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\};x<b). \tag{25}$$

Benzer şekilde; $(x-a)^{\beta-1}$ ve $(b-x)^{\beta-1}$ kuvvet fonksiyonlarının (11), (15) Riemann-Liouville kesirli integral ve (12), (16) Riemann-Liouville kesirli türev operatörleri kolayca gösterilebilir. Bunun için aşağıdaki özelliği verelim:

Özellik 3.2.1. $\Re(\alpha)\geq 0$ ve $\beta\in\mathbb{C}\ \ (\Re(\beta)>0)$ ise,

$$\left(J_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}\ \ (\Re(\alpha)>0), \tag{26}$$

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}\ \ (\Re(\alpha)\geq 0), \tag{27}$$

$$\left(J_{b^-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}\ \ (\Re(\alpha)>0), \tag{28}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}\quad(\Re(\alpha)\geq 0) \tag{29}$$

dır. (26) ve (27) eşitliklerinin ispatını aşağıda verelim: Bu durumda, $t=a+(x-a)\sigma$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(J_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-a)^{\beta-1}(x-a)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\beta-1}\sigma^{\beta-1}(x-a-(x-a)\sigma)^{\alpha-1}(x-a)\,d\sigma \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \sigma^{\beta-1}(1-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\beta(\beta,\alpha) \\
&= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= (x-a)^{\beta+\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (t-a)^{\beta-1}(x-t)^{-\alpha}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^1 (x-a)^{\beta-1}\sigma^{\beta-1}(x-a)^{-\alpha}(1-\sigma)^{-\alpha}(x-a)\,d\sigma \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\left((x-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 \sigma^{\beta-1}(1-\sigma)^{-a}d\sigma\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1}\beta(\beta,1-\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\
&= (\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} \\
&= (x-a)^{\beta-\alpha-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Özel olarak, $\beta = 1$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ alınırsa, bu durumda Riemann-Liouville kesirli türevleri sabittir. Genel olarak sıfıra eşit değildir.

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \ \left(D_{b^-}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \ (0 < \Re(\alpha) < 1) \quad (30)$$

dır. Diğer yandan $j = 1, 2,...,[\Re(\alpha)+1]$, için

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = 0, \ \left(D_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\alpha-j}\right)(x) = 0 \quad (31)$$

dır. (28) ve (29) eşitliklerinde benzer olarak yapılabilir.

Lemma 3.2.1.

a. $J_{a^+}^{\alpha}$ ve $J_{b^-}^{\alpha}$ kesirli integral operatörleri $\Re(\alpha) > 0$ için $L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ üzerinde sınırlıdır. Yani,

$$\left\|J_{a^+}^{\alpha}f\right\|_p \leq K\left\|f\right\|_p, \ \left\|J_{b^-}^{\alpha}f\right\|_p \leq K\left\|f\right\|_p \ \left(K = \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)\left|\Gamma(\alpha)\right|}\right) \quad (32)$$

dır.

b. $0 < \alpha < 1$ ve $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ ise $q = \frac{p}{(1-\alpha p)}$ olmak üzere $J_{a^+}^{\alpha}$ ve $J_{b^-}^{\alpha}$ operatörleri $L_p(a,b)$ den $L_q(a,b)$ ye sınırlıdır.

İspat.

a. Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\left|J_{a^+}^{\alpha}f(x)\right| &\leq \frac{1}{\left|\Gamma(\alpha)\right|}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left|f(t)\right|dt \\
&\leq \frac{1}{\left|\Gamma(\alpha)\right|}\left(\int_a^x \left|f(x)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x (x-t)^{q(\alpha-1)}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\left\|f\right\|_p}{\left|\Gamma(\alpha)\right|}\left(\frac{(x-a)^{q(\alpha-1)+1}}{q(\alpha-1)+1}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{\left\|f\right\|_p}{\Gamma(\alpha)}\frac{(x-a)^{\alpha-1+\frac{1}{q}}}{(q(\alpha-1)+1)^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradan da,

$$\begin{aligned}
\left\| J_{a^+}^{\alpha} f(x) \right\|_p &\leq \left(\int_a^b \frac{\|f\|_p^p}{|\Gamma(\alpha)|^p} \frac{(x-a)^{\alpha p - 1}}{(q(\alpha-1)+1)^{\frac{p}{q}}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\|f\|_p}{|\Gamma(\alpha)|} \frac{1}{(q(\alpha-1)+1)^{\frac{1}{q}}} \left(\int_a^b (x-a)^{\alpha p - 1} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K \|f\|_p
\end{aligned}$$

elde edilir.

b. $J_{a^+}^{\alpha} f$ kesirli integrali $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ ve $1 \leq r < q = \frac{p}{1-\alpha p}$ için L_p den L_q ya sınırlı olduğunu ispatlamak için, $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ olmak üzere L_r den L_p ye sınırlı olduğunu ele alalım ve $\varepsilon = \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)}{2}$ seçelim. Bu durumda,

$$\left| J_{a^+}^{\alpha} f(x) \right| \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^x \left((x-t)^{\varepsilon - \frac{1}{r}} |f(t)|^{\frac{p}{r}} \right) (x-t)^{\varepsilon - \frac{1}{p'}} |f(t)|^{1-\frac{p}{r}} dt$$

dır. O halde Hölder eşitsizliğini kullandığımızda

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) \left| J_{a^+}^{\alpha} f(x) \right| &\leq \left(\int_a^x \left((x-t)^{r\varepsilon - 1} |f(t)|^p \right) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left(\int_a^x |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left(\int_a^x (x-t)^{\varepsilon p' - 1} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq K \|f\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_a^x \left((x-t)^{r\varepsilon - 1} |f(t)|^p \right) \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
\left\| J_{a^+}^{\alpha} f(x) \right\|_{L_r} &\leq K \|f\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_a^b |f(t)|^p \int_a^b |x-t|^{r\varepsilon - 1} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq K \|f\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_{L_p}^{\frac{p}{r}} = K \|f\|_p .
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.2. $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$ olsun. $f(x) \in AC^n[a,b]$ ise $D_{a^+}^{\alpha}$ ve $D_{b^-}^{\alpha}$ kesirli türevleri $[a,b]$ üzerinde hemen-hemen her yerde var

ve

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^x\frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{33}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha}+\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_x^b\frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt \tag{34}$$

dır.

İspat. (34) ifadesi ise herhangi bir $g(x)\in AC^n[a,b]$ fonksiyonu için $\phi(t)=g^{(n)}(t)$ ve $d_k=\frac{g^{(k)}(b)}{k!}$ olmak üzere,

$$g(x)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int\limits_x^b(t-x)^{n-1}\phi(t)\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}d_k(-1)^k(b-x)^k \tag{35}$$

yazılır.

Sonuç 3.2.1. Eğer $0\leq\Re(\alpha)<1$ $(\alpha\neq 0)$ ve $f(x)\in AC[a,b]$ ise

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}+\int\limits_a^x\frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right] \tag{36}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}}+\int\limits_x^b\frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right] \tag{37}$$

dır.

$J_{a^+}^{\alpha}$ ve $J_{b^-}^{\alpha}$ kesirli integral operatörlerinin yarıgrup özelliğini aşağıdaki Lemma ile verelim.

Lemma 3.2.3. $\Re(\alpha)>0$ ve $\Re(\beta)>0$ ise $f(x)\in L_p(a,b)$ $(1\leq p\leq\infty)$ ve her $x\in(a,b)$ için

$$\left(J_{a^+}^{a}J_{a^+}^{\beta}f\right)(x)=\left(J_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(x)\ \text{ ve }\ \left(J_{b^-}^{\alpha}J_{b^-}^{\beta}f\right)(x)=\left(J_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(x) \tag{38}$$

dır.

İspat.

$$\left(J_{a^+}^{a} J_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, d\tau, \quad \alpha+\beta \geq 1$$

yazılır. Burada, yukarıdaki eşitlikte *Dirichlet* sınır değişim şartları uygulanıp $t = \tau + s(x-\tau)$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left(J_{a^+}^{a} J_{a^+}^{\beta} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x d\tau \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau)\, d\tau \int_0^1 (x-\tau)^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} (x-\tau)^{\beta-1} (x-\tau)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\, d\tau \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{\beta(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\, d\tau = \left(J_{a^+}^{a+\beta} f\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(J_{b^-}^{a} J_{b^-}^{\beta} f\right)(x)$ ifadeside yukarıdaki şekilde ispat edilir.

Eğer $\alpha+\beta > 1$ ise (38) ifadesi $[a,b]$ nin herhangi bir noktasında sağlanır. Aşağıdaki Lemma kesirli türevlerin kesirli integrallerin soldan tersi olarak ifade edilebileceğini gösterir.

Lemma 3.2.4. $\Re(\alpha) > 0$ ve $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ise hemen-hemen her $x \in [a,b]$ için,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \text{ ve } \left(D_{b^-}^{\alpha} J_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = f(x) \quad (\Re(\alpha) > 0) \qquad (39)$$

dır.

İspat.

$$\left(D_{a^+}^{a} J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} dt \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds$$

yazılır. Burada, yukarıdaki eşitlikte *Dirichlet* sınır değişim şartları uygulanıp $t = s + \tau(x-s)$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left(D_{a^+}^{a} J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\int_a^x f(s)\,ds\right. \\
&\quad \left.\int_s^x (x-s)^{n-\alpha-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}(x-s)\,d\tau\right] \\
&= \frac{\beta(\alpha, n-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\,ds
\end{aligned}$$

elde edilir. (4) ifadesini yukarıdaki eşitliğe uyguladığımızda ispat tamamlanmış olur. $\left(D_{b^-}^{\alpha} J_{b^-}^{\alpha} f\right)(x)$ ifadesi de benzer şekilde ispatlanır.

Özellik 3.2.2. $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$ ise, $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \le p \le \infty)$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\left(D_{a^+}^{\beta} J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = J_{a^+}^{\alpha-\beta} f(x) \text{ ve } \left(D_{b^-}^{\beta} J_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = (-1)^k J_{b^-}^{\alpha-k} f(x) \quad (40)$$

dır.

Özel olarak, $\beta = k \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) > k$ aldığımızda,

$$\left(D^k J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = J_{a^+}^{\alpha-k} f(x) \text{ ve } \left(D^k J_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = (-1)^k J_{b^-}^{\alpha-k} f(x) \quad (41)$$

olur.

İspat.

$$\left(D_{a^+}^{\beta} J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\beta-1}\,dt\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\,ds$$

yazılır. Burada, yukarıdaki eşitlikte *Dirichlet* sınır değişim şartları uygulanıp $t = s + \tau (x - s)$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(D_{a^+}^{\beta} J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\int_a^x f(s)\, ds \right. \\
&\quad \left. \int_s^x (x-s)^{n-\beta-1} (1-\tau)^{n-\beta-1} \tau^{\alpha-1} (x-s)^{\alpha-1} (x-s)\, ds \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-s)^{n+\alpha-\beta-1} f(s)\, ds \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{n-\beta-1} d\tau \\
&= \frac{\beta(\alpha, n-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-s)^{n+\alpha-\beta-1} f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-s)^{n+\alpha-\beta-1} f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-\beta-1} f(s)\, ds = \left(J_{a^+}^{\alpha-\beta} f\right)(x)
\end{aligned}
$$

ispat tamamlanır.

Özellik 3.2.3. $m \in \mathbb{N}$ ve $D = \frac{d}{dx}$ için $\Re(\alpha) \geq 0$ olsun.

a. $\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)$ ve $\left(D_{a^+}^{\alpha+m} f\right)(x)$ kesirli türevleri varsa,

$$\left(D^m D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha+m} f\right)(x) \tag{42}$$

elde edilir.

b. $\left(D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x)$ ve $\left(D_{b^-}^{\alpha+m} f\right)(x)$ kesirli türevleri varsa,

$$\left(D^m D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = (-1)^m \left(D_{b^-}^{\alpha+m} f\right)(x) \tag{43}$$

elde edilir.

Özellik 3.2.4. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$ ve $\alpha + \beta < n$ $(n, m \in \mathbb{N})$ olmak üzere $f \in L_1(a,b)$ ve $f_{m-\alpha} AC^m([a,b])$ vardır. Bu durumda,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) - \sum_{j=1}^{m} \left(D_{a^+}^{\beta-j} f\right)(a^+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \tag{44}$$

elde edilir.

İspat. $n > \alpha + \beta$ için (15) ve (38) de yarıgrup özelliği kullanıldığında,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{a^+}^{n-\alpha} D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{a^+}^{n-\alpha-\beta}\left[J_{a^+}^{\beta} D_{a^+}^{\beta} f\right]\right)(x) \tag{45}$$

elde ederiz.

$f \in L_1(a,b)$ ve $f_{m-\alpha} \in AC^m([a,b])$ için *Lemma* 3.2.4 de α yerine β yazdığımızda,

$$\left(J_{a^+}^{\beta} D_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(J_{a^+}^{m-\beta} f\right)^{(m-j)}(a+)}{\Gamma(\beta - j + 1)} (x-a)^{\beta - j} \tag{46}$$

elde ederiz. (46) eşitliğinde (15) e göre $\left[\left(J_{a^+}^{m-\beta} f\right)^{(m-j)}\right](x) = \left(D_{a^+}^{\beta-j} f\right)(x)$ eşitliğini (46) de yerleştirdiğimizde (44) i elde ederiz.

3.3 YARI DÜZLEM ÜZERİNDE RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLER VE KESİRLİ TÜREVLER

Bu bölümde yarı düzlem üzerinde Riemann-Liouville kesirli integrallerin ve kesirli türevlerin tanımlarını ve bazı özelliklerini vereceğiz. Reel eksenin bir sınırlı aralığı üzerinde (11), (12) Riemann-Liouville kesirli integralleri ve (15), (16) Riemann-Liouville kesirli türevleri reel eksenin pozitif bölgesindedir. (11) ve (12) kesirli integralleri aşağıdaki formları sağlar:

$$\left(J_{0^+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \Re(\alpha) > 0) \tag{47}$$

ve

$$\left(J_{-}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \Re(\alpha) > 0) \tag{48}$$

$n = [\Re(\alpha)] + 1$; $\Re(\alpha) \geq 0$; $x > 0$ için (15) ve (16) kesirli integrallerinden yararlanılarak,

$$\left(D_{0^+}^{\alpha} f\right)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{0^+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \tag{49}$$

ve

$$\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x):=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(J_{-}^{n-\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt \tag{50}$$

formları verilebilir.

(47) de $J_{0+}^{\alpha}f$, (48) de $J_{-}^{\alpha}f$, (49) de $D_{0+}^{\alpha}f$, ve (50) de $D_{-}^{\alpha}f$, ifadeleri için reel eksen üzerinde sağ ve sol değerli Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevleri vardır. $\alpha=n\in\mathbb{N}_0$ için ve $f(x)$ in n inci mertebeden türevini aldığımızda $f^{(n)}(x)$;

$$\left(D_{+}^{0}f\right)(x) = \left(D_{-}^{0}f\right)(x)=f(x)\,;\ \left(D_{+}^{n}f\right)(x)=f^{(n)}(x) \tag{51}$$

$$\left(D_{-}^{n}f\right)(x) = (-1)^{n}f^{(n)}(x)\quad (n\in\mathbb{N})$$

elde edilir.

$0<\Re(\alpha)<1$ ve $x>0$ ise

$$(D_{0+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{52}$$

ve

$$\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{53}$$

dır.

$\Re(\alpha)=0$ $(\alpha\neq 0)$ ise (52) ve (53) de Riemann-Liouville kesirli türevlerinde α yerine sanal kısmı aldığımızda,

$$\left(D_{0+}^{i\theta}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}}dt\ \ (\theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\,;x>0) \tag{54}$$

ve

$$\left(D_{-}^{i\theta}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{i\theta}}dt\ \ (\theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\,;x>0) \tag{55}$$

formları elde edilir.

J_{0+}^{α} ve D_{0+}^{α} Liouville kesirli operatörleri $\alpha = 0$ için (26) ve (27) eşitlikleri sağlanır. J_{-}^{α} ve D_{-}^{α} Liouville kesirli operatörlerinde a nın yerine $x^{\beta-1}$ kuvvet fonksiyonu ve $e^{-\lambda x}$ üstel fonksiyonu aldığımızda aynı eşitlik sağlanır.

Özellik 3.3.1. $\Re(\alpha) \geq 0$ olsun.

a. $\Re(\beta) > 0$ ise

$$\left(J_{0+}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0; \Re(\beta) > 0) \tag{56}$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0; \Re(\beta) > 0) \tag{57}$$

b. $\beta \in \mathbb{C}$ ise

$$\left(J_{-}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0; \Re(\alpha+\beta) < 1) \tag{58}$$

$$\left(D_{-}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0; \Re(\alpha+\beta-[\Re(\alpha)]) < 1) \tag{59}$$

dır.

c. $\Re(\lambda) > 0$ ise

$0 < \alpha < 1$ ve $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ olduğunda, $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için $J_{0+}^{\alpha} f$ ve $J_{-}^{\alpha} f$ integralleri

$$\left(J_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(x) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x} \quad (\Re(\alpha) > 0) \tag{60}$$

$$\left(D_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(x) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} \quad (\Re(\alpha) \geq 0) \tag{61}$$

tanımlanır.

İspat. (26) ve (27) da $a = 0$ için (56) ve (57) formülleri sağlanır. (50) ve (58) ifadelerini kullanarak, α yerine $n - \alpha$ aldığımızda $(n = [\Re(\alpha)] + 1)$

$$\begin{aligned} \left(D_{-}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \left(J_{-}^{n-\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) \qquad (62) \\ &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \left[\frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+n-\alpha-1}\right] \\ &= (-1)^{n} \frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\Gamma(1-n+\alpha-\beta)\,\Gamma(\beta+n-\alpha)=\frac{\pi}{\sin[(\beta-\alpha+n)\pi]}=\frac{(-1)^n\pi}{\sin[(\beta-\alpha)\pi]} \tag{63}$$

ve

$$\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}=\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha-\beta)}=\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\sin[(\beta-\alpha)\pi]}{\pi} \tag{64}$$

eşitlikleri vardır.

Lemma 3.3.1 (Hardy-Littlewood teoremi). $1\leq p\leq\infty$, $1\leq q\leq\infty$ ve $\alpha>0$ olsun. $J_{o^+}^{\alpha}$ ve J_{-}^{α} operatörleri $L_p(\mathbb{R}^+)$ dan $L_q(\mathbb{R}^+)$ ya sınırlıdır. Yani,

$$0<\alpha<1,\ 1<p<\frac{1}{\alpha}\text{ ve }q=\frac{p}{1-\alpha p} \tag{65}$$

dır.

İspat. *Lemma* 3.2.1 (b) şıkkının ispatına benzer olarak yapılır.

3.4 REEL EKSEN ÜZERİNDE RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLER VE KESİRLİ TÜREVLER

Bu kısımda $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ ekseni üzerinde Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevlerin bazı özelliklerini ve tanımlarını vereceğiz. Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevleri $\mathbb{R}$ üzerinde *bölüm* 3.2 ye benzer şekilde tanımlanır. $x\in\mathbb{R}$ ve $\Re(\alpha)>0$ için

$$\left(J_{+}^{\alpha}f\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \tag{66}$$

ve

$$\left(J_{-}^{\alpha}f\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt \tag{67}$$

dır. $n\in[\Re(\alpha)]+1$, $\Re(\alpha)\geq0$ ve $x\in\mathbb{R}$ için,

$$\left(D_{+}^{\alpha}f\right)(x):=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(J_{+}^{n-\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{68}$$

ve

$$\left(D_{+}^{\alpha}f\right)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(J_{+}^{n-\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{69}$$

dır.

(66), (67)'deki $J_{+}^{\alpha}f$ ve $J_{-}^{\alpha}f$ için ve (68), (69)'deki $D_{+}^{\alpha}f$ ve $D_{-}^{\alpha}f$ $\mathbb{R}$ ekseni üzerinde Riemann-Liouville sağ ve sol değerli kesirli integralleri ve kesirli türevleri de $\mathbb{R}$ ekseni üzerindedir. Özellikle, $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ olduğunda $y(x)$ in n. mertebeden türevini aldığımızda, bu durumda,

$$\begin{aligned}\left(D_{+}^{0}f\right)(x) &= \left(D_{-}^{0}f\right)(x) = f(x); \qquad (70)\\ \left(D_{+}^{n}f\right)(x) &= f^{(n)}(x), \ \left(D_{-}^{n}f\right)(x) = (-1)^{n}f^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

elde edilir.

$0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ ise

$$\left(D_{+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{71}$$

ve

$$\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{72}$$

dır.

$\Re(\alpha) = 0$ $(\alpha \neq 0)$ olduğunda (71) ve (72) Riemann-Liouville kesirli türevlerin sanal kısmını aldığımızda,

$$\left(D_{+}^{i\theta}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}}dt \ \ (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x \in \mathbb{R}) \tag{73}$$

ve

$$\left(D_{-}^{i\theta}f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{i\theta}}dt \ \ (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x \in \mathbb{R}) \tag{74}$$

Özellik 3.3.1 (b) ye benzer olarak, J_{+}^{α} ve D_{+}^{α} Riemann-Liouville kesirli operatörlerinde fonksiyon olarak $e^{\lambda x}$ üstel fonksiyonunu aldığımızda eşitlik sağlanır.

Özellik 3.4.1. $\Re(\lambda) > 0$ olsun.

$0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ için $J_{+}^{\alpha} f$ ve $J_{-}^{\alpha} f$ integralleri $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu için vardır. Bu durumda,

a. $\Re(\alpha) \geq 0$ ise

$$\left(J_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(x) = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda x} \tag{75}$$

b. $\Re(\alpha) \geq 0$ ise

$$\left(D_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(x) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x} \tag{76}$$

dır.

Lemma 3.4.1. $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ve $\alpha > 0$ olsun. (60) ifadesinin sağlanması için gerek ve yeter şart J_{+}^{α} ve J_{-}^{α} operatörlerinin $L_p(\mathbb{R})$ den $L_q(\mathbb{R}^{+})$ ya sınırlı olmasıdır.

$\mathbb{R}$ ile sonsuz aralığın birleşimi $\mathbb{R}$ olsun. Yani, $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dır. Burada $L_{p,w}$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayında $f(x)$ fonksiyonunun normunun $\mathbb{R}$ üzerinde üstel olarak nasıl ifade edildiğini aşağıda göstereceğiz. $1 \leq p < \infty$ ve $w \in \mathbb{R}$ için,

$$L_{p,w}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \|f\|_{p,w} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-wt} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \tag{77}$$

tanımlanır. $L_{\infty,w} = C_w$ uzayında $e^{-wx} f(x) \in C(\mathbb{R})$ için $f(x)$ fonksiyonunun normunu aldığımızda,

$$L_{\infty,w}(\mathbb{R}) = C_w(\mathbb{R}) := \left\{ f : \|f\|_{w} = \max_{t \in \mathbb{R}} e^{-wt} |f(t)| < \infty \right\} \tag{78}$$

dır.

(77) ve (78) uzayları J_{+}^{α} ve J_{-}^{α} Riemann-Liouville kesirli integrallerine göre değişmeyendir.

Lemma 3.4.2. $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ ve $w > 0$ olsun. Bu durumda,

a. J_{+}^{α} operatörü $L_{p,w}$ uzayında sınırlıdır. Yani,

$$\left\| J_{+}^{\alpha} f \right\|_{p,w} \leqq k \left\| f \right\|_{p,w}, \ k = \left(\frac{p}{w} \right)^{\alpha} \ (1 \leq p < \infty), \ k = w^{\alpha} \ (p = \infty) \quad (79)$$

dır.

b. J_{-}^{α} operatörü $L_{p,-w}$ uzayında sınırlıdır. Yani,

$$\left\| J_{-}^{\alpha} f \right\|_{p,-w} \leqq k \left\| f \right\|_{p,w}, \ k = \left(\frac{p}{|w|} \right)^{\alpha} \ (1 \leq p < \infty), \ k = |w|^{\alpha} \ (p = \infty) \quad (80)$$

dır.

Lemma 3.4.3. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geqq 1$ ve $\alpha + \beta > \frac{1}{p}$ olsun. $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ ise bu durumda,

$$\left(J_{+}^{\alpha} J_{+}^{\beta} f \right)(x) = \left(J_{+}^{\alpha+\beta} f \right)(x) \ \text{ve} \ \left(J_{-}^{\alpha} J_{-}^{\beta} f \right)(x) = \left(J_{-}^{\alpha+\beta} f \right)(x) \quad (81)$$

dır.

$\left(D_{+}^{\alpha} y \right)(x)$ ve $\left(D_{-}^{\alpha} y \right)(x)$ Riemann-Liouville kesirli türevlerindeki $f(x)$ fonksiyonu iyi fonksiyondur. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonu $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ uzayında $\mathbb{R}$ ile karmaşık sayılar üzerinde sonsuz türevlenebilen fonksiyondur.

Lemma 3.4.4. $\alpha > 0$ ise $f(x)$ iyi fonksiyonu için

$$\left(D_{+}^{\alpha} J_{+}^{\beta} f \right)(x) = f(x) \ \text{ve} \ \left(D_{-}^{\alpha} J_{-}^{\beta} f \right)(x) = f(x) \quad (82)$$

doğrudur. Özellikle $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ için bu formüller sağlanır.

Özellik 3.4.2 . $\alpha > \beta > 0$ ise iyi $f(x)$ fonksiyonu için

$$\left(D_{+}^{\beta} J_{+}^{\alpha} f \right)(x) = \left(J_{o^{+}}^{\alpha-\beta} f \right)(x) \ \text{ve} \ \left(D_{-}^{\beta} J_{-}^{\alpha} f \right)(x) = \left(J_{-}^{\alpha-\beta} f \right)(x) \quad (83)$$

formülleri sağlanır. Özellikle $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ için sağlanır. Dahası $\beta = k \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) > k$ olduğunda,

$$\left(D^{k} J_{+}^{\alpha} f \right)(x) = \left(J_{+}^{\alpha-k} f \right)(x) \ \text{ve} \ \left(D^{k} J_{-}^{\alpha} f \right)(x) = (-1)^{k} \left(J_{-}^{\alpha-k} f \right)(x) \quad (84)$$

dır.

4 BULGULAR VE TARTIŞMA

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve türevi de sınırlı olsun. O halde $\forall x \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] (b-a) \|f'\|_\infty$$

Ostrowski eşitsizliği sağlanır. Ayrıca buradaki $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi sabittir.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferansiyellenebilir ve f' de $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O halde

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b P_1(x,t)\, f'(t)\, dt$$

Montgomery özdeşliği sağlanılır. Burada $P_1(x, t)$ Peano çekirdeği

$$P_1(x,t) := \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq x \\ \frac{t-b}{b-a}, & x \leq t \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Grüss eşitsizliğini kullanarak, Cheng (2001) aşağıdaki teoremi vermiştir:

Teorem 4.1. $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in I$, $a < b$ olmak üzere I° açık aralık olsun. $f : I^\circ \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ sabitleri olmak üzere $\gamma \leq f'(x) \leq \Gamma$, $x \in [a, b]$ dir. O halde tüm $x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2} f(x) - \frac{(x-b) f(b) - (x-a) f(a)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \\ \leq\ & \frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{8(b-a)} (\Gamma - \gamma) \end{aligned} \tag{85}$$

elde edilir.

Teorem 4.1'de elde edilmiş olan eşitsizlik aşağıdaki Ostowski-Grüss tipli integral eşitsizliğinin bir genelleştirilmiş halidir. İlk olarak Dragomir ve Wang (1997) tarafından bulundu ve Matic (2000) tarafından geliştirildi.

Teorem 4.2. Teorem 4.1'in şartları sağlansın. O halde tüm $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \right| \tag{86}$$
$$\leq \frac{1}{4}(b-a)(\Gamma-\gamma)$$

elde edilir.

4.1 KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN OSTROWSKİ-GRÜSS EŞİTSİZLİĞİ

Ana sonuçlarımızı elde etmek için kullanacağımız, kesirli integraller için aşağıdaki genelleştirilmiş montgomery özdeşliğini verelim.

Lemma 4.1.1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^o üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon ile $a,b \in I$ $(a<b)$ ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. O halde

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)}(b-x)^{1-\alpha} J_a^{\alpha} f(b) - J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b)) + J_a^{\alpha}\Big(P_2(x,b)f'(b)\Big), \ \alpha \geq 1 \tag{87}$$

dır. Burada $P_2(x,t)$ kesirli Peano çekirdeği

$$P_2(x,t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), & a \leq t < x \\ \frac{t-b}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), & x \leq t \leq b \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. Biz bu Lemmanın ispatını iki şekilde yapacağız. İlk olarak

$$P_1(x,t) := \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & a \leq t \leq x \\ \frac{t-b}{b-a}, & x \leq t \leq b \end{cases}$$

çekirdeğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) J_a^{\alpha}\left(P_1(x,t) f'(b)\right) &= \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} P_1(x,t) f'(t)\, dt \qquad (88)\\
&= \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} \frac{t-a}{b-a} f'(t)\, dt + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} \frac{t-b}{b-a} f'(t)\, dt\\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-a) f'(t)\, dt - \int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\, dt\right]\\
&= \frac{1}{b-a}\left[I_1 - I_2\right]
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $I_1 = \int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-a) f'(t)\, dt$ ve $I_2 = \int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\, dt$ olsun. Şimdi I_1 ve I_2 integrallerini hesaplayalım:

$$I_1 = \int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-a) f'(t)\, dt$$

integralinde kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[(b-t)^{\alpha-1}(t-a) f(t)\right]\Big|_a^x + (\alpha-1)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2}(t-a) f(t)\, dt\\
&\quad - \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt\\
&= (b-x)^{\alpha-1}(x-a) f(x) + (\alpha-1)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2}(t-a) f(t)\, dt\\
&\quad - \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt
\end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer yandan

$$I_2 = \int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\, dt$$

integralinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} I_2 &= (b-t)^{\alpha} f(t) \Big|_x^b + \alpha \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \\ &= -(b-x)^{\alpha} f(x) + \alpha \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \end{aligned}$$

olur. Bulduğumuz I_1 ve I_2 integrallerini (88)'da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &\Gamma(\alpha)\, J_a^{\alpha}\left(P_1(x,t)\, f'(b)\right) \\ &= \frac{1}{b-a}\left\{(b-x)^{\alpha-1}(x-a) f(x) + (\alpha-1)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2}(t-a) f(t)\,dt\right. \\ &\quad \left. -\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + (b-x)^{\alpha} f(x) - \alpha\int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{b-a}\left\{(b-x)^{\alpha-1}(x-a+b-x) f(x) + (\alpha-1)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2}(t-a) f(t)\,dt\right. \\ &\quad \left. -\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt + (b-x)^{\alpha} f(x) - \alpha\int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{b-a}\left\{(b-a)(b-x)^{\alpha-1} f(x) + (\alpha-1)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2}(t-a) f(t)\,dt\right. \\ &\quad + (\alpha-1)\int_x^b (b-t)^{\alpha-2}(t-b) f(t)\,dt - (\alpha-1)\int_x^b (b-t)^{\alpha-2}(t-b) f(t)\,dt \\ &\quad \left. -\alpha\int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt - \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{b-a}\left\{(b-a)(b-x)^{\alpha-1} f(x) + (b-a)(\alpha-1)\int_a^b (b-t)^{\alpha-2} P_1(x,t) f(t)\,dt\right. \\ &\quad \left. -\int_x^b (b-t)^{\alpha-1}\left[\frac{(\alpha-1)}{(b-t)}(t-b)+\alpha\right] f(t)\,dt - \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b-a}\left\{(b-a)(b-x)^{\alpha-1} f(x) + (b-a)(\alpha-1)\int_a^b (b-t)^{\alpha-2} P_1(x,t) f(t)\,dt\right. \\
&\quad \left. -\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt - \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\right\} \\
&= (b-x)^{\alpha-1} f(x) + (\alpha-1)\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-2} P_1(x,t) f(t)\,dt \\
&\quad -\frac{1}{b-a}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \\
&= (b-x)^{\alpha-1} f(x) + \Gamma(\alpha) J_a^{\alpha-1}\left(P_1(x,b) f(b)\right) - \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a} J_a^{\alpha} f(b)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. P_1 çekirdeğini P_2 çekirdeğine dönüştürelim. Bunun için her iki tarafı $\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}$ ile çarparsak,

$$
J_a^{\alpha}\left(P_2(x,t) f'(b)\right) = f(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha} J_a^{\alpha} f(b) + J_a^{\alpha-1}\left(P_2(x,b) f(b)\right)
$$

yazılır. Buradan da

$$
f(x) = J_a^{\alpha}\left(P_2(x,t) f'(b)\right) + \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha} J_a^{\alpha} f(b) - J_a^{\alpha-1}\left(P_2(x,b) f(b)\right) \tag{89}
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Özdeşliğin bir diğer ispatını da aşağıdaki şekilde verebiliriz. $P_2(x,t)$ çekirdeği yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
& J_a^{\alpha}\left(P_2(x,b) f'(b)\right) \qquad (90) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} P_2(x,t) f'(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}\frac{t-a}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha) f'(t)\,dt\right. \\
&\quad \left. + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1}\frac{t-b}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha) f'(t)\,dt\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-b+b-a)\, f'(t)\, dt - \int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\, dt\right]$$

$$= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[-\int_a^x (b-t)^{\alpha} f'(t)\, dt + (b-a)\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\, dt\right.$$

$$\left. - \int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\, dt\right]$$

$$= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[-\int_a^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\, dt + (b-a)\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\, dt\right]$$

yazılır. Buradan da kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$J_a^{\alpha}\left(P_2(x,b)\, f'(b)\right) \tag{91}$$

$$= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[-(b-t)^{\alpha} f(t)\Big|_a^b - \alpha\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt\right.$$

$$\left. + (b-a)(b-t)^{\alpha-1} f(t)\Big|_a^x + (\alpha-1)(b-a)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt\right]$$

$$= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[(b-a)^{\alpha} f(a) - \alpha\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt + (b-a)(b-x)^{\alpha-1} f(x)\right.$$

$$\left. - (b-a)^{\alpha} f(a) + (\alpha-1)(b-a)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt\right]$$

$$= f(x) - \alpha\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \tag{92}$$

$$+ (\alpha-1)(b-a)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt$$

elde edilir. (90)'de $f^{'} \to f$ ve $\alpha \to \alpha - 1$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
& J_a^{\alpha-1}\left(P_2(x,b) f(b)\right) \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-2} P_2(x,t) f(t)\, dt \\
= & \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-2} \frac{t-a}{b-a} (b-x)^{1-\alpha} \Gamma(\alpha) f(t)\, dt \right. \\
& \left. + \int_x^b (b-t)^{\alpha-2} \frac{t-b}{b-a} (b-x)^{1-\alpha} \Gamma(\alpha) f(t)\, dt \right] \\
= & \frac{(\alpha-1)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)} \left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-2} (t-b+b-a) f(t)\, dt - \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \right] \\
= & \frac{(\alpha-1)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)} \left[-\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt + (b-a) \int_a^x (b-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt \right. \\
& \left. - \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \right] \\
= & \frac{(\alpha-1)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)} \left[-\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt + (b-a) \int_a^x (b-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt \right] \\
= & -\frac{(\alpha-1)(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt + (\alpha-1)(b-x)^{1-\alpha} \int_a^x (b-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt
\end{aligned}
$$

yani,

$$
\begin{aligned}
\int_a^x (b-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt = & \frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{1-\alpha}} J_a^{\alpha-1}\left(P_2(x,b) f(b)\right) \qquad (93) \\
& + \frac{1}{(b-a)} \int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi bulduğumuz (93) ifadesini (92)'de yerine yazdığımızda (89) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Kesirli integraller için daha genel bir özdeşliği aşağıdaki şekilde verelim.

Lemma 4.1.2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^o üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $a, b \in I$ $(a < b)$, $\alpha \geq 1$ ve $f' \in L_1[a, b]$ olmak üzere kesirli integraller için genelleştirilmiş Montgomery özdeşliği olan aşağıdaki ifade sağlanılır:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\alpha+1)\Gamma(\alpha)\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{(b-a)}J_a^{\alpha}f(b) - J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b)) \\ &\quad -\frac{(b-x)^{2-\alpha}}{(b-a)}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha-1}f(b) - \frac{(b-x)^{1-\alpha}(x-a)}{(b-a)^{2-\alpha}}f(a) \qquad (94) \\ &\quad +2J_a^{\alpha}\Big(K_1(x,b)f'(b)\Big). \end{aligned}$$

Burada $K_1(x,t)$ kesirli Peano çekirdeği

$$K_1(x,t) := \begin{cases} \left(t - \dfrac{a+x}{2}\right)\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha), & t \in [a,x) \\ \left(t - \dfrac{b+x}{2}\right)\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\Gamma(\alpha), & t \in [x,b] \end{cases} \qquad (95)$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. $K_1(x,t)$ tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned} &J_a^{\alpha}\Big(K_1(x,b)f'(b)\Big) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}K_1(x,t)f'(t)\,dt \\ &= \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}\left(t-\frac{a+x}{2}\right)f'(t)\,dt + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1}\left(t-\frac{b+x}{2}\right)f'(t)\,dt\right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\left(t - \frac{a+x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[(t-a)+(t-x)\right]$ ve $\left(t - \frac{b+x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[(t-b)+(t-x)\right]$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
& J_a^{\alpha}\left(K_1(x,b) f'(b)\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-a) f'(t)\,dt + \int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1}(t-b) f'(t)\,dt + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt\right] \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-a) f'(t)\,dt + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1}(t-b) f'(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt\right] \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-b) f'(t)\,dt + \int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(b-a) f'(t)\,dt\right. \\
& \left. + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1}(t-b) f'(t)\,dt + \int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt\right] \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\left[-\int_a^x (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt + (b-a)\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\,dt\right. \\
& \left. - \int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt + \int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt\right] \\
\\
= \; & -\frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^x (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt - \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt \\
& + \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\,dt + \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt + \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\,dt \qquad (96) \\
& + \frac{1}{2}\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Ayrıca Lemma 4.1.1'den

$$
\begin{aligned}
& J_a^\alpha\left(P_2(x,b) f'(b)\right) \\
= \quad & \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-a) f'(t)\,dt - \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt \\
= \quad & \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-b) f'(t)\,dt + \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(b-a) f'(t)\,dt \\
& -\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt \\
= \quad & -\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_a^x (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt + (b-x)^{1-\alpha}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\,dt \\
& -\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{b-a}\int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Her tarafı $\frac{1}{2}$ ile çarpalım:

$$
\begin{aligned}
& \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2}\int_a^x (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\,dt \\
= \quad & \frac{1}{2}J_a^\alpha\left(P_2(x,b) f'(b)\right) + \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}\int_x^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt
\end{aligned}
$$

eşitliğini (96) 'de yerine yazarsak

$$
J_a^\alpha\left(K_1(x,b) f'(b)\right) = \frac{1}{2}J_a^\alpha(P_2(x,b)f'(b)) + \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x) f'(t)\,dt \tag{97}
$$

şeklinde elde ederiz. (97)'ün sağ tarafındaki terim için kısmi integrasyon uygularsak;

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x)f'(t)\,dt \\
&= (b-x)\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f'(t)\,dt - \int_a^b (b-t)^{\alpha} f'(t)\,dt \\
&= (b-x)\left[(b-t)^{\alpha-1} f(t)\Big|_a^b + (\alpha-1)\int_a^b (b-t)^{\alpha-2} f(t)\,dt\right] \\
&\quad -\left[(b-t)^{\alpha} f(t)\Big|_a^b + \alpha\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\right] \\
&= -(b-x)(b-a)^{\alpha-1} f(a) - \alpha\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \\
&\quad +(b-x)(\alpha-1)\int_a^b (b-t)^{\alpha-2} f(t)\,dt + (b-a)^{\alpha} f(a) \\
&= (b-a)^{\alpha}\left(1-\frac{b-x}{b-a}\right) f(a) - \alpha\Gamma(\alpha)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \\
&\quad +(b-x)(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^b (b-t)^{\alpha-2} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

şeklinde buluruz. Burada $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1)$ ve $(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = \Gamma(\alpha)$ olduğu gözönüne alınırsa ve kesirli integrallerin tanımı kulanılırsa

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}(t-x)f'(t)\,dt \qquad (98) \\
&= (b-a)^{\alpha-1}(x-a) f(a) - \Gamma(\alpha+1) J_a^{\alpha} f(b) + (b-x)\Gamma(\alpha) J_a^{\alpha-1} f(b)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi (96')de Lemma 4.1.1'de bulduğumuz $J_a^{\alpha}\left(P_2(x,b)\,f'(b)\right)$'yı ve (98)'ü yerine yazarsak,

$$
\begin{aligned}
& J_a^{\alpha}\left(K_1(x,b) f^{'}(b)\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha} J_a^{\alpha} f(b) + J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b))\right] \\
& + \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}\left[(b-a)^{\alpha-1}(x-a) f(a) - \Gamma(\alpha+1) J_a^{\alpha} f(b) + (b-x)\Gamma(\alpha) J_a^{\alpha-1} f(b)\right] \\
= \; & \frac{1}{2} f(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{2(b-a)}(b-x)^{1-\alpha} J_a^{\alpha} f(b) + \frac{1}{2} J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b)) \\
& + \frac{(b-x)^{1-\alpha}(x-a)}{2}(b-a)^{\alpha-2} f(a) + \frac{(b-x)^{2-\alpha}}{2(b-a)}\Gamma(\alpha) J_a^{\alpha-1} f(b) \\
& - \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}\alpha\Gamma(\alpha) J_a^{\alpha} f(b) \\
= \; & \frac{1}{2} f(x) - (\alpha+1)\Gamma(\alpha)\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)} J_a^{\alpha} f(b) + \frac{1}{2} J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b)) \\
& + \frac{(b-x)^{1-\alpha}(x-a)}{2}(b-a)^{\alpha-2} f(a) + \frac{(b-x)^{2-\alpha}}{2(b-a)}\Gamma(\alpha) J_a^{\alpha-1} f(b)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.1. (94)'da $\alpha = 1$ aldığımızda,

$$\frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)\,dt + \frac{(x-b) f(b) - (x-a) f(a)}{2(b-a)} + \int_a^b K_1(x,t) f^{'}(t)\,dt$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

Teorem 4.1.1. f, $[a,b]$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve her $x \in [a,b]$ için $\left|f'(x)\right| \leq M$ olsun. O halde $\alpha \geq 1$ için

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2}f(x) - (\alpha+1)\Gamma(\alpha)\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}J_a^{\alpha}f(b) + \frac{1}{2}J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b))\right. \\ &\left. +\frac{(b-x)^{2-\alpha}}{2(b-a)}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha-1}f(b) + \frac{(b-x)^{1-\alpha}(x-a)}{2(b-a)^{2-\alpha}}f(a)\right| \\ \leq\ & \frac{M(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}(x-a) + (b-x)^{\alpha}(a+b-2x)}{2\alpha}\right] \end{aligned} \tag{99}$$

vardır.

İspat Lemma 4.1.2'deki özdeşlik yardımıyla

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2}f(x) - (\alpha+1)\Gamma(\alpha)\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}J_a^{\alpha}f(b) + \frac{1}{2}J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b))\right. \\ &\left. +\frac{(b-x)^{2-\alpha}}{2(b-a)}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha-1}f(b) + \frac{(b-x)^{1-\alpha}(x-a)}{2(b-a)^{2-\alpha}}f(a)\right| \\ =\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^b (b-t)^{\alpha-1}K_1(x,t)f'(t)\,dt\right| \end{aligned}$$

yazabiliriz.

f fonksiyonun şartları gözönünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2}f(x) - (\alpha+1)\Gamma(\alpha)\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}J_a^{\alpha}f(b) + \frac{1}{2}J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b)f(b))\right. \\ &\left. +\frac{(b-x)^{2-\alpha}}{2(b-a)}\Gamma(\alpha)J_a^{\alpha-1}f(b) + \frac{(b-x)^{1-\alpha}(x-a)}{2(b-a)^{2-\alpha}}f(a)\right| \\ \leq\ & \frac{M(b-x)^{1-\alpha}}{(b-a)}\left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}\left|t-\frac{a+x}{2}\right|dt\right. \\ &\left. +\int_x^b (b-t)^{\alpha-1}\left|t-\frac{b+x}{2}\right|dt\right] \end{aligned} \tag{100}$$

yazılır. (100)'nın sol tarafındaki kısma I dersek, sağ tarafı da kısmi integrasyon yardımıyla tek tek bulup toplarsak ispatı tamamlarız. Öncelikle

$$
\begin{aligned}
& \int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}\left(\frac{a+x}{2}-t\right)dt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}\left((a-t)+(x-t)\right)dt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}(a-b+b-t)\,dt+\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}(x-b+b-t)\,dt \\
= \; & \frac{1}{2}\left\{\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}(b-t)\,dt+(a-b)\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}dt\right\} \\
& +\frac{1}{2}\left\{(x-b)\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}dt+\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}(b-t)\,dt\right\} \\
= \; & \frac{1}{2}\left\{2\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha}dt+(a-b)\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}dt+(x-b)\int_a^{\frac{a+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}dt\right\} \\
= \; & \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_a^{\frac{a+x}{2}}+\frac{1}{2}(a-b)\left(\frac{(b-t)^{\alpha}}{\alpha}\Bigg|_a^{\frac{a+x}{2}}\right)+\frac{1}{2}(x-b)\left(\frac{(b-t)^{\alpha}}{\alpha}\Bigg|_a^{\frac{a+x}{2}}\right) \\
= \; & \frac{1}{\alpha+1}\left[\left(b-\frac{a+x}{2}\right)^{\alpha+1}-(b-a)^{\alpha+1}\right] \qquad (101) \\
& +\frac{1}{2\alpha}(x+a-2b)\left[\left(b-\frac{a+x}{2}\right)^{\alpha}-(b-a)^{\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

buluruz. Diğer integrali de benzer olarak,

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}\left(t-\frac{a+x}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}\left((t-a)+(t-x)\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}(t-b+b-a)\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}(t-b+b-x)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}(t-b)\,dt+(b-a)\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}dt\right\} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\{(b-x)\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}dt+\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}(t-b)\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-2\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha}dt+(b-a+b-x)\int_{\frac{a+x}{2}}^{x} (b-t)^{\alpha-1}dt\right\} \\
&= -\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{\frac{a+x}{2}}^{x}+\frac{(2b-a-x)}{2}\frac{(b-t)^{\alpha}}{\alpha}\Big|_{\frac{a+x}{2}}^{x} \\
&= -\frac{1}{\alpha+1}\left((b-x)^{\alpha+1}-\left(\frac{2b-a-x}{2}\right)^{\alpha+1}\right) \qquad (102) \\
&\quad +\frac{1}{2\alpha}(2b-a-x)\left((b-x)^{\alpha}-\left(\frac{2b-a-x}{2}\right)^{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

bulunur Ayrıca

$$
\begin{aligned}
& \int_{x}^{\frac{b+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1} \left(\frac{b+x}{2} - t \right) dt \\
= & \ \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{b+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1} \left((b-t) + (x-t) \right) dt \\
= & \ \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{b+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1} (b-t)\, dt + \int_{x}^{\frac{b+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1} \left((x-b) + (b-t) \right) dt \\
= & \ \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{b+x}{2}} (b-t)^{\alpha}\, dt + \frac{1}{2} \int_{x}^{\frac{b+x}{2}} (b-t)^{\alpha}\, dt + \frac{(x-b)}{2} \int_{x}^{\frac{b+x}{2}} (b-t)^{\alpha-1}\, dt \\
= & \ \frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{x}^{\frac{b+x}{2}} + \frac{(x-b)}{2\alpha} \left[(b-t)^{\alpha} \Big|_{x}^{\frac{b+x}{2}} \right] \\
= & \ \frac{1}{\alpha+1} \left[-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}} \right] + \frac{(x-b)}{2\alpha} \left[-\frac{(b-x)^{\alpha}}{2^{\alpha}} \right] \qquad (103)
\end{aligned}
$$

yazılır. Son olarak

$$
\begin{aligned}
& \int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1} \left(t - \frac{b+x}{2} \right) dt \\
= & \ \frac{1}{2} \int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1} \left((t-b) + (t-x) \right) dt \\
= & \ \frac{1}{2} \left\{ \int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1} (t-b)\, dt + \int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1} \left((t-b) + (b-x) \right) dt \right\} \\
= & \ \frac{1}{2} \left\{ - \int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha}\, dt - \int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha}\, dt + (b-x) \int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1}\, dt \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha}\,dt + \frac{(b-x)}{2}\int_{\frac{b+x}{2}}^{b} (b-t)^{\alpha-1}\,dt \\
&= -\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{\frac{b+x}{2}}^{b} + \frac{(b-x)}{2\alpha}\left[(b-t)^{\alpha}\Big|_{\frac{b+x}{2}}^{b}\right] \\
&= \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha+1} - \frac{(b-x)}{2\alpha}\left(\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha} \qquad (104)
\end{aligned}
$$

bulunur. (101), (102), (103) ve (104) değerleri toplanarak (100)'da yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
I \leq\ & \frac{M(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}\left[\frac{1}{\alpha+1}\left(\left(b-\frac{a+x}{2}\right)^{\alpha+1}-(b-a)^{\alpha+1}\right)\right. \\
&+\frac{1}{2\alpha}(x+a-2b)\left[\left(b-\frac{a+x}{2}\right)^{\alpha}-(b-a)^{\alpha}\right] \\
&-\frac{1}{\alpha+1}\left((b-x)^{\alpha+1}-\left(\frac{2b-a-x}{2}\right)^{\alpha+1}\right) \\
&+\frac{1}{2\alpha}(2b-a-x)\left((b-x)^{\alpha}-\left(\frac{2b-a-x}{2}\right)^{\alpha}\right) \\
&+\frac{1}{\alpha+1}\left(-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}}\right)+\frac{(x-b)}{2\alpha}\left(-\frac{(b-x)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\right) \\
&\left.+\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha+1}-\frac{(b-x)}{2\alpha}\left(\frac{b-x}{2}\right)^{\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

yani,

$$
I \leq \frac{M(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}-(b-x)^{\alpha}}{\alpha}(x-a)+\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{\alpha}\right]
$$

bulunur. Sonuç olarak

$$
I \leq \frac{M(b-x)^{1-\alpha}}{2(b-a)}\left[\frac{(b-a)^{\alpha}(x-a)+(b-x)^{\alpha}(a+b-2x)}{2\alpha}\right]
$$

dir. Bu da ispatı tamamlamış olur.

Sonuç 4.1.2. (99) formülünde $\alpha = 1$ olarak alınırsa,

$$\left| \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)dt - \frac{(x-b)\, f(b) - (x-a) f(a)}{2(b-a)} \right|$$

$$\leq \frac{M}{(b-a)} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

şeklinde Ostrowski-Grüss tipli eşitsizliğine bağlı bir eşitsizliğe indirgenmiş olur.

Eğer $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa bu eşitsizlik

$$\left| \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{f(b) + f(a)}{4} - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)dt \right|$$

$$\leq \frac{M(b-a)}{4}$$

şeklinde yazılabilir.

5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kesirli integraller için *Ostrowski-Grüss* tipli eşitsizlikleri elde etmek için elde etmiş olduğumuz

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)}(b-x)^{1-\alpha} J_a^{\alpha} f(b) - J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b) f(b)) + J_a^{\alpha}\left(P_2(x,b) f'(b)\right), \ \alpha \geq 1$$

ve

$$\begin{aligned} f(x) &= (\alpha+1)\Gamma(\alpha)\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{(b-a)} J_a^{\alpha} f(b) - J_a^{\alpha-1}(P_2(x,b) f(b)) \\ &\quad - \frac{(b-x)^{2-\alpha}}{(b-a)}\Gamma(\alpha) J_a^{\alpha-1} f(b) - \frac{(b-x)^{1-\alpha}(x-a)}{(b-a)^{2-\alpha}} f(a) \\ &\quad + 2J_a^{\alpha}\left(K_1(x,b) f'(b)\right). \end{aligned}$$

şeklindeki genelleştirilmiş *montgomery* özdeşlikleri kullanılarak birçok yeni Ostwroski-Grüss tipli sonuçlar elde edilebilir. Bu sonuçların elde edilmesi açık bir problem olarak verebiliriz.

KAYNAKLAR

A. M. Ostrowski, *Über die absolutabweichung einer differentiebaren funktion von ihrem integralmitelwert*, Comment. Math. Helv. 10**(1938)**, 226-227.

Agrawal, Om P., *Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems*, J. Math. Anal. Appl, 272, 368-379, (**2002**).

Babakhani, A., Daftardar-Gejji, V., *On Calculus of Local Fractional Derivatives*, J. Math. Anal. Appl., 270, 66-79, (**2002**).

Bertram, R., *Fractional Calculus and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg , (**1975**).

Butzer, P.L., Westphal, U., *An Introduction to Fractional Calculus*, in: R. Hilfer (Ed.), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, New Jersey, (**2000**).

D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink, *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (**1991**).

D. S. Mitrinovic, J. Pecaric and A. M. Fink, *Inequalities for Functions and Their Integrals and Derivatives* Kluwer Academic, Dordrecht, **(1994)**.

D. S. Mitrinovic, J. Pecaric and A. M. Fink,*Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, **(1993)**.

G. Anastassiou, M.R. Hooshmandasl, A. Ghasemi and F. Moftakharzadeh, *Montgomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities*, J. Inequal. in Pure and Appl. Math, 10(4), (**2009**), Art. 97, 6 pp

J. Duoandikoetxea, *A unified approach to several inequalities involving functions and derivatives*, Czechoslovak Mathematical Journal, 51 (126) **(2001)**, 363–376.

M. Matic, J. Pecaric and N. Ujevic, *Improvement and further generalization of inequalities of Ostrowski-Grüss type,*Computers Math. Appl., 39(3/4), **(2000)**, 161-175.

Miller, K.S., Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, (**1974**).

M. Z. Sarikaya, *On the Ostrowski type integral inequality*, Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXIX, 1(**2010**), pp. 129-134.

M. Z. Sarikaya, *On the Ostrowski type integral inequality for double integrals*, Demonstratio Mathematica, accepted.

M. Z. Sarikaya and H. Ogunmez, *On the weighted Ostrowski type integral inequality for double integrals*, The Arabian Journal for Science and Engineering (AJSE)-Mathematics, **(2011)** 36: 1153-1160

M.Z. Sarikaya and H. Ogunmez, *On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration*, arXiv:1005.1167v1, submitted.

M.Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz and N., Basak, *Hermite -Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities*, Mathematical and Computer Modelling, DOI:10.1016/j.mcm.(**2011**).12.048.

Oldham, K.B., Spainer, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York and London, (**1974**).

Özen, S., *Kesirsel Türevler İçin Opial Eşitsizlikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, (**2003**).

Özen, S.,Öztürk, İ., *Grünwald-Letnikov*, *Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerine*, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(1-2),66-76 Kayseri, (**2004**).

P. Cerone and S.S. Dragomir, *Trapezoidal type rules from an inequalities point of view, Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics*, CRC Press N.Y. **(2000)**.

Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, London, (**1999**).

R. Gorenflo and F. Mainardi, *Fractionalcalculus: integral and differentiable equations of fractional order*, Springer Verlag, Wien, (**1997**), p.223-276.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I**.,** *Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications*, Gordon and Breach, Longhorne, PA, (**1993**).

S. Belarbi and Z. Dahmani, *On some new fractional integral inequalities*, J. Inequal. in Pure and Appl. Math, 10(3), (**2009**), Art. 97, 6 pp.

S. G. Samko, A. A Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Application*, Gordan and Breach Science, New York, (**1993**).

S. S. Dragomir and S. Wang, *An inequality of Ostrowski-Grüss type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for home numerical quadrature rules*, Computers Math. Applic,33(11)**(1997)**,15-20.

S.S. Dragomir and N. S. Barnett, *An Ostrowski type inequality for mappings whose second derivatives are bounded and applications*, RGMIA Research Report Collection, V.U.T., 1**(1999)**, 67-76.

S.S. Dragomir, *An Ostrowski type inequality for convex functions*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 16 **(2005)**, 12–25.

Z. Dahmani, L. Tabharit and S. Taf, *Some fractional integral inequalities*, Nonlinear Science Letters A, 2(1), (**2010**), p.155-160.

Z. Dahmani, L. Tabharit and S. Taf, *New inequalities via Riemann-Liouville fractional integration*, J. Advance Research Sci. Comput., 2(1), (**2010**), p.40-45.

Z. Liu, *Some companions of an Ostrowski type inequality and application*, J. Inequal. in Pure and Appl. Math, 10(2), (**2009**), Art. 52, 12 pp.

X. L. Cheng, *Improvement of some Ostrowski-Grüss type inequalities*, Computers Math. Applic, 42 **(2001)**, 109-114.

6 EKLER

Tezin oluşumunda önemli bir rol oynayan kesirli integraller için farklı bir yöntem kullanılarak elde edilmiş olan sonuçlarımız;

1) M.Z. Sarikaya, E. Set, H. Yaldiz and N. Basak, *Hermite -Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities*, Mathematical and Computer Modelling, DOI:10.1016/j.mcm.(**2011**).12.048.

başlık ile basılmıştır.

Tezin ana sonuçları yeni bir çalışma olarak hazırlanmış ve yayına gönderilmiştir.

2) M. Z. Sarikaya, H. Yaldiz and N. Basak, New fractional inequalities of Ostrowski-Grüss type, submited.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: BAŞAK, Nagihan
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve Yeri	: 16.07.1987 / YERKÖY/YOZGAT
Telefon	: (0554) 701 46 66
e-mail	: nagihan.basak@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. /Matematik B.	2012
Lisans	Atatürk Ü. /Matematik B.	2010
Lise	Yozgat Anadolu Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	G. IMKB Anadolu Lisesi	Matematik Öğrt.

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Mehmet Zeki SARIKAYA, Erhan SET, Hatice YALDIZ and **Nagihan BAŞAK** , Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities.
2. Mehmet Zeki SARIKAYA, Hatice YALDIZ and **Nagihan BAŞAK**, New fractional inequalities of Ostrowski-Grüss type.