T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK-SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET KÜÇÜKÜNAL

TEMMUZ 2012

DÜZCE

T.C

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

KABUL VE ONAY BELGESİ

Mehmet KÜÇÜKÜNAL tarafından hazırlanan HİPERBOLİK-SCHRÖDINGER DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ isimli Lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 13/06/2012 tarih ve 2012/196 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye

Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR

Düzce Üniversitesi

Üye

Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

Fatih Üniversitesi

Üye

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Tezin savunulduğu tarih:17/07/2012

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Mehmet KÜÇÜKÜNAL'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Doç. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

17/07/2012

Mehmet KÜÇÜKÜNAL

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Başlamış olduğum bu yolda, en başından sonuna dek tüm görüşlerini paylaşan, engin bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen, bilim tutkusunu içinde barındıran, tüm sorularıma sabır ile yanıt veren ve her türlü konuda desteğini eksik etmeyerek, yanımda olduğunu hissettiğim saygıdeğer hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm görüşlerini ve bilgisini herkes ile paylaşmaktan sakınmayan, bilgi ve deneyimleriyle sonuca ulaşmamda yol gösteren, herkese eşit tavrı ve işine tutku ile bağlı olan, sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca diğer jüri üyesi ve matematik bölüm başkanımız, sayın Prof. Dr. İsmet YILDIZ hocama göstermiş olduğu ilgi ve yol gösterici yardımlarından ötürü çok teşekkür ederim.

Tez dönemim boyunca moralimi en üst düzeyde tutan ve kendilerinden her fırsatta güç aldığım aileme ve arkadaşlarıma müteşekkirim.

Temmuz 2012 **Mehmet KÜÇÜKÜNAL**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

ÖZET

HİPERBOLİK-SCHRODINGER DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Mehmet KÜÇÜKÜNAL
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Yıldırım ÖZDEMİR
Temmuz 2012, 74 sayfa

Birinci Bölüm giriş kısmıdır. İkinci Bölüm Çalışmamızda ihtiyaç duyulan bazı temel tanım ve kavramları içermektedir. Üçüncü Bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Bu alanda yapılan araştırmalar hakkında kısa bir inceleme, hiperbolik-Schrodinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin kararlılıkları hakkındaki temel teoremin ispatı ve bu soyut sonuçların uygulamalar yardımıyla, hiperbolik-Schrodinger denklemleri için fark şemalarının kararlılık kestirimlerini elde edilmesini sağlaması birinci kısımda verilmiştir. İkinci kısımda bir H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü hiperbolik-Schrodinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemini yaklaşık olarak çözen, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu kararlı fark şemaları sunulmaktadır. Ayrıca, hiperbolik-Schrodinger denklemi için karma tipli sınır-değer problemlerinin çözümlerinin kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Üçüncü kısımda ise sayısal analizler bulunmaktadır. Dördüncü Bölüm Bu bölümde hata analizi yapılırken kullanılan formüller, hiperbolik-Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır-deeğer probleminin tam çözümünün ve fark şemaları yöntemiyle birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları yardımıyla elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri bulunmaktadır. Bu bölüm ayrıca, birinci ve ikinci basamaktan fark şemaları kullanılarak yazılan matlab programı sonrasında elde edilen verilerin karşılaştırıldığı tabloları içermektedir. Beşinci bölüm sonuç ve öneriler kısmıdır.

Anahtar sözcükler: Hiperbolik-Schrödinger denklemi, Kararlılık, Lokal olmayan sınır-değer problemleri.

ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mehmet KÜÇÜKÜNAL
Duzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master of Science Thesis
Supervisor: Assit. Prof. Yildirim OZDEMIR
July 2012, 74 pages

First chapter is the introduction. In the second chapter basic concepts and definitions that we need in the thesis are given. Third chapter consists of three sections. A brief survey of all investigations in this area, the proof of main theorem about the stability of the nonlocal boundary value problem for hyperbolic-Schrödinger equations in a Hilbert space and in applications this abstract result permits to obtain the stability estimates for the solution of the difference schemes for hyperbolic-Schrödinger equations can be found in the first section. In the second section the stable first and second order of accuracy difference schemes approximately solving the nonlocal boundary value problem for hyperbolic-Schrödinger equation in a Hilbert space H with self-adjoint positive definite operator A are presented and the stability estimates for the solutions of the difference schemes of the mixed type boundary value problems for hyperbolic-Schrödinger equations are obtained. The last section is the numerical analysis. The first and second order of accuracy difference schemes are studied. Fourth chapter a matlab program is given to conclude that the second order of accuracy is more accurate. The figures and table are included. Fifth chapter is conclusions and discussions.

Keywords: Hyperbolic- Schrödinger equation; Nonlocal boundary value problems; Stability

EXTENDED ABSTRACT

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC-SCHRÖDINGER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mehmet KÜÇÜKÜNAL
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assist. Prof. Yildirim OZDEMIR
July 2012, 74 pages

1.INTRODUCTION

First chapter is the introduction. In the second chapter basic concepts and definitions that we need in the thesis are given. Third chapter consists of three sections. A brief survey of all investigations in this area, the proof of main theorem about the stability of the nonlocal boundary value problem for hyperbolic-Schrödinger equations in a Hilbert space and in applications this abstract result permits to obtain the stability estimates for the solution of the difference schemes for hyperbolic-Schrödinger equations can be found in the first section. In the second section the stable first and second order of accuracy difference schemes approximately solving the nonlocal boundary value problem for hyperbolic-Schrödinger equation in a Hilbert space H with self-adjoint positive definite operator A are presented and the stability estimates for the solutions of the difference schemes of the mixed type boundary value problems for hyperbolic-Schrödinger equations are obtained. The last section is the numerical analysis. The first and second order of accuracy difference schemes are studied. Fourth chapter a matlab program is given to conclude that the second order of accuracy is more accurate. The figures and table are included. Fifth chapter is conclusions and discussions.

It is known that certain problems of modern physics and technology can be effectively described in terms of nonlocal problems for partial differential equations. These nonlocal conditions arise mainly when the data on the boundary cannot be measured directly.

Methods of solutions of nonlocal boundary value problems for partial differential equations and partial differential equations of mixed type have been studied extensively by many researches (see [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Karatopraklieva, K. G., 1991], [Bazarov, D. and Soltanov, H., 1995], [Glazatov,

S. N., 1998], [Ashyralyev, A. and Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. and Ozdemir, Y., 2005], [Ashyralyev, A. and Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. and Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. and Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. and Hicdurmaz, B., 2011], [Ashyralyev, A. and Ozger, F., 2011] and the references given therein).

Our goal in this work is to investigate the stability of difference schemes of the approximate solutions of the nonlocal boundary value problems for equations of hyperbolic-Schrodinger type.

1 GİRİŞ

Modern fiziğin ve teknolojinin bazı problemlerinin lokal olmayan kısmi diferansiyel denklemler üzerinden etkili bir biçimde ifade edilebilir olduğu bilinmektedir. Bu lokal olmayan koşullar çoğunlukla sınırdaki veriler doğrudan ölçülemediği zaman ortaya çıkar. Kısmi diferansiyel denklemler ve karma tipli kısmi diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözüm yöntemleri üzerine bir çok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmıştır. (bkz. [Salakhitdinov, M. S., 1974], [Djuraev, T. D., 1979], [Karatopraklieva, K. G., 1991], [Bazarov, D. ve Soltanov, H., 1995], [Glazatov, S. N., 1998], [Ashyralyev, A. ve Aggez, N., 2004], [Ashyralyev, A. ve Ozdemir, Y., 2005], [Ashyralyev, A. ve Gercek, O., 2008], [Ashyralyev, A. ve Sirma, A., 2008], [Ashyralyev, A. ve Yildirim, O., 2010], [Ashyralyev, A. ve Hicdurmaz, B., 2011], [Ashyralyev, A. ve Ozger, F., 2011]).

Bu çalışmadaki amacımız hiperbolik-Schrödinger tipindeki denklemler için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için kurulan fark şemalarının kararlılığını incelemektir.

Bilindiği gibi hiperbolik-Schrödinger denklemler için karma tipli problemler, Fourier serileri yöntemi ile, Fourier dönüşümü yöntemi ile ve Laplace dönüşümü yöntemi ile çözülebilir.

Şimdi bunlara örnekler verelim.

İlk olarak hiperbolik-Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \cos t \sin x, 0 \le t \le 1, 0 < x < \pi, \\ i\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = (2\cos t - \sin t)\sin x, -1 \le t \le 0, 0 < x < \pi, \\ u(1,x) = \dfrac{1}{2}u(-1,x) + \dfrac{1}{2}\cos 1 \sin x, 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, -1 \le t \le 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

(1.1) probleminin çözümü için, değişkenlerine ayırma yöntemi ya da "Fourier Serileri Yöntemi" adıyla bilinen çözüm yöntemini kullanılacaktır. Problemin çözümü için $u(t,x)$fonksiyonu

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x),$$

şeklinde iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edilir. Burada,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = 0, 0 \le t \le 1, 0 < x < \pi, \\ \\ i\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = 0, -1 \le t \le 0, 0 < x < \pi, \\ \\ v(1,x) = \dfrac{1}{2}v(-1,x), 0 \le x \le \pi, \\ \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0, -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

ve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = \cos t \sin x, 0 \le t \le 1, 0 < x < \pi, \\ \\ i\dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = (2\cos t - i \sin t)\sin x, -1 < t < 0, 0 < x < \pi, \\ \\ w(1,x) = \dfrac{1}{2}w(-1,x) + \dfrac{1}{2}\cos 1 \sin x, 0 \le x \le \pi, \\ \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, -1 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

dir.

Öncelikle, (1.2) probleminin çözümünü elde edeceğiz. $0 \le t \le 1$ olsun. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile,

$$v(t,x) = T(t)X(x) \ne 0$$

ve

$$\frac{T''(t) + T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

elde ederiz. Buradan,

$$\frac{T''(t) + T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 = \lambda$$

yazılır. Öyleyse,

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{k\pi}{L} = \frac{k\pi}{\pi} = k$$

ve

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

olur. Yani,

$$X_k(x) = \sin kx$$

şeklinde bulunur. Şimdi, $T\,(t)$ ifadesini elde etmek için,

$$T''(t) + T(t) = -k^2 T(t)$$

ya da

$$T''(t) + (1 + k^2)T(t) = 0$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$T_k(t) = A_k \sin\sqrt{1+k^2}t + B_k \cos\sqrt{1+k^2}t$$

olarak buluruz. Böylece,

$$v(t,x) = T(t)X(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \sin\sqrt{1+k^2}t + B_k \cos\sqrt{1+k^2}t\right)\sin kx$$

olur.

Şimdi, $-1 \leq t \leq 0$ durumu incelenecektir. Benzer şekilde değişkenlerin ayrılması yöntemini kullanarak

$$v(t,x) = T(t)X(x) \neq 0$$

ifadesini ve

$$\frac{T'(t)+T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 = \lambda$$

eşitliğini elde ederiz. Bu yüzden,

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0$$

veya

$$X_k(x) = \sin kx$$

olarak yazılır. Şimdi de,

$$T'(t) - i(1+k^2)T(t) = 0$$

denklemini yazalım. Böylece,

$$T_k(t) = C_k e^{i(1+k^2)t}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k e^{i(1+k^2)t}\right)\sin kx$$

çözümü bulunmuş olur.

Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları,

$$\begin{cases} v(1,x) = \dfrac{1}{2}v(-1,x), \\ \\ v(0^+,x) = v(0^-,x), \\ \\ v'(0^+,x) = v'(0^-,x), \end{cases}$$

bir arada kullanılarak

$$A_k = B_k = C_k = 0$$

elde edilir. Bundan dolayı, $v(t,x) \equiv 0$ olur.

Daha sonra, (1.3) ifadesinin çözümü bulunacaktır. Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ durumunu inceleyelim.

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \sin kx$$

olsun. Ardından,

$$w_{tt} - w_{xx} + w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_k''(t) + (1+k^2) D_k(t) \right) \sin kx = \cos t \sin x$$

yazılabilir. Bu da,

$$\begin{cases} D_1''(t) + 2D_1(t) = \cos t \text{ eğer } k = 1 \text{ ise,} \\ D_k''(t) + (1+k^2) D_k(t) = 0 \text{ eğer } k \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunun göstergesidir. Bu sebeple,

$$D_k(t) = c_1 \sin \sqrt{1+k^2} t + c_2 \cos \sqrt{1+k^2} t$$

elde edilecektir. Sonrasında, $-1 \leq t \leq 0$ durumunu göz önüne alalım. Benzer olarak,

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k(t) \sin kx$$

olur. Ardından,

$$iw_t - w_{xx} + w = \sum_{k=1}^{\infty} \left(iE_k'(t) + (1+k^2) E_k(t) \right) \sin kx = (2\cos t - i \sin t) \sin x$$

yazabiliriz. Bu da,

$$\begin{cases} iE_1'(t) + 2E_1(t) = 2\cos t - i \sin t \text{ eğer } k = 1 \text{ ise,} \\ iE_k'(t) + (1+k^2) E_k(t) = 0 \text{ eğer } k \neq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu anlamına gelecektir. Bu durumda,

$$E_k(t) = c_3 e^{i\left(1+k^2\right)t}$$

elde edilecektir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} D_k(1) = \frac{1}{2} E_k(-1) \text{ eğer } k \neq 1 \text{ ise,} \\ \\ D_k(0) = E_k(0), \ \forall k \\ \\ D_k'(0) = E_k'(0), \ \forall k \end{cases}$$

birlikte kullanılırsa, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ elde edilir. Bu nedenle, tüm $k \neq 1$ için $D_k(t) \equiv E_k(t) \equiv 0$ olur.

Eğer $k = 1$ olursa,

$$D_1''(t) + 2D_1(t) = \cos t$$

denklemi ortaya çıkacaktır. Dolayısıyla, $D_1\left(t\right)$ ifadesi

$$D_1\left(t\right)=n_1\sin\sqrt{2}t+n_2\cos\sqrt{2}t+\cos t$$

şeklindedir. Böylece,

$$w\left(t,x\right)=\left(n_1\sin\sqrt{2}t+n_2\cos\sqrt{2}t+\cos t\right)\sin x$$

olur. Benzer şekilde $k=1$ olursa,

$$E_1'\left(t\right)+2E_1\left(t\right)=2\cos t-i\sin t$$

yazılır. O halde, $E_1\left(t\right)$ formülü

$$E_1\left(t\right)=e^{-2it}\left(n_3-1\right)+\cos t$$

biçiminde olacaktır. Böylece,

$$w\left(t,x\right)=\left[e^{-2it}\left(n_3-1\right)+\cos t\right]\sin x$$

yazılır. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları

$$\begin{cases} D_1\left(1\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos 1+E_1\left(-1\right)\right), \\ \\ D_1\left(0\right)=E_1\left(0\right), \\ \\ D_1'\left(0\right)=E_1'(0) \end{cases}$$

kullanılarak $n_1=n_2=0$ ve $n_3=1$ bulunur. Bu yüzden,

$$w\left(t,x\right)=\cos t\sin x$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$u\left(t,x\right)=v\left(t,x\right)+w\left(t,x\right)=\cos t\sin x$$

ifadesi (1.1) probleminin tam çözümüdür.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\alpha_r\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}=f(t,x), \\ \\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in\overline{\Omega},0\leq t\leq T, \\ \\ i\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\alpha_r\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2}=g(t,x), \\ \\ x=(x_1,\ldots,x_n)\in\overline{\Omega},-T\leq t\leq 0, \\ \\ u_t(0+,x)=u_t(0-,x),x\in\overline{\Omega}, \\ \\ u(-T,x)=u\left(T,x\right)+\varphi(x),\ x\in\overline{\Omega}, \\ \\ u(t,x)=0,x\in S \end{cases}$$

çok boyutlu hiperbolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada, $\alpha_r > 0$ ve $f(t,x)$ $(t \in [0,T], \ x \in \overline{\Omega})$, $g(t,x)$ $(t \in [-T,0], \ x \in \overline{\Omega}), \varphi(x), \psi(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ verilmiş düzgün (smooth) fonksiyonlardır. Ayrıca Ω, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklit uzayında S ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ sınırı ile birim açık küp olup,

$$(x : x = (x_1, \cdots, x_n), 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$$

dir.

Ancak, değişkenlerine ayırma yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

İkinci olarak, hiperbolik-Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = -\left[(1-x)e^{-x}\right]\cos t, 0 \leq t \leq 1, 0 < x < \infty, \\ \\ iu_t - u_{xx} + u = -i\left[1 - (1+x)e^{-x}\right]\sin t \\ \\ +(1 - 2e^{-x})\cos t, -1 \leq t \leq 0, 0 < x < \infty, \\ \\ u(1,x) = \dfrac{1}{2}u(-1,x) + \dfrac{1}{2}\left[1 - (1+x)e^{-x}\right]\cos 1, 0 \leq x < \infty, \\ \\ u(t,0) = u_x(t,0) = 0, -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{1.4}$$

problemini ele alalım. (1.4) problemi Laplace dönüşümü yöntemi (x'e göre) ile çözülebilir. Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ aralığını göz önüne alalım. Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace Dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$L\{u_{tt}\} - L\{u_{xx}\} + L\{u\} = -\cos t L\left\{(1-x)e^{-x}\right\}$$

veya

$$(L\{u(t,x)\})_{tt} - s^2 L\{u(t,x)\} + su(t,0) + u_x(t,0) + L\{u(t,x)\} = -\cos t \frac{s}{(s+1)^2}$$

olacaktır. Burada,

$$L\{u(t,x)\} = u(t,s)$$

olarak gösterelim. Böylece denklem,

$$u_{tt}(t,s) - s^2 u(t,s) + u(t,s) = -\cos t\left(\frac{s}{(s+1)^2}\right)$$

veya

$$u_{tt}(t,s) + \left(1 - s^2\right)u(t,s) = -\cos t\left(\frac{s}{(s+1)^2}\right)$$

haline gelir. Bu denklemin tamamlayıcı çözümü

$$u_c(t,s) = c_1 e^{\sqrt{s^2-1}t} + c_2 e^{-\sqrt{s^2-1}t}$$

dir. Kısmi çözüm için ise,

$$u_p\left(t,s\right)=\frac{\cos t}{s\left(s+1\right)^2}$$

yazılacaktır. Buna göre,

$$u\left(t,s\right)=c_1e^{\sqrt{s^2-1}t}+c_2e^{-\sqrt{s^2-1}t}+\frac{\cos t}{s\left(s+1\right)^2}$$

olarak elde edilir.

Şimdi, $-1\leq t\leq 0$ durumunu göz önüne alalım. Buna göre,

$$iu_t-u_{xx}+u=-i\left[1-(1+x)e^{-x}\right]\sin t+\left(1-2e^{-x}\right)\cos t$$

dir. Diferansiyal denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$iL\left\{u_t\right\}-L\left\{u_{xx}\right\}+L\left\{u\right\}=-i\sin tL\left\{1-\left(1+x\right)e^{-x}\right\}+\cos tL\left\{1-2e^{-x}\right\}$$

elde edilir. O halde,

$$iu_t\left(t,s\right)-s^2u\left(t,s\right)+u\left(t,s\right)=-i\sin t\left(\frac{1}{s\left(s+1\right)^2}\right)-\cos t\left(\frac{s-1}{s\left(s+1\right)}\right)$$

veya

$$iu_t\left(t,s\right)+\left(1-s^2\right)u\left(t,s\right)=-i\sin t\left(\frac{1}{s\left(s+1\right)^2}\right)-\cos t\left(\frac{s-1}{s\left(s+1\right)}\right)$$

yazılır. Bu diferansiyel denklemin tamamlayıcı çözümü

$$u_c\left(t,s\right)=c_3e^{i\left(1-s^2\right)t}$$

dir. Kısmi çözüm için ise

$$u_p\left(t,s\right)=\frac{\cos t}{s\left(s+1\right)^2}$$

yazılır. Böylece denklemin genel çözümü,

$$u\left(t,s\right)=c_3e^{i\left(1-s^2\right)t}+\frac{\cos t}{s\left(s+1\right)^2}$$

dir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları kullanılarak,

$$u\left(t,s\right)=\frac{\cos t}{s\left(s+1\right)^2}$$

çözümü elde edilir. Son olarak, ters Laplace dönüşümü uygulanırsa, verilen (1.4) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü

$$u\left(t,x\right)=L^{-1}\left\{u\left(t,s\right)\right\}=\cos tL^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s+1\right)^2}\right\}$$

ya da

$$u\left(t,x\right)=\left[1-\left(1+x\right)e^{-x}\right]\cos t$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = f(t,x), \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{\Omega}^+, 0 \leq t \leq T, \\ i\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \alpha_r \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = g(t,x), \\ x = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{\Omega}^+, -T \leq t \leq 0, \\ u(-T,x) = u(T,x) + \varphi(x), \\ u_t(0+,x) = u_t(0-,x) + \varphi(x),\ x \in \overline{\Omega}^+, \\ u(t,x) = 0,\ x \in S^+ \end{cases}$$

çok boyutlu hiperbolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada, $\alpha_r > 0$ ve $f(t,x)$ $\left(t \in [0,T],\ x \in \overline{\Omega}^+\right)$, $g(t,x)$ $\left(t \in [-T,0],\ x \in \overline{\Omega}^+\right)$, $\varphi(x), \psi(x)$ $\left(x \in \overline{\Omega}^+\right)$ verilmiş düzgün fonksiyonlardır. Ayrıca Ω^+, $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklit uzayında S ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ ile sınırlı açık birim küp olup,

$$(x : x = (x_1, \cdots, x_n), 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$$

dir.

Ancak, Laplace dönüşüm yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

Son olarak, Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülecek olan

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = (2 - 4x^2)\, e^{-x^2} \cos t, 0 \leq t \leq 1, -\infty < x < \infty, \\ iu_t - u_{xx} + u = -i \sin t e^{-x^2} + (3 - 4x^2)\, e^{-x^2} \cos t, -1 \leq t \leq 0, -\infty < x < \infty, \\ u(1,x) = \dfrac{1}{2} u(-1,x) + \dfrac{1}{2} e^{-x^2} \cos 1, -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{1.5}$$

bir karma tipli lokal olmayan sınır-değer problemini ele alalım.

Öncelikle, $0 \leq t \leq 1$ aralığındaki çözümü bulalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa

$$F\{u_{tt}\} - F\{u_{xx}\} + F\{u\} = F\left\{\left(2 - 4x^2\right) e^{-x^2}\right\} \cos t$$

eşitliği elde edilecektir. Burada,

$$F\{u(t,x)\} = u(t,s)$$

gösterimini kullanalım. Böylece denklem,

$$u_{tt}(t,s)+\left(1+s^2\right)u(t,s)=s^2F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

şeklinde yazılır. Buna göre, tamamlayıcı çözüm

$$u_c(t,s)=c_1\cos\sqrt{s^2+1}t+c_2\sin\sqrt{s^2+1}t$$

dir. Kısmi çözüm için ise

$$u_p(t,s)=A\cos t+B\sin t$$

yazılır. $u_p(t,s)$ nin türevleri alınarak denklemde yerine yazılırsa,

$$-A\cos t-B\sin t+\left(1+s^2\right)(A\cos t+B\sin t)=s^2F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

veya

$$A=F\left\{e^{-x^2}\right\}\text{ ve }B=0$$

elde edilecektir. Bu yüzden,

$$u_p(t,s)=F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$u(t,s)=c_1\cos\sqrt{s^2+1}t+c_2\sin\sqrt{s^2+1}t+F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

biçiminde bulunur.

Şimdi, $-1\leq t\leq 0$ aralığını göz önüne alalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa,

$$iF\{u_t\}-F\{u_{xx}\}+F\{u\}=-iF\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t+\left[F\left\{e^{-x^2}\right\}+F\left\{\left(2-4x^2\right)e^{-x^2}\right\}\right]\cos t$$

ya da

$$iu_t(t,s)+\left(1+s^2\right)u(t,s)=-iF\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t+\left(1+s^2\right)F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

veya

$$u_t(t,s)-\left(i+is^2\right)u(t,s)=-F\left\{e^{-x^2}\right\}\sin t-\left(i+is^2\right)F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

elde edilir. Öyleyse, tamamlayıcı çözüm

$$u_c(t,s)=c_3e^{i\left(1+s^2\right)t}$$

olacaktır. Kısmi çözüm ise

$$u_p(t,s)=D\cos t+E\sin t$$

şeklinde olmalıdır. Buradan,

$$-D\sin t+E\cos t-\left(i+is^2\right)\left(D\cos t+E\sin t\right)=-\sin tF\left\{e^{-x^2}\right\}-\left(i+is^2\right)\cos tF\left\{e^{-x^2}\right\}$$

yazılarak,

$$D=F\left\{e^{-x^2}\right\} \text{ ve } E=0$$

elde edilir. Buna göre,

$$u_p\left(t,s\right)=F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

dir. O halde,

$$u\left(t,s\right)=c_3e^{i\left(1+s^2\right)t}+F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

dir. Lokal olmayan sınır koşulu ve süreklilik koşulları kullanılırsa,

$$\begin{cases} u\left(0^+,s\right)=c_1+F\left\{e^{-x^2}\right\}, \\ u_t\left(0^+,s\right)=c_2\sqrt{s^2+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u\left(0^-,s\right)=c_3+F\left\{e^{-x^2}\right\}, \\ u_t\left(0^-,s\right)=i\left(1+s^2\right)c_3, \end{cases}$$

$$u\left(1,s\right)=\frac{1}{2}u\left(-1,s\right)+\frac{1}{2}F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

$c_1=c_2=c_3=0$ elde edilir. Böylece,

$$u\left(t,s\right)=F\left\{e^{-x^2}\right\}\cos t$$

olur. Son olarak, ters Fourier dönüşümü uygulanırsa, (1.5) lokal olmayan sınır-değer probleminin tam çözümü

$$u\left(t,x\right)=e^{-x^2}\cos t$$

elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdaki

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\displaystyle\sum_{|r|=2m}a_r\frac{\partial^{|\tau|}u}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=f(t,x), \\ 0\le t\le T, x, r\in\mathbb{R}^n, |r|=r_1+\cdots+r_n, \\ i\dfrac{\partial u}{\partial t}-\displaystyle\sum_{|r|=2m}a_r\frac{\partial^{|\tau|}u}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=f(t,x), \\ -T\le t\le 0, x, r\in\mathbb{R}^n, |r|=r_1+\cdots+r_n, \\ u(-T,x)=u\left(T,x\right)+\varphi(x), x\in\mathbb{R}^n, \\ u_t(0+,x)=u_t(0-,x),\ \ x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

çok boyutlu hiperbolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü elde edilebilir. Burada α_r, $f(t,x)$ $(t \in [0,T]\,,\ x \in R^n)$, $g(t,x)$ $(t \in [-T,0]\,, x \in R^n), \varphi(x), \psi(x)$ $(x \in R^n)$ verilmiş düzgün fonksiyonlardır.

Ancak, Fourier dönüşüm yöntemi yalnızca sabit katsayılı denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir. Oysa ki fark şemaları yöntemi katsayıların sabit olmadığı durumlarda da kullanılabilen çok kullanışlı bir yöntemdir.

Bu çalışmada bir H Hilbert uzayında verilen fark denklemlerinin, öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t)\,(0 \le t \le 1)\,, \\ i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\,(-1 \le t \le 0)\,, \\ Au(-1) = \alpha u\,(\mu) + \varphi, 0 < \mu \le 1 \end{cases}$$

ele alınmıştır. Operatör yaklaşımı uygulanarak bu lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Uygulamalarda bu soyut sonuçlar, hiperbolik-Schrödinger denklemleri için fark şemalarının kararlılık kestirimlerini elde edilmesini sağlamıştır. Bu sonuç lokal olmayan sınır koşulları tarafından oluşturulan fark operatörünün pozitifliğine dayanmaktadır. Bu fark şemalarının çözümü için yapılan teorik sonuçların doğruluğu, sayısal denemelerle de desteklenmiştir.

Öncelikle, beş bölümden oluşan bu çalışmanın içeriğini tarif edelim.

Birinci Bölüm giriş kısmıdır.

İkinci Bölüm Çalışmamızda ihtiyaç duyulan bazı temel tanım ve kavramları içermektedir.

Üçüncü Bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Bu alanda yapılan araştırmalar hakkında kısa bir inceleme, hiperbolik-Schrodinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin kararlılıkları hakkındaki temel teoremin ispatı ve bu soyut sonuçların uygulamalar yardımıyla, hiperbolik-Schrodinger denklemleri için fark şemalarının kararlılık kestirimlerini elde edilmesini sağlaması birinci kısımda verilmiştir. İkinci kısımda bir H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A operatörlü hiperbolik-Schrodinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemini yaklaşık olarak çözen, birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu kararlı fark şemaları sunulmaktadır. Ayrıca, hiperbolik-Schrodinger denklemi için karma tipli sınır-değer problemlerinin çözümlerinin kararlılık kestirimleri elde edilmiştir. Üçüncü kısımda ise sayısal analizler bulunmaktadır.

Dördüncü Bölüm Bu bölümde hata analizi yapılırken kullanılan formüller, hiperbolik-Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır-deeğer probleminin tam çözümünün ve fark şemaları yöntemiyle birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları yardımıyla elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri bulunmaktadır. Bu bölüm ayrıca, birinci ve ikinci basamaktan fark şemaları kullanılarak yazılan matlab programı sonrasında elde edilen verilerin karşılaştırıldığı tabloları içermektedir.

Beşinci bölüm sonuç ve öneriler kısmıdır.

2 KURAMSAL KAVRAMLAR

Bu bölümde Hilbert uzayı teorisinin seçilmiş elementer kavramlar ve çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanımlar verilecektir (bkz: [Soykan, Y., 2012] ve [Kızıltunç, H., 2007]).

2.1 Hilbert Uzayının Elemanları

Tanım 2.1. *Bir M kümesi üzerinde tanımlı bir metrik $\forall x, y, z \in M$ için*

(a) $d(x, y) \geq 0;$

(b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(c) $d(x, y) = d(y, x)$

(d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(üçgen eşitsizliği)*

özelliklerini sağlayan bir $d : M \times M \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur.

Eğer d, M üzerinde bir metrik ise o zaman (M, d) çiftine bir metrik uzay denir.

Örnek 2.1. Herhangi bir $k \geq 1$ tamsayısı için,

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}$$

ile tanımlı $d : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{F}^k$ üzerinde bir metriktir. Bu metrik $\mathbb{F}^k$ üzerinde standart metrik olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. *$X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.*

Tanım 2.3. *$X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X'deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsaksa yani, $x_n \to x \in X$ ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.*

Tanım 2.4. *L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:*

A)*L, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,*

G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G2. Her $x, y, z, \in L$ için $x+(y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x =$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) *$x, y \in L$ ve $a, \theta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:*

L1. $a \cdot x \in L$ *dir,*

L2. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ *dir,*

L3. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ *dir,*

L4. $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta x)$ *dir,*

L5. $\theta \cdot x = x$ *dir (Burada* θ*,* F *nin birim elemanıdır).*

$F = \mathbb{R}$ *ise* L *ye reel lineer uzay,* $F = \mathbb{C}$ *ise* L *ye kompleks lineer uzay denir.*

Tanım 2.5. *N bir lineer uzay olsun.* $\|\cdot\| : N \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun* x*'deki değerini* $\|x\|$ *ile gösterelim. Bu fonksiyon için,*

N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2. $\|ax\| = |a| \, \|x\| \ (a \in F)$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ *fonksiyonuna* N *üzerinde norm,* $(N, \|\cdot\|)$ *ikilisine de normlu uzay adı verilir.*

Tanım 2.6. *L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere* $\langle \cdot \rangle : L \times L \to F$ *fonksiyonu*

I1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

I2. $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle \ (a \in F)$

I3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

I4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *ve* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

şartları sağlanıyorsa $\langle \cdot \rangle$ *fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu denir.*

Tanım 2.7. *X bir iç çarpım uzayı ve* $\|\cdot\|$*, iç çarpım normu olsun.* $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ *olarak tanımlansın. Bu durumda* (X, d) *bir metrik uzay olur.* X *iç çarpım uzayı, iç çarpımın normuyla tanımlanan bu* d *metriğine göre tam ise* X*'e Hilbert uzayı denir.*

N ve N' normlu uzay ve $A : N \to N'$ bir lineer operatör olmak üzere $\forall x \in N$ için,

$$\|Ax\| \leq M \|x\|$$

olacak biçimde bir $M \geq 0$ reel sayısı varsa A'ya sınırlı lineer operatör adı verilir. Burada,

$$\|A\| = \inf M$$

sayısına A operatörünün normu denir.

3 MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde sırasıyla operatör yaklaşımı ve sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca nümerik denemelerde iyileştirilmiş-Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır.

3.1 HİPERBOLİK-SCHRODINGER DENKLEMLERİ İÇİN LOKAL OLMAYAN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

Öncüller ve Motivasyon

H Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı bir A operatörü ile

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t)\,(0 \leq t \leq 1), \\ i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\,(-1 \leq t \leq 0), \\ Au(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi, 0 < \mu \leq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

yukarıdaki lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım.

Birçok hiperbolik-Schrodinger denkleminin lokal olmayan sınır-değer problemi (3.1) problemine indirgenebildiği bilinmektedir.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $u(t)$ fonksiyonu (3.1) probleminin çözümüdür:

i. $u(t)$ fonksiyonu $(0, 1]$ aralığında iki kez türevlenebilir sürekli ve $[-1, 1]$ arasında sürekli türevlenebilir olmalıdır. Aralığın uç noktalarında türev tek taraflı türev manasındadır.

ii. $u(t)$, her $t \in [-1, 1]$ için $D(A)$'nin elemanıdır ve $Au(t)$ $[-1, 1]$ aralığında süreklidir.

iii. $u(t)$ (3.1) probleminin denklemlerini ve lokal olmayan koşula uygundur.

Buradaki amacımız (3.1) probleminin kararlılığını incelemektir. Bu kısımda (3.1) probleminin çözümünün kararlılık kestirimleri elde edilecektir. Uygulamalarda karma tipli hiperbolik-Schrödinger denklemlerinin çözümleri için kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Son olarak bilinmelidir ki hiperbolik-Schrödinger denklemleri fizik ve mühendislikte önemli bir rol oynamaktadır (Bkz, örneğin, [Zheng, Z. ve Xuegang, Y., 2004], [Oblomkov, A. A. ve Penskoi, A. V., 2005], [Avila, A. ve Krikorian, R., 2006], [Kozlowski, K. ve Kozlowska, J. M., 2010], ve ayrıntılı bilgiler kaynaklar kısmında verilmiştir.)

Ayrıca, başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümlerinin ve Schrödinger denkleminin son on yıl içerisinde kapsamlı bir araştırma faaliyeti konusu olduğu bilinmektedir (Bkz, örneğin[Tselios, K. ve Simos, T. E., 2005], [Sakas, D. P. ve Simos, T. E., 2005], [Psihosiyos, G. ve Simos, T. E., 2005], [Anastassi, Z. A. ve Simos, T. E., 2005], [Simos,

T. E., 2009], [Stavroyiannis, S. ve Simos, T. E., 2009] ve ayrıntılı bilgiler kaynaklar kısmında verilmiştir.)

Temel Teorem

Teorem 3.1. *$\varphi \in D(A^{1/2}), g(0) \in D(A^{1/2}), g'(0) \in D(A^{1/2})$ ve $f(0) \in H$ olduğunu varsayalım. $f(t)$, $[0,1]$ aralığında sürekli türevlenebilir ve $g(t)$, $[-1,0]$ aralığında iki kez türevenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda, (3.1) probleminin tek bir çözümü vardır ve aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri sağlanır.*

$$\max_{-1\le t\le 1}\|u(t)\|_H \le M\Big[\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_H + \left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_H \tag{3.2}$$

$$+\max_{-1\le t\le 0}\left\|A^{-1}g'(t)\right\|_H + \max_{0\le t\le 1}\left\|A^{-1/2}f(t)\right\|_H\Big],$$

$$\max_{-1\le t\le 1}\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|_H + \max_{-1\le t\le 1}\left\|A^{1/2}u(t)\right\|_H \le M\Big[\|\varphi\|_H \tag{3.3}$$

$$+\|g(0)\|_H + \max_{-1\le t\le 0}\left\|A^{-1/2}g'(t)\right\|_H + \max_{0\le t\le 1}\|f(t)\|_H\Big],$$

$$\max_{-1\le t\le 0}\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|_H + \max_{0\le t\le 1}\left\|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right\|_H + \max_{-1\le t\le 1}\|Au(t)\|_H \tag{3.4}$$

$$\le M\Big[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H + \left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H + \|g'(0)\|_H$$

$$+\max_{-1\le t\le 0}\|g''(t)\|_H + \left\|A^{1/2}f(0)\right\|_H + \max_{0\le t\le 1}\left\|A^{1/2}f'(t)\right\|_H\Big].$$

Burada M, $f(t)$, $t \in [0,1]$, $g(t)$, $t \in [-1,0]$ ve φ ifadelerinden bağımsızdır.

İspat: *(3.1)* probleminin çözümü için formül elde edeceğiz. Bilindiği gibi başlangıç değer problemlerinin

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t)\,(0\le t\le 1), \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_0', \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} i\dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = g(t)\,(-1\le t\le 0), \\ u(-1) = u_{-1} \end{cases} \tag{3.6}$$

tek çözümü vardır ve dolayısıyla,

$$u(t) = c(t)u(0) + s(t)u'(0) + \int_0^t s(t-y)f(y)\,dy, 0\le t\le 1 \tag{3.7}$$

formülü sağlanır. Burada,

$$c(t) = \frac{e^{itA^{1/2}} + e^{-itA^{1/2}}}{2}, \qquad s(t) = A^{-1/2}\frac{e^{itA^{1/2}} - e^{-itA^{1/2}}}{2i},$$

kosinüs ve sinüs operatör fonksiyonları ve

$$u(t) = e^{i(t+1)A}u_{-1} - i\int_{-1}^{t} e^{i(t-y)A}g(y)\,dy, -1 \leq t \leq 0, \tag{3.8}$$

olur. (3.7), (3.8) formülleri ve (3.1) denklemi kullanılarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz,

$$u(t) = [c(t) + iAs(t)]\left\{e^{iA}u_{-1} - i\int_{-1}^{0} e^{\,-iyA}\, g(y)\,dy\right\} \tag{3.9}$$

$$-is(t)\,g(0) + \int_{0}^{t} s(t-y)\,f(y)\,dy.$$

Şimdi, lokal olmayan sınır koşulu kullanılırsa,

$$Au(-1) = \alpha u(\mu) + \varphi$$

operatör denklemi

$$\begin{aligned} &\left\{I - \alpha\left[A^{-1}c(\mu) + is(\mu)\right]e^{iA}\right\}u_{-1} \\ &= \alpha\left\{-iA^{-1}c(\mu)\int_{-1}^{0} e^{-iyA}g(y)\,dy\right. \\ &-s(\mu)\left[iA^{-1}g(0) + \int_{-1}^{0} e^{-iyA}g(y)\,dy\right] \\ &\left.+A^{-1}\int_{0}^{\mu} s(\mu-y)\,f(y)\,dy\right\} + A^{-1}\varphi, \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada,

$$|\alpha| < \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta}},$$

olsun. Bu durumda,

$$I - \alpha\left[A^{-1}c(\mu) + is(\mu)\right]e^{iA}$$

şeklindedir. Bu operatörün tersi

$$T = \left(I - \alpha\left[A^{-1}c(\mu) + is(\mu)\right]e^{iA}\right)^{-1}$$

olmak üzere mevcuttur ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|T\|_{H\to H} \leq M. \tag{3.11}$$

Bu kestirimin ispatı aşağıdaki kestirime bağlıdır:

$$\left\| -\alpha \left[A^{-1}c(\mu) + is(\mu) \right] e^{iA} \right\|_{H\to H} < 1.$$

Kosinüs ve sinüs operatör fonksiyonlarının tanımları kullanılarak, $A \geq \delta I$, $\delta > 0$ ve $A = A^{*}$,

$$\begin{aligned} & \left\| -\alpha \left[A^{-1}c(\mu)\, is(\mu) \right] e^{iA} \right\|_{H\to H} \\ & \leq \sup_{\delta\leq\rho<\infty} \left| -\alpha \left[\frac{1}{\rho}\cos\left(\sqrt{\rho}\mu\right) + \frac{i}{\sqrt{\rho}}\sin\left(\sqrt{\rho}\mu\right) \right] e^{i\rho} \right| \\ & \leq \sup_{\delta\leq\rho<\infty} |\alpha| \left| \frac{1}{\rho}\cos\left(\sqrt{\rho}\mu\right) + \frac{i}{\sqrt{\rho}}\sin\left(\sqrt{\rho}\mu\right) \right| \left| e^{i\rho} \right| \\ & \leq |\alpha| \sup_{\delta\leq\rho<\infty} \sqrt{\frac{1}{\rho^{2}}\cos^{2}\left(\sqrt{\rho}\mu\right) + \frac{1}{\rho}\sin^{2}\left(\sqrt{\rho}\mu\right)} \\ & \leq |\alpha| \frac{\sqrt{1+\rho}}{\rho}. \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{\sqrt{1+\rho}}{\rho} \leq \frac{\sqrt{1+\delta}}{\delta},$$

olduğundan,

$$\left\| -\alpha \left[A^{-1}c(\mu) + is(\mu) \right] e^{iA} \right\|_{H\to H} < \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta}} \cdot \frac{\sqrt{1+\delta}}{\delta} = 1.$$

Dolayısıyla, (3.11) kestirimi elde edilir. Böylece operatör denkleminin (3.10) çözümü için

$$\begin{aligned} u_{-1} = T \Bigg(\alpha \Bigg\{ & -iA^{-1}c(\mu) \int_{-1}^{0} e^{-iyA} g(y)\, dy \\ & -s(\mu) \left[iA^{-1}g(0) + \int_{-1}^{0} e^{-iyA} g(y)\, dy \right] \\ & +A^{-1} \int_{0}^{\mu} s(\mu - y) f(y)\, dy \Bigg\} + A^{-1}\varphi \Bigg) \end{aligned} \tag{3.12}$$

denklemi yazılır. Sonuç olarak, (3.1) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü için (3.8), (3.9) ve (3.12) denklemlerini elde ederiz.

Şimdi, (3.1) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü için (3.2), (3.3) ve (3.4) kestirimleri ispat edilecektir. A operatörünün simetri özelliğinden yararlanılarak,

$$\|c(t)\|_{H\to H} \leq 1, \left\| A^{1/2}s(t) \right\|_{H\to H} \leq 1, t \geq 0, \tag{3.13}$$

$$\left\| e^{\pm itA} \right\|_{H\to H} \leq 1, t \geq 0 \tag{3.14}$$

yazılabileceği açıktır. Öncelikle (3.2) kestirimi elde edilecektir. (3.12) formülü ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$u_{-1} = T\left(\alpha\left\{-A^{-2}c(\mu)\left[g(0) - e^{iA}g(-1) - \int_{-1}^{0} e^{-iyA}g'(y)\,dy\right]\right.\right. \tag{3.15}$$

$$-iA^{-1}s(\mu)\left(e^{iA}g(-1) + \int_{-1}^{0} e^{-iyA}g'(y)\,dy\right)$$

$$\left.\left.+A^{-1}\int_{0}^{\mu} s(\mu-y)f(y)\,dy\right\} + A^{-1}\varphi\right)$$

denklemini elde ederiz. (3.11), (3.13) ve (3.14) kestirimlerini kullanarak

$$\|u_{-1}\|_H \le \|T\|_{H\to H}\left(|\alpha|\left\{\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\|c(\mu)\|_{H\to H}\left[\left\|A^{-1}g(0)\right\|_H\right.\right.\right.$$

$$+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1}g(0)\right\|_H + \left\|A^{-1}[g(-1)-g(0)]\right\|_H\right)$$

$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}g'(y)\right\|_H dy\right]$$

$$+|i|\left\|A^{1/2}s(\mu)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\times\left(\left\|A^{-1}g(0)\right\|_H + \left\|A^{-1}[g(-1)-g(0)]\right\|_H\right)$$

$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}g'(y)\right\|_H dy\right] + \left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}$$

$$\left.\left.\times\int_{0}^{\mu}\left\|A^{1/2}s(\mu-y)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}f(y)\right\|_H dy\right\} + \left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_H\right)$$

$$\le M\left[\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_H + \left\|A^{-1}g(0)\right\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{-1\le t\le 0}\left\|A^{-1}g'(t)\right\|_H + \max_{0\le t\le 1}\left\|A^{-1}f(t)\right\|_H\right] \tag{3.16}$$

eşitsizliği yazılır. (3.15) formülüne $A^{1/2}$ uygulanırsa

$$A^{1/2}u_{-1} = T\left(\alpha\left\{-A^{-3/2}c(\mu)\left[g(0) - e^{iA}g(-1) - \int_{-1}^{0} e^{-iyA}g'(y)\,dy\right]\right.\right. \tag{3.17}$$

$$-iA^{-1/2}s(\mu)\left[e^{iA}g(-1) + \int_{-1}^{0} e^{-iyA}g'(y)\,dy\right]$$

$$\left.\left.+A^{-1/2}\int_{0}^{\mu} s(\mu-y)f(y)\,dy\right\} + A^{-1/2}\varphi\right)$$

denklemi bulunur. (3.17) formülü ve (3.11), (3.13), (3.14) kestirimleri kullanılarak,

$$\left\|A^{1/2}u_{-1}\right\|_H \le \|T\|_{H\to H}\left(|\alpha|\left\{\|c(\mu)\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_H\right.\right.\right.$$

$$+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_H + \left\|A^{-1/2}[g(-1)-g(0)]\right\|_H\right)$$

$$+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g'(y)\right\|_{H}dy\Big]+|i|\left\|A^{1/2}s(\mu)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left[\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}\left[g(-1)-g(0)\right]\right\|_{H}\right)\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g'(y)\right\|_{H}dy\right]$$

$$+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\int_{0}^{\mu}\left\|A^{1/2}s(\mu-y)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}f(y)\right\|_{H}dy\Big]\Big\}$$

$$+\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_{H}\Big)\leq M\left[\|\varphi\|_{H}+\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_{H}\right.$$

$$\left.+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{-1/2}g'(t)\right\|_{H}+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{-1/2}f(t)\right\|_{H}\right] \tag{3.18}$$

kestirimi elde edilir. (3.8), (3.9) formülleri ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak,

$$u(t)=e^{i(t+1)A}u_{-1}-A^{-1}\left[g(t)-e^{i(t+1)A}g(-1)-\int_{-1}^{t}e^{i(t-y)A}g'(y)\,dy\right],-1\leq t\leq 0, \tag{3.19}$$

$$u(t)=c(t)\left\{e^{iA}u_{-1}-A^{-1}\left(g(0)-e^{iA}g(-1)-\int_{-1}^{0}e^{-iyA}g'(y)\,dy\right)\right\} \tag{3.20}$$

$$-iAs(t)\left\{e^{iA}u_{-1}-A^{-1}\left(g(0)-e^{iA}g(-1)-\int_{-1}^{0}e^{-iyA}g'(y)\,dy\right)\right\}$$

$$-is(t)\,g(0)+\int_{0}^{t}s(t-y)\,f(y)\,dy,0\leq t\leq 1$$

eşitliği yazılır. (3.13) ve (3.14) kestirimleri kullanılarak,

$$\|u(t)\|_{H}\leq\left\|e^{i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\|u_{-1}\|_{H}+\left(\left\|A^{-1}g(0)\right\|_{H}+\left\|e^{i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\times\left\|A^{-1}g(0)\right\|_{H}+\left\|A^{-1}\left[g(t)-g(0)\right]\right\|_{H}$$

$$+\left\|e^{i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\left[g(-1)-g(0)\right]\right\|_{H}$$

$$\left.+\int_{-1}^{t}\left\|e^{i(t-y)A}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}g'(y)\right\|_{H}dy\right)$$

$$\leq M\left[\|u_{-1}\|_{H}+\left\|A^{-1}g(0)\right\|_{H}+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{-1}g'(t)\right\|_{H}\right],-1\leq t\leq 0 \tag{3.21}$$

ve

$$\|u(t)\|_{H}\leq\|c(t)\|_{H\to H}\left\{\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\|u_{-1}\|_{H}\right.$$

$$+\left[\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_{H}+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\right.\right.$$

$$\times\left(\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}\left[g(-1)-g(0)\right]\right\|_{H}\right)\Big]$$

$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}g'(y)\right\|_{H}dy\Big)\right\}$$

$$+\left|i\right|\left\|A^{1/2}s\left(t\right)\right\|_{H\to H}\left\{\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u_{-1}\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}g\left(0\right)\right\|_{H}\right.$$
$$+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}\left[g\left(-1\right)-g\left(0\right)\right]\right\|_{H}\right)$$
$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}g'\left(y\right)\right\|_{H}dy\right\}$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{1/2}s\left(t\right)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g\left(0\right)\right\|_{H}$$
$$+\int_{0}^{t}\left\|A^{1/2}s\left(t-y\right)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}f\left(y\right)\right\|_{H}dy$$
$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}u_{-1}\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_{H}\right.$$
$$\left.+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{-1}g'(t)\right\|_{H}+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{-1/2}f(t)\right\|_{H}\right],0\leq t\leq 1 \tag{3.22}$$

eşitsizliği yazılır. Sonrasında, (3.16), (3.18), (3.21) ve (3.22) kestirimlerinin kullanılması ile (3.2) bulunur.

İkinci olarak, (3.3) kestirimi elde edilecektir. (3.17) formülü ve (3.11), (3.13), (3.14) kestirimleri yardımıyla,

$$\left\|A^{1/2}u_{-1}\right\|_{H}\leq\left[M\left\|\varphi\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_{H}\right. \tag{3.23}$$
$$\left.+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{-1/2}g'(t)\right\|_{H}+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{-1/2}f(t)\right\|_{H}\right]$$

kestirimi yazılır. (3.15) formülüne A uygulanırsa ve aynı zamanda (3.11), (3.13), (3.14) kestirimleri kullanılırsa,

$$\left\|Au_{-1}\right\|_{H}\leq\left\|T\right\|_{H\to H}\left(\left|\alpha\right|\left\{\left\|c\left(\mu\right)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}\right.\right.\right.$$
$$+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|\left[g\left(-1\right)-g(0)\right]\right\|_{H}\right)$$
$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|g'\left(y\right)\right\|_{H}dy\right]+\left|i\right|\left\|A^{1/2}s\left(\mu\right)\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left[\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|\left[g\left(-1\right)-g(0)\right]\right\|_{H}\right]\right.$$
$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|g'\left(y\right)\right\|_{H}dy\right)$$
$$\left.\left.+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\int_{0}^{\mu}\left\|A^{1/2}s\left(\mu-y\right)\right\|_{H\to H}\left\|f\left(y\right)\right\|_{H}dy\right]\right\}+\left\|A^{-1/2}\right\|\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_{H}\right)$$
$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_{H}+\left\|g(0)\right\|_{H}+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|g'(t)\right\|_{H}+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|f(t)\right\|_{H}\right] \tag{3.24}$$

eşitsizliği elde edilecektir. (3.19), (3.20) formüllerine $A^{1/2}$ uygulanır, (3.13) ve (3.14) kestirimleri kullanılırsa,

$$\left\|A^{1/2}u\left(t\right)\right\|_{H}\leq\left\|e^{i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u_{-1}\right\|_{H}$$

$$+\left\|A^{-1/2}g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}\left[g\left(t\right)-g\left(0\right)\right]\right\|_{H}$$
$$+\left\|e^{i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}\left[g\left(-1\right)-g\left(0\right)\right]\right\|_{H}\right)$$
$$\left.+\int_{-1}^{t}\left\|e^{i(t-y)A}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g'\left(y\right)\right\|_{H}dy\right]$$

$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}u_{-1}\right\|_{H}+\left\|A^{-1/2}g(0)\right\|_{H}+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{-1/2}g'(t)\right\|_{H}\right],-1\leq t\leq 0 \qquad (3.25)$$

ve

$$\left\|A^{1/2}u\left(t\right)\right\|_{H}\leq\left\|c\left(t\right)\right\|_{H\to H}\left\{\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u_{-1}\right\|_{H}\right.$$
$$+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left[\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|\left[g\left(-1\right)-g\left(0\right)\right]\right\|_{H}\right]\right.$$
$$\left.\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g'\left(y\right)\right\|_{H}dy\right)\right\}$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{1/2}s\left(t\right)\right\|_{H\to H}\left\{\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left\|Au_{-1}\right\|_{H}\right.$$
$$+\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left[\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\left\|g\left(-1\right)-g\left(0\right)\right\|_{H}\right]$$
$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g'\left(y\right)\right\|_{H}dy\right\}$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{1/2}s\left(t\right)\right\|_{H\to H}\left\|g\left(0\right)\right\|_{H}+\int_{0}^{t}\left\|A^{1/2}s\left(t-y\right)\right\|_{H\to H}\left\|f\left(y\right)\right\|_{H}dy$$

$$\leq M\left[\left\|Au_{-1}\right\|_{H}+\left\|g(0)\right\|_{H}+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{-1/2}g'(t)\right\|_{H}+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|f(t)\right\|_{H}\right],0\leq t\leq 1 \quad (3.26)$$

eşitsizlikleri elde edilecektir. Sonuç olarak (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) kestirimleri birleştirilerek, (3.3) eşitsizliği elde edilir.

Üçüncü olarak, (3.4) kestirimi elde edilecektir. (3.15) formülü ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak,

$$u_{-1}=T\left(\alpha\left\{-A^{-2}c\left(\mu\right)\left[\left(g\left(0\right)-e^{iA}g\left(-1\right)+iA^{-1}\right.\right.\right.\right. \qquad (3.27)$$
$$\left.\times\left[g'\left(0\right)-e^{iA}g'\left(-1\right)-\int_{-1}^{0}e^{-iyA}g''\left(y\right)dy\right]\right)+iA^{-1}s\left(\mu\right)$$
$$\times\left[e^{iA}g\left(-1\right)-iA^{-1}\left(g'\left(0\right)-e^{iA}g'\left(-1\right)-\int_{-1}^{0}e^{-iyA}g''\left(y\right)dy\right)\right]$$
$$\left.\left.-A^{-2}\left[f\left(\mu\right)+c\left(\mu\right)f\left(0\right)-\int_{0}^{\mu}c\left(\mu-y\right)f'\left(y\right)dy\right]\right\}+A^{-1}\varphi\right)$$

denklemi bulunur. (3.27) formülüne A uygulanır ve (3.11), (3.13), (3.14) kestirimleri ile birlikte kullanılrsa,

$$\left\|Au_{-1}\right\|_{H}\leq\left\|T\right\|_{H\to H}\left(\left|\alpha\right|\left\{\left\|c\left(\mu\right)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\right.\right.$$

$$\times\left[\left\|g(0)\right\|_H+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g(0)\right\|_H+\left\|g(-1)-g(0)\right\|_H\right.\right.$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}g'(0)\right\|_H+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}g'(0)\right\|_H+\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\times\left(\left\|A^{-1/2}g'(0)\right\|_H+\left\|A^{-1/2}\left[g'(-1)-g'(0)\right]\right\|_H\right)$$
$$\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g''(y)\right\|_H dy\right)$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{1/2}s(\mu)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left[\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g(0)\right\|_H\left\|g(-1)-g(0)\right\|_H\right)\right.$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}g'(0)\right\|_H+\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\times\left(\left\|A^{-1/2}g'(0)\right\|_{H\to H}+\left\|A^{-1/2}\left[g'(-1)-g'(0)\right]\right\|_H\right)$$
$$\left.\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e-^{iyA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g''(y)\right\|_H dy\right)\right]$$
$$+\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|f(0)\right\|_H+\left\|f(\mu)-f(0)\right\|_H+\left\|c(\mu)\right\|_{H\to H}\left\|f(0)\right\|_H\right]$$
$$\left.+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\int_0^{\mu}\left\|c(\mu-y)\right\|_{H\to H}\left\|f'(y)\right\|_H dy+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H\right)$$
$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H+\left\|g(0)\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g'(0)\right\|_H\right.$$
$$\left.+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|A^{-1/2}g''(t)\right\|_H+\left\|f(0)\right\|_H+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|f'(t)\right\|_H\right] \tag{3.28}$$

eşitsizliği yazılır. (3.27) formülüne $A^{3/2}$ uygulanırsa,

$$A^{3/2}u_{-1}=T\left(\alpha\left\{-A^{-1/2}c(\mu)\left[\left(g(0)-e^{iA}g(-1)+iA^{-1}\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[g'(0)-e^{iA}g'(-1)-\int_{-1}^{0}e^{-iyA}g''(y)\,dy\right]\right)+iA^{1/2}s(\mu)$$
$$\times\left[e^{iA}g(-1)-iA^{-1}\left(g'(0)-e^{iA}g'(-1)-\int_{-1}^{0}e^{-iyA}g''(y)\,dy\right)\right]$$
$$\left.\left.-A^{-1/2}\left[f(\mu)+c(\mu)f(0)-\int_0^{\mu}c(\mu-y)f'(y)\,dy\right]\right\}+A^{1/2}\varphi\right) \tag{3.29}$$

eşitliği elde edilir. (3.29) formülü ve (3.11), (3.13), (3.14) kestirimleri kullanılırsa,

$$\left\|A^{3/2}u_{-1}\right\|_H\leq\left\|T\right\|_{H\to H}\left(\left|\alpha\right|\left\{\left\|c(\mu)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\right.\right.$$
$$\times\left[\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|A^{1/2}\left[g(-1)-g(0)\right]\right\|_H\right)\right)\right]$$
$$+\left|i\right|\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g'(0)\right\|_{H\to H}+\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\times\left[\left\|g'(0)\right\|_H+\left\|g'(-1)-g'(0)\right\|_H\right]$$

$$+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|g''(y)\right\|_H dy\Big)+|i|\left\|A^{1/2}s(\mu)\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left[\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|A^{1/2}[g(-1)-g(0)]\right\|_H\right)\right.$$
$$+|i|\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g'(0)\right\|_{H\to H}+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g'(0)\right\|_{H\to H}+\left\|g'(-1)-g'(0)\right\|_H\right)\right.$$
$$\left.\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\left\|g''(y)\right\|_H dy\right)\right]$$
$$+\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{1/2}f(0)\right\|_H+\left\|A^{1/2}[f(\mu)-f(0)]\right\|_H+\left\|c(\mu)\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}f(0)\right\|_H\right.$$
$$\left.+\int_0^{\mu}\left\|c(\mu-y)\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}f'(y)\right\|_H dy\right]+\left\|A^{-1/2}\right\|\left\|A\varphi\right\|_H\Big)$$
$$\leq M\left[\left\|A\varphi\right\|_H+\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|g'(0)\right\|_H\right.$$
$$\left.+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|g''(t)\right\|_H+\left\|A^{1/2}f(0)\right\|_H+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{1/2}f'(t)\right\|_H\right] \tag{3.30}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.19), (3.20) formülleri ve kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak,

$$u(t)=e^{i(t+1)A}u_{-1}-A^{-1}\left[g(t)-e^{i(t+1)A}g(-1)\right. \tag{3.31}$$
$$\left.-iA^{-1}\left(g'(t)-e^{i(t+1)A}g'(-1)-\int_{-1}^{t}e^{i(t-y)A}g''(y)\,dy\right)\right],-1\leq t\leq 0,$$

$$u(t)=[c(t)+iAs(t)]\left\{e^{iA}u_{-1}-A^{-1}\left(g(0)-e^{iA}g(-1)\right.\right. \tag{3.32}$$
$$\left.\left.-iA^{-1}\left[g'(0)-e^{iA}g'(-1)-\int_{-1}^{0}e^{-iyA}g''(y)\,dy\right]\right)\right\}$$
$$-is(t)\,g(0)-A^{-1}\left[f(t)-c(t)\,f(0)\right.$$
$$\left.-\int_0^t c(t-y)\,f'(y)\,dy\right],\ 0\leq t\leq 1$$

eşitliği yazılır. (3.31), (3.32) formüllerine A uygulanır ve (3.13), (3.14) kestirimleri kullanılırsa,

$$\left\|Au(t)\right\|_H\leq\left\|e^{-i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\left\|Au_{-1}\right\|_H$$
$$+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|A^{1/2}[g(t)-g(0)]\right\|_H\right.$$
$$+\left\|e^{-i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|A^{1/2}[g(-1)-g(0)]\right\|_H\right)\Big]$$
$$+|i|\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g'(0)\right\|_H+\left\|g'(t)-g'(0)\right\|_H\right.$$
$$+\left\|e^{-i(t+1)A}\right\|_{H\to H}\left(\left\|g'(0)\right\|_H+\left\|g'(t)-g'(0)\right\|_H\right)$$
$$\left.+\int_{-1}^{t}\left\|e^{iyA}\right\|_{H\to H}\left\|g''(y)\right\|_H dy\right)\Big]$$

$$\leq M\left[\left\|Au_{-1}\right\|_H+\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|g'(0)\right\|_H+\max_{-1\leq t\leq 0}\left\|g''(t)\right\|_H\right],-1\leq t\leq 0, \tag{3.33}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|Au(t)\|_H &\leq \|c(t)\|_{H\to H}\left\{\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\|Au_{-1}\|_H\right.\\
&+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}\left[g(-1)-g(0)\right]\right\|_H\right]\\
&+|i|\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\|g'(0)\|_H+\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\left(\|g'(0)\|_H+\|g'(t)-g'(0)\|_H\right)\right.\\
&\left.\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\|g''(y)\|_H\,dy\right]\right\}\\
&+|i|\left\|A^{1/2}s(t)\right\|_{H\to H}\left\{\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{3/2}u_{-1}\right\|_H\right.\\
&+\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\left\|e^{iA}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}\left[g(-1)-g(0)\right]\right\|_H\\
&+|i|\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\|g'(0)\|_H+\left\|e^{-iA}\right\|_{H\to H}\left(\|g'(0)\|_H+\|g'(t)-g'(0)\|_H\right)\right.\\
&\left.\left.+\int_{-1}^{0}\left\|e^{-iyA}\right\|_{H\to H}\|g''(y)\|_H\,dy\right]\right\}\\
&|i|\left\|A^{1/2}s(t)\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H\\
&+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{1/2}f(0)\right\|_H+\left\|A^{1/2}f(t)-f(0)\right\|_H\right.\\
&\left.+\|c(t)\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}f(0)\right\|_H\right]+\int_0^t\|c(t-y)\|_{H\to H}\|f'(y)\|_H\,dy\\
&\leq M\left[\left\|A^{3/2}u_{-1}\right\|_H+\left\|A^{1/2}g(0)\right\|_H+\|g'(0)\|_H\right.\\
&\left.+\max_{-1\leq t\leq 0}\|g''(t)\|_H+\left\|A^{1/2}f(0)\right\|_H+\max_{0\leq t\leq 1}\left\|A^{1/2}f'(t)\right\|_H\right],0\leq t\leq 1,
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

eşitsizlikleri elde edilecektir. O halde, (3.28), (3.30), (3.33) ve (3.34) kestirimleri ile (3.4) eşitsizliğinin bulunmasını sağlar. Dolayısıyla Teorem 3.1 in ispatını tamamlanmış olur.

Uygulamalar

Şimdi, Teorem 3.1 için bir uygulama verilecektir. İlk olarak;

$$
\begin{cases}
v_{yy}-(a(x)v_x)_x+\delta v=f(y,x), 0<y<1,\ 0<x<1,\\
iv_y-(a(x)v_x)_x+\delta v=g(y,x), -1<y<0,\ 0<x<1,\\
-(a(x)v_x(-1,x))_x+\delta v(-1,x)=v(1,x)+\varphi(x), 0\leq x\leq 1,\\
v(y,0)=v(y,1), v_x(y,0)=v_x(y,1), -1\leq y\leq 1,\\
v(0+,x)=v(0-,x), v_y(0+,x)=v_y(0-,x), 0\leq x\leq 1,\\
|\alpha|<\dfrac{\delta}{\sqrt{1+\delta}},
\end{cases}
\tag{3.35}
$$

karma tipli hiperbolik-Schrödinger denklemi ele alınacaktır. Burada $\delta>0$ olmak üzere bir sabittir. (3.35) problemi $v(y,x)$ şeklinde düzgün tek bir çözüme sahiptir. Bunun için $a(x)\geq a>0$, $(x\in(0,1))$, $\varphi(x)\,(x\in[0,1])$, $f(y,x)\,(y\in[0,1], x\in[0,1])$ ve $g(y,x)\,(y\in[-1,0], x\in[0,1])$ şeklinde fonksiyonlar olmalıdır.

$L_2\,[0,1]$ Hilbert uzayınının $[0,1]$ aralığında tüm kare integrallenebilir fonksiyonlarını ve $W_2^1\,[0,1]$, $W_2^2\,[0,1]$ Hilbert uzaylarını sırasıyla aşağıdaki normlarla

$$\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]} = \left(\int_0^1 |\varphi\,(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_x\,(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_{W_2^2[0,1]} = \left(\int_0^1 |\varphi\,(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_x\,(x)|^2\,dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |\varphi_{xx}\,(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

tanımlayalım. Bu şartlar altında (3.35) karma tipli problemi; Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı bir A operatörü ile tanımlanan, lokal olmayan (3.1) sınır-değer problemine indirgenebilir.

Teorem 3.2. *Lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümü aşağıdaki kararlılık kestirimlerini sağlayacaktır;*

$$\max_{-1\leq y\leq 1} \|v_y(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{-1\leq y\leq 1} \|v(y,\cdot)\|_{W_2^1[0,1]} \leq M \Big[\|\varphi\|_{L_2[0,1]}$$

$$+ \|g(0,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{-1\leq y\leq 0} \|g_y(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0\leq y\leq 1} \|f(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]}\Big],$$

$$\max_{-1\leq y\leq 1} \|v(y,\cdot)\|_{W_2^2[0,1]} + \max_{-1\leq y\leq 0} \|v_y(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0\leq y\leq 1} \|v_{yy}(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]}$$

$$\leq M \Big[\|\varphi\|_{W_2^1[0,1]} + \|g(0,\cdot)\|_{W_2^1[0,1]} + \|g_y(0,\cdot)\|_{W_2^1[0,1]}$$

$$+ \max_{-1\leq y\leq 0} \|g_{yy}(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \|f(0,\cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0\leq y\leq 1} \|f_y(y,\cdot)\|_{L_2[0,1]}\Big].$$

Burada M, $f\,(y,x)$ $(y\in[0,1]\,, x\in[0,1])$, $g\,(y,x)$ $(y\in[-1,0]\,, x\in[0,1])$ ve $\varphi\,(x)$ $(x\in[0,1])$ den bağımsızdır.

Bu teoremin ispatı Teorem 3.1. ve problem (3.35) tarafından üretilen operatörün simetri özelliğine dayanmaktadır.

İkinci olarak, çok boyutlu hiperbolik-Schrodinger denklemi için karma tipli lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} v_{yy} - \sum_{r=1}^{m} (a_r(x)v_{x_r})_{x_r} = f(y,x), 0\leq y\leq 1, \\ x=(x_1,\cdots,x_m)\in\Omega, \\ iv_y - \sum_{r=1}^{m} (a_r(x)v_{x_r})_{x_r} = g(y,x), -1\leq y\leq 0, \\ x=(x_1,\cdots,x_m)\in\Omega, \\ -\sum_{r=1}^{m} (a_r(x)v_{x_r}(-1,x))_{x_r} = v(1,x)+\varphi(x), x\in\overline{\Omega}, \\ v(y,x)=0, x\in S, -1\leq y\leq 1 \end{cases} \tag{3.36}$$

ele alınacaktır. Öyle ki Ω, m-bouytlu Öklid uzayında $\mathbb{R}^m$,

$$(x : x = (x_1, \cdots, x_m), 0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq m)$$

S ve $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ tarafından sınırlanan bir açık birim küptür. Burada, $a_r(x), (x \in \Omega), \varphi(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ ve $f(y, x)$ $(y \in (0, 1), x \in \Omega), g(y, x)$ $(y \in (-1, 0), x \in \Omega)$ ifadeleri $[0, 1] \times \Omega$ de verilen düzgün fonksiyonlar ve $a_r(x) \geq a > 0$ dir.

$L_2(\overline{\Omega})$ Hilbert uzayının $\overline{\Omega}$ üzerinde tüm integrallanebilir fonksiyonlarını

$$\|f\|_{L_2(\overline{\Omega})} = \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2}$$

ve $W_2^1 \left(\overline{\Omega}\right)$, $W_2^2 \left(\overline{\Omega}\right)$ uzaylarını sırasıyla aşağıdaki normlarla

$$\|\varphi\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} = \|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n} |\varphi_{x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2},$$

$$\|\varphi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} = \|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n} |\varphi_{x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2}$$

$$+ \left\{ \int \cdots \int_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{r=1}^{n} |\varphi_{x_r x_r}|^2 dx_1 \cdots dx_m \right\}^{1/2},$$

tanımlayalım. (3.36) problemi düzgün $a_r(x), f(y, x)$ ve $g(y, x)$ fonksiyonları için $v(y, x)$ biçiminde düzgün ve tek bir çözüme sahiptir. Bu şartlar altında (3.36) karma tipli problemi, Hilbert uzayında kendine eş pozitif tanımlı bir A operatörü ile tanımlanan, lokal olmayan (3.1) sınır-değer problemine indirgenebilir.

Teorem 3.3. *Aşağıdaki kararlılık kestirimlerini,*

$$\max_{-1 \leq y \leq 1} \|v_y(y, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y, \cdot)\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} \leq M \Big[\|g(0, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

$$+ \max_{-1 \leq y \leq 0} \|g_y(y, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|f(y, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{L_2(\overline{\Omega})} \Big],$$

$$\max_{-1 \leq y \leq 1} \|v(y, \cdot)\|_{W_2^2(\overline{\Omega})} + \max_{-1 \leq y \leq 0} \|v_y(y, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|v_{yy}(y, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})}$$

$$\leq M \Big[\|\varphi\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} + \|g(0, \cdot)\|_{W_2^1(\overline{\Omega})} + \|g_y(0, \cdot)\|_{W_2^1(\overline{\Omega})}$$

$$+ \max_{-1 \leq y \leq 0} \|g_{yy}(y, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq y \leq 1} \|f_y(y, \cdot)\|_{L_2(\overline{\Omega})} \Big]$$

(3.36) lokal olmayan sınır-değer probleminin çözümünü sağlar. Burada, M, katsayısı $f(y, x)$ $(y \in [0, 1], x \in \Omega)$, $g(y, x)$ $(y \in [-1, 0], x \in \Omega)$ ve $\varphi(x)$ $(x \in \Omega)$den bağımsızdır.

Teorem 3.3'ün ispatı Teorem 3.1'e, (3.36) tarafından tanımlanan operatörün simetri özelliğine ve aşağıdaki $L_2\left(\overline{\Omega}\right)$ içindeki eliptik diferensiyel problemin çözümünün koersif eşitsizliğine dayanmaktadır[Sobolevskii, P. E., 1975].

Teorem 3.4. *Eliptik diferansiyel problemin çözümü için*

$$-\sum_{r=1}^{m} \left(a_r(x) u_{x_r}\right)_{x_r} = \omega\left(x\right), x \in \Omega,$$

$$u\left(x\right) = 0, x \in S,$$

aşağıdaki koersif eşitsizliği sağlanmaktadır:

$$\sum_{r=1}^{m} \left\| u_{x_r x_r} \right\|_{L_2\left(\overline{\Omega}\right)} \leq M \left\| \omega \right\|_{L_2\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

3.2 HİPERBOLİK-SCHRÖDINGER FARK DENKLEMLERİ

Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması

Bu bölümde kolaylık için $\mu > 2\tau$ alınmıştır. (3.1) sınır-değer probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_{k+1}=f_k, f_k=f\left(t_{k+1}\right), t_k=k\tau, 1\leq k\leq N-1, \\ \\ i\dfrac{u_1-u_0}{\tau}=-Au_0+g_0, \\ \\ i\dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+Au_k=g_k, g_k=g\left(t_k\right), t_k=k\tau, -N+1\leq k\leq 0, \\ \\ Au_{-N}=\alpha u_{[\mu/\tau]}+\varphi \end{cases} \tag{3.37}$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması incelenmiştir. Bilindiği gibi, H Hilbert uzayında öz-eşlenik pozitif tanımlı A diferansiyel operatörlü lokal olmayan sınır-değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon (discretization) fark şemalarını araştırmak demek, H_h Hilbert uzaylarında h'ye $(0 < h \leq h_0)$ göre düzgün öz-eşlenik pozitif tanımlı A_h fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir.

Öncelikle ileriki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 3.1. Aşağıdaki

$$\left\|R\left(\pm\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\leq 1, \tag{3.38}$$

$$\left\|\tau A^{1/2}R\left(\pm\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\leq 1, \tag{3.39}$$

$$\left\|R^k\right\|_{H\to H}\leq M\left(1+\delta\tau\right)^{-k}, \tag{3.40}$$

$$\left\|\left(I\pm i\tau A^{1/2}\right)\left(I\mp i\tau A^{1/2}\right)^{-1}\right\|_{H\to H}\leq 1 \tag{3.41}$$

kestirimleri sağlanır. Burada M katsayısı τ'dan bağımsızdır ve

$$R\left(\pm\tau A^{1/2}\right)=\left(I\pm i\tau A^{1/2}\right)^{-1},$$

$$R=R\left(\tau A\right)=\left(I-i\tau A\right)^{-1}$$

dir.

Yardımcı Teorem 3.2. Aşağıdaki

$$Q_\tau=\begin{cases} I-\alpha A^{-1}\left[\left\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right. \\ \\ \left.+\dfrac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}R^N \\ \\ \left.+\dfrac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]R^N\right] \end{cases},$$

operatörünün tersi

$$T_\tau=\left\{\begin{array}{l}\left(I-\alpha A^{-1}\left[\left\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right.\right.\\[2ex] \left.+\dfrac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}R^N\\[2ex] \left.\left.+\dfrac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]R^N\right]\right)^{-1}\end{array}\right.,$$

vardır ve

$$||T_\tau||_{H\to H}\le M \tag{3.42}$$

kestirimi sağlanır. Burada M katasyısı τ 'dan bağımsızdır.

İspat: (3.42) kestiriminin ispatı

$$\left\|I-\alpha A^{-1}\left[\left\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}R^N$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]R^N\right]\right\|_{H\to H}<1$$

kestiriminin ispatına dayanır. Bu eşitsizlik

$$-\alpha A^{-1}\left[\left\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}R^N$$
$$\left.+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]R^N\right]$$
$$=-\alpha A^{-1}\left[\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{A^{1/2}}{2i}-\frac{A^{1/2}}{2i}\cdot\frac{1}{I+i\tau A^{1/2}}\right)R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{A^{1/2}}{2i}+\frac{A^{1/2}}{2i}\cdot\frac{1}{I-i\tau A^{1/2}}\right)R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\}R^N\right]$$
$$=-\frac{\alpha A^{-1}}{2}\left[\left\{\left(1+A^{1/2}i\left(-1+\frac{1}{I+i\tau A^{1/2}}\right)\right)R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1+A^{1/2}i\left(1+\frac{1}{I-i\tau A^{1/2}}\right)\right)R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\}R^N\right]$$

şeklinde de yazılabilir. A operatörünün pozitif ve öz-eşlenik olma özellikleri kullanılarak

$$\left\|-\alpha A^{-1}\left[\left\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\Big\}R^{N}$$

$$+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^{2}A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]R^{N}\Big]\Big\|_{H\to H}$$

$$\leq\sup_{\delta\leq\rho<\infty}\frac{|\alpha|\,\rho^{-1}}{2}\left(1+\sqrt{\rho}+1+\sqrt{\rho}\right)$$

$$=\sup_{\delta\leq\rho<\infty}|\alpha|\,\frac{1+\sqrt{\rho}}{\rho}\leq\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta}}\cdot\frac{1+\sqrt{\delta}}{\delta}=\frac{1+\sqrt{\delta}}{\sqrt{1+\delta}}<1$$

elde ederiz. Dolayısıyla, (3.42) kestiriminin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.5. *Eğer $\varphi\in D(A)$ ise, bu durumda (3.37) fark şemasının çözümü için aşağıdaki*

$$\max_{-N\leq k\leq N}\|u_k\|_H\leq M\Big[\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|A^{-1/2}f_k\right\|_H \tag{3.43}$$

$$+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H+\max_{-(N-1)\leq k\leq 0}\left\|A^{-1/2}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\Big],$$

$$\max_{-N\leq k\leq N}\left\|A^{1/2}u_k\right\|_H\leq M\Big[\|\varphi\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\|f_k\|_H \tag{3.44}$$

$$+\|g_0\|_H+\max_{-(N-1)\leq k\leq 0}\left\|\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\Big],$$

$$\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)\right\|_H \tag{3.45}$$

$$+\max_{-(N-1)\leq k\leq 0}\left\|\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)\right\|_H+\max_{-N\leq k\leq N}\|Au_k\|_H$$

$$\leq M\Big[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H+\left\|A^{1/2}f_1\right\|_H+$$

$$+\max_{2\leq k\leq N-1}\left\|A^{1/2}\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H+\left\|A^{1/2}g_0\right\|_H$$

$$+\left\|\left(g_0-g_{-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H+\max_{-(N-1)\leq k\leq -1}\left\|\left(g_{k+1}-2g_k+g_{k-1}\right)\tau^{-2}\right\|_H\Big]$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, M katsayısı $\tau, f_k, 1\leq k<N, g_k, -N<k\leq 0$ ve φ'den bağımsızdır.

İspat: Herşeyden önce, (3.37) fark şemasının çözümü için gerekli formüller elde edilecektir. Bilindiği gibi,

$$\begin{cases}\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_{k+1}=f_k,\\ f_k=f\left(t_{k+1}\right),\ t_{k+1}=(k+1)\tau,\ 1\leq k\leq N-1,\\ u_0=\xi,\ \tau^{-1}\left(u_1-u_0\right)=\psi,\end{cases} \tag{3.46}$$

$$\begin{cases}i\tau^{-1}\left(u_k-u_{k-1}\right)+Au_k=g_k,\ g_k=g(t_k),\\ t_k=k\tau,\ -(N-1)\leq k\leq 0,\ u_{-N}\ \text{ veriliyor },\end{cases} \tag{3.47}$$

başlangıç değer fark problemlerinin tek çözümü vardır ve aşağıdaki formüller

$$\begin{cases} u_1 = \xi + \tau\psi, \\ u_k = \left\{ \frac{1}{2}\left[R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right) + R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right] \right. \\ \left. +\dfrac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right) + R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}\xi \\ +\dfrac{1}{2i}A^{-1/2}\left(I+\tau^2 A\right)\left[R^{k}\left(-\tau A^{1/2}\right) - R^{k}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\psi \\ +\displaystyle\sum_{s=1}^{k-1}\tfrac{\tau}{2i}A^{-1/2}\left[R^{k-s}\left(-\tau A^{1/2}\right) - R^{k-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_s, \ 2 \le k \le N, \end{cases} \tag{3.48}$$

$$u_k = R^{N+k}u_{-N} - i\tau\sum_{s=-N+1}^{k}R^{k-s+1}g_s, \quad -(N-1) \le k \le 0 \tag{3.49}$$

sağlanır. Buradaki (3.48), (3.49) denklemleri ve

$$\tau^{-1}\left(u_1 - u_0\right) = -Au_0 + g_0, u_0 = \xi, \tau^{-1}\left(u_1 - u_0\right) = \psi$$

formülleri kullanılarak,

$$\xi = u_0 = R^N u_{-N} - i\tau\sum_{s=-N+1}^{0}R^{-s+1}g_s,$$

$$\psi = \tau^{-1}\left(u_1 - u_0\right) = -A\left[R^N u_{-N} - i\tau\sum_{s=-N+1}^{0}R^{-s+1}g_s\right] + g_0$$

formülleri elde edilir. Bu drurumda,

$$u_1 = \left(I - \tau A\right)\left[R^N u_{-N} - i\tau\sum_{s=-N+1}^{0}R^{-s+1}g_s\right] + \tau g_0, \tag{3.50}$$

$$\begin{cases} u_k = \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \left[R^{k-1} \left(\tau A^{1/2} \right) + R^{k-1} \left(-\tau A^{1/2} \right) \right] \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{2i} A^{1/2} \left[R^{k-1} \left(\tau A^{1/2} \right) + R^{k-1} \left(-\tau A^{1/2} \right) \right] \right\} \\ \left. - \frac{1}{2i} A^{1/2} \left(I + \tau^2 A \right) \left[R^{k} \left(-\tau A^{1/2} \right) - R^{k} \left(\tau A^{1/2} \right) \right] \right\} \\ \times \left[R^N u_{-N} - i\tau \sum\limits_{s=-N+1}^{0} R^{-s+1} g_s \right] \\ + \frac{1}{2i} A^{-1/2} (I + \tau^2 A) \left[R^{k} \left(-\tau A^{1/2} \right) - R^{k} \left(\tau A^{1/2} \right) \right] g_0 \\ + \sum\limits_{s=1}^{k-1} \frac{\tau}{2i} A^{-1/2} \left[R^{k-s} \left(-\tau A^{1/2} \right) - R^{k-s} \left(\tau A^{1/2} \right) \right] f_s, \ 2 \leq k \leq N \end{cases} \tag{3.51}$$

dir. Lokal olmayan sınır koşulu

$$Au_{-N} = \alpha u_{[\mu/\tau]} + \varphi,$$

kullanılarak,

$$\begin{aligned} u_{-N} = \alpha A^{-1} \Bigg[\Bigg\{ \Bigg\{ & \frac{1}{2} \left[R^{[\mu/\tau]-1} \left(\tau A^{1/2} \right) + R^{[\mu/\tau]-1} \left(-\tau A^{1/2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2i} A^{1/2} \left[R^{[\mu/\tau]-1} \left(\tau A^{1/2} \right) + R^{[\mu/\tau]-1} \left(-\tau A^{1/2} \right) \right] \Bigg\} \\ & - \frac{1}{2i} A^{1/2} \left(I + \tau^2 A \right) \left[R^{[\mu/\tau]} \left(-\tau A^{1/2} \right) - R^{[\mu/\tau]} \left(\tau A^{1/2} \right) \right] \Bigg\} \\ & \times \left[R^N u_{-N} - i\tau \sum_{s=-N+1}^{0} R^{-s+1} g_s \right] \\ & + \frac{1}{2i} A^{-1/2} \left(I + \tau^2 A \right) \left[R^{[\mu/\tau]} \left(-\tau A^{1/2} \right) - R^{[\mu/\tau]} \left(\tau A^{1/2} \right) \right] g_0 \\ & + \sum_{s=1}^{[\mu/\tau]-1} \frac{\tau}{2i} A^{-1/2} \left[R^{[\mu/\tau]-s} \left(-\tau A^{1/2} \right) - R^{[\mu/\tau]-s} \left(\tau A^{1/2} \right) \right] f_s \Bigg] + A^{-1} \varphi \end{aligned}$$

operatör denklemi elde edilir. Aşağıdaki

$$\begin{aligned} I - \alpha A^{-1} \Bigg[\Bigg\{ \Bigg\{ & \frac{1}{2} \left[R^{[\mu/\tau]-1} \left(\tau A^{1/2} \right) + R^{[\mu/\tau]-1} \left(-\tau A^{1/2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2i} A^{1/2} \left[R^{[\mu/\tau]-1} \left(\tau A^{1/2} \right) + R^{[\mu/\tau]-1} \left(-\tau A^{1/2} \right) \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\Big\}\Big]R^N$$

operatörünün

$$T_\tau=\Bigg(I-\alpha A^{-1}\Bigg[\Bigg\{\Bigg\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\Bigg\}$$
$$-\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\Bigg\}\Bigg]R^N\Bigg)^{-1}$$

tersi vardır ve

$$u_{-N}=T_\tau\Bigg(\alpha A^{-1}\Bigg[\Bigg\{\Bigg\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right] \tag{3.52}$$
$$+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\Bigg\}$$
$$-\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\Bigg\}$$
$$\times\left(-i\tau\sum_{s=-N+1}^{0}R^{-s+1}g_s\right)$$
$$+\frac{1}{2i}A^{-1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]g_0$$
$$+\sum_{s=1}^{[\mu/\tau]-1}\frac{\tau}{2i}A^{-1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_s\Bigg]+A^{-1}\varphi\Bigg)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi, (3.43), (3.44) ve (3.45) kestirimlerini elde edeceğiz. İlk olarak, $\|u_{-N}\|_H$ için kestirim elde edeceğiz.

Abel formülü ve (3.52) formülü kullanılarak,

$$u_{-N}=T_\tau\Bigg(\alpha A^{-1}\Bigg[\Bigg\{\Bigg\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right] \tag{3.53}$$
$$+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\Bigg\}$$
$$-\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\Bigg\}$$
$$\times A^{-1}R^{-1}\left(R^Ng_{-N+1}-g_0+\sum_{s=-N+2}^{0}R^{-s+1}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right)$$
$$+\frac{1}{2i}A^{-1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]g_0$$

$$+\sum_{s=1}^{[\mu/\tau]-1}\frac{\tau}{2i}A^{-1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_s\Bigg]+A^{-1}\varphi\Bigg)$$

elde edilir. (3.53) formülü ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) kestirimleri kullanılarak,

$$\|u_{-N}\|_H\le\|T_\tau\|_{H\to H}\Bigg(|\alpha|\Bigg[\Bigg\{\Bigg\{\frac{1}{2}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\left.+\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]$$

$$+\frac{1}{2|i|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{2|i|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\left.+\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\Bigg\}$$

$$\times\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\Bigg(\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1}g_0\right\|_H$$

$$+\sum_{s=-N+2}^{0}\left\|R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\Bigg)$$

$$+\frac{1}{2|i|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\left.+\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|A^{-1}g_0\right\|_H$$

$$+\sum_{s=1}^{[\mu/\tau]-1}\frac{\tau}{2|i|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{[\mu/\tau]-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\left.+\left\|R^{[\mu/\tau]-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|A^{-1}f_s\right\|_H\Bigg]+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_H\Bigg)$$

$$\le M\left[\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_H+\left\|A^{-1}g_0\right\|_H+\right.$$

$$\left.\max_{-N+1\le k\le 0}\left\|A^{-1}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H+\max_{1\le k\le N-1}\left\|A^{-1}f_k\right\|_H\right] \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.53) formüllerine $A^{1/2}$ uygulanır ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) kestirimleri kullanılırsa,

$$\left\|A^{1/2}u_{-N}\right\|_H\le M\left[\|\varphi\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H+\right.$$

$$\left.\max_{-N+1\le k\le 0}\left\|A^{-1/2}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H+\max_{1\le k\le N-1}\left\|A^{-1/2}f_k\right\|_H\right] \tag{3.55}$$

yazılır. Şimdi, $-N+1\le k\le N$ olmak üzere $\|u_k\|_H$ için kestirim elde edeceğiz. $-(N-1)\le k\le 0$ olsun. Bu durumda, Abel formülü ve (3.49) formülü kullanılarak,

$$u_k=R^{N+k}u_{-N} \tag{3.56}$$

$$+A^{-1}R^{-1}\left[R^{N+k}g_{-N+1}-g_k+\sum_{s=-N+2}^{k}R^{k-s}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right]$$

bulunur. (3.56) formülü ve (3.40) kestirimi kullanılarak,

$$\|u_k\|_H \leq \left\|R^{N+k}\right\|_{H\to H}\|u_{-N}\|_H$$
$$+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{N+k}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1}g_k\right\|_H\right.$$
$$\left.+\sum_{s=-N+2}^{k}\left\|R^{k-s}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\right]$$
$$\leq M\left[\|u_{-N}\|_H+\left\|A^{-1}g_0\right\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|A^{-1}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right] \tag{3.57}$$

elde edilir. $1\leq k\leq N$ olsun. Bu durumda, Abel formülü ve (3.50), (3.51) formülleri kullanılarak,

$$u_1=(I-\tau A)\left(R^N u_{-N}+A^{-1}R^{-1}\left[R^N g_{-N+1}-g_0\right.\right. \tag{3.58}$$
$$\left.\left.+\sum_{s=-N+2}^{0}R^{-s+1}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right]\right)+\tau g_0,$$

$$u_k=\left\{\left\{\frac{1}{2}\left[R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right. \tag{3.59}$$
$$\left.+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}$$
$$\left.-\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{k}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{k}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}$$
$$\times\left[R^N u_{-N}+A^{-1}R^{-1}\left(R^N g_{-N+1}-g_0+\sum_{s=-N+2}^{0}R^{-s+1}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2i}A^{-1/2}(I+\tau^2A)\left[R^{k}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{k}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]g_0$$
$$+\sum_{s=1}^{k-1}\frac{\tau}{2i}A^{-1/2}\left[R^{k-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{k-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_s,\ 2\leq k\leq N$$

bulunur. (3.58), (3.59) formülleri ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) kestirimlerinin kullanılmasıyla,

$$\|u_1\|_H\leq\left\|(I-\tau A)R^N\right\|_{H\to H}\|u_{-N}\|_H+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left[\left\|(I-\tau A)R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{-1/2}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_{H\to H}\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{s=-N+2}^{0}\left\|(I-\tau A)R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\right]$$
$$\leq M\left[\|u_{-N}\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|A^{-1}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right] \tag{3.60}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|u_k\|_H \leq & \left\{\left\{\frac{1}{2}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\right.\right. \\
& \left.+\frac{1}{2|i|}\left[\left\|R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\right\} \\
& \left.+\frac{1}{2|i|}\left[\left\|\left(I+\tau^2 A\right)R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|\left(I+\tau^2 A\right)R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\right\} \\
& \times\left[\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u_{-N}\right\|+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\right.\right. \\
& \times\left[\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H\right] \\
& \left.\left.+\sum_{s=-N+2}^{0}\left\|R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\right)\right] \\
& +\frac{1}{2|i|}\left[\left\|(I+\tau^2 A)R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|(I+\tau^2 A)R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H \\
& +\sum_{s=1}^{k-1}\frac{\tau}{2|i|}\left[\left\|R^{k-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|A^{-1/2}f_s\right\|_H,\ 2\leq k\leq N \\
& \leq M\left[\left\|A^{1/2}u_{-N}\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|A^{-1/2}f_k\right\|_H\right. \\
& \left.+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|A^{-1}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right],2\leq k\leq N \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. (3.55), (3.57), (3.60), (3.61) kestirimleri birleştirilerek ve üçgen eşitsizliği kullanılarak, (3.43) kestirimi elde edilmiş olur.

İkinci olarak, $\|Au_{-N}\|_H$ için kestirim elde edilecektir. (3.53) formüllerine A uygulayarak ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) (3.42) kestirimleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\|Au_{-N}\|_H \leq M & \left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H+\|g_0\|_H+\right. \\
& \left.\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\|f_k\|_H\right] \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

yazılır. Şimdi, $-N+1\leq k\leq N$ olmak üzere $\left\|A^{1/2}u_k\right\|_H$ için kestirim elde edeceğiz. $-(N-1)\leq k\leq 0$ olsun. Formül (3.49) 'e $A^{1/2}$ uygulayarak ve (3.40) kestirimi kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\left\|A^{1/2}u_k\right\|_H \leq & \left\|R^{N+k}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u_{-N}\right\|_H \\
& +\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{N+k}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_k\right\|_H\right. \\
& \left.+\sum_{s=-N+2}^{k}\left\|R^{k-s}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\right]
\end{aligned}
$$

$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}u_{-N}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|A^{-1/2}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right] \tag{3.63}$$

bulunur. $1\leq k\leq N$ olsun. (3.58), (3.59) formüllerine $A^{1/2}$ uygulayarak ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) kestirimlerini kullanarak,

$$\left\|A^{1/2}u_1\right\|_H=\left\|(I-\tau A)R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}u_{-N}\right\|_H+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}$$
$$\times\left[\left\|(I-\tau A)R^N\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{-1/2}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_{H\to H}\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{s=-N+2}^{0}\left\|(I-\tau A)R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\right]$$

$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}u_{-N}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|A^{-1/2}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right] \tag{3.64}$$

ve

$$\left.+\frac{1}{2\left|i\right|}\left[\left\|R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\right\}$$
$$\left.+\frac{1}{2\left|i\right|}\left[\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\right\}$$
$$\times\left[\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|Au_{-N}\right\|+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\right.$$
$$\times\left(\left[\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H\right]\right.$$
$$\left.\left.+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\sum_{s=-N+2}^{0}\left\|R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2\left|i\right|}\left[\left\|(I+\tau^2A)R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|(I+\tau^2A)R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|g_0\right\|_H$$
$$+\sum_{s=1}^{k-1}\frac{\tau}{2\left|i\right|}\left[\left\|R^{k-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|f_s\right\|_H$$

$$\leq M\left[\left\|Au_{-N}\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|f_k\right\|_H\right.$$
$$\left.+\left\|g_0\right\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|A^{-1/2}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right],2\leq k\leq N \tag{3.65}$$

bulunacaktır. (3.62), (3.63), (3.64), (3.65) kestirimleri birleştirilerek ve üçgen eşitsizliği kullanılarak, (3.44) kestirimi elde edilir.

Üçüncü olarak, $\left\|Au_{-N}\right\|_H$ için kestirim elde edeceğiz. Abel formülü ve (3.52) formülü kullanılarak,

$$Au_{-N}=T_\tau\left(\alpha\left[\left\{\left\{\frac{1}{2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right.\right.\right. \tag{3.66}$$

$$+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\Big\}$$

$$-\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\Big\}$$

$$\times A^{-1}R^{-1}\left(R^N g_{-N+1}-g_0-i\left(\tau AR\right)^{-1}\right.$$

$$\times\left\{g_{-1}-g_0-R^{N-1}\left(g_{-N+1}-g_{-N+2}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=-N+2}^{-1}R^{-s+1}\left(g_{s+1}-2g_s+g_{s-1}\right)\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{2i}A^{-1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]g_0$$

$$+\frac{1}{2}A^{-1}\left[R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)+R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_1$$

$$-\frac{1}{2}A^{-1}\left[R\left(-\tau A^{1/2}\right)+R\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_{[\mu/\tau]}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{[\mu/\tau]-1}A^{-1}\left[R^{[\mu/\tau]-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{[\mu/\tau]-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\left\{f_{s+1}-f_s\right\}\right]+\varphi\right)$$

bulunur. (3.66) formülü ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) kestirimleri kullanılarak,

$$\left\|Au_{-N}\right\|_{H\to H}\leq\left\|T_\tau\right\|_{H\to H}\left(|\alpha|\left[\left\{\left\{\frac{1}{2}\left[\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.+\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]+\frac{1}{2|i|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left[\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{[\mu/\tau]-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\Big\}$$

$$+\frac{1}{2|i|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\left.+\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\Big\}$$

$$\times\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\left(\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|g_{-N+1}\right\|_{H\to H}+\left\|g_0\right\|_{H\to H}\right)$$

$$+|i|\frac{1}{|\tau|}\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-3/2}\right\|_{H\to H}\left\{\left\|A^{-1/2}\left(g_{-1}-g_0\right)\right\|_H\right.$$

$$+\left\|R^{N-1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\left(g_{-N+1}-g_{-N+2}\right)\right\|_H$$

$$\left.+\sum_{s=-N+2}^{-1}\left\|R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\left(g_{s+1}-2g_s+g_{s-1}\right)\right\|_H\right\}$$

$$+\frac{1}{2|i|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\left.+\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|g_0\right\|_H$$

$$+\frac{1}{2}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{[\mu/\tau]}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{[\mu/\tau]}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|f_1\right\|_H$$

$$+\frac{1}{2}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|f_{[\mu/\tau]}\right\|_H$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{[\mu/\tau]-1}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{[\mu/\tau]-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{[\mu/\tau]-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]$$

$$\left\|A^{-1/2}\left(f_{s+1}-f_s\right)\right\|_H\Big]+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H\Big)$$

$$\leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H+\left\|g_0\right\|_H+\left\|A^{-1/2}\left(g_{-1}-g_0\right)\tau^{-1}\right\|_H+\left\|f_0\right\|_H\right.$$

$$\max_{-N+2\leq k\leq -1}\left\|A^{-1/2}\left(g_{k+1}-2g_k+g_{k-1}\right)\tau^{-2}\right\|_H$$

$$\left.+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|A^{-1/2}\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right] \tag{3.67}$$

elde edilir. (3.66) formülüne $A^{1/2}$ uygulanır ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) kestirimleri kullanılırsa,

$$\left\|A^{3/2}u_{-N}\right\|_H\leq M\left[\left\|A\varphi\right\|_H+\left\|A^{1/2}g_0\right\|_H+\left\|\left(g_{-1}-g_0\right)\tau^{-1}\right\|_H\right.$$

$$\max_{-N+2\leq k\leq -1}\left\|\left(g_{k+1}-2g_k+g_{k-1}\right)\tau^{-2}\right\|_H$$

$$\left.+\left\|A^{1/2}f_0\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right] \tag{3.68}$$

yazılır.

Şimdi, $-N+1\leq k\leq N$ olmak üzere $\left\|Au_k\right\|_H$ için kestirim elde edeceğiz. Bu durumda, Abel formülü ve (3.49) formülü kullanılarak,

$$Au_k=R^{N+k}Au_{-N}+R^{-1}\Big(R^{N+k}g_{-N+1}-g_k+i\left(\tau AR\right)^{-1} \tag{3.69}$$

$$\times\Big[R^{N+k-1}\left(g_{-N+2}-g_{-N+1}\right)-\left(g_k-g_{k-1}\right)$$

$$+\sum_{s=-N+2}^{k-1}R^{k-s}\left[g_{s+1}-2g_s+g_{s-1}\right]\Big]\Big)$$

bulunur. Formül (3.69) ve (3.40) kestirimi kullanılarak,

$$\left\|Au_k\right\|_{H\to H}\leq\left\|R^{N+k}\right\|_{H\to H}\left\|Au_{-N}\right\|_H+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\Big(\left\|R^{N+k}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}g_0\right\|_H+\left\|g_{-N+1}-g_0\right\|_H\right]$$

$$+\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left\|A^{1/2}g_0\right\|_H+\left\|g_k-g_0\right\|_H+|i|\frac{1}{|\tau|}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\Big[\left(1+\left\|R^{N+k-1}\right\|_{H\to H}\right)\left\|\left(g_{-1}-g_0\right)\tau^{-1}\right\|+\left\|R^{N+k-1}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left\|\tau^{-1}\left(g_{-N+2}-g_{-N+1}+g_0-g_{-1}\right)\right\|_H+\left\|\tau^{-1}\left(g_k-g_{k-1}+g_0-g_{-1}\right)\right\|_H$$

$$+\sum_{s=-N+2}^{k-1}\left\|R^{k-s}\right\|_{H\to H}\left\|\tau^{-2}\left(g_{s+1}-2g_s+g_{s-1}\right)\right\|_H\Big]\Big)$$

$$\leq M\left[\|Au_{-N}\|_H+\left\|\tau^{-1}\left(g_0-g_{-1}\right)\right\|_H+\left\|A^{1/2}g_0\right\|_H\right.$$

$$\left.+\max_{-N+2\leq k\leq -1}\left\|\tau^{-2}\left(g_{k+1}-2g_k+g_{k-1}\right)\right\|_H\right], \tag{3.70}$$

yazılır. $1\leq k\leq N$ olsun. Bu durumda, Abel formülü ve (3.58), (3.59) formülleri kullanılarak,

$$Au_1=(I-\tau A)\left(R^N Au_{-N}+R^{-1}\left[R^N g_{-N+1}-g_0-i\left(\tau AR\right)^{-1}\right.\right. \tag{3.71}$$

$$\times\left\{g_{-1}-g_0-R^{N-1}\left(g_{-N+1}-g_{-N+2}\right)+\right.$$

$$\left.\left.\left.\sum_{s=-N+2}^{-1}R^{-s+1}\left[g_{s+1}+2g_s-g_{s-1}\right]\right\}\right]\right)+\tau Ag_0$$

ve

$$Au_k=\left\{\left\{\frac{1}{2}\left[R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right.\right. \tag{3.72}$$

$$\left.+\frac{1}{2i}A^{1/2}\left[R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)+R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}$$

$$\left.-\frac{1}{2i}A^{1/2}\left(I+\tau^2A\right)\left[R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\right\}$$

$$\times\left[R^N Au_{-N}+R^{-1}\left(R^N g_{-N+1}-g_0-i\left(\tau AR\right)^{-1}\right.\right.$$

$$\times\left\{g_{-1}-g_0-R^{N-1}\left(g_{-N+1}-g_{-N+2}\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{s=-N+2}^{-1}R^{-s+1}\left[g_{s+1}+2g_s-g_{s-1}\right]\right\}\right]\right)$$

$$+\frac{1}{2i}A^{1/2}(I+\tau^2A)\left[R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right]g_0$$

$$+\frac{1}{2}\left[R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_1$$

$$-\frac{1}{2}\left[R\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]f_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k-1}\left[R^{k-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)-R^{k-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right]\left\{f_{s+1}-f_s\right\},\ 2\leq k\leq N$$

bulunur.

(3.71), (3.72) formülleri ve (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) kestirimleri kullanılırsa,

$$\|Au_1\|_H\leq\left\|(I-\tau A)\,R^N\right\|_{H\to H}\|Au_{-N}\|_H+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}$$

$$\times\left[\left\|(I-\tau A)\,R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|A^{-1/2}g_{-N+1}\right\|_H+\left\|A^{-1/2}g_0\right\|_{H\to H}\right]\right.$$

$$+|i|\,\frac{1}{|\tau|}\left\|A^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\left\{\|g_{-1}-g_0\|_H-\left\|R^{N-1}\right\|_{H\to H}\|g_{-N+1}-g_{-N+2}\|_H+\right.$$

$$+\sum_{s=-N+2}^{-1}\left\|R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|g_{s+1}+2g_s-g_{s-1}\right\|_H\Bigg\}$$

$$\leq M\left[\left\|Au_{-N}\right\|_H+\left\|g_0\right\|_H+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|A^{-1/2}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right] \tag{3.73}$$

ve

$$\left\|Au_k\right\|_H\leq\Bigg\{\Bigg\{\frac{1}{2}\left[\left\|R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]$$

$$+\frac{1}{2\left|i\right|}\left[\left\|R^{k-1}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-1}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{2\left|i\right|}\left[\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|\left(I+\tau^2A\right)R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\Bigg\}$$

$$\times\left[\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|A^{3/2}u_{-N}\right\|+\left\|R^{-1}\right\|_{H\to H}\right.$$

$$\times\left(\left[\left\|R^N\right\|_{H\to H}\left\|g_{-N+1}\right\|_H+\left\|g_0\right\|_H\right]\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=-N+2}^{0}\left\|R^{-s+1}\right\|_{H\to H}\left\|A^{-1/2}\left[g_s-g_{s-1}\right]\right\|_H\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2\left|i\right|}\left[\left\|(I+\tau^2A)R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|(I+\tau^2A)R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|g_0\right\|_H$$

$$+\frac{1}{2}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^k\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^k\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|A^{1/2}f_1\right\|_H$$

$$+\frac{1}{2}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|A^{1/2}f_k\right\|_H$$

$$+\sum_{s=1}^{k-1}\frac{\tau}{2\left|i\right|}\left\|A^{-1/2}\right\|_{H\to H}\left[\left\|R^{k-s}\left(-\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}+\left\|R^{k-s}\left(\tau A^{1/2}\right)\right\|_{H\to H}\right]\left\|A^{1/2}f_s\right\|_H$$

$$\leq M\left[\left\|A^{3/2}u_{-N}\right\|_H+\left\|A^{1/2}f_0\right\|_H+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|A^{1/2}\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right.$$

$$+\left\|A^{1/2}g_0\right\|_H+\left\|\left(g_{-1}-g_0\right)\tau^{-1}\right\|_H$$

$$\left.+\max_{-N+2\leq k\leq -1}\left\|\left(g_{k+1}-2g_k+g_{k-1}\right)\tau^{-2}\right\|_H\right],2\leq k\leq N \tag{3.74}$$

elde edilir. Burada, (3.68), (3.70), (3.73), (3.74) kestirimleri birleştirilir ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa, (3.45) kestiriminin elde edileceği açıktır.

Uygulamalar

Şimdi, Teorem 3.5 için iki uygulama verilecektir. İlk olarak, (3.35) karma tipli hiperbolik-Schrödinger denklemini ele alalım. Temel Teorem 3.5, (3.35) karma tipli sınır-değer problemin tek değişkene göre birinci basamaktan doğruluklu yaklaşık çözümünün araştırılmasında uygulanmıştır. (3.35) probleminin diskritizasyonu iki aşamada gerçekleştirilir. İlk aşamada,

$$[0,1]_h = \{x : x_n = nh, 0 \le n \le M, Mh = 1\}$$

ağ uzayı tanımlanır. Ardından $[0,1]_h$ aralığında tanımlanan $\varphi^h(x)$ ağ fonksiyonları ve $L_{2h} = L_2([0,1]_h), W_{2h}^1 = W_2^1([0,1]_h), W_{2h}^2 = W_2^2([0,1]_h)$ Hilbert uzayları tanımlanır. Belirtilen uzaylarda norm

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left|\varphi^h(x)\right|^2 h\right)^{1/2},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^1} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left|\left(\varphi^h\right)_{\bar{x},j}\right|^2 h\right)^{1/2},$$

$$\|\varphi^h\|_{W_{2h}^2} = \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left|\left(\varphi^h\right)_{\bar{x},j}\right|^2 h\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{M-1} \left|\left(\varphi^h\right)_{x\bar{x},j}\right|^2 h\right)^{1/2}$$

formülleri ile tanımlanır. (3.35) problemi tarafından oluşturulan A diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x \varphi^h(x) = \left\{-(a(x)\varphi_{\bar{x}})_{x,n} + \delta\varphi_n\right\}_1^{M-1}, \tag{3.75}$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada, A_h^x fark operatörü $\varphi^0 = \varphi^M, \varphi^1 - \varphi^0 = \varphi^M - \varphi^{M-1}$ şartlarını sağlayan $\varphi^h(x) = \{\varphi^n\}_0^M$ ağ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. Bilindiği gibi A_h^x fark operatörü L_{2h} Hilbert uzayında pozitif tanımlı öz-eşlenik bir operatördür. Bu durumda A_h^x fark operatörünün yardımıyla (3.35) lokal olmayan sınır-değer problemi

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v^h(t,x)}{dy^2} + A_h^x v^h(y,x) = f^h(y,x),\ 0 \le y \le 1,\ x \in [0,1]_h, \\[2ex] \dfrac{dv^h(t,x)}{dy} + A_h^x v^h(y,x) = f^h(y,x), -1 \le y \le 0,\ x \in [0,1]_h, \\[2ex] A_h^x v^h(-1,x) = v^h(1,x) + \varphi^h(x), x \in [0,1]_h, \\[2ex] v^h(0^+,x) = v^h(0^-,x), \dfrac{dv^h(0^+,x)}{dy} = \dfrac{dv^h(0^-,x)}{dy}, x \in [0,1]_h, \end{cases} \tag{3.76}$$

adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülebilir.

İkinci aşamada ise, (3.76) problemi için, (3.37) fark şeması kullanılarak,

$$
\begin{cases}
\dfrac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_{k+1}^h=f_k^h(x),\ x\in[0,1]_h\,, \\
f_{k+1}^h(x)=\{f(y_{k+1},x_n)\}_1^{M-1}, y_{k+1}=(k+1)\tau, 1\leq k\leq N-1, N\tau=1, \\
i\dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+A_h^x u_k^h=g_k^h(x),\ \ x\in[0,1]_h\,, \\
g_k^h(x)=\{g(y_k,x_n)\}_1^{M-1}, y_k=k\tau, -N+1\leq k\leq 0, \\
A_h^x u_{-N}^h(x)=u_N^h(x)+\varphi^h(x), x\in[0,1]_h\,, \\
i\frac{u_1^h(x)-u_0^h(x)}{\tau}=-A_h^x u_0^h(x)+g_0^h(x), g_0^h(x)=g^h(0,x), x\in[0,1]_h\,,
\end{cases}
\tag{3.77}
$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması elde edilir.

Teorem 3.6. *Eğer τ ve h yeterince küçük sayılar ise, bu durumda (3.77) fark şemasının çözümü aşağıdaki*

$$
\max_{-N+1\leq k\leq N}\left\|\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}+\max_{-N\leq k\leq N}\left\|\left(u_k^h\right)_x\right\|_{W_{2h}^1}
$$

$$
\leq C\left[\left\|\varphi_{\bar{x}}^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}}\right.
$$

$$
\left.+\left\|g_0^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|\left(g_k^h-g_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}\right],
$$

$$
\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\tau^{-2}\right\|_{L_{2h}}
$$

$$
+\max_{-N\leq k\leq N}\left\|\left(u_{\bar{x}}^k\right)_x\right\|_{W_{2h}^2}+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\left\|\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}
$$

$$
\leq C\left[\left\|f_{1x}^h\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{2\leq k\leq N-1}\left\|\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_{W_{2h}^1}\right.
$$

$$
+\left\|g_{0x}^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left(g_0^h-g_{-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}
$$

$$
\left.+\max_{-N+1\leq k\leq -1}\left\|\left(g_{k+1}^h-2g_k^h+g_{k-1}^h\right)\tau^{-2}\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left(\varphi_{\bar{x}}^h\right)_x\right\|_{W_{2h}^1}\right],
$$

kararlılık kestirimlerini sağlar. Burada, C sabiti τ, $h,\varphi^h(x)$ ve $f_k^h(x), 1\leq k\leq N-1, g_k^h, -N+1\leq k\leq 0$'dan bağımsızdır.

Teorem 3.6'nın ispatı, Teorem 3.5 ve (3.75) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak, çok boyutlu hiperbolik-Schrödinger denklem (3.36) için karma tipli sınır-değer problemini ele alalım. Burada da (3.36) probleminin diskritizasyonu iki adımda incelenir. Birinci adımda önce,

$$
\widetilde{\Omega}_h=\{x=x_m=(h_1m_1,\cdots,h_nm_n), m=(m_1,\cdots,m_n)\,,
$$

$$0 \le m_r \le N_r, h_r N_r = L, r = 1, \cdots, n\},$$

$$\Omega_h = \widetilde{\Omega}_h \cap \Omega, S_h = \widetilde{\Omega}_h \cap S$$

ağ uzayı tanımlanır. Ardından $\widetilde{\Omega}_h$ kümesinde tanımlanan

$$\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 m_1, \cdots, h_n m_n)\}$$

ağ fonksiyonları $L_{2h} = L_2(\widetilde{\Omega}_h), W_{2h}^1 = W_{2h}^1(\widetilde{\Omega}_h), W_{2h}^2 = W_{2h}^2(\widetilde{\Omega}_h)$ Banach uzayları tanımlanır. Bu uzaylarda norm,

$$\left\|\varphi^h\right\|_{L_2(\widetilde{\Omega}_h)} = \left(\sum_{x \in \widetilde{\Omega}_h} \left|\varphi^h(x)\right|^2 h_1 \cdots h_n\right)^{1/2},$$

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^1} = \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \widetilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^{n} \left|\left(\varphi^h\right)_{x_r}\right|^2 h_1 \cdots h_n\right)^{1/2},$$

$$\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2} = \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \widetilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^{n} \left|\left(\varphi^h\right)_{x_r}\right|^2 h_1 \cdots h_n\right)^{1/2}$$

$$+ \left(\sum_{x \in \widetilde{\Omega}_h} \sum_{r=1}^{n} \left|\left(\varphi^h\right)_{x_r \bar{x}_r, j_r}\right|^2 h_1 \cdots h_n\right)^{1/2}$$

formülleri ile tanımlanır. Daha sonra, (3.36) problemi tarafından oluşturulan A diferansiyel operatörü yerine

$$A_h^x u_x^h = -\sum_{r=1}^{n} \left(a_r(x) u_{\bar{x}_r}^h\right)_{x_r, j_r} \tag{3.78}$$

formülüyle tanımlanan A_h^x fark operatörü alınır. Burada, A_h^x fark operatörü her $x \in S_h$ değerleri için $u^h(x) = 0$ koşullarını sağlayan $u^h(x)$ fonksiyonları uzayında tanımlanmıştır. Bilindiği üzere $L_2(\widetilde{\Omega}_h)$ uzayında A_h^x fark operatörü pozitif tanımlı ve öz-eşlenik bir operatördür. Bu halde, A_h^x fark operatörünün yardımıyla

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v^h(y,x)}{dy^2} + A_h^x v^h(y,x) = f^h(y,x), \ 0 \le y \le 1, \ x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ \\ \dfrac{dv^h(y,x)}{dy} + A_h^x v^h(y,x) = f^h(y,x), -1 \le y \le 0, \ x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ \\ A_h^x v^h(-1,x) = v^h(1,x) + \varphi^h(x), x \in \widetilde{\Omega}_h, \\ \\ v^h(0^+,x) = v^h(0^-,x), \dfrac{dv^h(0^+,x)}{dy} = \dfrac{dv^h(0^-,x)}{dy}, x \in \widetilde{\Omega}_h \end{cases} \tag{3.79}$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. İkinci aşamada ise, (3.79) problemi yerine (3.37) fark şeması kullanılarak,

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}^h(x)-2u_k^h(x)+u_{k-1}^h(x)}{\tau^2}+A_h^x u_{k+1}^h=f_k^h(x), x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ f_{k+1}^h(x)=\{f(y_{k+1},x_n)\}_1^{M-1}, y_{k+1}=(k+1)\tau, 1\le k\le N-1,\ N\tau=1, \\ i\dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+A_h^x u_k^h=g_k^h(x), x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ g_k^h(x)=\{g(y_k,x_n)\}_1^{M-1}, y_k=k\tau, -N+1\le k\le -1, \\ A_h^x u_{-N}^h(x)=u_N^h(x)+\varphi^h(x), x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ i\dfrac{u_1^h(x)-u_0^h(x)}{\tau}=-A_h^x u_0^h(x)+g_0^h(x), g_0^h(x)=g^h(0,x), x\in\widetilde{\Omega}_h \end{cases} \tag{3.80}$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şeması elde edilir.

Teorem 3.7. *Eğer τ ve $|h|$ yeterince küçük sayılar ise, bu durumda (3.89) fark şemasının çözümü için aşağıdaki*

$$\max_{-N+1\le k\le N}\left\|\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}+\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(u_k^h\right)_{x_r,j_r}\right\|_{W_{2h}^1}$$

$$\le C\left[\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(\varphi^h\right)_{\bar{x}_r,j_r}\right\|_{L_{2h}}+\max_{1\le k\le N-1}\left\|f_k^h\right\|_{L_{2h}}\right.$$

$$\left.+\left\|g_0^h\right\|_{L_{2h}}+\max_{-N+1\le k\le 0}\left\|\left(g_k^h-g_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}\right],$$

$$\max_{1\le k\le N-1}\left\|\left(u_{k+1}^h-2u_k^h+u_{k-1}^h\right)\tau^{-2}\right\|_{L_{2h}}$$

$$+\max_{-N\le k\le N}\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(u_k^h\right)_{\bar{x}_r x_r,j_r}\right\|_{W_{2h}^2}+\max_{-N+1\le k\le 0}\left\|\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}$$

$$\le C\left[\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(f_1^h\right)_{\bar{x}_r,j_r}\right\|_{W_{2h}^1}+\max_{2\le k\le N-1}\left\|\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_{W_{2h}^1}\right.$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(g_0^h\right)_{\bar{x}_r,j_r}\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left(g_0^h-g_{-1}^h\right)\tau^{-1}\right\|_{L_{2h}}$$

$$\left.+\max_{-N+1\le k\le -1}\left\|\left(g_{k+1}^h-2g_k^h+g_{k-1}^h\right)\tau^{-2}\right\|_{L_{2h}}+\sum_{r=1}^{n}\left\|\left(\varphi^h\right)_{\bar{x}_r x_r,j_r}\right\|_{W_{2h}^1}\right],$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada, C sabiti $\tau, h, \varphi^h(x)$ ve $f_k^h(x), 1\le k\le N-1, g_k^h, -N+1\le k\le 0$'dan bağımsızdır.

Teorem 3.7'nin ispatı Temel Teorem 3.5'e, (3.78) formülü ile tanımlanan A_h^x fark operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki L_{2h} uzayındaki eliptik fark probleminin çözümü için koersif kestirimi elde edilen teoreme dayanmaktadır (bkz: [Sobolevskii, P. E., 1975]).

Teorem 3.8. *Eliptik fark probleminin*

$$\begin{cases} -\sum_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u^h_{\bar{x}_r}\right)_{x_r,j_r} = \omega^h(x), x \in \Omega_h, \\ u^h(x) = 0, x \in S_h, \end{cases}$$

çözümü için

$$\sum_{r=1}^{m}\left\|u^h_{x_r\bar{x}_r,j_r}\right\|_{L_{2h}} \leq M\left\|\omega^h\right\|_{L_{2h}}, \tag{3.81}$$

koersif kestirimi sağlanır.

r-iyileştirilmiş Carank-Nicholson Fark Şeması

(3.1) sınır-değer problemi ile r-iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şeması tarafından üretilen

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+\dfrac{1}{2}Au_k+\dfrac{1}{4}A(u_{k+1}+u_{k-1}) = f_k, f_k = f(t_k), \\ t_k = k\tau,\ 1 \leq k < N, \\ (I+\tau^2A)\left(\dfrac{u_1-u_0}{\tau}\right) = \dfrac{\tau}{2}\left[f_0 - Au_0\right] + \left[g_0 - Au_0\right], \\ i\dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau} + Au_k = g_k, -N+1 \leq k \leq -N+r, \\ i\dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau} + \dfrac{1}{2}Au_k + \dfrac{1}{2}Au_{k-1} = g_k, -N+r+1 \leq k \leq 0, \\ g_k = g\left(t_k - \dfrac{\tau}{2}\right),\quad t_k = k\tau, -N+1 \leq k \leq 0, \\ Au_{-N} = \alpha\left(u_{[\mu_j/\tau]} + \left(\mu_j - [\frac{\mu_j}{\tau}]\tau\right)\dfrac{u_{[\mu_j/\tau]}-u_{[\mu_j/\tau]-1}}{\tau}\right) + \varphi, \end{cases} \tag{3.82}$$

ikinci basamaktan doğruluklu fark şemasını ele alalım. Benzer bir şekilde, birinci basamaktan doğruluklu fark şemasının kararlılık kestirimlerinin ispatındaki gibi, aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.9. *Eğer $\varphi \in D(A), g_0 \in D(A^{1/2})$ ve $f_1 \in D(A^{1/2})$ ise, bu durumda (3.82) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kararlılık kestirimleri*

$$\max_{-N\leq k\leq N}\|u_k\|_H \leq M\left[\left\|A^{-1/2}\varphi\right\|_H + \left\|A^{-1/2}g_0\right\|_H\right. \tag{3.83}$$

$$+\max_{1\leq k<N}\left\|A^{-1/2}f_k\right\|_H+\max_{-N<k\leq 0}\left\|A^{-1/2}\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\Bigg],$$

$$\max_{-N\leq k\leq N}\left\|A^{1/2}u_k\right\|_H\leq M\left[\|\varphi\|_H+\|g_0\|_H\right. \tag{3.84}$$

$$\left.+\max_{1\leq k\leq N-1}\|f_k\|_H+\max_{-(N-1)\leq k\leq 0}\left\|\left(g_k-g_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\right],$$

$$\max_{1\leq k\leq N-1}\left\|\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)\tau^{-2}\right\|_H \tag{3.85}$$

$$+\max_{-N+1\leq k\leq 0}\|Au_k\|_H+\max_{1\leq k\leq N}\left\|A\left(\frac{u_k+u_{k-1}}{2}\right)\right\|_H$$

$$+\max_{-(N-1)\leq k\leq 0}\left\|\left(u_k-u_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H\leq M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H+\left\|A^{1/2}f_1\right\|_H\right.$$

$$+\max_{2\leq k\leq N-1}\left\|A^{1/2}\left(f_k-f_{k-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H+\left\|A^{1/2}g_0\right\|_H$$

$$\left.+\left\|\left(g_0-g_{-1}\right)\tau^{-1}\right\|_H+\max_{-(N-1)\leq k\leq -1}\left\|\left(g_{k+1}-2g_k+g_{k-1}\right)\tau^{-2}\right\|_H\right]$$

sağlanır. Burada, M sabiti $\tau, f_k, 0\leq k<N, g_k, -N<k\leq 0$ ve φ'den bağımsızdır.

Benzer biçimde (3.82) r-iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemasını uygulayarak, (3.35) ve (3.36) sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için tek değişkene göre ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kurulabilir. Bu yaklaşım bize bu fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimleri elde etmemize izin verir.

3.3 NÜMERİK ANALİZ

Bu bölümde hiperbolik-Schrödinger denkleminin lokal olmayan sınır-değer problemini

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), 0 < t < 1, 0 < x < 1, \\ i\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(t,x), -1 < t < 0, 0 < x < 1, \\ u(0^+, x) = u(0^-, x);\ u_t(0^+, x) = u_t(0^-, x) \\ -\dfrac{\partial^2 u(-1,x)}{\partial x^2} = u(1,x) + \varphi(x), 0 \leq x \leq \pi, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, -1 \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{3.86}$$

ele alalım. Burada

$$f(t,x) = \left(-2 + \pi^2 + 4t^2\right) e^{-t^2} \sin \pi x,$$
$$g(t,x) = \left(-2it + \pi^2\right) e^{-t^2} \sin \pi x$$

ve

$$\varphi(x) = \left(\pi^2 - 1\right) e^{-1} \sin \pi x$$

dir. (3.86) probleminin gerçek çözümü

$$u(t,x) = e^{-t^2} \sin \pi x$$

dir.

(3.86) probleminin yaklaşık çözümü için, $\tau = h = 1/30$ olmak üzere birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kullanılacaktır. İkinci ve dördüncü mertebeden, katsayıları matris olan, n'ye göre fark denklemleri elde edilecektir. Bu fark denklemlerini çözmek için, iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır. Sayısal denemelerin sonucu olarak ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemalarına oranla daha doğru olduğu gösterilecektir.

Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması

Hiperbolik-Schrödinger denkleminin lokal olmayan sınır değer problemini (3.86) göz önüne alalım. (3.86) probleminin yaklaşık çözümü için, τ üzerinden tanımlı ağ noktalarının ailesini ve

$$[0,1]_\tau \times [0,\pi]_h = \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, 1 \leq k \leq N-1, N\tau = 1,$$
$$x_n = nh,\ 1 \leq n \leq M-1,\ Mh = \pi\}$$

ifadesini $[0,1]_\tau \times [0,\pi]_h$ aralığında göz önüne alalım. Aşağıdaki

$$\begin{aligned} \frac{u(t_{k+1}) - 2u(t_k) + u(t_{k-1})}{\tau^2} - u''(t_{k+1}) &= O(\tau), \\ \frac{u(x_{n+1}) - 2u(x_n) + u(x_{n-1})}{h^2} - u''(x_n) &= O\left(h^2\right) \end{aligned} \tag{3.87}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{u(1)-u(0)}{\tau}-u'(0) &= O(\tau), \\ \frac{u(1)-u(1-\tau)}{\tau}-u'(1) &= O(\tau) \end{aligned} \tag{3.88}$$

formülleri uygulanarak birinci basamaktan doğruluklu t'ye göre, hiperbolik-Schrödinger denklemi

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2}=f(t_{k+1},x_n), \\ 1\le k\le N-1, 1\le n\le M-1, \\ i\dfrac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}-\dfrac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2}=g(t_k,x_n), \\ -(N-1)\le k\le 0, 1\le n\le M-1, \\ u_n^1-2u_n^0+u_n^{-1}=0, 1\le n\le M-1, \\ -\dfrac{u_{n+1}^{-N}-2u_n^{-N}+u_{n-1}^{-N}}{h^2}=u_n^N+(\pi^2-1)e^{-1}\sin\pi x_n, 1\le n\le M-1, \\ u_0^k=u_M^k=0,\ 0\le k\le N, \\ f(t,x)=(-2+\pi^2+4t^2)e^{-t^2}\sin\pi x, \\ g(t,x)=(-2it+\pi^2)e^{-t^2}\sin\pi x \end{cases} \tag{3.89}$$

veya

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{1}{h^2}\right)u_{n+1}^k+\left(-\dfrac{i}{\tau}\right)u_n^{k-1}+\left(\dfrac{i}{\tau}+\dfrac{2}{h^2}\right)u_n^k+\left(-\dfrac{1}{h^2}\right)u_{n-1}^k=g(t_k,x_n), \\ -N+1\le k\le 0,\ 1\le n\le M-1, \\ \left(-\dfrac{1}{h^2}\right)u_{n+1}^{k+1}+\left(\dfrac{1}{\tau^2}+\dfrac{2}{h^2}\right)u_n^{k+1}+\left(-\dfrac{2}{\tau^2}\right)u_n^k+\left(\dfrac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k-1}+\left(-\dfrac{1}{h^2}\right)u_{n-1}^{k+1}=f(t_{k+1},x_n), \\ 1\le k\le N-1,\ 1\le n\le M-1, \\ u_n^1-2u_n^0+u_n^{-1}=0,\ 1\le n\le M-1, \\ \left(-\frac{1}{h^2}\right)u_{n+1}^{-N}+\left(\frac{2}{h^2}\right)u_n^{-N}+\left(-\frac{1}{h^2}\right)u_{n-1}^{-N}-u_n^N=(\pi^2-1)e^{-1}\sin\pi x_n, 1\le n\le M-1, \\ u_0^k=u_M^k=0,\ 0\le k\le N \end{cases}$$

yazılır.

Böylece, $(2N+1)\times(2N+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur.Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa,

$$\begin{cases} Au_{n+1}+Bu_n+Cu_{n-1}=D\varphi, 1\leq n\leq M-1, \\ U_0=\vec{0}, U_M=\vec{0} \end{cases} \tag{3.90}$$

elde edilir. Burada,

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

$$B=\begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & s & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & e & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

ve $C=A$, $D=[I]_{(2N+1)\times(2N+1)}$ birim matristir. Ayrıca,

$$a=-\frac{1}{h^2}, b=-\frac{i}{\tau}, c=\frac{i}{\tau}+\frac{2}{h^2}, d=\frac{1}{\tau^2}, e=-\frac{2}{\tau^2}, s=\frac{1}{\tau^2}+\frac{2}{h^2},$$

$$\varphi_n^k=\begin{cases} (\pi^2-1)\,e^{-1}\sin\pi x_n, \\ g\left(t_k,x_n\right), N+1\leq k\leq 0, \\ f\left(t_{k+1},x_n\right), 1\leq k\leq N-1, \\ 0, k=N \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{0} \\ \varphi_n^{1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}, U_s = \begin{bmatrix} u_s^{-N} \\ u_s^{-N+1} \\ \vdots \\ u_s^{0} \\ u_s^{1} \\ \vdots \\ u_s^{N-1} \\ u_s^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}, s = n \pm 1, n$$

dir. (3.90) matris denkleminin çözümü için iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemi kullanılır. Bu yüzden aşağıdaki formda,

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1, 0,$$

bir çözüm aranmaktadır. Öyle ki α_j $(j = 1, \cdots, M-1)$ ler $(2N+1) \times (2N+1)$ tipinde kare matris ve β_j $(j = 1, \cdots, M-1)$ ler $(2N+1) \times 1$ şeklinde sütun matris ve α_1, β_1 :

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}$$

biçimindedir. Aşağıdaki eşitlik

$$U_s = \alpha_{s+1} U_{s+1} + \beta_{s+1}, \ (\ s = n, n-1 \text{ için})$$

ve

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n$$

eşitliği kullanılarak

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}] \, U_{n+1} + \left[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n\right] = D\varphi_n$$

yazılabilir. Son denklemin

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0,$$

$$B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1$$

şeklinde seçilmesi uygundur. $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ için formüller:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -\left(B + C\alpha_n\right)^{-1} A, \\ \beta_{n+1} = \left(B + C\alpha_n\right)^{-1} \left(D\varphi_n - C\beta_n\right), n = 1, 2, \cdots, M-1 \end{cases}$$

biçimindedir. Bu yüzden,

$$U_M = \vec{0},$$

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1, 0$$

olacaktır.

r-İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şeması

Aşağıdaki ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+\dfrac{1}{2}Au_k+\dfrac{1}{4}A(u_{k+1}+u_{k-1})=f_k, f_k=f(t_k), \\ t_k=k\tau,\ 1\le k<N, \\ (I+\tau^2A)\left(\dfrac{u_1-u_0}{\tau}\right)=\dfrac{\tau}{2}\left[f_0-Au_0\right]+\left[g_0-Au_0\right], \\ i\dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+Au_k=g_k, -N+1\le k\le -N+r, \\ i\dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+\frac{1}{2}Au_k+\frac{1}{2}Au_{k-1}=g_k, -N+r+1\le k\le 0, \\ g_k=g\left(t_k-\dfrac{\tau}{2}\right),\ \ t_k=k\tau, -N+1\le k\le 0, \\ Au_{-N}=\alpha\left(u_{[\mu_j/\tau]}+\left(\mu_j-[\frac{\mu_j}{\tau}]\tau\right)\dfrac{u_{[\mu_j/\tau]}-u_{[\mu_j/\tau]-1}}{\tau}\right)+\varphi, \end{cases}$$

uygulanırsa, ikinci basamaktan doğruluklu r-iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şeması (3.86) probleminin yaklaşık çözümü için

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\dfrac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{2h^2} \\ -\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}+u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1}}{4h^2}=f(t_k,x_n), \\ x_n=nh, t_k=k\tau, 1\le k\le N-1, 1\le n\le M-1, \\ i\dfrac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}-\dfrac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{h^2}=g\left(t_k-\dfrac{\tau}{2},x_n\right), \\ x_n=nh, t_k=k\tau, -N+1\le k\le -N+r, 1\le n\le M-1, \\ i\dfrac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}-\dfrac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k+u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1}}{2h^2}=g\left(t_k-\dfrac{\tau}{2},x_n\right), \\ x_n=nh, t_k=k\tau, -N+r+1\le k\le 0, 1\le n\le M-1, \\ i\dfrac{u_n^1-u_n^0}{\tau}+\tau\left(-\dfrac{u_{n+1}^1-2u_n^1+u_{n-1}^1}{h^2}\right)+\left(1-\dfrac{\tau}{2}\right)\left(-\dfrac{u_{n+1}^0-2u_n^0+u_{n-1}^0}{h^2}\right) \\ =\dfrac{\tau}{2}f\left(0,x_n\right)+g\left(0,x_n\right), x_n=nh, 1\le n\le M-1, \\ -\dfrac{u_{n+1}^{-N}-2u_n^{-N}+u_{n-1}^{-N}}{h^2}=u_n^N+\left(\pi^2-1\right)e^{-1}\sin\pi x_n, x_n=nh, 1\le n\le M-1, \\ u_0^k=u_M^k=0, 0\le k\le N \end{cases} \tag{3.91}$$

yazılır. Böylece, $(2N+1)\times(2N+1)$ boyutlu doğrusal denklem sistemi elde edilmiş olur.Bu doğrusal denklem sistemi düzenlenerek matris formunda yazılırsa,

$$\begin{cases} Au_{n+1}+Bu_n+Cu_{n-1}=D\varphi, 1\le n\le M-1, \\ U_0=\vec{0}, U_M=\vec{0} \end{cases}$$

olur. Burada,

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & c & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & c & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

$$B=\begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & n & m & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & n & m & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & n & m & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & n & m\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & s & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)},$$

ve $C=A$, $D=[I]_{(2N+1)\times(2N+1)}$ birim matristir. Ayrıca,

$$a=-\frac{1}{h^2}, b=-\frac{1}{2h^2}, c=-\frac{1}{4h^2}, p=\frac{1}{h^2}\left(\frac{\tau}{2}-1\right), q=-\frac{\tau}{h^2},$$

$$d_1=-\frac{i}{\tau}, e_1=\frac{i}{\tau}+\frac{2}{h^2}, d_2=-\frac{i}{\tau}+\frac{1}{h^2}, e_2=\frac{i}{\tau}+\frac{1}{h^2},$$

$$m=-\frac{2}{\tau^2}+\frac{1}{h^2}, n=\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{2h^2}, v=-\frac{1}{\tau}+\frac{2-\tau}{h^2}, s=\frac{1}{\tau}+\frac{2\tau}{h^2},$$

$$\varphi_n^k=\begin{cases} \left(\pi^2-1\right)e^{-1}\sin\pi x_n, \\ \\ g\left(t_k-\frac{\tau}{2}, x_n\right), N+1\leq k\leq 0, \\ \\ f\left(t_k, x_n\right), 1\leq k\leq N-1, \\ \\ \frac{\tau}{2}f\left(0, x_n\right)+g\left(0, x_n\right), k=N, \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^{-N} \\ \varphi_n^{-N+1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{0} \\ \varphi_n^{1} \\ \vdots \\ \varphi_n^{N-1} \\ \varphi_n^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}, U_s = \begin{bmatrix} u_s^{-N} \\ u_s^{-N+1} \\ \vdots \\ u_s^{0} \\ u_s^{1} \\ \vdots \\ u_s^{N-1} \\ u_s^{N} \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1}, s = n \pm 1, n$$

yazılacaktır. (3.90) matris denkleminin çözümü için iyileştirilmiş Gauss yok etme yöntemi kullanılmıştır. Bu yüzden aşağıdaki formda

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1, 0,$$

bir çözüm aranmaktadır. Burada, α_j $(j = 1, \cdots, M-1)$ ler $(2N+1) \times (2N+1)$ şeklinde kare matris, β_j $(j = 1, \cdots, M-1)$ ler $(2N+1) \times 1$ şeklinde sütun matris ve α_1, β_1:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times(2N+1)}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(2N+1)\times 1},$$

biçimindedir. Aşağıdaki eşitlik

$$U_s = \alpha_{s+1} U_{s+1} + \beta_{s+1}, \ (s = n, n-1 \text{ için})$$

ve

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n$$

eşitliği kullanılarak

$$\left[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n \alpha_{n+1}\right] U_{n+1} + \left[B\beta_{n+1} + C\alpha_n \beta_{n+1} + C\beta_n\right] = D\varphi_n$$

elde edilir. Son eşitliğin

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n \alpha_{n+1} = 0,$$

$$\left[B\beta_{n+1} + C\alpha_n \beta_{n+1} + C\beta_n\right] = D\varphi_n, 1 \leq n \leq M-1$$

şeklinde seçilmesi uygundur. $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$'ler için formüller:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = -\left(B + C\alpha_n\right)^{-1} A, \\ \beta_{n+1} = \left(B + C\alpha_n\right)^{-1} \left(D\varphi_n - C\beta_n\right), n = 1, 2, \cdots, M-1 \end{cases}$$

biçiminde olacaktır. Bu yüzden,

$$U_M = \vec{0},$$

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}, n = M-1, \cdots, 2, 1, 0$$

elde edilecektir.

4 BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 Hata Analizi

Şimdi, sayısal sonuçlar verilecektir. Hiperbolik-Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır-değer problemi (3.86) i göz önüne alalım. (3.86) lokal olmayan sınır-değer probleminin yaklaşık çözümüne, birinci ve ikinci dereceden doğruluklu fark şemalarının farklı τ ve h değerleri için bakalım. Tam ve sayısal çözümler 1.1, 1.2 ve 1.3 şekilleri ile verilmiştir.

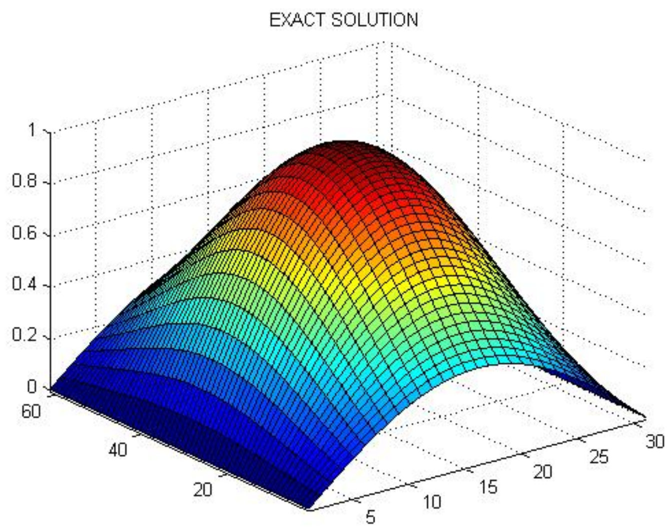

Figure 1.1:

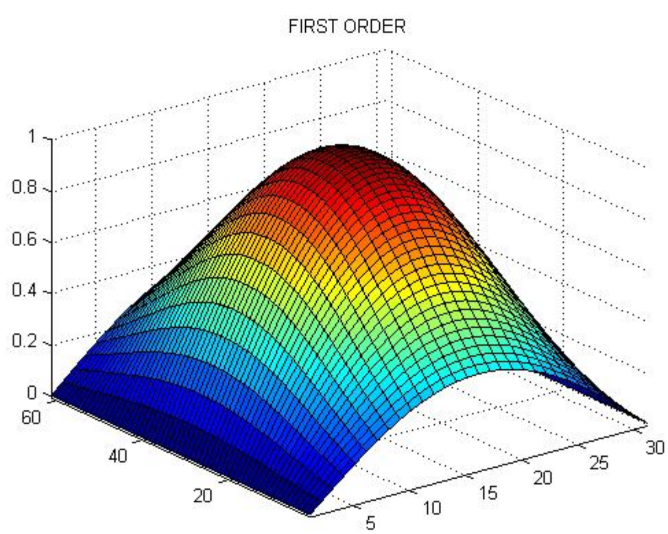

Figure 1.2:

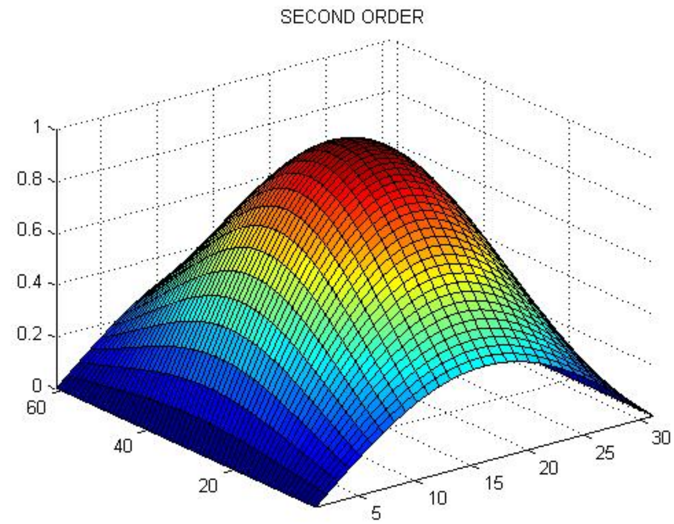

Figure 1.3:

Karşılaştırma hataları

$$E_M^N = \max_{1\leq k\leq N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|u\left(t_k,x_n\right)-u_n^k\right|^2 h\right)^{1/2}$$

formülü kullanılarak hesaplanmıştır.Bu sayısal sonuçlar $r=1$ için, N ve M'nin farklı değerleri için bulunmuştur. Burada (t_k,x_n) noktasında $u(t_k,x_n)$ gerçek çözümü, u_n^k nümerik çözümü temsil etmektedir. Sonuçlar Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1
Fark şemalarının yaklışık çözümlerinin hatalarının karşılaştırılması

Yöntem	N=10 M=20	N=20 M=40	N=40 M=80
Fark Şeması (3.89)	0.0579	0.0303	0.0160
Fark Şeması (3.91)	0.0037	8.6724×10^{-4}	2.1416×10^{-4}

Tablo 2'de, nümerik çözümler $r = 1, 2, 3$ için N ve M'nin farklı değerleri için bulunmuştur.

Tablo 2
r'nin farklı değerleri için fark şemalarının hatalarının karşılaştırması

Yöntem	$N = M = 20$	$N = M = 40$	$N = M = 80$
Birinci dereceden FŞ	0.0313	0.0162	0.0084
1-iyileştirilmiş C-N FŞ	0.0019	4.7395×10^{-4}	1.1805×10^{-4}
2-iyileştirilmiş C-N FŞ	0.0214	0.0058	0.0015
3-iyileştirilmiş C-N FŞ	0.0400	0.0113	0.0029

Tablo 1 ve Tablo 2 elde edilen hatalar incelendiğinde, ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına göre daha doğruluklu olduğu görülmektedir.

5 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışma hiperbolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemlerinin kararlılığı için ayrılmıştır. Çalışma sonunda aşağıdaki özgün sonuçlar elde edilmiştir:

- Hilbert uzayında hiperbolik-Schrödinger denkleminin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözümü için kararlılık kestirimleri üzerindeki temel teorem ispatlanmıştır,
- hiperbolik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin çözümü için kararlılık kestirimlerindeki teoremler elde edilmiştir,
- hiperbolik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları sunulmuştur,
- hiperbolik-Schrödinger denklemlerinin lokal olmayan sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümü için kurulan birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemalarının yaklaşık çözümleri için kararlılık kestirimlerindeki temel teorem kanıtlanmıştır,
- hiperbolik-Schrödinger denklemleri için kurulan fark şemalarının çözümü için kararlılık kestirimlerindeki teoremler elde edilmiştir,
- bu fark şemalarının teorik ifadeleri nümerik deneylerle desteklenmiştir,
- çalışmanın bir bölümü akademik bir dergide yayınlanmıştır. Çalışmanın diğer bölümü ise, uluslararası bir konferansta sunulmak üzere bir bildiri olarak hazırlanmıştır.

Hiperbolik-Schrödinger denklemleri için lokal olmayan sınır-değer problemleri bölümünde elde edilen kararlı çözümler aşağıdaki;

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + Au\left(t\right) = f\left(t\right) \quad \left(0 \leq t \leq 1\right), \\ i\dfrac{du}{dt} + Au\left(t\right) = g\left(t\right) \quad \left(-1 \leq t \leq 0\right), \\ Au\left(-1\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u\left(\mu_j\right) + \varphi, \\ 0 < \mu_j \leq 1, 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

H Hilbert uzayındaki pozitif tanımlı öz-eşlenik A operatörü ile karma tipli diferansiyel denklemin çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi için de elde edilebilir.

KAYNAKLAR

M. S. Salakhitdinov, *Equations of Mixed-Composite Type*, Tashkent: FAN, 1974. (Russian).

T. D. Djuraev, *Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Tashkent: FAN, 1979. (Russian).

M. G. Karatopraklieva, “On a nonlocal boundary value problem for an equation of mixed type”, *Differensial’nye uravneniya*, vol. 27, no. 1, pp. 68–79, 1991. (Russian).

D. Bazarov and H. Soltanov, *Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types*, Ashgabat: Ylym, 1995. (Russian).

S. N. Glazatov, “Nonlocal boundary value problems for linear and nonlinear equations of variable type”, *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS*, Preprint no. 46, 1998. (Russian).

A. Ashyralyev and N. Aggez, “A note on difference schemes of the nonlocal boundary problems for hyperbolic equations”, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 25, no. 5-6, pp. 439–462, 2004.

A. Ashyralyev and Y. Ozdemir, “On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 11, no. 4, pp. 1075–1089, 2007.

A. Ashyralyev and O. Gercek, “Nonlocal boundary value problems for elliptic-parabolic differential and difference equations”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2008, pp. 1–16, 2008.

A. Ashyralyev and A. Sirma, “Nonlocal boundary value problems for the Schrodinger equation”, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 55, no. 3, pp. 392–407, 2008.

A. Ashyralyev and O. Yildirim, “On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations,” *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 14, no. 1, pp. 165–194, 2010.

A. Ashyralyev and B. Hicdurmaz, “A note on the fractional Schrodinger differential equation”, *Kybernetes*, vol. 40, no. 5-6, pp. 736–750, 2011.

A. Ashyralyev and F. Ozger, “The hyperbolic-elliptic equation with the nonlocal condition”, *AIP Conference Proceedings*, vol 1389, pp. 581–584, 2011.

Y. Soykan, *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Yayınevi:Ankara, 978-605-133-200-0, 2012.

H. Kızıltunç, *Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktalarının İterasyon Metotlarıyla Elde Edilmesi,* Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2007.

Z. Zheng and Y. Xuegang, "Hyperbolic Schrodinger equation", *Advance in Applied Clifford Algebras*, vol. 14, no. 2, pp. 207–213, 2004.

A. A. Oblomkov and A. V. Penskoi, "Laplace transformations and spectral theory of two-dimensional semi-discrete and discrete hyperbolic Schrodinger operators", *International Mathematics Research Notices*, no. 18, pp. 1089–1126, 2005.

A. Avila and R. Krikorian, "Reducibility or nonuniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrodinger cocycles", *Annals of Mathematics*, vol. 164, pp. 911–940, 2006.

M. Kozlowski and J. M. Kozlowska, "Development on the Schrodinger equation for attosecond laser pulse interaction with planck gas", *Laser in Engineering*, vol. 20, no. 3-4, pp. 157–166, 2010.

K. Tselios and T. E. Simos, "Runge-Kutta methods with minimal dispersion and dissipation for problem arising from computational acoustics", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 175, no. 1, pp. 173-181, 2005.

D. P. Sakas and T. E. Simos, "Multiderivative methods of eighth algebraic order with minimal phase-lag for the numerical solution of the radial Schrodinger equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 175, no. 1, pp. 161-172, 2005.

G. Psihoyios and T. E. Simos, "A fourth algebraic order trigonometrically fitted predictor-corrector scheme for IVPs with oscillating solutions", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 175, no. 1, pp. 137-147, 2005.

Z. A. Anastassi and T. E. Simos, "An optimized Runge-Kutta method for the solution of orbital problems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 175, no. 1, pp. 1-9, 2005.

T. E. Simos, "Closed Newton-Cotes trigonometrically-fitted formulae of high order for long-time integration of orbital problems", *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, no. 10, pp. 1616-1621, 2009.

S. Stavroyiannis and T. E. Simos, "Optimization as a function of the phase-lag order of nonlinear explicit two-step P-stable method for linear periodic IVPs", *Applied Numerical Mathematics*, vol. 59, no. 10, pp. 2467-2474, 2009.

T. E. Simos, "Exponentially and trigonometrically fitted methods for the solution of the Schrodinger equation", *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 110, no. 3, pp. 1331-1352, 2010.

H. O. Fattorini, *Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Notas de Matematica, North-Holland, 1985.

S. Piskarev and Y. Shaw, "On certain operator families related to cosine operator function", *Taiwanese Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 4, pp. 3585–3592, 1997.

P. E. Sobolevskii, *Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations*, Izdat, Voronezh Gosud Univ., Voronezh, 1975. (Russian).

A. A. Samarskii and Nikolaev, E. S., *Numerical Methods for Grid Equations vol. 2: Iterative Methods*, Birkäuser: Basel, Switzerland, 1989.

EKLER

5.1 Algoritma

1. Basamak Zaman artışı $\tau = \dfrac{1}{N}$ ve uzay artışı $h = \dfrac{1}{M}$ girilir.

2. Basamak Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n, \quad 0 \leq n \leq M.$$

3 Basamak A,B,C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4 Basamak α_1, β_1''i bul.

5 Basamak $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$'i hesapla.

6 Basamak U_n's $(n = M-1, \cdots, 2, 1)$, $\left(U_M = \vec{0}\right)$ 'i aşağıdaki formülü kullanarak

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}$$

hesapla.

5.2 Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması için Matlab Programı

```
function [table,es,p]=firstorder(N,M)
    close; close;
    if nargin<1; N=30 ; M=30 ;end;
    tau=1/N; h=1/M;
    A=zeros(2*N+1,2*N+1);
    % Lokal olmayan koşulun etkisi
    A(1,1)=-1/(h^2);
    for i=2:N+1; A(i,i)=-1/(h^2); end; % Schrodinger kısım asıl köşegen
    for i=N+2:2*N; A(i,i+1)=-1/(h^2); end; % hiperbolik kısım asıl köşegen + 1
    A;
    B=zeros(2*N+1,2*N+1);
    % lokal olmayan koşulun etkisi
    B(1,1)=2/(h^2);
    %B(1,2*N)=1/tau;
    %B(1,2*N+1)=-1/tau-1;
    B(1,2*N+1)=-1;
```

```
for i=1:N; B(i+1,i)=-complex(0,1)/tau; end; % Schrodinger kısım asıl köşegen - 1
for i=2:N+1; B(i,i)=complex(0,1)/tau+2/(h^2); end; % Schrodinger kısım asıl köşegen
for i=N+2:2*N; B(i,i)=-2/(tau^2); end; % hiperbolik kısım asıl köşegen
for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=1/(tau^2)+2/(h^2); end; % hiperbolik kısım asıl köşegen
+ 1
for i=N+1:2*N-1; B(i+1,i)=1/(tau^2); end; % hiperbolik kısım asıl köşegen - 1
% süreklilik koşulunun etkisi
B(2*N+1,N)=1;
B(2*N+1,N+1)=-2;
B(2*N+1,N+2)=1;
B;
C=A;
D=zeros(2*N+1,2*N+1);
for i=1:2*N+1; D(i,i)=1; end ;
'fi(j) = fi(k,j) hesaplanıyor ' ;
for j=1:M; x=j*h;
%fii(1,j:j)=2*exp(-1)*sin(pi*x);
fii(1,j:j)=((pi^2)-1)*exp(-1)*sin(pi*x);
fii(2*N+1,j:j)=0;
for k=2:N+1; x=j*h; t=(-N+k-1)*tau ; fii(k,j:j)=g(t,x); end;
for k=N+2:2*N; t=(-N+k-1)*tau+tau; x=j*h; fii(k,j:j)=f(t,x); end;
end;
'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;
alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0;
betha(2*N+1,1:1)=0;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*A;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));
end;
U(2*N+1,1,M:M)=0;
for z=M-1:-1:1 ;
U(:,:,z:z)=alpha(:,:,z+1:z+1)*U(:,:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);
end;
for z=1:M; p(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z); end;
'EXACT SOILUTION OF THIS PDE' ;
```

```
for j=1:M+1;
for k=1:2*N+1;
t=(-N+k-1)*tau;
x=(j-1)*h; %exact solution on grid points,
es(k,j) = exact(t,x);
end;
end;
% 'ERROR ANALYSIS' ;
ftf1=abs(es-p);
fmat1=abs(ftf1);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror2=max(fmat4)
maxerror2=max(max(abs(es-p)))
%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
%maxerror=max(max(abs(es-p)));
%relativeerror=maxerror/maxapp;
%cevap = [maxes,maxapp,maxerror,relativeerror]
%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%
figure;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
surf(es) ; rotate3d ;axis tight;
title('EXACT SOLUTION');
figure ;
m(1,1)=min(min(p))-0.01;
m(2,2)=nan;
surf(m);
hold;
```

```
surf(p) ; rotate3d ;axis tight;
title('FIRST ORDER');
%%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x)
estx= exp(-t^2)*sin(pi*x);
function ftx=f(t,x)
ftx=(-2+4*t^2+pi^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);
function gtx=g(t,x)
gtx=(-2*complex(0,1)*t+pi^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);
```

5.3 Algoritma

1. Basamak Zaman artışı $\tau = \dfrac{1}{N}$ ve uzay artışı $h = \dfrac{1}{M}$ girilir.

2. Basamak Birinci dereceden doğruluklu fark şemasını kullan ve matris formunda yaz.

$$Au_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n, \quad 0 \le n \le M.$$

3 Basamak A,B,C ve D matrislerinin girdilerini belirle.

4 Basamak α_1, β_1''i bul.

5 Basamak $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$'i hesapla.

6 Basamak U_n's $(n = M-1, \cdots, 2, 1)$, $\left(U_M = \vec{0}\right)$ 'i aşağıdaki formülü kullanarak

$$U_n = \alpha_{n+1} U_{n+1} + \beta_{n+1}$$

hesapla.

5.4 r-İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şeması İçin Matlab Programı

```
function [table,es,p]=second(N,M,r)
close;close;
close;close;
if nargin<1;N= 30 ; M= 30 ;end
tau= 1/N; h= 1 /M ;
A=zeros(2*N+1,2*N+1);
for i=2:r; A(i,i)=-1/(h^2); end; %diagonal Schrodinger
for i=r+1:N+1; A(i,i-1)=-1/(2*(h^2)); end; %diagonal alt Schrodinger
for i=r+1:N+1; A(i,i)=-1/(2*(h^2)); end; %diagonal Schrodinger
```

```
for i=N+2:2*N; A(i,i)=-1/(2*(h^2)); end; %diagonal hiperbolik
for i=N+2:2*N; A(i,i+1)=-1/(4*(h^2)); end; %diagonal üst hiperbolik
for i=N+2:2*N; A(i,i-1)=-1/(4*(h^2)); end; %diagonal alt hiperbolik
'nonlocal koşulun etkisi' ;
A(1,1)=-1/(h^2);
'süreklilik koşulunun etkisi' ;
A(2*N+1,N+1)= ((tau/2)-1)*(1/(h^2));
A(2*N+1,N+2)=-tau/(h^2);
A;
B=zeros(2*N+1,2*N+1);
for i=2:r; B(i,i-1)=-complex(0,1)/tau; end; %diagonal alt Schrodinger
for i=2:r; B(i,i)=(complex(0,1)/tau)+(2/(h^2)); end; %diagonal Schrodinger
for i=r+1:N+1; B(i,i-1)=-(complex(0,1)/tau)+(1/(h^2)); end; %diagonal alt Schrodinger
for i=r+1:N+1; B(i,i)=(complex(0,1)/tau)+(1/(h^2)); end; %diagonal Schrodinger
for i=N+2:2*N; B(i,i-1)=(1/(tau^2))+(1/(2*(h^2))); end; %diagonal alt hiperbolik
for i=N+2:2*N; B(i,i)=(-2/(tau^2))+(1/(h^2)); end; %diagonal hiperbolik
for i=N+2:2*N; B(i,i+1)=(1/(tau^2))+(1/(2*(h^2))); end; %diagonal üst hiperbo-
lik
'nonlocal koşulun etkisi' ;
B(1,1)=2/(h^2);
B(1,2*N+1)=-1;
'süreklilik koşulunun etkisi' ;
B(2*N+1,N+1)=(-1/tau)+((2-tau)/(h^2));
B(2*N+1,N+2)=(1/tau)+((2*tau)/(h^2));
B; C=A;
for i=1:2*N+1; R(i,i)= 1 ; end;
'fi(j) = fi(k,j) hesaplanıyor' ;

for j=1:2*M+1;x=j*h;
fii(1,j:j) =((pi^2)-1)*exp(-1)*sin(pi*x); %nonlocal koşulun etkisi
fii(2*N+1,j:j)=(tau/2)*f(0,x)+g(0,x); %süreklilik koşulunun etkisi
for k=2:N+1; x=j*h; t=(-N+k-1)*tau; t=t-(tau/2);
fii(k,j:j) =g(t,x); end;
for k=N+2:2*N;x=j*h;t=(-N+k-1)*tau;
fii(k,j:j) =f(t,x); end;
```

```
end;
fii;
'alpha(N+1,N+1,j) ve betha(N+1,j) ler hesaplanacak' ;
alpha(2*N+1,2*N+1,1:1)= 0 ;
betha(2*N+1,1:1) = 0 ;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1)=-inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*A;
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(R*(fii(:,j:j))-(C*betha(:,j:j)));
end;
U( 2*N+1,1,M:M ) = 0;
for z = M-1:-1:1 ;
U(:,:,z:z ) = alpha(:,:,z+1:z+1)* U(:,:,z+1:z+1) + betha(:,z+1:z+1);
end;
for z = 1:M;
p(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z);
end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' ;
for q=1:M+1;
for v=1:2*N+1;
t=(-N+v-1)*tau;
x=(q-1)*h; %exact solution on grid points,
es(v,q) = exp(-t^2)*sin(pi*x);
end;
end;
% 'ERROR ANALYSIS' ;
ftf1=abs(es-p);
fmat1=abs(ftf1);
fmat2=fmat1.*fmat1*h;
fmat3=sum(fmat2,2);
fmat4=fmat3.^(1/2);
sumerror2=max(fmat4)
maxerror2=max(max(abs(es-p)))
%%%%%%%%%%%%%%ERROR ANALYSIS%%%%%%%%%%%
maxes=max(max(es)) ;
```

```
maxapp=max(max(p)) ;
maxerror=max(max(abs(es-p)));
%%%%%%%%%%%%%%GRAPH OF THE SOLUTION %%%%%%%%%%%%
figure;
surf(es) ; rotate3d ;axis tight;
title('EXACT SOLUTION');
figure ;
surf(p) ; rotate3d ;axis tight;
title('SECOND ORDER');
%%%%%%%%%%%% END GRAPH %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function estx=exact(t,x)
estx= exp(-t^2)*sin(pi*x);
function ftx=f(t,x)
ftx=(-2+4*t^2+pi^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);
function gtx=g(t,x)
gtx=(-2*complex(0,1)*t+pi^2)*exp(-t^2)*sin(pi*x);
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: KÜÇÜKÜNAL, Mehmet
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve Yeri	: 15.11.1987 / Fethiye/MUĞLA
Telefon	: 0 (555) 458 71 77
e-mail	: mehmet.kucukunal@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üni. /Matematik B.	2012
Lisans	Atatürk Üni. /Matematik B.	2010
Lise	Fethiye Y. D. A. Lisesi	2005

İş Deneyim

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Gümüşova. IMKB A. L.	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Ozdemir Y. ve **Kucukunal M.**, A Note on Nonlocal Boundary Value Problems for Hyperbolic-Schrodinger Equations , *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2012, Article ID 687321, doi: 10.1155/2012/687321, 13p. **(2012)**