T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

WEİERSTRASS PE-ELİPTİK FONKSİYONUNUN n. MERTEBEDEN TÜREVLERİ İLE ZETA-YARI ELİPTİK FONKSİYONU ARASINDAKİ BAĞINTILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PINAR ZENGİN

TEMMUZ 2012

DÜZCE

T.C

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

KABUL VE ONAY BELGESİ

Pınar ZENGİN tarafından hazırlanan, Weierstrass Pe-eliptik Fonksiyonunun n.Mertebeden Türevleri ile Zeta-yarı Eliptik Fonksiyonu Arasındaki Bağıntılar, isimli Lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19/07/2012 tarih ve 2012-237 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

(Tez Danışmanı)

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Üye	Üye
Yard.Doç.Dr. Yıldırım ÖZDEMİR	Yard.Doç.Dr. Mehmet TURAN
Düzce Üniversitesi	Atılım Üniversitesi

Tezin savunulduğu tarih: 19/07/2012

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Pınar ZENGİN'in Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Doç. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

19.07.2012

Pınar ZENGİN

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Lisans öğrenimim boyunca ve sonrasında benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet TURAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz 2012 **Pınar ZENGİN**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER

$\mathcal{L}$	: Latis
$\wp$	: Pe-fonksiyonu
ζ	: Zeta-fonksiyonu
σ	: Sigma Fonksiyonu
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
Δ	: Diskriminant

ÖZET

WEİERSTRASS PE-ELİPTİK FONKSİYONUNUN n.MERTEBEDEN TÜREVLERİ İLE ZETA-YARI ELİPTİK FONKSİYONU ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Pınar ZENGİN
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Temmuz 2012, 47 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde eliptik fonksiyonlar ve Weierstrass fonksiyonlarının kimler tarafından oluşturulduğu hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde çalışma içerisinde kullanılmış olan gerekli tanım ve temel teoremler verildi. Üçüncü bölümde Weierstrass eliptik fonksiyonları tanıtılarak aralarındaki bazı ilişkiler verildi. Dördüncü bölümde Weierstrass Pe-eliptik fonksiyonu ile Zeta-yarı eliptik fonksiyonunun n. mertebeden türevleri arasındaki bağıntılar elde edildi.

Anahtar sözcükler: Eliptik Fonksiyonlar, Weierstrass Pe-eliptik Fonksiyonu, Weierstrass Zeta-yarı Eliptik Fonksiyonu, Sigma Fonksiyonu

ABSTRACT

RELATIONS BETWEEN n.th ORDER DERIVATIVE OF WEIERSTRASS PE-ELLIPTIC FUNCTION AND ZETA-QUASI ELLIPTIC FUNCTION

Pınar ZENGİN
Duzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. İsmet YILDIZ
July 2012, 47 pages

This thesis consists of four sections. In the first section, a short literature survey is given. In the second section, the definitions and basic theorems which are used in this study are provided. In the third section, firstly Weierstrass elliptic functions are defined and then some relations between them are given. In the fourth section, relations between the n.th order derivatives of Weierstrass Pe-elliptic functions and Zeta-quasi elliptic functions are obtained.

Keywords : Elliptic Functions, Weierstrass Pe-elliptic Function, Weierstrass Zeta-quasi elliptic Function, Sigma Function

EXTENDED ABSTRACT

RELATIONS BETWEEN n.th ORDER DERIVATIVE OF WEIERSTRASS PE-ELLIPTIC FUNCTION AND ZETA-QUASI ELLIPTIC FUNCTION

Pınar ZENGİN

Düzce University

Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. İsmet YILDIZ

July 2012, 47 pages

1.INTRODUCTION

This thesis consists of four sections. In the first section, a short literature survey is given. In the second section, the definitions and basic theorems which used for this study are provided. In the third section, firstly Weierstrass elliptic functions are defined and then some relations between them are given, for example a theorem which gives the relations between derivative of $\wp(z)$ function and $\zeta(z)$ function. In the fourth section, relations between odd and even degree of the n.th order derivatives of Weierstrass Pe-elliptic functions and Zeta- quasi elliptic functions are obtained.

1 GİRİŞ

Eliptik fonksiyonlar teorisi 18. yüzyıl ve 19. yüzyılın başlarında Euler, Legendre, Gauss, Abel, Jacobi ve Lioville'in çalışmaları ile geliştirilmiştir. Abel ve Jacobi bu konuyu, 1827'de ters fonksiyonları ve kompleks düzlem teorisi çalışarak köklü bir değişime uğratmıştır. Liouville sınırlı tam fonksiyonlar üzerine teoremini de kapsayan kompleks değişkenler metodunun sistematik kullanımını ortaya çıkarmıştır. Weierstrass'ın 19. yüzyılın sonlarına doğru geliştirdiği versiyon Jacobinin teta fonksiyonları ile kurduğu yöntemden çok daha basitti. Mittag-Leffler, Neville ve Tricomi, Abel ve Jacobi teorisini geliştirmek için teta fonksiyonları yerine Weierstrass fonksiyonlarını kullanmışlardır.

Bu tezin ikinci bölümünde çalışma içerisinde kullanılmış olan gerekli tanım ve temel teoremler verildi.

Bu tezin üçüncü bölümünde Weierstrass Pe-fonksiyonu, Weierstrass Zeta-fonksiyonu ve Sigma fonksiyonu tanıtılmıştır. Aynı zamanda eliptik fonksiyonların Zeta-fonksiyonu ile oluşturulması ve Weierstrass tarzı eliptik fonksiyonların oluşturulması hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak eliptik fonksiyonların cebirsel ve geometrik özellikleri hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde üçüncü bölümde verilmiş olan $\wp(z)$ fonksiyonun birinci türevi ile $\zeta(z)$ fonksiyonu arasındaki bağıntılardan yola çıkarak, Weierstrass $\wp(z)$ fonksiyonunun yüksek mertebeden türev fonksiyonları ile $\zeta(z)$ fonksiyonu arasında bağıntılar elde edilmiştir.

2 KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1 Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (ε-Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının $\varepsilon-$komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in A$ olsun. $B(z_0, \varepsilon) \subset A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı varsa, z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (iç): Bir A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin içi denir, ve A^0 ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 (Açık Küme): Her noktası bir iç nokta olan kümeye açık küme denir. Başka bir deyişle $A^0 = A$ ise A kümesi bir açık kümedir.

Tanım 2.1.5 (Kapalı Küme): Tümleyeni açık olan kümeye kapalı küme denir.

Tanım 2.1.6 (Dış Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesinin tümleyeninin bir iç noktasına A kümesinin bir dış noktası denir. Bütün dış noktalarının oluşturduğu kümeye A kümesinin dışı denir ve $(\mathbb{C} - A)^0$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 (Yığılma Noktası): $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. α'nın her $\varepsilon > 0$ komşuluğunda A kümesine ait sonsuz eleman varsa, α'ya A kümesinin yığılma noktası veya yığılma yeri denir.

Tanım 2.1.8 (Kapanış Noktası): $A \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve bir $z \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer z noktasının her komşuluğunda A kümesinin en az bir elemanı varsa, z noktasına A kümesinin kapanış noktası denir.

Tanım 2.1.9 (Bağlantılı Küme): A, Y ve Z $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset Y \cup Z$, $A \cap Z \neq \varnothing$, $A \cap Y \neq \varnothing$ ve $A \cap Y \cap Z = \varnothing$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısızdır denir.

Tanım 2.1.10 (Basit Bağlantılı Küme): A kümesi içindeki herhangi iki noktayı birleştiren bütün yollar yine küme içinde kalıyorsa, bu A kümesine basit bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.11 (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.12 (Seri):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ifadesine seri denir. $a_1, a_2, ...$ sayılarına da serinin terimleri adı verilir.

Bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

veya

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum a_n$$

kullanılır.

Tanım 2.1.13 (Yakınsaklık): Kompleks sayıların bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geqslant n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. $\{z_0\}$ dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ veya $\lim z_n = z_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.14 (Düzgün Yakınsama): $A \subset \mathbb{C}$ ve $f_n : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve tüm $z \in A$ değerleri için

$n \geqslant n_0$ alındığında $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.15 (Mutlak Yakınsaklık): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |U_n|$ serisi yakınsak ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ serisine mutlak yakınsak seri denir.

Tanım 2.1.16 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $z \in A$ ve $|z - z_0| < \delta$ için

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.1.17 (Parçalı Süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun A'daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonuna A üzerinde parçalı süreklidir denir.

Tanım 2.1.18 (Analitik Fonksiyon): f, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. z_0 noktasının bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda diferansiyellenebilir bir f fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.18 (Kutup Noktası, Sıfır Noktaları): f fonksiyonu, $z = z_0$ noktasında analitik değil fakat

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0 \tag{1}$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı mevcut ise, $z = z_0$ noktasına f fonksiyonunun bir kutup noktası denir. (1) ifadesini gerçekleyen en küçük $n \in \mathbb{Z}^+$

sayısına z_0 kutup noktasının mertebesi denir. Mertebesi 1 olan kutup noktası basit kutup noktası adını alır.

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında analitik bir f fonksiyonu için $f(z_0) = 0$ iken

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \tag{2}$$

koşulunu sağlayan bir n pozitif tamsayısı ve $g(z_0) \neq 0$ olan, z_0 noktasında analitik bir g fonksiyonu varsa z_0 sayısına f fonksiyonunun n. mertebeden sıfırı denir. $n = 1$ durumunda z_0 noktasına f fonksiyonunun bir basit sıfırı denir.

Tanım 2.1.19 (Rezidü): f fonksiyonu, tek değerli olmak üzere C içindeki bir $z = z_0$ noktası hariç, C'nin üzerinde ve içinde analitik olsun. f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki Laurent açılımı,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} \tag{3}$$

şeklindedir.

Bu açılımdaki $\frac{1}{z-z_0}$ teriminin katsayısına f fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki rezidüsü denir ve $\text{Rez}(f, z_0)$ ile gösterilir.

(3) ifadesinden

$$\text{Rez}(f, z_0) = b_1$$

şeklinde tanımlanır. Bu rezidü ayrıca

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z)\, dz$$

integrali ile de hesaplanabilir. Bu nokta bir basit kutup ise

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots$$

açılımı var olup burdan

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$$

limiti ile de rezidü hesaplanabilir.

Tanım 2.1.20 (Periyodik fonksiyon): Kompleks düzlem üzerindeki her noktada tanımlı ve reel sayılar cisminde lineer bağımsız vektörler olan ω_1 ve ω_2 kompleks sayılar olmak üzere iki periyoda sahip olan fonksiyona çifte periyodik fonksiyon denir.

Tüm kompleks z sayıları için ω_1 ve ω_2'nin f'in periyodları olması

$$f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.21 (Meromorf Fonksiyon): Bir B bölgesinde kutup noktalarından başka singüler noktası olmayan fonksiyona meromorf fonksiyon denir.

Tanım 2.1.22 (Eliptik Fonksiyon): Açık $z-$düzleminde meromorfik, çifte periyodik fonksiyona eliptik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.23 (Modül): $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cümlesinin boş cümleden farklı ve toplama işlemine göre değişmeli her alt grubuna, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası üzerinde bir modül denir.

Tanım 2.1.24 (Latis): Sonlu düzlemde yığılma noktası bulunmayan bir modüle latis denir.

Sıfırdan farklı bir yığılma noktası olan her modül için sıfır da bir yığılma noktasıdır. O halde bir $\mathcal{L}$ latisi için sıfır bir yığılma noktası değildir. Buna göre sıfırdan farklı elemanları, mutlak değerce alttan sınırlı olan her değişmeli grup bir latis olmalıdır.

Düzlemsel latisler:

a)$\mathcal{L}_0 = \{mw : m = 0, w \neq 0, m \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{C}\}$

şeklinde tanımlı latise, sıfır boyutlu ya da sıfır latis denir.

b)$\mathcal{L}_1 = \{mw : m \neq 0, w \neq 0, m \in \mathbb{Z}, w \in \mathbb{C}\}$
olarak tanımlanan latise bir boyutlu veya basit latis denir.

c)$\mathcal{L}_2 = \left\{mw_1 + nw_2 : (m,n) \neq (0,0)\, w \neq 0, \quad m,\ n \in \mathbb{Z}, w_1, w_2 \in \mathbb{C}, \frac{w_2}{w_1} = \tau \notin \mathbb{R}\right\}$
cümlesi ile tanımlanan latise de iki boyutlu ya da çift latis denir.

Burada w_1, w_2 kompleks sayıları lineer bağımsız olup (w_1, w_2) çiftine $\mathcal{L}$ latisi için bir baz denir ve

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w_2}{w_1} = \tau\right) > 0$$

alınır.

Tanım 2.1.25 (Kalan Sınıfı): $u \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$u + \mathcal{L} = \{u + w : w \in \mathcal{L}\}$$

cümlesine, mod $\mathcal{L}$'ye göre bir kalan sınıfı denir.

Tanım 2.1.26 (Temel Bölge): Her kalan sınıfının yalnız bir tek elemanını içeren basit bağlantılı bölgeye, ilgili latisin temel bölgesi denir.

$\mathcal{L}$ latisinin kendisi de bir kalan sınıfıdır. Buna göre, $\mathcal{L}_0$ düzlemsel latisinin temel bölgesi bütün düzlem, $\mathcal{L}_1$ latisinin temel bölgesi iki paralel iki doğru ile sınırlanmış, sonsuz bir şerit ve $\mathcal{L}_2$ latisinin temel bölgesi ise, değişik geometrik şekillerde olabilir.

$$D = \{aw_1 + bw_2 : 0 \leq a,\ b < 1\}$$

paralel kenarı, bu geometrik şekillerden biridir. Bir $\mathcal{L}$ latisinin bütün $w \in \mathcal{L}$ noktaları, sıfırdan farklı bir $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı ile çarpıldığında yeni bir

$$\hat{\mathcal{L}} = \{\lambda w : w \in \mathcal{L}\}$$

latisi tanımlanabilir.

Teorem 2.1.1: Eliptik fonksiyonların toplamı, farkı, bölümü ve çarpımları da yine bir eliptik fonksiyondur.

Teorem 2.1.2: En fazla bir kutbu olan 1. dereceden bir eliptik fonksiyon sabittir.

3 MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Weierstrass Pe-Fonksiyonu ($\wp(z)$):

Eliptik fonksiyonların Weierstrass teorisini geliştirmek için, Weierstrass Pe-Fonksiyonu $\wp(z)$ veya daha net şekilde $\wp(z;\omega_1,\omega_2)$ yi ele almalıyız.

Tanım 3.1.1 :

$$\Omega_{mn} \neq 0, \Omega_{mn} = m2\omega_1 + n2\omega_2 \equiv 0(\operatorname{mod} 2\omega_1, 2\omega_2)$$

iken ve $\sum\limits_m \sum\limits_n$ toplamı $(m,n) \neq (0,0)$ için tüm pozitif ve negatif m,n tamsayıları ile alındığında, Weierstrass Pe-Fonksiyonu

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_m \sum_n \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \tag{4}$$

çifte serisi ile tanımlanır.

Konunun devamında

$$\sum_m = \sum, \quad \sum_n = \sum{}'$$

ile gösterilecektir.

Şüphesiz ki $\wp(z), \Omega_{mn}$'de 2. dereceden bir kutba sahip ve temel kısmı $\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}$ olan düzgün meromorf fonksiyondur ve $\wp(z)$ serisi yakınsaktır.

NOT: (4) ifadesinde homojenlikten her $\lambda \neq 0$ için

$$\wp(\lambda z;\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = \lambda^{-2}\wp(z;\omega_1,\omega_2)$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.1.1 : $\wp(z)$ serisi Ω_{mn} dışındaki tüm z'ler için mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: $|\Omega_{mn}| \geq 2|z|$ olmak üzere her $m,n \in \mathbb{Z}^*$ için

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right| &= \left|\frac{2\Omega_{mn}z-z^2}{\Omega_{mn}^2(z-\Omega_{mn})^2}\right| \\
&\leq \frac{\{2\left|\Omega_{mn}\right|+\left|z\right|\}\left|z\right|}{\left|\Omega_{mn}\right|^4\left|1-\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)\right|^2} \\
&\leq \frac{\left(2\left|\Omega_{mn}\right|+\frac{1}{2}\left|\Omega_{mn}\right|\right)\left|z\right|}{\left|\Omega_{mn}\right|^4\left|1-\frac{z}{\Omega_{mn}}\right|^2} \\
&\leq \frac{5\left|z\right|}{2\left|\Omega_{mn}\right|^2}\frac{1}{\left(\left|1-\left|\frac{z}{\Omega_{mn}}\right|\right|\right)^2} \\
&\leq \frac{10\left|z\right|}{\left|\Omega_{mn}\right|^2}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinden $\left|\Omega_{mn}\right| \geq 2\left|z\right|$ için

$$\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}$$

mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu yüzden $\wp(z)$ serisi Ω_{mn} dışında tüm z'ler için mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 3.1.2: $\wp$ fonksiyonu bir çift fonksiyondur.

İspat:

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z-\Omega'_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega'^2_{mn}}\right\}$$

burada

$$\Omega_{mn}=m2\omega_1+n2\omega_2, \qquad \Omega'_{mn}=-m2\omega_1-n2\omega_2=-\Omega_{mn}$$

m bir pozitif tamsayı ve n herhangi bir tamsayı ve $\sum\sum''$ toplamı hem m pozitif tamsayısı ve herhangi bir n tamsayısı için aynı anda $m=0$ ve $n=0$ olmadığı duruma genişletilebilir. Eğer yukarıdaki $\wp(z)$ ifadesindeki z

yerine $-z$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\wp(-z) &= \frac{1}{z^2}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(-z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(-z-\Omega'_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega'^2_{mn}}\right\}\\
&= \frac{1}{z^2}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z+\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z+\Omega'_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega'^2_{mn}}\right\}\\
&= \frac{1}{z^2}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z-\Omega'_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega'^2_{mn}}\right\}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}\\
&= \wp\left(z\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve yukarıda görüldüğü gibi $\frac{1}{z^2}$ terimi değişmez, sadece iki serinin yerleri değişir.

Böylece $\wp$ bir çift fonksiyondur.

NOT: $\wp(z)$ fonksiyonu tüm Ω_{mn} noktalarında sıfır rezidülü çift kutba sahiptir.

Teorem 3.1.3: $\wp(z)$ fonksiyonu $2\omega_1, 2\omega_2$ periyotlarına sahip çifte periyodik bir fonksiyondur.

İspat :

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2}+\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z-2\omega_1)^2}-\frac{1}{(2\omega_1)^2}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}
\end{aligned}$$

burada $(m,n)=(0,0)$ ve $(m,n)=(1,0)$ dışındaki tüm m ve n'ler için $\sum\sum''$ bir toplamdır.

$$\begin{aligned}
\wp(z+2\omega_1) &= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+2\omega_1)^2}-\frac{1}{(2\omega_1)^2}+\sum\sum{}''\left\{\frac{1}{(z+2\omega_1-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z^2}+\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\}\\
&= \wp(z)
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2\omega_2)^2} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\}
\end{aligned}
$$

burada $(m,n) = (0,0)$ ve $(m,n) = (1,0)$ dışındaki tüm m ve n'ler için $\sum\sum''$ bir toplamdır.

$$
\begin{aligned}
\wp(z+2\omega_2) &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2\omega_2)^2} + \sum\sum{}'' \left\{ \frac{1}{(z+2\omega_2-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= \wp(z)
\end{aligned}
$$

Sonuçlar 3.1.1

(1) $\wp(z)$ fonksiyonu bir eliptik fonksiyondur, böylece eliptik fonksiyonlar sınıfı boş değildir.

(2) Bir çifte periyodik fonksiyon eliptik olmak zorunda değildir, örneğin $e^{\wp(z)}$ çifte periyodik olduğu halde eliptik değildir. $e^{\wp(z)}$ meromorf fonksiyon olmadığından eliptik de olamaz. Bu yüzden eliptik fonksiyonlar sınıfı, çifte periyodik fonksiyonlar sınıfının özel bir alt sınıfıdır.

Teorem 3.1.4: $z = 0$'ın bir komşuluğunda

$$a_{2k} = (2k+1) \sum\sum{}' \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$$

iken

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

şeklinde bir Laurent serisine açılabilir.

İspat: $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ fonksiyonu $z = 0'$ın bir komşuluğunda analitiktir ve bu yüzden $|2\omega| = \min\left(|2\omega_1|, |2\omega_2|\right)$ için $|z| < |2\omega|$ olduğu yerde $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$

fonksiyonu z'nin kuvvet serisine dönüştürülebilir.

$$
\begin{aligned}
&\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
= \ &\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{\Omega_{mn}^2(1-\frac{z}{\Omega_{mn}})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
= \ &\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\left(1+\frac{2}{1!}\frac{z}{\Omega_{mn}}+\frac{3\cdot 2}{2!}\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)^2+\cdots\right)-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
= \ &\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{\Omega_{mn}^2}+\frac{2z}{\Omega_{mn}^3}+\frac{3z^2}{\Omega_{mn}^4}+\cdots-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\} \\
= \ &\sum\sum{}'\left\{\frac{2z}{\Omega_{mn}^3}+\frac{3z^2}{\Omega_{mn}^4}+...\right\} \\
= \ &\sum\sum{}'\left\{\sum_k (k+1)\frac{z^k}{\Omega_{mn}^{k+2}}\right\} \\
= \ &\sum_k\left\{(k+1)\sum\sum{}'\frac{1}{\Omega_{mn}^{k+2}}\right\}z^k \\
= \ &\sum_k a_k z^k
\end{aligned}
$$

Weierstrass $\wp$ fonksiyonunun bir çift fonksiyon olduğunu görmüştük. Dolayısıyla

$$a_k = (k+1)\sum\sum{}'\frac{1}{\Omega_{mn}^{k+2}}$$

ifadesinde k'nın tüm tek tamsayı değerleri için $a_k = 0$'dır.

Böylece sonuçtan yola çıkarak;

Teorem 3.1.5: Eğer $\wp(\omega_1) = e_{1,}$ $\wp(\omega_2) = e_2$ ve $\wp(\omega_1+\omega_2) = e_3$ ise e_1, e_2 ve e_3 farklı olmalıdır.

İspat:

Yarı periyotlarda çift bir eliptik fonksiyonun kutup ya da sıfırlarının mertebesi çifttir. Bu yüzden $f(z) = \wp(z) - e_1$ çift fonksiyonu ikinci dereceden bir sıfıra sahiptir. Eğer $e_1 = e_2$ ise f'nin bir latis içinde 4 sıfıra sahip olması gerekir ki bu da bir çelişkidir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım 3.1.2 ($\wp(z)'$nin türevleri): $\sum\sum$ toplamı tüm pozitif ve negatif tamsayı değerleri ve m ve n'nin sıfır değerlerine genişletildiğinde $\wp(z)$'nin türevi

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum\sum{}' \frac{2}{(z-\Omega_{mn})^3} = -2\sum\sum \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^3}$$

ile tanımlanır.

$\wp(z)$ serisi mutlak ve düzgün yakınsak olduğu ve $\wp(z)$ serisi analitik olduğu için, $\wp'(z)$ serisi de aynı zamanda mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Sonuçlar 3.1.2

1) $\wp'(z)$ fonksiyonu her Ω_{mn} noktasında sıfır rezidülü üçüncü dereceden kutba sahiptir.

2) $\wp(z)$ fonksiyonunda homojenlikten her $\lambda \neq 0$ için

$$\wp'(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-3}\wp(z; \omega_1, \omega_2)$$

olduğu açıktır.

Özellikler 3.1.1

1) $\wp(z)$'nin türevi olan $\wp'(z)$ fonksiyonu $\wp(z)$ ile aynı periyotlara sahip, bir tek eliptik fonksiyondur.

2) Yarı periyotlar $(\omega_1, \omega_1 + \omega_2$ ve $\omega_2)$ $\wp'(z)$'nin sıfırlarıdır.

3) $\wp'(z)$'nin kutuplarının toplamı sıfıra eşittir veya daha doğrusu 0'a denktir.

4) Eğer α_1 ve α_2 noktaları $\wp(z) - C$ 'nin iki sıfırı ise bu durumda $\alpha_1 \equiv -\alpha_2 (\bmod\, 2\omega_1, 2\omega_2)$.

5) $\wp(z_1) = \wp(z_2) \Longleftrightarrow z_1 \equiv z_2 (2\omega_1, 2\omega_2)$

Teorem 3.1.6: $\wp(z)$ veya $\wp'(z)$'nin Ω_{mn} dışında kutupları yoktur.

İspat: $\wp(z)$ ve $\wp'(z)$'nin tanımlarından gelir.

Teorem 3.1.7: $z = 0$ komşuluğunda, $a_{2k} = (2k+1)\sum\sum' \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$ iken $\wp'(z)$'nin Laurent serisi açılımı

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \cdots$$

şeklindedir.

İspat: Teorem (3.1.4)'ten

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_{2k} z^{(2k-1)}$$

3.2 Weierstrass Zeta-Fonksiyonu($\zeta(z)$)

Tanım 3.2.1: Zeta fonksiyonu aşağıdaki çifte seri ile tanımlanır.

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \qquad (5)$$

Burada $\Omega_{mn} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ ve $(m,n) \neq (0,0)$ şeklinde tamsayılardır. $\sum\sum'$ toplamı $(m,n) \neq (0,0)$ olduğu tüm tamsayı değerleri için tanımlıdır.

Açıklama 3.2.1: Ω_{mn}'lerin $\zeta(z)$'nin basit kutupları olduğu açıktır ve bu nedenle fonksiyon meromorftur.

Teorem 3.2.1:

$$\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\}$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: $|\Omega_{mn}| > 2|z|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z - \Omega_{mn}} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right| &= \left| \frac{z^2}{\Omega_{mn}^2 (z - \Omega_{mn})} \right| \\ &\leq \frac{|z|^2}{|\Omega_{mn}|^3 \left(1 - \frac{|z|}{|\Omega_{mn}|}\right)} \\ &< \frac{2|z|^2}{|\Omega_{mn}|^3} \end{aligned}$$

olduğu için (5) ile verilen seri mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 3.2.2: $\zeta(z)$ fonksiyonu bir tek fonksiyondur.

İspat:

$$\begin{aligned}
\zeta(-z) &= -\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(-z-\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} - \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \\
&= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z+\Omega_{mn})} - \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \right] \\
&= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{-m-n})} + \frac{1}{\Omega_{-m-n}} + \frac{z}{\Omega_{-m-n}^2} \right\} \right] \\
&= -\left[\frac{1}{z} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} \right] \\
&= -\zeta(z)
\end{aligned}$$

Burada $\{\Omega_{mn}\}$ ve $\{\Omega_{-m-n}\}$ kümelerinin denk olduğuna dikkat edelim.

Teorem 3.2.3: $\wp(z)$ ve $\zeta(z)$ fonksiyonları arasında $\wp(z) = -\zeta'(z)$ eşitliği vardır.

İspat: $\zeta(z)$ serisi, analitik fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisi olduğundan her terimi ayrı ayrı türevlenebilir.

Böylece,

$$\zeta'(z) = -\left[\frac{1}{z^2} + \sum\sum{}' \frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega_{mn}^2} \right] = -\wp(z)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4:

$$a_k = \sum\sum{}' (k+1)\Omega_{mn}^{-(k+2)}$$

olmak üzere, $\zeta(z)$ fonksiyonu

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{3} z^3 - \frac{a_4}{5} z^5 - \cdots - \frac{a_{2n}}{2n+1} z^{2n+1} - \cdots$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir.

İspat:

$$\frac{1}{(z-\Omega_{mn})}=-\frac{1}{\Omega_{mn}}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\Omega_{mn}}}\right)=-\frac{1}{\Omega_{mn}}\left(1+\frac{z}{\Omega_{mn}}+\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)^2+\cdots\right)$$

bilgisini kullanarak

$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{z}+\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})}+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z}+\sum\sum{}'\left\{-\frac{1}{\Omega_{mn}}\left(1+\frac{z}{\Omega_{mn}}+\left(\frac{z}{\Omega_{mn}}\right)^2+\cdots\right)+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z}+\sum\sum{}'\left\{-\frac{1}{\Omega_{mn}}-\frac{z}{\Omega_{mn}^2}-\frac{z^2}{\Omega_{mn}^3}+\cdots+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z}-\sum\sum{}'\left\{\frac{z^2}{(\Omega_{mn}^3)}+\frac{z^3}{\Omega_{mn}^4}+\cdots\right\}\\
&= \frac{1}{z}-z^2\left\{\sum\sum{}'\Omega_{mn}^{-3}\right\}-z^3\left\{\sum\sum{}'\Omega_{mn}^{-4}\right\}-\cdots
\end{aligned}$$

$\zeta(z)$ tek fonksiyon olduğundan her $k\in\mathbb{Z}^+$ için z^{2k} terimlerinin katsayıları sıfır olacaktır.

Böylece

$$a_k=\sum\sum{}'(k+1)\Omega_{mn}^{-(k+2)}, k=2,4,6,...$$

olduğu yerde

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\frac{a_2}{3}z^3-\frac{a_4}{5}z^5-\cdots \tag{6}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5: (5) ifadesinde homojenlikten her $\lambda\neq 0$ için

$$\zeta(\lambda z;\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)=\lambda^{-1}\zeta(z;\omega_1,\omega_2)$$

olduğu açıktır.

İspat: Bu $\zeta(z)$'nin tanımından doğrudan elde edilir. $\zeta(z)$ fonksiyonu (-1). dereceden homojen bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.6: Tanımlı oldukları yerlerde

$$\zeta\left(z+2\omega_1\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_1, \quad \zeta\left(z+2\omega_2\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_2$$

eşitlikleri vardır.

Burada

$$\eta_1=\zeta\left(\omega_1\right) \text{ ve } \eta_2=\zeta\left(\omega_2\right)$$

İspat:

$$\zeta'\left(z+2\omega_1\right)-\ \zeta'\left(z\right)=-\wp\left(z+2\omega_1\right)+\wp\left(z\right)=0$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla C sabit olmak üzere $\zeta\left(z+2\omega_1\right)=\ \zeta(z)+C$ olur.

Buradan $z=-\omega_1$ için

$$C=\zeta\left(\omega_1\right)-\ \zeta(-\omega_1)=2\zeta\left(\omega_1\right)$$

ve böylece

$$\zeta\left(z+2\omega_1\right)=\zeta\left(z\right)+2\zeta\left(\omega_1\right)$$

elde edilir.

Benzer şeklide

$$\zeta\left(z+2\omega_2\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_2 \text{ ve } \eta_2=\ \zeta\left(\omega_2\right)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2.1: Teorem 3.2.6'nın tekrar tekrar uygulanması ile

$$\zeta\left(z+2m\omega_1+2n\omega_2\right)=\zeta\left(z\right)+2m\eta_1+2n\eta_2 \tag{7}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.7: η_1 ve η_2 sabitleri

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi}{2}i$$

şeklinde Legendre bağıntısı ile birbirlerine bağlıdır.

Rezidü teoremi ile

$\int\limits_{(z_0)} \zeta(z)dz = 2\pi i\ \times\zeta(z)$'nin (z_0) latisinde bulunan Ω_{mn}'deki rezidüsü

$$2\pi i = \int\limits_{(z_0)} \zeta(z)dz$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int\limits_{(z_0)}^{z_0+2\omega_1} + \int\limits_{(z_0+2\omega_1)}^{z_0+2\omega_1+2\omega_2} + \int\limits_{(z_0+2\omega_1+2\omega_2)}^{z_0+2\omega_2} + \int\limits_{(z+2\omega_2)}^{z_0}\right]\zeta(z)dz \\
&= \int\limits_{(z_0)}^{z_0+2\omega_2} \{\zeta(z+2\omega_1)-\zeta(z)\}\,dz - \int\limits_{(z_0)}^{z_0+2\omega_1} \{\zeta(z+2\omega_2)-\zeta(z)\}\,dz \\
&= 4\eta_1\omega_2 - 4\eta_2\omega_1
\end{aligned}$$

Buradan

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi}{2}i$$

bulunur.

Açıklama 3.2.2

Teorem 3.2.6'dan $\zeta(z)$ 'nin çifte periyodik olmadığı açıktır ve bu sebeple eliptik bir fonksiyon değildir. Bu aynı zamanda 1. dereceden sabit olmayan bir eliptik fonksiyon olmadığı için beklenen bir sonuçtur. Legendre bağıntısından, η_1 ve η_2'nin aynı anda sıfır olamayacakları açıktır. Ama $\zeta(z)$ fonksiyonu periyodikliğe bağlı olarak davranışında bazı düzenlere sahiptir: Ω_{mn} arttıkça z gibi bir toplama sabitine bağlı olarak fonksiyon değeri değişir. Fonksiyonların bu özelliği genelde yarı (veya pseudo) toplam periyodikliği olarak bilinir.

3.3 Eliptik Fonksiyonların $\zeta(z)$ Cinsinden İfade Edilmesi:

Teorem 3.3.1: f eliptik fonksiyonunun sadece $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$ noktalarında basit kutuplarının olduğu bir latis içinde bu kutuplardaki rezidüleri sırasıyla $A_{1,}A_2, ..., A_s$ olmak üzere A_0'ın sabit olduğu yerde

$$f(z) = A_0 + \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r)$$

İspat: f eliptik bir fonksiyon olduğundan,

$$\sum_{r=1}^{s} A_r = 0 \tag{8}$$

eşitliği vardır.

$$\phi(z) = \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r)$$

fonksiyonunu ele alalım.

ϕ fonksiyonu sonlu sayıda meromorf fonksiyonun toplamı olduğundan meromorftur.

(8) eşitliği yardımıyla

$$\phi(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2 - \beta_r)$$

Yardımcı Teorem 3.2.1'den faydalanarak

$$\begin{aligned} \phi(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) &= \sum_{r=1}^{s} A_r \{\zeta(z - \beta_r) + 2m\eta_1 + 2n\eta_2\} \\ &= \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r) \end{aligned}$$

Dolayısıyla ϕ fonksiyonu çifte periyodik bir fonksiyondur ve açıkça eliptiktir. Böylece ϕ ve f fonksiyonları, kutuplarda bağlantılı rezidüleri ile aynı kutuplara sahip iki eliptik fonksiyondur. Böylece A_0'ın sabit olduğu yerde

$$f(z) = A_0 + \phi(z) = A_0 + \sum_{r=1}^{s} A_r \zeta(z - \beta_r)$$

denklemine sahibiz.

Teorem 3.3.2: ζ fonksiyonu yarı cebirsel toplam teoremini sağlar:

$$\zeta(z_1+z_2)-\ \zeta(z_1)-\ \zeta(z_2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta''(z_2)-\zeta''(z_1)}{\zeta'(z_2)-\zeta'(z_1)}\right\}$$

İspat:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)}$$

fonksiyonu $z_1, -z_1, 0$ noktalarında kutbu olan ve bu noktalarda sırasıyla 1, 1, -2 rezidülerine sahip bir eliptik fonksiyondur. Eğer $z_1, -z_1, 0$ noktaları bir latisin içinde değillerse latis içinde o noktaların denk noktalarını alabiliriz. Teorem 3.3.1 ile

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)}=A_0+\zeta(z-z_1)+\zeta(z+z_1)-2\zeta(z) \tag{9}$$

elde ederiz.

z yerine $-z$ yazarak

$$-\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)}=A_0-\zeta(z+z_1)-\zeta(z-z_1)+2\zeta(z)$$

veya

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z_1)}=-A_0+\zeta(z+z_1)+\zeta(z-z_1)-2\zeta(z) \tag{10}$$

elde ederiz.

(9) ve (10)'den açıkça $A_0=0$'dır. (9) eşitliğinde $z=z_2$ için

$$\frac{\wp'(z_2)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}=\zeta(z_2+z_1)+\zeta(z_2-z_1)-2\zeta(z_2)$$

ve buradan z_1 ve z_2'nin yerleri değiştirilerek

$$\frac{\wp'(z_1)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}=\zeta(z_1+z_2)+\zeta(z_1-z_2)-2\zeta(z_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right]=\zeta(z_1+z_2)-\ \zeta(z_1)-\ \zeta(z_2) \tag{11}$$

bulunur.

$$\zeta'(z)=-\wp(z)$$

sonucunu kullanarak

$$\zeta(z_1+z_2)-\ \zeta(z_1)-\ \zeta(z_2)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\zeta''(z_2)-\zeta''(z_1)}{\zeta'(z_2)-\zeta'(z_1)}\right\}$$

olduğunu görürüz.

Açıklama 3.3.1: $\zeta(z)$ ve $\zeta'(z)$ hiçbir cebirsel ilişkiyi sağlamadığından yukarıda elde ettiğimiz sonuç $\zeta'(z_1+z_2)$, $\zeta(z_1)$ ve $\zeta(z_2)$ arasında bir cebirsel bağlantıya yol açmaz. Bu yüzden bu teorem yarı cebirsel toplam teoremi olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 3.3.1: $\wp$ fonksiyonu aşağıdaki şekillerdeki toplama teoremlerini sağlar.

$$\wp(z_1+z_2)=\wp(z_1)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{\frac{\wp'(z_1)-\wp'(z_2)}{\wp(z_1)-\wp(z_2)}\right\}$$

$$\wp(z_1+z_2)=\wp(z_2)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_2}\left\{\frac{\wp'(z_2)-\wp'(z_1)}{\wp(z_2)-\wp(z_1)}\right\}$$

İspat: (11) eşitliğinin sırasıyla z_1 ve z_2'ye göre türevleri alınarak bu yardımcı teorem görülür.

Teorem 3.3.3: Herhangi bir f eliptik fonksiyonu, $\sum$ bir latis içindeki tüm farklı β_r kutupları için genelleştirilmiş bir toplam ve C bir sabit ve β_r kutbundaki temel kısmı

$$\frac{A_r}{z-\beta_r}-\frac{1!A_r'}{(z-\beta_r)^2}+\frac{2!A_r''}{(z-\beta_r)^3}-\cdots+\frac{(-1)^{k_r-1}(k_r-1)!A_r^{k_r-1}}{(z-\beta_r)^{k_r}}$$

olmak üzere;

$$f(z) = C + \sum_r \left\{ A_r \zeta(z-\beta_r) + A'_r \zeta'(z-\beta_r) + \cdots + A_r^{k_r-1} \zeta^{k_r-1}(z-\beta_r) \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat: ϕ fonksiyonu

$$\phi(z) = \sum_r \left\{ A_r \zeta(z-\beta_r) + A'_r \zeta'(z-\beta_r) + \cdots + A_r^{k_r-1} \zeta^{k_r-1}(z-\beta_r) \right\}$$

şeklinde verilmiş olsun.

ϕ sonlu sayıda meromorf fonksiyonun toplamı olduğundan meromorftur. Aynı zamanda

$$\phi(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \phi(z)$$

olduğu için $\phi(z)$ fonksiyonu çifte periyodik ve dolayısıyla eliptiktir.

3.4 Sigma Fonksiyonu ($\sigma(z)$)

Tanım 3.4.1:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1$$

sağlanması şartı ile

$$\frac{d}{dz}[\log \sigma(z)] = \zeta(z)$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Teorem 3.4.1: $\sigma(z)$ fonksiyonu

$$\sigma(z) = z \prod_{m,n}{}' \left\{ \left(1 - \frac{z}{\Omega_{mn}}\right) e^{\left(\frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega_{mn}^2}\right)} \right\}$$

formunda sonsuz sayıda çarpan ile ifade edilebilir. Burada çarpım m ve n'lerin aynı anda sıfır olmadıkları tüm pozitif ve negatif sayılara genişletilebilir.

İspat: $\sigma(z)$'nin tanımından elde edilen

$$\frac{d}{dz}\{\log \sigma(z)\} - \frac{1}{z} = \zeta(z) - \frac{1}{z}$$

eşitliğinin iki tarafının integralini alarak

$$\log \frac{\sigma(z)}{Az} = \int_0^z \left\{ \zeta(z) - \frac{1}{z} \right\} dz$$

elde ederiz. $\zeta(z)$'nin tanımından

$$\begin{aligned}
\log \frac{\sigma(z)}{Az} &= \int_0^z \sum \sum{}' \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} dz \\
&= \sum \sum{}' \int_0^z \left\{ \frac{1}{(z-\Omega_{mn})} + \frac{1}{\Omega_{mn}} + \frac{z}{\Omega_{mn}^2} \right\} dz \\
&= \sum \sum{}' \left\{ \log \left(\frac{z-\Omega_{mn}}{-\Omega_{mn}} \right) + \frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\Omega_{mn}^2} \right\}
\end{aligned}$$

burada A integral sabitidir ve $\zeta(z) - \frac{1}{z}$, $z = 0$ komşuluğunda analitiktir ve her bir terimin integrali alınarak serinin, analitik fonksiyonların düzgün yakınsak serisi olduğu görülebilir.

Böylece A bir sabit iken

$$\sigma(z) = Az \prod_{m,n}{}' \left\{ \left(1 - \frac{z}{\Omega_{mn}} \right) e^{\left(\frac{z}{\Omega_{mn}} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\Omega_{mn}^2} \right)} \right\}$$

olur.

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1$$

olduğundan $A = 1$'dir.

Açıklama 3.4.1: $\sigma(z)$ fonksiyonu Ω_{mn}'de sıfırları olan integral fonksiyonudur. Bu yüzden eliptik fonksiyon değildir. Bazı yazarlar $\sigma(z)$'yi Teorem 3.4.1 ile tanımlarlar.

Yardımcı Teorem 3.4.1: σ fonksiyonunda homojenlikten her $\lambda \neq 0$ için

$$\sigma(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda\sigma(z; \omega_1, \omega_2)$$

olduğu açıktır.

İspat: Bu Teorem 3.4.1 ile doğrudan ispatlanır. $\sigma(z)$ fonksiyonu birinci dereceden homojen bir fonksiyondur.

Teorem 3.4.2: $\sigma(z)$ fonksiyonu $z=0$ komşuluğunda

$$b_1 = -\frac{a_2}{12}, b_2 = -\frac{a_4}{30}, \cdots$$

olmak üzere

$$\sigma(z) = z + b_1 z^5 + b_2 z^7 + \cdots + b_n z^{2n+3} + \cdots$$

şeklinde kuvvet serisine açılır.

İspat : $\sigma(z)$'nin tanımından

$$\log\frac{\sigma(z)}{z} = \int_0^z \left\{\zeta(z) - \frac{1}{z}\right\} dz$$

olduğunu biliyoruz. $\zeta(z)$'nin (6) ile gösterilen seri açılımından

$$\begin{aligned}
\log\frac{\sigma(z)}{z} &= \int_0^z \left\{-a_2\frac{z^3}{3} - a_4\frac{z^5}{5} - \cdots - a_{2n}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} - \cdots\right\} dz \\
&= -\frac{a_2}{12}z^4 - \frac{a_4}{30}z^6 - \cdots = -z^4\left(\frac{a_2}{12} + \frac{a_4}{30}z^2 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$P(z) = \frac{a_2}{12} + \frac{a_4}{30}z^2 + \cdots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sigma(z) &= ze^{-z^4 P(z)} \\
&= z\left\{1 - z^4 P(z) + \frac{z^8}{2!}P^2(z) + \cdots\right\} \\
&= z - \frac{a_2}{12}z^5 - \frac{a_4}{30}z^7 - \cdots
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$b_1 = -\frac{a_2}{12}, \quad b_2 = -\frac{a_4}{30}$$

olmak üzere

$$\sigma(z) = z + b_1 z^5 + b_2 z^7 + \cdots + b_n z^{2n+3} + \cdots$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.4.2: $\sigma(z)$ tek fonksiyondur.

İspat: Kuvvet serisi açılımında z yerine $-z$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
\sigma(-z) &= (-z) + b_1(-z)^5 + b_2(-z)^7 + \cdots + b_n(-z)^{2n+3} + \cdots \\
&= -\left(z + b_1 z^5 + b_2 z^7 + \cdots + b_n z^{2n+3} + \cdots\right) \\
&= -\sigma(z)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.3: σ ve $\wp$ fonksiyonları arasında

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\{\log\sigma(z)\} = \frac{\sigma'^2(z) - \sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}$$

bağıntısı vardır.

İspat:

$$\wp(z) = -\frac{d}{dz}\zeta(z)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= -\frac{d^2}{dz^2}\{\log\sigma(z)\} \\
&= \frac{\sigma'^2(z) - \sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.4.4: $2\eta_{mn} = 2m\eta_1 + 2n\eta_2$ olmak üzere

$$\sigma(z + \Omega_{mn}) = (-1)^{m+n+mn} e^{2\eta_{mn}\left(z + \frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma(z)$$

eşitliği vardır.

İspat: Teorem 3.2.6'dan elde edilen

$$\zeta\left(z+\Omega_{mn}\right)=\zeta\left(z\right)+2\eta_{mn}$$

veya

$$\frac{\sigma'\left(z+\Omega_{mn}\right)}{\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)}=\frac{\sigma'\left(z\right)}{\sigma\left(z\right)}+2\eta_{mn}$$

eşitliğinin iki tarafının da integrali alınarak, A bir integral sabiti olmak üzere,

$$\log\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right)=\log\sigma\left(z\right)+2\eta_{mn}z+A$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right) &= e^{2\eta_{mn}z+A}\sigma\left(z\right)\\ &= e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)+A'}\sigma\left(z\right)\\ &= Ce^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma\left(z\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A'=A-\eta_{mn}\Omega_{mn}$ ve $C=e^{A'}$birer sabittir. C sabiti aşağıdaki şekillerde elde edilebilir:

Durum 1:

m ve n aynı anda çift olmadığı zaman $\frac{\Omega_{mn}}{2}$ bir periyot değildir.

Son elde edilen denklemde $z=-\frac{\Omega_{mn}}{2}$ yazıldığında

$$C=\frac{\sigma\left(\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}{\sigma\left(-\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}=-1$$

elde edilir.

Durum 2:

m ve n aynı anda çift olduğu zaman $\frac{\Omega_{mn}}{2}$ sayısı $\sigma\left(z\right)$'nin bir sıfırıdır.

Böylece L'Hospital Kuralı ile

$$C=\frac{\sigma'\left(\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}{\sigma'\left(-\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}=+1$$

elde edilir.

σ fonksiyonunun Ω_{mn}'de basit sıfıra sahip olmasına rağmen, σ' fonksiyonu bir çift fonksiyondur ve $\frac{\Omega_{mn}}{2}$'de hiç sıfırı yoktur. Bu yüzden

$$\sigma\left(z+\Omega_{mn}\right) = (-1)^{m+n+mn}\, e^{2\eta_{mn}\left(z+\frac{\Omega_{mn}}{2}\right)}\sigma\left(z\right)$$

Yardımcı Teorem 3.4.3: Teorem 3.4.4'ten aşağıdaki özel sonuçlar elde edilir.

$$\sigma\left(z+2\omega_1\right) = -e^{2\eta_1\left(z+\omega_1\right)}\sigma\left(z\right),$$

$$\sigma\left(z+2\omega_2\right) = -e^{2\eta_2\left(z+\omega_2\right)}\sigma\left(z\right),$$

$$\sigma\left(z+2\omega_3\right) = -e^{2\eta_3\left(z+\omega_3\right)}\sigma\left(z\right).$$

Teorem 3.4.5: (Legendre Bağıntısı):

$$\omega_1, \omega_2 \Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$$

için $\mathcal{L}$ latisinin bazı olsun. Bu durumda zeta fonksiyonunun $\eta_j = \eta\left(\omega_j\right)$ yarı periyotları

$$\omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1 = 2\pi i$$

ifadesini sağlar.

İspat: 0'ı F'in bir iç noktası olarak kabul edelim. Bu durumda $\zeta\left(z\right)$ F içerisinde 1. dereceden kutba sahiptir. Bu yüzden rezidü teoreminden

$$2\pi i = \int\limits_{\partial F} \zeta\left(z\right) dz$$

bulunur.

Zeta fonksiyonunun dönüşüm formülünü kullanarak ve zıt köşeler üzerindeki integralleri birbirine ekleyerek Teorem 3.4.5'i ispatlayan

$$-\int\limits_{\gamma+\omega_1}^{\gamma} \eta_2 dz - \int\limits_{\gamma}^{\gamma+\omega_2} \eta_1 dz = \omega_1\eta_2 - \omega_2\eta_1$$

elde edilir.

3.5 Weierstrass Tarzı Eliptik Fonksiyonların Oluşturulması:

Sabit olmayan bir f eliptik fonksiyonu, modul $\mathcal{L}$'de mertebesi 0'dan farklı olan sonlu sayıda noktaya sahiptir. Bu noktalar mertebeleri $m_1, ..., m_s$ olan $a_1, ..., a_s$ noktaları olsun.

$$\sum_{j=1}^{s} m_j = 0 \quad ve \quad \sum_{j=1}^{s} m_j a_j \in \mathcal{L} \tag{12}$$

olduğu bilinmektedir.

Aksine, (12)'yi sağlayan $a_j \in \mathbb{C}$ ve $m_j \in \mathbb{Z}$ için

$$g(z) = \prod_{j=1}^{s} \left(e^{z a_j^*} \sigma (z - a_j) \right)^{m_j} \tag{13}$$

f ile aynı derecelere, sıfırlara ve kutuplara sahip bir eliptik fonksiyon tanımlanır. Bunu görmek için $\omega \in \mathcal{L}$ için σ fonksiyonunun dönüşüm formüllerini kullanacağız.

$$g(z + \omega) = \Psi(\omega)^{\sum m_j} e^{\omega (\sum m_j a_j)^* - \omega^* (\sum m_j a_j)} g(z)$$

Bu noktada, e'nin kuvveti, Legendre bağıntısı ve $\sum m_j a_j \in \mathcal{L}$ bağıntısına göre $2\pi i$'nin bir çarpanıdır. Dahası kabule göre $\sum m_j = 0$'dır. Böylece $g(z + \omega) = g(z)$'dir. Bu yüzden g eliptiktir.

Teorem 2.1.2'den $\frac{f}{g}$ fonksiyonu sabit olmalıdır ve aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

Teorem 3.5.1(Abel-Jacobi)

$a_1, ..., a_s \in \mathbb{C}$ ve $m_1, ..., m_s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ olsun. Öyle bir eliptik f fonksiyonu vardır ki ancak ve ancak (12) şartı sağlandığında a_i'ler mod $\mathcal{L}$'de f 'in derecesinin sıfırdan farklı ve m_i'ye eşit olduğu noktalardır. Bu şekilde sabit bir çarpana sahip olan her fonksiyon (13)'teki çarpıma eşittir.

Örnek olarak, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$ için $\wp(z) - \wp(a)$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $a_1 = a$, $a_2 = -a$, $a_3 = 0$; $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = -2$'dir. Bu yüzden Teorem

3.5.1 ve C sabiti ile

$$\wp(z) - \wp(a) = C\frac{\sigma(z-a)\,\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)}$$

olur. C'yi bulmak için, denklemin her iki tarafını da $\sigma(z)^2$ ile çarpalım ve $z \to 0$ için limit alalım. Bu $C = \frac{-1}{\sigma^2(a)}$ olduğunu gösterir ve sıradaki teoremin ilk iddiasını ispatlar. İkinci kısmı ispatlamak için ilk formülü $z-a$ 'ya bölelim ve $a \to z$ için limit alalım.

Teorem 3.5.2

(i) $a \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{L}$ için

$$\wp(z) - \wp(a) = -\frac{\sigma(z-a)\,\sigma(z+a)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(a)}$$

(ii)

$$\sigma'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma^2(z)}$$

Açıkça, bir latise bağlı eliptik fonksiyonların kümesi toplama ve çarpmaya göre bir cisimdir. Konunun devamında bunu $\mathbb{C}_{\mathcal{L}}$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.5.3

$\mathbb{C}_{\mathcal{L}}$, $\mathbb{C}$ üzerinde $\wp$ ve $\wp'$: $\mathbb{C}_{\mathcal{L}} = \mathbb{C}(\wp, \wp')$ ile üretilir.

İspat: İlk olarak her eliptik fonksiyonu, $\wp$'nin rasyonel fonksiyonu olarak göstereceğiz. Bu nedenle aşağıdaki ifadeye ihtiyacımız olacak.

Lemma 3.5.1: f , $\mathbb{C}_{\mathcal{L}} \backslash \mathbb{C}$ içinden bir çift fonksiyon olsun ve $2a \in \mathcal{L}$ olacak şekilde $a \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda a'da f 'in derecesi 2 ile tam bölünür.

İspat:

f 'in a'da Taylor açılımını yazarsak

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots , \; c_m \neq 0$$

$$f(z) = f(-z+2a) = f(a + (a-z)) = (-1)^m c_m (z-a)^m + \cdots$$

buluruz.

Bu yüzden m çift olmalıdır.

Lemma 3.5.2: $\wp'(z)$ 3.mertebedendir ve

$$w_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad w_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad w_3 = \frac{\omega_2}{2}$$

yarı periyotlarında 3 tane basit sıfırı vardır.

$a \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{L}$ için $\wp(z) - \wp(a)$ fonksiyonu, $2a \notin \mathcal{L}$ ise, her bir $\pm a$ noktasında basit sıfırı; $2a \in \mathcal{L}$ ise a'da 2. dereceden sıfırı vardır.

İspat: $\wp'$ tek fonksiyon olduğundan Lemma 3.5.1'in ispatındaki Taylor açılımını kullanarak $\wp'(z)$'nin sıfırlarının yarı periyotlar olduğu sonucuna varırız. Dahası $\wp'$ derecesi 3 olduğu için bunlar $\mathcal{L}$ moduna göre sıfırlardır. Lemma 3.5.2'nin $\wp$ hakkındaki iddiası $\wp$'nin derecesi 2 olduğu için görülür.

Teorem 3.5.3'ün ispatı:

İlk önce f derecesi $m_j \neq 0$ olan, $\bmod \mathcal{L}$'e göre tüm noktaları $a_1, ..., a_s$ olan, sabit olmayan çift eliptik bir fonksiyon olsun. $2a_j \in \mathcal{L}$ olduğunda, $m'_j = m_j$ ve $2a_j \in \mathcal{L}$ olduğunda $m'_j = \frac{m_j}{2}$ olarak alalım. Bu durumda Lemma 3.5.2 ile

$$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{s} (\wp(z) - \wp(a_j))^{-m'_j}$$

fonksiyonunu $\mathcal{L}$ içinde sadece sıfırlara ya da kutuplara sahiptir ve g sabittir, bu yüzden f, $\wp'$nin rasyonel bir fonksiyonudur.

Şimdi, f herhangi bir eliptik fonksiyon olsun. Biz f fonksiyonunu tek ve çift fonksiyonların toplamı olarak yazalım

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2\wp'(z)}\wp'(z)$$

bu 1 ve $\wp'$ katsayıları ile 1 ve $\wp'$ nin lineer kombinasyonlarından oluşan, $\wp$ içindeki çift ve dolayısıyla rasyonel fonksiyonlardır.

3.6 Eliptik Fonksiyonların Cebirsel ve Geometrik Özellikleri:

$\mathcal{L}$ latisinin Eisenstein serisi

$$G_m(\mathcal{L}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}}{}' \frac{1}{\omega^{2m}}, \qquad m \geqslant 2$$

mutlak yakınsaktır.

$$g_2 = g_2(\mathcal{L}) = 60G_2(\mathcal{L})$$

$$g_3 = g_3(\mathcal{L}) = 140G_3(\mathcal{L})$$

Teorem 3.6.1:

$\wp$ ve $\wp'$ fonksiyonları

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

cebirsel denklemini sağlar.

$$P(X) = 4X^3 - g_2X - g_3$$

polinomu ω_j yarı periyodu ile üç ikili farklı sıfıra sahiptir.

$$e_j = \wp(w_j), \qquad j = 1, 2, 3$$

Diskriminantı

$$\Delta(\mathcal{L}) = 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2$$

Tüm latisler için

$$\Delta(\mathcal{L}) \neq 0$$

ve

$$\Delta(\mathcal{L}) = g_2^3 - 27g_3^2$$

elde edilir.

İspat: Teorem 3.1.4'ten

$z = 0$'ın bir komşuluğunda

$$a_{2k} = (2k+1) \sum \sum{}' \Omega_{mn}^{-(2k+2)}$$

iken

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

şeklinde bir Laurent serisine açılabildiğini biliyoruz.

$$g(z) = \wp'^2 - \left(4\wp^3 - g_2\wp - g_3\right)$$

fonksiyonunu Laurent açılımı cinsinden yazarsak, g'nin hiç kutbu olmadığını ve $g(0) = 0$ olduğunu görürüz. Böylece ilk iddiamızı ispatlarız, $g = 0$'dır. Kalan iddiaları ispatlamak için, her ω_i yarı periyodu için Lemma 3.5.2'ye göre

$$\wp'(\omega_i) = 0$$

olduğu için $4X^3 - g_2X - g_3$ polinomunun sıfırları $j = 1, 2, 3$ için $\wp(\omega_j)$'dir. Dahası bunlar $\wp'(\omega_i) = 0$ olduğundan farklı ikilidir ve $\wp$, ω_j'de 2. dereceye sahiptir.

Bu Teorem 3.6.1'in ispatını tamamlar.

Teorem 3.6.1, $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ ve

$$E = \left\{(t : x : y) \in P^2(\mathbb{C}) \,\middle|\, y^2t = 4x^3 - g_2xt^2 - g_3t^3\right\}$$

izdüşümsel eğrisi arasında

$$z+\mathcal{L}\longmapsto Q(z)=\begin{cases}(1:\wp(z):\wp'(z)) & z\notin\mathcal{L}\text{ iken}\\ \left(\frac{1}{\wp'(z)}:\frac{\wp(z)}{\wp'(z)}:1\right) & \wp'(z)\neq 0\text{ iken}\end{cases}$$

şeklinde bir birebir örten eşlemeye sebep olur.

Tanımdan

$$Q(z_1)+Q(z_2)=Q(z_1+z_2)$$

E, sonsuzdaki $Q(0)=(0:0:1)$ noktası ile nötr eleman olarak bir grup yapısı ile verilmiştir. Bu grup yapısının cebirsel özellikleri elde edeceğimiz $\wp$'nin toplam formülünden elde edilmektedir.

Toplam formülünün analitik kaynağı Teorem 3.5.2'deki ilk formüldür.

$$\wp(z)-\wp(z')=-\frac{\sigma(z+z')\,\sigma(z-z')}{\sigma(z)^2\,\sigma(z')^2}$$

Her iki tarafın z ve z' 'ne göre logaritmik türevini alırsak;

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(z')}=\zeta(z+z')+\zeta(z-z')-2\zeta(z)$$

$$-\frac{\wp'(z')}{\wp(z)-\wp(z')}=\zeta(z+z')-\zeta(z-z')-2\zeta(z')$$

elde edilir ve iki formülü toplarsak;

Teorem 3.6.2 (**ζ fonksiyonunun toplam formülü**)

$z,z'\in\mathbb{C}\backslash\mathcal{L}, z\not\equiv\pm z'\bmod\mathcal{L}$ *icin*

$$\zeta(z+z')=\zeta(z)+\zeta(z')+\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)-\wp'(z')}{\wp(z)-\wp(z')}$$

Teorem 3.6.2'deki formülün z ve z''ye göre türevlerini alarak,

$$\wp(z+z')=\wp(z)-\frac{1}{2}\frac{\wp''(z)\,(\wp(z)-\wp(z'))-(\wp'(z)-\wp'(z'))\,\wp'(z)}{(\wp(z)-\wp(z'))^2}$$

$$\wp(z+z')=\wp(z')-\frac{1}{2}\frac{-\wp''(z')\,(\wp(z)-\wp(z'))-(\wp'(z)-\wp'(z'))\,(-\wp'(z'))}{(\wp(z)-\wp(z'))^2}$$

Dahası, Teorem 3.6.1'deki cebirsel denklemin türevi alınarak

$$\wp''(z) = 6\wp(z)^2 - \frac{g_2}{2}$$

elde edilir.

$\wp(z+z')$ için olan formülleri toplayarak ve $\wp''$ ifadesini $\wp$ kullanarak ifade edersek, son formül ile;

Teorem 3.6.3 (**$\wp$ fonksiyonunun toplam teoremi**)

$z, z' \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{L}, z \not\equiv \pm z' \operatorname{mod} \mathcal{L}$ *icin*

$$\wp(z+z') = -\wp(z) - \wp(z') + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z')}{\wp(z) - \wp(z')}\right)^2$$

ve $2z \not\equiv \pm 0 \operatorname{mod} \mathcal{L}$ için

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 .$$

4 BULGULAR VE TARTIŞMA

Teorem 3.3.2 ile $\wp(z)$ fonksiyonunun 1. türevi ile ζ fonksiyonu arasındaki bağıntılar verilmişti. Bu bölümde, Weierstrass $\wp$ fonksiyonunun n. mertebeden tek ve çift mertebeli türev fonksiyonları ile ζ fonksiyonu arasında bağıntılar elde edilmiştir.

$\mathcal{L}$ alt grubunun elemanlarının, $\wp$ fonksiyonunun periyodlar cümlesini teşkil ettiği bilinmektedir. O halde;

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z)$$

$$\wp(z+2\omega_2)=\wp(z) \tag{14}$$

ifadelerinin integralleri alındığında;

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1 \tag{15}$$

$$\zeta(z+2\omega_2)=\zeta(z)+2\eta_2$$

eşitlikleri bulunur. $z=-\omega$ olmakla η_1 ve η_2 sabitleri;

$$\eta_1=\zeta(\omega_1) \quad \text{ve} \quad \eta_2=\zeta(\omega_2)$$

olarak yazılabilir.

$\zeta(z)$ fonksiyonunu,

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})}+\frac{1}{\Omega_{mn}}+\frac{z}{\Omega_{mn}^2}\right\} \tag{16}$$

şeklinde tanımlamıştık.

(16) eşitliğinin türevinin ters işaretlisi olan $\wp(z)$ fonksiyonu da

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum\sum{}'\left\{\frac{1}{(z-\Omega_{mn})^2}-\frac{1}{\Omega_{mn}^2}\right\} \tag{17}$$

şeklinde tanımlamıştık.

(17) ifadesinden ardışık türevler alınırsa

$$\wp'(z) = -\frac{1\cdot 2}{z^3} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{-1\cdot 2}{(z-\Omega_{mn})^3} \right\}$$

$$\wp''(z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{z^4} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(z-\Omega_{mn})^4} \right\}$$

$$\wp'''(z) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{z^4} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(z-\Omega_{mn})^4} \right\}$$

$$\vdots$$

$$\wp^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{z^{n+2}} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{(-1)^n\,(n+1)!}{(z-\Omega_{mn})^{n+2}} \right\} \tag{18}$$

fonksiyonları elde edilir.

n. mertebeden türevi içeren (18) eşitliği yardımıyla,

$$\wp^{(2n-1)}(z) = -\frac{(2n)!}{z^{2n+1}} - \sum\sum{}' \left\{ \frac{(2n)!}{(z-\Omega_{mn})^{2n+1}} \right\} \tag{19}$$

$$\wp^{(2n-2)}(z) = \frac{(2n-1)!}{z^{2n}} + \sum\sum{}' \left\{ \frac{(2n-1)!}{(z-\Omega_{mn})^{2n}} \right\} \tag{20}$$

tek ve çift mertebeli türev fonksiyonlarını göstermek üzere, (19) ile (20) ifadelerine göre aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1: Her $n \in \mathbb{N}^+$ için z_1 ve z_2, (18) ile ifade edilen fonksiyonun kutup yerleri olmak üzere, (19) ile (20) eşitlikleri arasında,

i.

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z_1) + \wp^{(2n-1)}(z_2)}{\wp^{(2n-2)}(z_1) - \wp^{(2n-2)}(z_2)} = 2\zeta\,(z_1 - z_2) - 2n\,(\zeta\,(z_1) - \zeta\,(z_2))$$

ii.

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z_1) - \wp^{(2n-1)}(z_2)}{\wp^{(2n-2)}(z_1) - \wp^{(2n-2)}(z_2)} = 2\zeta\,(z_1 + z_2) + 2n\,(\zeta\,(z_1) + \zeta\,(z_2))$$

bağıntıları sağlanır.

İspat: Eliptik fonksiyonların toplamı, farkı, bölümü ve çarpımlarının da bir eliptik fonksiyon olduğu gerçeği ile,

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_2)} \tag{21}$$

ifadesi bir eliptik fonksiyon olup, bu fonksiyonun $z_2, -z_2$ ve sıfır noktalarındaki rezidüleri sırasıyla; $1, 1$ ve $-2n$ olur.

Bu noktalar ve bu noktalara karşılık gelen rezidüler için Teorem 3.3.1'e göre

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_2)} = A_0+\zeta(z-z_2)+\zeta(z+z_2)-2n\zeta(z) \tag{22}$$

bulunur. (22) eşitliğinde z yerine $-z$ yazılır ve $\wp$'nin çift, ζ'nın da tek fonksiyon oldukları dikkate alınırsa;

$$-\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_2)} = A_0-\zeta(z+z_2)-\zeta(z-z_2)+2n\zeta(z)$$

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_2)} = -A_0+\zeta(z+z_2)+\zeta(z-z_2)-2n\zeta(z) \tag{23}$$

elde edilir. (22) ve (23) eşitliklerinden $A_0 = 0$ olduğu açıkça görülmektedir. (22) 'de $A_0 = 0$ alınır ve z yerine z_1 alınırsa,

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z_1)}{\wp^{(2n-2)}(z_1)-\wp^{(2n-2)}(z_2)} = \zeta(z_1+z_2)+\zeta(z_1-z_2)-2n\zeta(z_1) \tag{24}$$

bağıntısı yazılır.

Benzer şekilde

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_1)} \tag{25}$$

eliptik fonksiyonunun $z_1, -z_1$ ve sıfır noktalarındaki rezidüleri sırasıyla; $1, 1$ ve $-2n$ olduğu dikkate alınarak Teorem 3.3.1 uygulanırsa,

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_1)} = A_0+\zeta(z-z_1)+\zeta(z+z_1)-2n\zeta(z) \tag{26}$$

olur. z yerine $-z$ yazılır ve $\wp(z)$'nun çift, $\zeta(z)$'nun da tek fonksiyon olduk-ları göz önünde bulundurulursa,

$$-\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_1)} = A_0 - \zeta(z-z_1) - \zeta(z-z_1) + 2n\zeta(z)$$

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z)}{\wp^{(2n-2)}(z)-\wp^{(2n-2)}(z_1)} = -A_0 + \zeta(z+z_1) + \zeta(z-z_1) - 2n\zeta(z) \qquad (27)$$

elde edilir. (26) ve (27) eşitliklerinden $A_0 = 0$ olup (26) ifadesinde z yerine z_2 yazmakla,

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z_2)}{\wp^{(2n-2)}(z_2)-\wp^{(2n-2)}(z_1)} = \zeta(z_2+z_1) + \zeta(z_2-z_1) - 2n\zeta(z_2)$$

$$-\frac{\wp^{(2n-1)}(z_2)}{\wp^{(2n-2)}(z_1)-\wp^{(2n-2)}(z_2)} = \zeta(z_1+z_2) - \zeta(z_1-z_2) - 2n\zeta(z_2)$$

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z_2)}{\wp^{(2n-2)}(z_1)-\wp^{(2n-2)}(z_2)} = -\zeta(z_1+z_2) + \zeta(z_1-z_2) + 2n\zeta(z_2) \qquad (28)$$

bulunur. (24) ve (28) eşitliklerinin taraf tarafa toplanması ve taraf tarafa çıkarılması ile istenilen bağıntılar elde edilir.

Sonuç olarak

$$\wp(z) = -\zeta'(z)$$

olduğundan

$$\wp^{(2n-1)}(z) = -\zeta^{(2n)}(z)$$

$$\wp^{(2n-2)}(z) = -\zeta^{(2n-1)}(z)$$

yazılabilir. Buna göre;

a.

$$\frac{\zeta^{(2n)}(z_1)+\zeta^{(2n)}(z_2)}{\zeta^{(2n-1)}(z_1)-\zeta^{(2n-1)}(z_2)} = 2\zeta(z_1-z_2) - 2n\left(\zeta(z_1)-\zeta(z_2)\right) \qquad (29)$$

b.

$$\frac{\zeta^{(2n)}(z_1)-\zeta^{(2n)}(z_2)}{\zeta^{(2n-1)}(z_1)-\zeta^{(2n-1)}(z_2)}=2\zeta(z_1+z_2)-2n(\zeta(z_1)+\zeta(z_2)) \tag{30}$$

c.

$$\frac{\wp^{(2n-1)}(z_1)+\wp^{(2n-1)}(z_2)}{\wp^{(2n-1)}(z_1)-\wp^{(2n-1)}(z_2)}=\frac{\zeta(z_1-z_2)-n(\zeta(z_1)-\zeta(z_2))}{\zeta(z_1+z_2)-n(\zeta(z_1)+\zeta(z_2))} \tag{31}$$

d.

$$\frac{\zeta^{(2n)}(z_1)+\zeta^{(2n)}(z_2)}{\zeta^{(2n)}(z_1)-\zeta^{(2n)}(z_2)}=\frac{\zeta(z_1-z_2)-n(\zeta(z_1)-\zeta(z_2))}{\zeta(z_1+z_2)-n(\zeta(z_1)+\zeta(z_2))} \tag{32}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece bu teorem ile Weierstrass $\wp$ eliptik fonksiyonunun n. mertebeden tek ve çift mertebeli türev fonksiyonları ile, ζ fonksiyonu arasında genel bir bağıntı kurulmuş oldu.

5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Weierstrass $\wp$ eliptik fonksiyonun $n.$ mertebeden tek ve çift mertebeli türev fonksiyonları ile ζ fonksiyonu arasında genel bir bağıntı kuruldu.

Bu fonksiyonlar ve türevleri kullanılarak yeni ve farklı eliptik fonksiyonlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Beals, R., Wong, R., Special Functions, A Graduate Text, Cambridge University Press, Cambridge, 394-417, **(2010).**

Brezhnev, YU.V., On Functions of Jacobi and Weierstrass, math/0601371v3 [math.CA], **(2006).**

Cayley, A., An Elementary Treatise on Elliptic Functions, Dover Publ., New York, 1-27, **(1962).**

Dutta, M., Debnath, L., Elements of the Theory of Elliptic and Associated Functions with Applications, The World Press Calcutta, West Bengal (India), 27-171, **(1965).**

Duval, P., Elliptic Functions and Elliptic Curves, Cambridge University, London, 15-93, **(1973).**

Goursat, E., Functions of a Complex Variable, Vol.2, Dover Publ., New York, 1-27, **(1959).**

Husemöller, D., Elliptic Curves, Graduate Text in Mathematics.111, New York, 166-210, **(1987).**

Kemienny, S., Torsion Point on Elliptic Curves Over All Quadratic Fields, Duke Mathematical Journal, Vol.53, No:1, 157-161, **(1986).**

Koizumi, S., The Equation Defining Abelian Varieties and Modular Functions, Department of Mathematics, University of Tsukuba İbaraki 300-31, Japan, 127-145, **(1979).**

Knopp, M.I., Rational Period Functions of the Moduler Group, Duke Mathematical Journal, Vol.45, No:1, 47-62, **(1978).**

Lang, S., Elliptic Functions, Yale University, New Haven, 5-239, **(1973).**

Marsden, J.E., Elementary Classical Analysis, October, 78-150, **(1973).**

Mc Gettrick, A.D., A Result Theory of Weierstrass Elliptic Functions, Proc, Math, Soc.25, London, 41-54, **(1972).**

Ocak, R., Eliptik Fonksiyonların Teşkili Üzerine Bir Çalışma, Profesörlük Takdim Tezi, Erzurum, **(1989).**

Ocak, R., Kompleks Analiz, Atatürk Üniversitesi Yayınları No:750, Erzurum, 1-226, **(2001).**

Petkovic, M.S., Petkovic, L.D., Construction of zero-finding Methods by Weierstrass Functions, Applied Mathematics and Computation 184, 351-359, **(2007).**

Rankın, R., Modular Form and Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1-191, **(1977).**

Rauck, E.H., Lebowitz, A., Elliptic Functions, Theta Functions and Riemann Surfaces, The Williams and Wilkins Company, Baltimore, 74-116, **(1973).**

San, N., Eliptik Fonksiyonlara Ait Periyodların Jacobi Fonksiyonlarının Değerleri Üzerindeki Etkileri, Atatürk Üniversitesi Yayınları 338, Ankara, **(1974).**

Saied, E.A., El-Rahman, R.G.A., Ghonamy, M.I., A Generalized Weierstrass Elliptic Function Expension Method for Solving Some Nonlinear Partial Differential Equations, Computers and Mathematics with Applications 58, 1725-1735, **(2009).**

Sat, M., Ters Ünivalent Fonksiyonların Katsayıları, Yüksek Lisans Tezi, Erzurum, **(2007)**

Scherk, P., Topics in the Theory of Elliptic Functions, Queen's University, Kingston Ontario, 1-36, **(1967).**

Schertz, R., Complex Multiplication, Cambridge University Press, Cambridge, 1-27, **(2010).**

Schoeneberg, B., Elliptic Modular Functions, New York, 1-221, **(1974).**

Şeker, A., Weierstrass ve Jacobi Fonksiyonlarının Eşlenik Kompleks Periyodları ve Yarı Period için Değer Değişimleri, Doktora Tezi, Erzurum, **(1976).**

Wu, T., Chang, C., Srivastava, H.M., A Unified Presentation of Identities Involving Weierstrass-type Functions and Their Applications, Applied Mathematic Letters 23, 864-870, **(2010).**

Yıldız, İ., Kompleks Analiz, Atatürk Üniversitesi Yayınları Serisi:875, Erzurum, 1-188, **(1998)**

Yıldız, İ., Weierstrass Eliptik ve Yarı-Eliptik Fonksiyonlarının $\frac{1}{2^r}$ Periyod Katlarına Göre Değer Değişimleri, Doktora Tezi, Erzurum, 1-10, **(1989)**

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,Adı	: ZENGİN, Pınar
Uyruğu	: T.C
Doğum Tarihi ve Yeri	: 10.01.1985 / Fatih
Telefon	: 0 555 432 34 53
e-mail	: pinarzengin13@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. / Matematik B.	2012
Lisans	ODTÜ /Matematik B.	2008
Lise	Arsal Anadolu Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2008-2010	Kültür Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2010-2011	Gümüşova Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2011-Halen çalışıyor	Kültür Dershanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS:82.5)