T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TETA FONKSİYONLARININ PERİYOTLARININ $\frac{1}{2^r}$ KATLARINA GÖRE DEĞER DEĞİŞİMLERİ VE BU YOLLA ELDE EDİLEN ELİPTİK FONKSİYON

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİHAL ŞULE ERKOÇ

AĞUSTOS 2012

DÜZCE

T.C

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

KABUL VE ONAY BELGESİ

Nihal Şule ERKOÇ tarafından hazırlanan, Teta Fonksiyonlarının Periyotlarının $\frac{1}{2^r}$ Katlarına Göre Değer Değişimleri ve Bu Yolla Elde Edilen Eliptik Fonksiyon, isimli Lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29/08/2012 tarih ve 2012-237 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

(Tez Danışmanı)

Prof. Dr. İsmet YILDIZ

Düzce Üniversitesi

Üye	Üye
Yrd.Doç.Dr. Erhan SET	Doç. Dr. Ahmet KÜÇÜK
Düzce Üniversitesi	Kocaeli Üniversitesi

Tezin savunulduğu tarih: 29/08/2012

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Nihal Şule ERKOÇ'un Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Doç. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

29.08.2012

Nihal Şule ERKOÇ

Anneannem Gülbeyaz Güven,

Dedem Tacettin Güven anısına

Ve Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. İsmet YILDIZ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.
Ortaöğretim, Lisans ve Lisansüstü öğrenimim boyunca ve sonrasında benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve esirgemeyecek olan sevgili arkadaşım Mehmet MUTLU'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.
Hayatım boyunca benden yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili annem Zehra ERKOÇ'a, babam Necmettin ERKOÇ'a kardeşlerim Merve ve Neşe'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.
Çocukluğumdan beri hep yanımda olan, benim bugünlere gelmemde en büyük paylardan birine sahip olan, bana maddi ve manevi her türlü imkanı ve desteği veren, zor günlerimi onların dualarıyla atlattığım anneannem Gülbeyaz GÜVEN ve dedem Tacettin GÜVEN'e teşekkürü bir borç bilirim. Ruhunuz şad, mekanınız cennet olsun.

Ağustos 2012 **Nihal Şule ERKOÇ**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

TEŞEKKÜR SAYFASI……………..…………………………………...…i

İÇİNDEKİLER………………………………………………….........ii

SİMGELER ……………………………………….……...……..….iv

ÖZET……………………………..………………..…………………1

ABSTRACT………………...…………………………….……………2

EXTENDED ABSTRACT……………………………….……………….3

1. GİRİŞ…..………………………………………….……………………4

1.1. KURAMSAL KAVRAMLAR..…………………….…………………..5

1.1.1. Genel Kavramlar……….…………………………….……………............5

2. MATERYAL VE YÖNTEM. ....…………...……………………….... ..8

2.1. q-NOTASYONU……………………………………………….……….......8

2.2. $\theta_1(z|q)$ θ FONKSİYONUNUN TANIMI……………….……………..…..8

2.3. ÖZDEŞLİKLERİN İLK GRUBU………………………………………........9

2.4. DİĞER ÖZDEŞLİKLER…………………………………………………....11

2.5. DİĞER θ_1 ÖZDEŞLİKLERİ……………………………………………......12

2.6. GENEL TETA FONKSİYONU ÖZDEŞLİĞİNİN KURULUŞU……......15

2.7. ÜÇ TERİMLİ TETA FONKSİYONU ÖZDEŞLİĞİNİN KURULUŞU....18

2.7.1 Jacobi Özdeşliğinin Elde Edilmesi……………..……………………23

2.8. HİRSCHHORN - GARVAN - BORWEİN'in İKİ DEĞİŞKENLİ KÜBİK TETA FONKSİYONLARI İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER…………………………29

2.9. WEİERSTRASS ℘ FONKSİYONU İÇİN TOPLAM TEOREMİ...…......32

3. BULGULAR VE TARTIŞMA……………………………………….36

3.1. TETA SERİLERİ………………………………………………………36

3.2. BİRİNCİ DERECEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ TETA FONKSİYONU37

3.3. θ- TETA FONKSİYONLARININ ($\frac{\pi}{2^r},\frac{\pi z}{2^r}$) PERİYOT ÇİFTLERİNE GÖRE DÖNÜŞÜMLERİ…………………………………………………………...42

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER…………………………...……...54

5. KAYNAKLAR….………………………………………...……...55

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER

θ	: Teta Fonksiyonu
θ_1	: Teta'nın İlk Fonksiyonu
$\wp$	: Pe-fonksiyonu
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi

ÖZET

TETA FONKSİYONLARININ PERİYOTLARININ $\frac{1}{2^r}$ KATLARINA GÖRE DEĞER DEĞİŞİMLERİ VE BU YOLLA ELDE EDİLEN ELİPTİK FONKSİYON

Nihal Şule ERKOÇ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Ağustos 2012, 57 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin içeriği ve yapılan çalışmalar hakkında kısaca bilgi verildi. Ayrıca çalışma içerisinde kullanılmış olan tanımlar verildi. İkinci bölümde, Teta Fonksiyonunun tanımı ve q-Notasyonu verilerek Genel Teta Fonksiyonu Özdeşliği ve Kübik Teta Fonksiyonu Özdeşlikleri elde edildi. Üç Terimli Teta Fonksiyonu Özdeşlikleri elde edildi, Weierstrass Pe Eliptik fonksiyonu için toplam formülünün ispatı verildi. Üçüncü bölümde ise Teta fonksiyonlarının $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ periyot çiftlerine göre dönüşümleri elde edildi.

Anahtar sözcükler: İlk Teta Fonksiyonu, q-Notasyonu, Kübik Teta Fonksiyonu Özdeşlikleri, Weierstrass Pe Eliptik Fonksiyonu

ABSTRACT

TRANSFORMATIONS OF THE THETA FUNCTIONS FOR THE PERIODS $\frac{1}{2^r}$ AND THE ESTABLISHED ELLIPTIC FUNCTIONS

Nihal Şule ERKOÇ
Duzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. İsmet YILDIZ
August 2012, 57 pages

That Theta Function Identities consist of three part. First part includes about the study and it's informed. And given definitons using in study. Second part given definition of Theta Function and q-Notation. Theta Function with Three Term Identities was obtained. Given summation formula for Weierstrass Pe-elliptic Function was obtained. In third part Transformations of the theta functions for the period pairs $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ was obtained.

Keywords : First Theta Functions, q-Notation, Cubic Theta Function İdentities Weierstrass Pe-elliptic Function

EXTENDED ABSTRACT

TRANSFORMATIONS OF THE THETA FUNCTIONS FOR THE PERIODS $\frac{1}{2^r}$ AND THE ESTABLISHED ELLIPTIC FUNCTIONS

Nihal Şule ERKOÇ

Düzce University

Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. İsmet YILDIZ

August 2012, 57 pages

1.INTRODUCTION

This thesis consist of three parts. In first part information given about thesis. And definitions was explained due to understood easily. In second part it was given integral represantations for continued fraction and some important theta functions. General theta function elliptic functions complex theory it's obtained four factor. It's given definition of Jacobi theta function and it used three factor theta function quintuple product identity that found Ramanujan's lost notebook was used for find Eisenstein series. In third part Transformations of the theta functions for the period pairs $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ was obtained.

1 GİRİŞ

Bu tezin üçüncü bölümünde sürekli kesirler için integral gösterimi verildi. İntegral gösterimini verirken aşağıdaki özdeşlik elde edildi.

$$\frac{(q;q)_\infty^4}{(-q;q)_\infty^4} = 1-8\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(4m+1)q^{4m+1}}{1-q^{4m+1}} - \frac{2(4m+2)q^{4m+2}}{1-q^{4m+2}} + \frac{(4m+3)q^{4m+3}}{1-q^{4m+3}}\right) \tag{1}$$

Daha sonra bu özdeşlik kullanılarak, bazı önemli teta fonksiyonu özdeşlikleri elde edildi. Genel teta fonksiyonu özdeşliği, eliptik fonksiyonların kompleks değişken teorisi kullanılarak dört değişken ile kuruldu. Bunları yaparkende Jacobi teta fonksiyonu özdeşliğinden faydalanıldı. Aynı zamanda, bazı diğer kübik teta fonksiyonu özdeşlikleri de elde edilip

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{10}$$

'nın gösterimi verildi. Eliptik fonksiyonların kompleks değişkenli teorisi kullanılarak üç terimli teta fonksiyonu özdeşlikleri elde edildi. Beşli çarpım özdeşliğinden ve beşinci dereceden modüler denklemlerle ve diğer teta fonksiyonu özdeşlikleriyle alakalı genel bir teta fonksiyonu özdeşliğinden bu özdeşlikler elde edildi. Ayrıca Weierstrass $\wp$ eliptik fonksiyonu için toplam teoreminin ispatı verildi. Dörtlü teta fonksiyonu çarpımını içeren özdeşlik verildi. Shen ve McCullough bu özdeşlikten bir teta fonksiyonu özdeşliği elde etmiştir.

Dördüncü bölümde ise Teta fonksiyonlarının $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ periyot çiftlerine göre dönüşümleri elde edildi.

1.1 KURAMSAL KAVRAMLAR

Bu kısımda tezin içeriği ve yapılan çalışmalar hakkında kısaca bilgi verip, çalışma içerisinde kullanılmış olan tanımlar vereceğiz.

1.1.1 Genel Kavramlar

Tanım 1.1.1.1 (Yakınsaklık): Kompleks sayıların bir $\{z_n\}$ dizisi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geqslant n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa, bu dizi z_0 kompleks sayısına yakınsıyor denir. $\{z_0\}$ dizisinin z_0 noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.1.2 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $z \in A$ ve $|z - z_0| < \delta$ için

$$| f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise f ye z_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.1.1.3 (Seri):

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

ifadesine seri denir. $a_1, a_2, ...$ sayılarına da serinin terimleri adı verilir. Bir seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

veya

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum a_n$$

kullanılır.

Tanım 1.1.1.4 (Analitik Fonksiyon): f, kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun.

Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, bu fonksiyona z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Eğer $f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda diferansiyellenebilirse, f ye z_0 noktasında analitik fonksiyon denir.

Tanım 1.1.1.5 (Tam Fonksiyon): Bütün sonlu z düzleminde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyonlar denir.

Tanım 1.1.1.6 (Analitik Devam): Bir $f(z)$ fonksiyonu, a merkezli C_1 yakınsaklık çemberi içinde

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ...$$

ile tanımlanan Taylor serisi ile gösterilebilir. C_1 çemberi içinde seçilmiş bir b noktası için; yukarıdaki açılımdan, $f(z)$ fonksiyonunun b noktasındaki türevleri ve $f(z)$ fonksiyonunun değeri bulunabilir. Böylece

$$b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + ...$$

serisi yeni bir seri olup C_2 yakınsaklık dairesine sahip olur. Eğer C_1'den öteye bir C_2 varsa o zaman $f(z)$'nin değeri ve türevleri bu parça uzaması içinde bulunabilir ve böylece $f(z)$ ile ilgili fazla bilgiye sahip oluruz. Bu durumda; $f(z)$ fonksiyonunun analitikliğinin C_1 eğrisinin ötesine genişleyebildiğini söyleyebiliriz. Buna analitik devamlılık denir.

Tanım 1.1.1.7 (Rezidü): $f(z)$ fonksiyonu, tek değerli olmak üzere C içindeki bir $z = z_0$ noktası hariç, C'nin üzerinde ve içinde analitik olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki Laurent açılımı, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

şeklindedir.

Bu açılımdaki negatif üslü ilk terimin katsayısı olan b_1 terimine, $f(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki rezidüsü denir ve

$$\operatorname{Re} z\left(f, z_0\right) = b_1$$

ile tanımlanır. Bu rezidü ayrıca

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz$$

integrali ile de hesaplanabilir. Eğer bu nokta bir basit kutup ise o zaman

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

açılımı var olup burdan

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]$$

limiti ile de rezidü hesaplanabilir.

Tanım 1.1.1.8 (Meromorf Fonksiyon): Bir B bölgesinde kutup noktalarından başka singüler noktası olmayan fonksiyonlara meromorf fonksiyonlar denir.

Tanım 1.1.1.9 (Eliptik Fonksiyon): Açık $z-$düzleminde meromorfik, çifte periyodik fonksiyonlar eliptik fonksiyonlardır.

Tanım 1.1.1.10 (Jacobi Teta Fonksiyonu): Jacobi teta fonksiyonu

$$\theta_1 (z \mid \tau) = -iq^{1/8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} e^{(2n+1)iz} = 2q^{1/8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} \sin(2n+1) z$$

şeklinde tanımlanmıştır

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde θ fonksiyonunun tanımı ve q notasyonunu verilip, genel teta fonksiyonu özdeşliğinin ve kübik teta fonksiyonu özdeşliklerinin ispatları yapıldı.

2.1 q-NOTASYONU

$\left|q^k\right| < 1$ için;

$$(a;q^k)_n = (1-a)(1-aq^k)...(1-aq^{k(n-1)}),\ n \geq 1$$

$$(a;q^k)_0 = 1$$

$$(a_1,a_2,...,a_m;q^k)_n = (a_1;q^k)_n(a_2;q^k)_n...(a_m;q^k)_n$$

’ dir.

2.2 $\theta_1(z \mid q)$ θ FONKSİYONUNUN TANIMI

İlk θ fonksiyonu $\theta_1(z \mid q)$ aşağıdaki gibi tanımlanır; $q = e^{2\pi i\tau}$ ve $\Im(\tau) > 0$ olduğu yerde

$$\theta_1(z \mid q) = -iq^{\frac{1}{8}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} e^{(2n+1)iz} \tag{2}$$

veya

$$\theta_1(z \mid q) = 2q^{\frac{1}{8}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin(2n+1)z \tag{3}$$

’ dır.

$\theta_1(z \mid q)$ aşağıda verildiği gibi sonsuz çarpımlar cinsinden ifade edilebilir:

$$\theta_1(z \mid q) = 2q^{\frac{1}{8}} \sin z(q;q)_\infty(qe^{2iz};q)_\infty(qe^{-2iz};q) \tag{4}$$

$$= iq^{\frac{1}{8}}(q;q)_\infty(e^{2iz};q)_\infty(qe^{-2iz};q)_\infty \tag{5}$$

2.3 ÖZDEŞLİKLERİN İLK GRUBU

Burada ispatlanacak olan özdeşliklerin ilk grubu

$$-3+4i\left(2\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)-\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)\right)+4\left(\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)-\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)\right), \tag{6}$$

$$=\frac{(q;q)_\infty^4}{(-q;q)_\infty^4}=\frac{q^{-\frac{5}{2}}\left(\theta\prime_1\left(q\right)\right)^4}{16\left(\theta_1\left(\pi\tau \mid q^4\right)\theta_1(2\pi\tau \mid q^4)\right)^4} \tag{7}$$

ile verildi.

Yukarıdaki özdeşliklerin ispatını vermeden önce, bunlarla ilgili diğer sonuçları ispatlayalım.

(5)' de q yerine q^4 alınıp, $z=\pi\tau$ ve $z=2\pi\tau$ yazılırsa,

$$\theta_1(\pi\tau \mid q^4)=i(q^4;q^4)_\infty\left(q;q^4\right)_\infty(q^3;q^4)_\infty \tag{8}$$

ve

$$\theta_1(2\pi\tau \mid q^4)=iq^{-\frac{1}{2}}(q^4;q^4)_\infty\left(q^2;q^4\right)_\infty^2 \tag{9}$$

elde edilir.

(8) ve (9) çarpılırsa,

$$\theta_1(\pi\tau \mid q^4)\theta_1(2\pi\tau \mid q^4)=-q^{-\frac{1}{2}}(q^4;q^4)_\infty^2\left(q;q^4\right)_\infty(q^3;q^4)_\infty\left(q^2;q^4\right)_\infty^2$$

$$=-q^{-\frac{1}{2}}(q;q)_\infty\left(q^2;q^4\right)_\infty(q^4;q^4)_\infty-q^{-\frac{1}{2}}(q;q)_\infty^2(-q;q)_\infty \tag{10}$$

bulunur.

(4)' de z' ye göre türev alıp, $z=0$ yazılırsa;

$$\theta_1(0 \mid q)=\theta_1(q)=2q^{\frac{1}{8}}(q;q)_\infty^3 \tag{11}$$

elde edilir.

Aynı zamanda (2)' den

$$e^{2iz}\theta_1(4z+\pi\tau \mid q^4)=-iq^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{2iz}q^{2n^2+2}e^{(2n+1)i(4z+\pi\tau)}$$

$$=iq^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{2iz}q^{2n^2-2}e^{(2n-1)i(4z+\pi\tau)}$$

$$= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{2n^2-2} e^{(8n-2)iz} \tag{12}$$

z' ye göre iki kez türev alınıp, z yerine $z = 0$ yazılırsa sol taraf

$$= -4\theta_1(\pi\tau \mid q^4) + 16i\theta\prime_1(\pi\tau \mid q^4) + 16\theta\prime\prime_1(\pi\tau \mid q^4)$$

z' ye göre iki kez türev alınıp, z yerine $z = 0$ yazılırsa, sağ taraf, Jacobi' nin üçlü çarpım özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (8n-2)^2 q^{\frac{2n^2-n}{2}} \qquad (13) \\ &= -i \left(4 + 32q\frac{d}{dq}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{2n^2-n} \\ &= -i \left(4 + 32q\frac{d}{dq}\right) (q, q^3, q^4; q^4)_\infty \end{aligned}$$

elde edilir.

Yine, (2)' den

$$e^{4iz}\theta_1(4z + 2\pi\tau \mid q^4) = -iq^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{2n^2} e^{i8nz} \tag{14}$$

bulunur.

Her iki tarafın z' ye göre iki kez türevi alınıp, $z = 0$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} -16\theta_1(2\pi\tau \mid q^4) + 32i\theta\prime_1(2\pi\tau \mid q^4) + 16\theta\prime\prime_1(2\pi\tau \mid q^4) \qquad (15) \\ = iq^{-\frac{1}{2}} \left(32q\frac{d}{dq}\right) \left(q^2, q^2, q^4; q^4\right)_\infty \end{aligned}$$

elde edilir.

Sağ tarafa logaritmik türevi uygulayarak (13) ve (15) sadeleştirilip,

$$\begin{aligned} 4 - 16i\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4) - 16\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4) \qquad (16) \\ = 4 - 32\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}} + \frac{(4n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}} + \frac{(4n-3)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 16 - 32i\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4) - 16\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4) \qquad (17) \\ = -32\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}} + \frac{2(4n-2)q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}\right) \end{aligned}$$

'i elde etmek için (8) ve (9) kullanlır.

(17)' den (16) çıkarılırsa,

$$12+16i\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)-2\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)+16\left(\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)-\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)\right)$$

$$=-4\left(1-8\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(4n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}-\frac{2(4n-2)q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}+\frac{(4n-3)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right\}\right)$$

veya

$$-3+4i\left(2\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)-\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)+4\left(\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)-\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)\right)\right)$$

$$=1-8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(4n+1)q^{4n+1}}{1-q^{4n+1}}-\frac{2(4n+2)q^{4n+2}}{1-q^{4n+2}}+\frac{(4n+3)q^{4n+3}}{1-q^{4n+3}}\right) \qquad (18)$$

bulunur.

(1)' den, (6) özdeşliğine, (10) ve (11)' den, (7) özdeşliğine ulaşılır.

2.4 DİĞER ÖZDEŞLİKLER

(i)

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{2} \mid q)-\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{4} \mid q)$$

$$=1-8\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{(4m+1)q^{4m+1}}{1-q^{4m+1}}-\frac{2(4m+2)q^{4m+2}}{1-q^{4m+2}}+\frac{(4m+3)q^{4m+3}}{1-q^{4m+3}}\right) \qquad (19)$$

$$=\frac{(q;q)_\infty^4}{(-q;q)_\infty^4} \qquad (20)$$

(ii)

$$-3+4i\left(2\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)-2\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)\right)+4\left(\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(2\pi\tau \mid q^4)-\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\pi\tau \mid q^4)\right)$$

$$=\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{2} \mid q)-\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{4} \mid q)$$

(i)'nin İspatı: Aşağıdaki özdeşlikle başlayalım

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(z \mid q)=\cot z+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^n}\sin 2nz \qquad (21)$$

Her iki tarafın z' ye göre türevi alınırsa

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(z \mid q) = -\csc^2 z + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nq^n}{1-q^n}\cos 2nz \tag{22}$$

bulunur.

(22) 'de art arda $z=\frac{\pi}{4}$ ve $z=\frac{2\pi}{4}$ yazılırsa ve birinden diğeri çıkarılırsa;

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{4} \mid q) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{2} \mid q) = -1 + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)$$

n, mod 4' e göre alınırsa; sonuçta ortaya çıkan ifadelerin toplanmasıyla,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{4} \quad &| \quad q) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\frac{\pi}{2} \mid q)\\ &-1 + 8\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(4m+1)q^{4m+1}}{1-q^{4m+1}} - \frac{2(4m+2)q^{4m+2}}{1-q^{4m+2}} + \frac{(4m+3)q^{4m+3}}{1-q^{4m+3}}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu (19)' u ispatlar ve (1)' den (20) elde edlir.

(ii)'nin İspatı: (6) ve (19) birleştirilerek **(ii)** elde edilir.

2.5 DİĞER θ_1 ÖZDEŞLİKLERİ

(i)

$$\begin{aligned}\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{4} \quad &| \quad q) - \frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{2} \mid q)\\ &= \quad 16\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4m+1}}{(1-q^{4m+1})^2} - \frac{2q^{4m+2}}{(1-q^{4m+2})^2} + \frac{q^{4m+3}}{(1-q^{4m+3})^2}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

(ii)

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\pi\tau \mid q^4) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime\prime(2\pi\tau \mid q^4) = 4\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4m+1}}{(1-q^{4m+1})^2} - \frac{2q^{4m+2}}{(1-q^{4m+2})^2} + \frac{q^{4m+3}}{(1-q^{4m+3})^2}\right) \tag{24}$$

(iii)

$$\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{4} \mid q) - \frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{2} \mid q) = 4\left[\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\pi\tau \mid q^4) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime\prime(2\pi\tau \mid q^4)\right] \tag{25}$$

(i)' nin İspatı: Aşağıdaki, bilinen özdeşlikte

$$\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(z \mid q) = -1 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q^n)^2}\cos 2nz + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}$$

art arda $z = \frac{\pi}{4}$ ve $z = \frac{2\pi}{4}$ alınarak, birinci bağıntıdan ikinci bağıntı çıkarılırsa,

$$\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{4} \mid q) - \frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{2} \mid q) = 16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)\frac{q^n}{(1-q^n)^2}$$

bulunur.

Sağ taraftaki n toplamını $\bmod 4$' te n' e bölelim. Buradan **(i)**' yi ispatlayan

$$\frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{4} \mid q) - \frac{\theta\prime\prime_1}{\theta_1}(\frac{\pi}{2} \mid q) = 16\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^{4m+1}}{(1-q^{4m+1})^2} - \frac{2q^{4m+2}}{(1-q^{4m+2})^2} + \frac{q^{4m+3}}{(1-q^{4m+3})^2}\right)$$

elde edilir.

(ii)' nin İspatı: (5)' in logaritmik türevi alınıp, $q \to q^4$ yazılıp art arda $z = \pi\tau$ ve $z = 2\pi\tau$ yazılırsa;

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\pi\tau \mid q^4) = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n+1}}{(1-q^{4n+1})^2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n+3}}{(1-q^{4n+3})^2} \tag{26}$$

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(2\pi\tau \mid q^4) = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n+2}}{(1-q^{4n+2})^2} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{4n+2}}{(1-q^{4n+2})^2} \tag{27}$$

(26)' den (27) çıkarılırsa **(ii)**' yi ispatlayan

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(\pi\tau \mid q^4) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(2\pi\tau \mid q^4) = 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q^{4n+1}}{(1-q^{4n+1})^2} - \frac{2q^{4n+2}}{(1-q^{4n+2})^2} + \frac{q^{4n+3}}{(1-q^{4n+3})^2}\right)$$

bulunur.

(iii)' ün İspatı : (23) ve (24)' in sol tarafları birbirine eşitlenerek **(iii)**' ü bulunur.

$\mathrm{Im}\,(\tau) > 0$ için $\exp(2\pi i\tau)$'yu q ile göstereceğiz. Benzer notasyon olan

$$(z;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1 - zq^n) \tag{28}$$

'i kullanıldı. Bunun yanında bazende (28)

$$(a, b, c, ...; q)_\infty = (a; q)_\infty (b; q)_\infty (c; q)_\infty ... \tag{29}$$

yazıldı.

Her $m > 0$ tamsayısı için

$$\left(z, zq, ..., zq^{m-1}; q^m\right)_\infty = (z; q)_\infty \tag{30}$$

olduğu görülür.

Eğer ω, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ ile verilen birleşimin basit küpkökü olarak tanımlanırsa, $(1 - x)(1 - x\omega)(1 - x\omega^2) = 1 - x^3$ özdeşliği kullanılarak

$$\left(z, z\omega, z\omega^2; q\right) = \left(z^3; q^3\right)_\infty \tag{31}$$

bulunur. Bilinen Jacobi üçlü çarpım özdeşliği

$$(q, z, q/z; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/2} z^n \tag{32}$$

' dir.

Jacobi teta fonksiyonu $\theta_1(z \mid \tau)$

$$\theta_1(z \mid \tau) = -iq^{1/8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} e^{(2n+1)iz} = 2q^{1/8} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)/2} \sin(2n+1) z \tag{33}$$

ile tanımlı Jacobi teta fonksiyonu $\theta_1(z \mid \tau)$' nun bazı temel durumlarına

ihtiyacımız var.

Buradan

$$\theta_1(z + \pi \mid \tau) = -\theta_1(z \mid \tau)$$

ve

$$\theta_1(z + \pi\tau \mid \tau) = -q^{-\frac{1}{2}} e^{-2iz} \theta_1(z \mid \tau) \tag{34}$$

elde edilir.

İyi bilinen Jacobi üçlü çarpım özdeşliği kullanılarak

$$(q, z, q/z; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n \tag{35}$$

bulunur.

$\theta_1(z \mid \tau)$ için sonsuz çarpım gösterimini anlayabiliriz. Yani,

$$\theta_1(z \mid \tau) = 2q^{\frac{1}{8}}(\sin z)(q, qe^{2iz}, qe^{-2iz}; q)_\infty$$

$$= iq^{\frac{1}{8}}e^{-iz}(q, e^{2iz}, qe^{-2iz}; q)_\infty \tag{36}$$

$\theta\prime_1(z \mid \tau)$, $\theta\prime_1(z \mid \tau)$' nun z' ye göre kısmi türevini göstermek için kullanıldı. (36)' nın z' ye göre türevi alınıp $z = 0$ yazılırsa,

$$\theta\prime_1(0 \mid \tau) = 2q^{\frac{1}{8}}(q; q)^3_\infty \tag{37}$$

elde edilir.

Genel teta fonksiyonu özdeşliklerini oluşturmak için, eliptik fonksiyonların kompleks değişken teorisini kullanılır. Beşinci dereceden modüler eşitliklerle ilişkili bazı önemli teta fonksiyonu özdeşlikleri türetilip; özellikle, Rogers-Ramanujan sürekli kesirleri ile karşılanan iki temel özdeşliğin yeni ispatlarını vereceğiz.

2.6 GENEL TETA FONKSİYONU ÖZDEŞLİĞİNİN KURULUŞU

Teorem 2.6.1: Kabul edelimki $f(z)$

$$f(z + \pi) = -f(z) \text{ ve } f(z + \pi\tau) = -q^{-3/2}e^{6iz}f(z) \tag{38}$$

fonksiyonel eşitlikleri sağlayan tam fonksiyonlar olsun. Böylece aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

$$\{f(z) - f(-z)\}\,\theta_1(x \mid \tau)\,\theta_1(y \mid \tau)\,\theta_1(x + y \mid \tau)\,\theta_1(x - y \mid \tau)$$

$$= \{f(y) - f(-y)\}\,\theta_1(x \mid \tau)\,\theta_1(z \mid \tau)\,\theta_1(x + z \mid \tau)\,\theta_1(x - z \mid \tau)$$

$$- \{f(x) - f(-x)\}\,\theta_1(y \mid \tau)\,\theta_1(z \mid \tau)\,\theta_1(y + z \mid \tau)\,\theta_1(y - z \mid \tau) \tag{39}$$

Teorem 2.6.1' in İspatı:

Teoremi ispatlamak için aşağıdaki Lemma2.6.1'e ihtiyacımız var. Lemma2.6.1 eliptik fonksiyonların esas teoremidir.

Bir çok önemli teta fonksiyonu özdeşliğini oluşturmak için Lemma2.6.1'i kulandık.

Lemma 2.6.1: Eliptik fonksiyonun tüm rezidülerinin toplamı, periyodik paralelkenarda sıfırlanır.

İspat: Kabul edelim ki $f(u)$, (38)'deki fonksiyonel eşitlikleri içeren bir fonksiyon olarak verilsin. O zaman

$$g(u) = \frac{\theta_1(2u \mid \tau) f(u)}{\theta_1(u \mid \tau)\theta_1(u-x \mid \tau)\theta_1(u+x \mid \tau)\theta_1(u-y \mid \tau)\theta_1(u+y \mid \tau)\theta_1(u-z \mid \tau)\theta_1(u+z \mid \tau)} \tag{40}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Burada biz geçici olarak $0 < x, y, z < \pi$ 'nin $\theta_1(2u \mid \tau) f(u)$' nun sıfır noktalarından farklı, ayrı parametreler olduğunu kabul edelim.

$$\theta_1(z+\pi \mid \tau) = -\theta_1(z \mid \tau) \text{ ve } \theta_1(z+\pi\tau \mid \tau) = -q^{-1/2}e^{-2iz}\theta_1(z \mid \tau) \tag{41}$$

fonksiyonel eşitliklerini kullanarak $g(u+\pi) = g(u)$ ve $g(u+\pi\tau) = g(u)$ olduğunu doğrulayabiliriz. Buradan $g(u)$, π ve $\pi\tau$ periyodlu eliptik fonksiyondur. Sadece x, $\pi - x$, y, $\pi - y$, z, $\pi - z$' nin bunun kutupları olduğunu ve tüm kutuplarının basit kutup olduğunu kolayca bulabiliriz. Bu çalışmada, g'nin α'daki rezidülerini; $res(g : \alpha)$ ile göstereceğiz. Böylece Lemma2.6.1

$$res(g;x)+res(g;\pi-x)+res(g;y)+res(g;\pi-y)+res(g;z)+res(g;\pi-z) = 0 \tag{42}$$

'ü verir.

Bu çalışmada u' ya göre kısmi türevi göstermek için $u\prime$ kullanacağız. Şimdi aşağıdaki basit hesaplama vardır.

$$res(g;x) = \lim_{u \to x}(u-x)g(u)$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{\theta_1(2u \mid \tau) f(u)}{\theta_1(u \mid \tau)\theta_1(u+x \mid \tau)\theta_1(u-y \mid \tau)\theta_1(u+y \mid \tau)\theta_1(u-z \mid \tau)\theta_1(u+z \mid \tau)} \times \lim_{u \to x} \frac{u-x}{\theta_1(u-x \mid \tau)}$$

$$= \frac{f(x)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau)\theta_1(x-z \mid \tau)\theta_1(x+z \mid \tau)} \tag{43}$$

Aynı yoldan

$$res(g; \pi{-}x) = \frac{-f(x)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau)\theta_1(x-z \mid \tau)\theta_1(x+z \mid \tau)} \tag{44}$$

olduğunu gösterebiliriz.

$$res(g; y) = \frac{-f(y)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{45}$$

ve

$$res(g; \pi{-}y) = \frac{f(-y)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{46}$$

' yi elde etmek için, $g(u)'$nun x, y ve z' ye göre simetrik olduğunu belirterek, (43) ve (44)'de x ve y' yi değiştokuş ettik.

Benzer şekilde;

$$res(g; z) = \frac{f(z)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(z \mid \tau)\theta_1(x-z \mid \tau)\theta_1(x+z \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{47}$$

ve

$$res(g; \pi{-}z) = \frac{-f(-z)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(z \mid \tau)\theta_1(x-z \mid \tau)\theta_1(x+z \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{48}$$

'u buluruz.

(42)' de, (43) ve (48)' u yerine koyarak, bazı sadeleştirmelerden sonra, (40)' i elde ederiz. Analitik devam ile (40)' in tüm x, y ve z' ler için sağlanacağını biliyoruz. Buda Teorem2.6.1' in ispatını tamamlar.

Teorem 2.6.2: $\theta_1(z \mid \tau)$ (33) ile tanımlanan Jacobi teta fonksiyonu olsun. Böylece her x, y, z için

$$\theta_1\left(y \mid \frac{\tau}{3}\right)\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(z \mid \tau)\theta_1(x-z \mid \tau)\theta_1(x+z \mid \tau)$$

$$-\theta_1\left(x \mid \frac{\tau}{3}\right)\theta_1(y \mid \tau)\,\theta_1(z \mid \tau)\,\theta_1(y-z \mid \tau)\,\theta_1(y+z \mid \tau)$$
$$=\theta_1\left(z \mid \frac{\tau}{3}\right)\theta_1(x \mid \tau)\,\theta_1(y \mid \tau)\,\theta_1(x-y \mid \tau)\,\theta_1(x+y \mid \tau) \qquad (49)$$

' u elde ederiz.

İspat: $\theta_1(x \mid \frac{\tau}{3})$' ün Teorem2.6.1' in tüm koşullarını sağladığını kanıtlamak kolaydır. Teorem2.6.1' de $f(x) = \theta_1(x \mid \frac{\tau}{3})$ alarak, Teorem2.6.2' yi çabucak elde ederiz; ve böylece Teorem2.6.2'nin ispatını tamamlarız.

2.7 ÜÇ TERİMLİ TETA ÖZDEŞLİĞİNİN KURULUŞU

Teorem 2.7.1:

$$f(z), f(z+\pi) = f(z) ve f(z+\pi\tau) = q^{-2}e^{-8iz}f(z) \qquad (50)$$

fonksiyonel eşitliklerini sağlayan tam fonksiyonlar olsun.

O halde z'den bağımsız bir C sabiti vardır öyle ki

$$f(z) - \ f(-z) = C\theta_1(2z \mid \tau) \qquad (51)$$

Teorem 2.7.2:

$$h(z), h(z+\pi) = -h(z) ve h(z+\pi\tau) = -q^{-\frac{3}{2}}e^{-6iz}h(z) \qquad (52)$$

fonksiyonel eşitliklerini sağlayan tam fonksiyonlar olsun.

O halde,

$$h(z) + h(-z) = \frac{\theta_1(2z \mid \tau)}{\theta_1(z \mid \tau)}h(0) \qquad (53)$$

'dır.

Buradan beşli çarpım özdeşliğinin ve bazı önemli teta fonksiyonu özdeşliklerinin türevini bu teorem sayesinde alırız.

Teorem 2.7.1 'in İspatı:

Teoremi ispatlamak için, aşağıdaki Lemma 2.7.1'i vereceğiz. Lemma 2.7.1, eliptik fonksiyonların temel teoremidir.

Lemma 2.7.1: Herhangi bir periyodik paralelkenar üzerinde bir eliptik fonksiyonun kendi kutuplarında ki rezidüleri toplamı sıfırdır. Şimdi Lemma2.7.1'i kullanarak Teorem2.7.1'i ispatlamaya başlayabiliriz.

İspat: $f(u)$ ile verilen fonksiyon, (50)'deki fonksiyonel eşitlikleri sağlasın.

$$g(u) = \frac{f(u)}{\theta_1(u-y \mid \tau)\theta_1(u+y \mid \tau)\theta_1(u-z \mid \tau)\theta_1(u+z \mid \tau)} \tag{54}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

Burada, geçici olarak, $0 < y, z < \pi$ 'nin $f(u)$ 'nun sıfır noktalarında farklı iki parametre olduğunu kabul edeceğiz.(34) 'deki fonksiyonel eşitlikleri kullanarak, $g(u+\pi) = g(u)$ olduğunu doğrulayabiliriz. Bundan dolayı $g(u)$, π ve $\pi\tau$ periyotlu bir eliptik fonksiyondur. y, $\pi - y$, z, $\pi - z$ 'nin onun kutupları olduğu ve bütün kutuplarının basit kutup olduğu açıktır.

Bu çalışmada g 'nin α 'daki rezidüsünü $res(g;\alpha)$ ile göstereceğiz. Böylece Lemma2.7.1

$$res(g;y) + res(g;\pi-y) + res(g;z) + res(g;\pi-z) = 0 \tag{55}$$

'yi verir.

Şimdi rezidüleri hesaplamaya başlayalım. L'Hospital kuralı ile,

$$res(g;y) = \lim_{u\to y}(u-y)g(u) = \lim_{u\to y} \frac{f(u)}{\theta_1(u+y \mid \tau)\theta_1(u-z \mid \tau)\theta_1(u+z \mid \tau)} \times \lim_{u\to y} \frac{u-y}{\theta_1(u-y \mid \tau)}$$

$$= \frac{f(y)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(2y \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{56}$$

y yerine $\pi - y$ yazıp, elde edilen denklemde $f(\pi - y) = f(-y)$, $\theta_1(2\pi - 2y) = -\theta_1(2y \mid \tau)$, $\theta_1(y-\pi-z \mid \tau) = -\theta_1(y+z \mid \tau)$, $\theta_1(y-\pi+z \mid \tau) = -\theta_1(y-z \mid \tau)$ bağıntılarını kullanarak

$$res(g;\pi-y) = -\frac{f(-y)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(2y \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{57}$$

’ü buluruz.

$g(u)$’nun y ve z’de simetrik olduğunu unutmayalım. (42) ve (43)’de y ve z’nin yerlerini değiştirirsek, sırasıyla

$$res(g;z) = -\frac{f(z)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(2z \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{58}$$

$$res(g;\pi - z) = \frac{f(z)}{\theta\prime_1(0 \mid \tau)\theta_1(2y \mid \tau)\theta_1(y-z \mid \tau)\theta_1(y+z \mid \tau)} \tag{59}$$

’ya ulaşırız. (56) ve (59)’yı (55)’de yerine koyup sonrada $\theta\prime_1(0 \mid \tau)\ \theta_1(y-z \mid \tau)\ \theta_1(y+z \mid \tau)$ faktörünü sadeleştirisek

$$\frac{f(z)-f(-z)}{\theta_1(2z \mid \tau)} = \frac{f(y)-f(-y)}{\theta_1(2y \mid \tau)} \tag{60}$$

’yi elde ederiz.

Bu özdeşlik $f(z) - f(-z)/\theta_1(2z \mid \tau)$’nun z’den bağımsız olduğunu gösterir. O halde bu sabit olmalıdır. Bu sabite C diyelim. Böylece (36)’yı elde ederiz. Analitik devam ile (36)’nın her z için sağlandığını biliyoruz. Bu da Teorem2.7.1’in ispatını tamamlar.

Teorem 2.7.2’nin İspatı: $h(z)$ fonksiyonu (52)’daki eşitlikleri sağlar ve $\theta_1(z \mid \tau)$’da (34)’deki eşitlikleri sağlar. Bu nedenle $h(z)\theta_1(z \mid \tau)$’nun (50)’deki fonksiyonel eşitlikleri sağladığını biliyoruz.

$$\theta_1(z \mid \tau)\,(h(z) + h(-z)) = C\theta_1(2z \mid \tau) \tag{61}$$

’i elde etmek için $f(z) = h(z)\theta_1(z \mid \tau)$ olarak alabiliriz.

Her iki tarafı $\theta_1(z \mid \tau)$’ya bölerek

$$h(z) + h(-z) = C\frac{\theta_1(2z \mid \tau)}{\theta_1(z \mid \tau)} \tag{62}$$

’yi buluruz.

Bu eşitlikte $z = 0$ yazarak $C = h(0)$’ı buluruz. (62)’de $C = h(0)'$ı yerine yazarak (53)’e ulaşırız ve buda Teorem2.7.2’nin ispatını tamamlar.

Teorem 2.7.3: Eğer ,$f_1(z)$ ve $f_2(z)$ iki farklı,

$$f(z+\pi) = -f(z) ve f(z+\pi\tau) = q^{-\frac{5}{2}}e^{-10iz}f(z) \tag{63}$$

fonksiyonel eşitliklerini sağlayan tam fonksiyonlar ise z'den bağımsız bir C sabiti vardır öyle ki

$$C\theta_1(z \mid \tau)\theta_1(2z \mid \tau) = \ f_2(0)\left(, f_1(z) + \ f_1(-z)\right) - f_1(0)\left(, f_2(z) + \ f_2(-z)\right) \tag{64}$$

'dır.

İspat: $f_1(z)$ ve $f_2(z)$'nin (63)'deki fonksiyonel eşitlikleri sağladığını varsayalım. O halde $\{f_2(0)f_1(z) - f_1(0)f_2(z)\} / \theta_1(z \mid \tau)$'da (50)'deki eşitlikleri sağlar. Böylece Teorem2.7.1'de
$f(z) = \{f_2(0)f_1(z) - f_1(0)f_2(z)\} / \theta_1(z \mid \tau)$ alabiliriz ve Teorem2.7.1'deki (51) Teorem2.7.3'deki (64)'e dönüşür. Buda Teorem2.7.3'ün ispatını tamamlar.

Teorem 2.7.4:

$$(q;q)_\infty \frac{\theta_1(2z \mid \tau)}{\theta_1(z \mid \tau)} = 2\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}\cos(6n+1)z \tag{65}$$

'dür.

İspat: (34)'ü kullanarak $e^{2iz}\theta_1(3z + \pi\tau \mid 3\tau)$'nun (52)'u sağladığını söyleyebiliriz, böylece (53)'de $h(z) = e^{2iz}\theta_1(3z+\pi\tau \mid 3\tau)$ alabiliriz. $\theta_1(z \mid \tau)$ için sonsuz çarpım gösterimini ve doğrudan hesaplamayı kullanarak

$$h(0) = \theta_1(\pi\tau \mid 3\tau) = iq^{-\frac{1}{8}}(q;q)_\infty$$

'u buluruz. Buradan

$$iq^{-\frac{1}{8}}(q;q)_\infty \frac{\theta_1(2z \mid \tau)}{\theta_1(z \mid \tau)} = e^{2iz}\theta_1(3z+\pi\tau \mid 3\tau) - e^{-2iz}\theta_1(3z-\pi\tau \mid 3\tau) \tag{66}$$

olur.

$$\theta_1\left(z \mid \tau\right) = 2q^{1/8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n q^{n(n+1)/2}\sin\left(2n+1\right)z$$

'de $\theta_1(z \mid \tau)$ için seri açılımını kullanarak

$$e^{2iz}\theta_1(3z+\pi\tau \mid 3\tau) = iq^{-\frac{1}{8}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}e^{-(6n+1)zi} \tag{67}$$

sonucuna ulaşırız.

z yerine $-z$ yazarak

$$e^{-2iz}\theta_1(3z-\pi\tau \mid 3\tau) = -iq^{-\frac{1}{8}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}e^{(6n+1)zi} \tag{68}$$

'yı buluruz. Euler özdeşliği $2\cos z = e^{iz}+e^{-iz}$ 'yi kullanarak

$$\begin{aligned} & e^{2iz}\theta_1(3z+\pi\tau \mid 3\tau) - e^{-2iz}\theta_1(3z-\pi\tau \mid 3\tau) \\ &= 2iq^{-\frac{1}{8}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}\cos(6n+1)z \end{aligned} \tag{69}$$

'yi kolayca buluruz. (65)'ü elde etmek için (66)'ün sağ tarafının yerine (69)'yi yazıp $iq^{-\frac{1}{8}}$ faktörünü sadeleştiririz.

Böylece Teorem2.7.4'ün ispatını tamamlamış oluruz.

Teorem 2.7.5:

$$\begin{aligned} & \theta_1(z+x_1 \mid \tau)\theta_1(z+x_2 \mid \tau)\theta_1(z+x_3 \mid \tau)\theta_1(z-x_1-x_2-x_3 \mid \tau) \\ & -\theta_1(z-x_1 \mid \tau)\theta_1(z-x_2 \mid \tau)\theta_1(z-x_3 \mid \tau)\theta_1(z+x_1+x_2+x_3 \mid \tau) \\ &= -\theta_1(x_1+x_2 \mid \tau)\theta_1(x_1+x_3 \mid \tau)\theta_1(x_2+x_3 \mid \tau)\theta_1(2z \mid \tau) \end{aligned} \tag{70}$$

'dür.

Teorem 2.7.5'in İspatı:

$$\theta_1(u+x_1 \mid \tau)\theta_1(u+x_2 \mid \tau)\theta_1(u+x_3 \mid \tau)\theta_1(u-x_1-x_2-x_3 \mid \tau)$$

fonksiyonu (50)'deki fonksiyonel eşitlikleri sağlar ve böylece (51)'da

$$f(u) = \theta_1(u+x_1 \mid \tau)\theta_1(u+x_2 \mid \tau)\theta_1(u+x_3 \mid \tau)\theta_1(u-x_1-x_2-x_3 \mid \tau) \tag{71}$$

alabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} & \theta_1(z+x_1 \mid \tau)\theta_1(z+x_2 \mid \tau)\theta_1(z+x_3 \mid \tau)\theta_1(z-x_1-x_2-x_3 \mid \tau) \\ & -\theta_1(z-x_1 \mid \tau)\theta_1(z-x_2 \mid \tau)\theta_1(z-x_3 \mid \tau)\theta_1(z+x_1+x_2+x_3 \mid \tau) = C\theta_1(2z \mid \tau) \end{aligned} \tag{72}$$

$z = x_1$ dersek ve $\theta_1(0 \mid \tau) = 0$ 'ı kullanırsak

$$-\theta_1(2x_1 \mid \tau)\theta_1(x_1+x_2 \mid \tau)\theta_1(x_1+x_3 \mid \tau)\theta_1(x_2+x_3 \mid \tau) = C\theta_1(2x_1 \mid \tau) \quad (73)$$

'ü buluruz. Buradan

$$C = -\theta_1(x_1 + x_2 \mid \tau)\theta_1(x_1 + x_3 \mid \tau)\theta_1(x_2 + x_3 \mid \tau) \quad (74)$$

'ü buluruz. Bunu (71) ile birleştirerek (70)'e ulaşırız. Bu da Teorem2.7.5'in ispatını tamamlar.

Şimdi logaritmik türev metodunu ve Teorem2.7.5'i kullnarak Teorem2.7.1.1'i ispatlamaya geldik. (70)'deki özdeşlik aşağıdaki biçimde yazılabilir.

2.7.1 Jacobi Özdeşliğinin Elde Edilmesi

Teorem 2.7.1.1:

$$\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_1 \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_2 \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_3 \mid \tau) - \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_1 + x_2 + x_3 \mid \tau)$$
$$= \theta\prime_1(0 \mid \tau)\frac{\theta_1(x_1 + x_2 \mid \tau)\theta_1(x_1 + x_3 \mid \tau)\theta_1(x_2 + x_3 \mid \tau)}{\theta_1(x_1 \mid \tau)\theta_1(x_2 \mid \tau)\theta_1(x_3 \mid \tau)\theta_1(x_1 + x_2 + x_3 \mid \tau)} \quad (75)$$

Bu, Sezgö tarafından çalışılmış halkanın çekirdeği olan, Shen ve McCullough'un özdeşliğidir.

Teorem 2.7.1.1'in İspatı*:*

$f(z)$ ve C'nin sırasıyla (71) ve (74) ile tanımlı olduğu yerde,

$$f(z) - f(-z) = C\theta_1(2z \mid \tau) \quad (76)$$

Yukarıdaki eşitliğin z'ye göre türevini alıp, $z = 0$ dersek;

$$f\prime(0) = C\theta\prime_1(0 \mid \tau) \quad (77)$$

sonucuna varırız. Logaritmik türev metodunu kullanarak

$$f\prime(z) = f(z)\left\{\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(z + x_1 \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(z + x_2 \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(z + x_3 \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(z - x_1 - x_2 - x_3 \mid \tau)\right\} \quad (78)$$

’yi buluruz. Bunu

$$f\prime(0)=f(0)\left\{\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_1\mid\tau)+\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_2\mid\tau)+\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_3\mid\tau)-\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x_1+x_2+x_3\mid\tau)\right\} \tag{79}$$

takip eder. (71)’den

$$f(0)=-\theta_1(x_1\mid\tau)\theta_1(x_2\mid\tau)\theta_1(x_3\mid\tau)\theta_1(x_1+x_2+x_3\mid\tau) \tag{80}$$

’u kolayca elde ederiz.

(74), (77), (79) ve (80)’u birleştirerek (70)’e ulaşırız. Teorem2.7.1.1’in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.7.1.2:

$$(q,z,q/z;q)_\infty(z^2q,q/z^2;q^2)_\infty=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{n(3n+1)/2}(z^{-3n}-z^{3n+1}) \tag{81}$$

’dir.

(34)’ü kullanarak, $\theta_1(z+x\mid\tau)\theta_1(z+y\mid\tau)\theta_1(z-x-y\mid\tau)$’nun Teorem2.7.2’nin şartlarını sağladığı gösterilir. Teorem2.7.2’de
$h(z)=\theta_1(z+x\mid\tau)\theta_1(z+y\mid\tau)\theta_1(z-x-y\mid\tau)$ alarak aşağıdakini elde ederiz.

Teorem 2.7.1.3:

$$\theta_1(z+x\mid\tau)\theta_1(z+y\mid\tau)\theta_1(z-x-y\mid\tau)-\theta_1(z-x\mid\tau)\theta_1(z-y\mid\tau)\theta_1(z+x+y\mid\tau)$$
$$=-\theta_1(x\mid\tau)\theta_1(y\mid\tau)\theta_1(x+y\mid\tau)\frac{\theta_1(2z\mid\tau)}{\theta_1(z\mid\tau)} \tag{82}$$

$f(z)=\theta_1^3(z+\frac{\pi}{3}\mid\tau)$’nun Teorem2.7.2’nin tüm şartlarını sağladığını kontrol edebiliriz. $\theta_1(z\mid\tau)$ için sonsuz çarpım gösterimini kullanarak

$$\theta_1(\frac{\pi}{3}\mid\tau)=\sqrt[2]{3}q^{\frac{1}{8}}(q^3;q^3)_\infty$$

olduğunu görmek kolaydır. Buradan sonraki özdeşliği elde ederiz.

Teorem 2.7.1.4:

$$\theta_1^3(z+\frac{\pi}{3}\mid\tau)-\theta_1^3(z-\frac{\pi}{3}\mid\tau)=3\sqrt[2]{3}q^{\frac{3}{8}}(q^3;q^3)_\infty\frac{\theta_1(2z\mid\tau)}{\theta_1(z\mid\tau)} \tag{83}$$

'dur.

Teorem 2.7.1.5: $\theta_1(x \mid \tau)$ (33)'daki gibi tanımlı Jacobi teta fonksiyonu olsun ve $a(q)$'da

$$a(q) := 1 + 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q^{3n+1}}{1-q^{3n+1}} - \frac{q^{3n+2}}{1-q^{3n+2}}\right) \tag{84}$$

ile tanımlı Ramanujan fonksiyonu olsun. Böylece

$$\theta_1^3\left(x + \frac{\pi}{3} \mid \tau\right) + \theta_1^3\left(x - \frac{\pi}{3} \mid \tau\right) - \theta_1^3(x \mid \tau) = 3a(q)\,\theta_1(3x \mid 3\tau) \tag{85}$$

ve

$$\theta_1^3(x \mid 3\tau) - q^{-1/2}e^{2ix}\theta_1^3(x + \pi\tau \mid 3\tau) - q^{-1/2}e^{-2ix}\theta_1^3(x - \pi\tau \mid 3\tau) = a(q)\,\theta_1(x \mid \tau) \tag{86}$$

'ü elde ederiz.

Teorem 2.7.1.5'in İspatı: $\theta_1(z \mid \tau)$ için $(z, zq, zq^2; q^3)_\infty = (z;q)_\infty$ ve sonsuz çarpım gösterimini kullanırsak,

$$\theta_1(z \mid \frac{\tau}{3}) = \frac{\left(q^{1/3}, q^{1/3}\right)_\infty}{(q,q)_\infty^3}\theta_1(z \mid \tau)\theta_1(z + \frac{\pi\tau}{3} \mid \tau)\theta_1(z - \frac{\pi\tau}{3} \mid \tau) \tag{87}$$

'i ve

$$\theta_1(\frac{\pi\tau}{3} \mid \tau) = iq^{-1/(24)}\left(q^{1/3}, q^{1/3}\right)_\infty \text{ ve } \theta_1(\frac{2\pi\tau}{3} \mid \tau) = iq^{-5/(24)}\left(q^{1/3}, q^{1/3}\right)_\infty \tag{88}$$

'yi kolayca bulabiliriz.

$$a(q) := 1 + 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q^{3n+1}}{1-q^{3n+1}} - \frac{q^{3n+2}}{1-q^{3n+2}}\right) \tag{89}$$

Ramanujan fonksiyonunu hatırlayalım.

$$\theta_1(z \mid \tau) = 2q^{1/8}(\sin z)\left(q, qe^{2iz}, qe^{-2iz}; q\right)_\infty = iq^{1/8}e^{-2iz}\left(q, qe^{2iz}, qe^{-2iz}; q\right)_\infty$$

'de logaritmik türevi uygularsak,

$$\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(z \mid \tau) = -i - 2i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n e^{2iz}}{1-q^n e^{2iz}} + 2i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^n e^{-2iz}}{1-q^n e^{-2iz}} \tag{90}$$

'ü elde ederiz.

Yukarıdaki iki eşitliği karşılaştırırsak,

$$a\left(q\right)=-2+3i\frac{\theta\prime_{1}}{\theta_{1}}(\pi\tau\mid 3\tau) \tag{91}$$

sonucuna varırız.

$\theta_1(z\mid\tau)$'nun logaritmik türevi için trigonometrik seri açılımının

$$\frac{\theta\prime_{1}}{\theta_{1}}(z\mid\tau)=\cot z+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{1-q^{n}}\sin 2nz \tag{92}$$

olduğu iyi bilinir.

Böylece

$$\frac{\theta\prime_{1}}{\theta_{1}}(\frac{\pi}{3}\mid\tau)\frac{1}{\sqrt{3}}a(q) \tag{93}$$

vardır.

Şimdi Teorem2.7.1.5'i ispatlamak için hazırız.

İspat: (39)'un her tarafının z'ye göre türevini alıp $z=0$ yazarsak

$$\theta\prime_{1}(0\mid\tau)\left\{f(y)-f(-y)\right\}\theta_{1}^{3}(x\mid\tau)-\theta\prime_{1}(0\mid\tau)\left\{f(x)-f(-x)\right\}\theta_{1}^{3}(y\mid\tau)$$

$$=2f\prime(0)\theta_{1}(x\mid\tau)\theta_{1}(y\mid\tau)\theta_{1}(x-y\mid\tau)\theta_{1}(x+y\mid\tau) \tag{94}$$

'i elde ederiz. Yukarıdaki eşitliğe $\theta\prime_1(0\mid\tau)=2q^{1/8}(q;q)_{\infty}^{3}$ 'u eklersek

$$q^{1/8}(q;q)_{\infty}^{3}\left\{f(y)-f(-y)\right\}\theta_{1}^{3}(x\mid\tau)-q^{1/8}(q;q)_{\infty}^{3}\left\{f(x)-f(-x)\right\}\theta_{1}^{3}(y\mid\tau)$$

$$=f\prime(0)\theta_{1}(x\mid\tau)\theta_{1}(y\mid\tau)\theta_{1}(x-y\mid\tau)\theta_{1}(x+y\mid\tau) \tag{95}$$

'u buluruz.

$\theta_1^3(x+\frac{\pi}{3}\mid\tau)$'nun (38)'i karşıladığını doğrulamak kolaydır, o halde (95)'da $f(x)=\theta_1^3(x+\frac{\pi}{3}\mid\tau)$ alabiliriz. $\theta_1\left(\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)=\sqrt{3}q^{1/8}\left(q^3;q^3\right)$, (93) ve direkt hesaplama ile

$$f\prime(0)=3\theta_{1}^{3}\left(\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)\frac{\theta\prime_{1}}{\theta_{1}}\left(\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)=3q^{3/8}\left(q^{3};q^{3}\right)_{\infty}^{3}a(q) \tag{96}$$

'u buluruz ve böylece

$$q^{1/8}\left(q^3;q^3\right)_\infty^3 a(q)\theta_1(x\mid\tau)\theta_1(y\mid\tau)\theta_1(x-y\mid\tau)\theta_1(x+y\mid\tau) \tag{97}$$

'i elde ederiz.

Yukarıdaki eşitlikte $y=\frac{\pi}{3}$ alarak ve $\theta_1\left(\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)=\theta_1\left(\frac{2\pi}{3}\mid\tau\right)=\sqrt{3}q^{1/8}\left(q^3;q^3\right)_\infty$ olduğunu belirterek

$$\theta_1^3(x\mid\tau)-\theta_1^3\left(x+\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)-\theta_1^3\left(x-\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)=3a(q)\frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty^3}\theta_1(x\mid\tau)\theta_1\left(x+\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)\theta_1\left(x-\frac{\pi}{3}\mid\tau\right) \tag{98}$$

'yi elde ederiz.

$$\theta_1(3z\mid 3\tau)=-\frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty^3}\theta_1(z\mid\tau)\theta_1\left(z+\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)\theta_1\left(z-\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)$$

'den

$$\theta_1(3x\mid 3\tau)=-\frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty^3}\theta_1(x\mid\tau)\theta_1\left(x+\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)\theta_1\left(x-\frac{\pi}{3}\mid\tau\right) \tag{99}$$

'ü buluruz. (85)'yi elde etmek için (98)'nin sağ tarafının yerine yukarıdaki eşitliği yazarız.

Ancak daha önce olduğu gibi aynı adımlarla ilerleyerek, (95)'da $f(x)=e^{2ix}\theta_1^3\left(x+\frac{\pi\tau}{3}\mid\tau\right)$ alırsak ve sonra $y=\frac{\pi\tau}{3}$ yazarsak ve (87), (88) ve (91)'i kullanırsak;

$$\begin{aligned}\theta_1^3(x\mid\tau)-q^{1/6}e^{2ix}\theta_1^3\left(x+\frac{\pi\tau}{3}\mid\tau\right)-q^{1/6}e^{-2ix}\theta_1^3\left(x-\frac{\pi\tau}{3}\mid\tau\right)\\=a(q^{1/3})\theta_1\left(x\mid\frac{\tau}{3}\right)\end{aligned} \tag{100}$$

'ü buluruz.

q yerine q^3 yazarak, (86)'ü elde ederiz. Böylece Teorem2.3.5'in ispatını tamamlarız.

Teorem 2.7.1.6:

$$\begin{gathered}(q;q)_\infty^3\ \theta_1^3(x\mid\tau)\ \theta_1^3(3y\mid 3\tau)-(q;q)_\infty^3\ \theta_1^3(y\mid\tau)\ \theta_1^3(3x\mid 3\tau)\\=3q^{1/4}\left(q^3;q^3\right)_\infty^3\ \theta_1(x\mid\tau)\ \theta_1(y\mid\tau)\ \theta_1(x-y\mid\tau)\ \theta_1(x+y\mid\tau)\end{gathered} \tag{101}$$

ve

$$\begin{aligned}&(q;q)_\infty^3\ \theta_1^3(x\mid\tau)\,\theta_1\left(y\mid\frac{\tau}{3}\right)-(q;q)_\infty^3\ \theta_1^3(y\mid\tau)\,\theta_1\left(x\mid\frac{\tau}{3}\right)\\&=q^{-1/(12)}\left(q^{1/3};q^{1/3}\right)_\infty^3\ \theta_1(x\mid\tau)\ \theta_1(y\mid\tau)\ \theta_1(x-y\mid\tau)\ \theta_1(x+y\mid\tau)\end{aligned}\tag{102}$$

'e sahibiz.

Teorem 2.7.1.6'nın İspatı: Teorem2.6.1'de $z=\frac{\pi}{3}$ alarak ve

$$\theta_1(3z\mid 3\tau)=-\frac{(q^3;q^3)_\infty}{(q;q)_\infty^3}\theta_1(z\mid\tau)\theta_1\left(z+\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)\theta_1\left(z-\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)$$

ve

$$\theta_1\left(\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)=\theta_1\left(\frac{2\pi}{3}\mid\tau\right)=\sqrt{3}q^{1/8}\left(q^3;q^3\right)_\infty$$

'u kullanarak

$$\begin{aligned}\sqrt{3}q^{1/8}(q;q)_\infty^3\{f(x)-f(-x)\}\,\theta_1(3y\mid 3\tau)&=\sqrt{3}q^{1/8}(q;q)_\infty^3\{f(y)-f(-y)\}\,\theta_1(3x\mid 3\tau)\\&+\left\{f(\frac{\pi}{3})-f(-\frac{\pi}{3})\theta_1(x\mid\tau)\,\theta_1(y\mid\tau)\,\theta_1(x+y\mid\tau)\,\theta_1(x-y\mid\tau)\right\}\end{aligned}\tag{103}$$

'i elde ederiz.

$\theta_1^3(x\mid\tau)$'nun Teorem2.6.1'in tüm şartlarını sağlar. $f(x)=\theta_1^3(x\mid\tau)$ seçer ve sonra

$$\theta_1\left(\frac{\pi}{3}\mid\tau\right)=\theta_1\left(\frac{2\pi}{3}\mid\tau\right)=\sqrt{3}q^{1/8}\left(q^3;q^3\right)_\infty$$

'yi çözüm eşitliğinde kullanarak (101)'ü elde ederiz.

Teorem2.1.1'de $z=\frac{\pi\tau}{3}$ alıp ve (87) ve (88)'yi kullanarak;

$$\begin{aligned}iq^{-1/(24)}(q;q)_\infty^3\{f(x)-f(-x)\}\,\theta_1(y\mid\frac{\tau}{3})&=iq^{-1/(24)}(q;q)_\infty^3\{f(y)-f(-y)\}\,\theta_1(x\mid\frac{\tau}{3})\\&-\left\{f(\frac{\pi\tau}{3})-f(-\frac{\pi\tau}{3})\theta_1(x\mid\tau)\,\theta_1(y\mid\tau)\,\theta_1(x+y\mid\tau)\,\theta_1(x-y\mid\tau)\right\}\end{aligned}\tag{104}$$

'yi elde ederiz.

$f(x)=\theta_1^3(x\mid\tau)$ seçip ve (88)'yi çözüm eşitliğinde kullanırsak, (102)'i elde ederiz. Buda Teorem2.8.6'nın ispatını tamamlar.

Teorem 2.7.1.7: Her x, y için

$$q^{1/(12)}(q,q)_\infty^2\,\theta_1(x\mid\frac{\tau}{3})\theta_1(3y\mid 3\tau)-q^{1/(12)}(q,q)_\infty^2\,\theta_1(y\mid\frac{\tau}{3})\theta_1(3x\mid 3\tau)$$

$$= \theta_1(x \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau) \tag{105}$$

özdeşliği vardır.

(33)'nın her iki tarafının z'ye göre diferansiyelini alıp, sonra $z = 0$ dersek;

$$\theta\prime_1(0 \mid \tau) = q^{1/8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)/2} \tag{106}$$

olduğunu kolayca buluruz, ve ard arda alınan diferansiyellerle

$$\theta\prime\prime\prime_1(0 \mid \tau) = -q^{1/8} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^3 q^{n(n+1)/2} \tag{107}$$

'i elde ederiz.

$$\theta_1(z \mid \tau) = 2q^{1/8}(\sin z) \left(q, qe^{2iz}, qe^{-2iz}; q\right)_\infty = iq^{1/8} e^{-2iz} \left(q, qe^{2iz}, qe^{-2iz}; q\right)_\infty$$

'un diferansiyeli

$$\theta\prime_1(0 \mid \tau) = 2q^{1/8} \left(q, q\right)_\infty^3 \tag{108}$$

'yı verir.

(106) ve (108)'yı karşılaştırarak

$$\left(q, q\right)_\infty^3 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)/2} \tag{109}$$

Jacobi özdeşliğini elde ederiz.

2.8 HİRSCHHORN - GARVAN - BORWEİN'in İKİ DEĞİŞKENLİ KÜBİK TETA FONKSİYONLARI İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER

$\theta_1(x-y \mid \tau) = -\theta_1(y-x \mid \tau)$ olduğunu belirterek, (105)'ü

$$q^{1/(12)} \left(q, q\right)_\infty^2 \theta_1(y \mid \frac{\tau}{3})\theta_1(3x \mid 3\tau) - q^{1/(12)} \left(q, q\right)_\infty^2 \theta_1(x \mid \frac{\tau}{3})\theta_1(3y \mid 3\tau)$$

$$= \theta_1(x \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau) \tag{110}$$

olarak yeniden yazabiliriz.

$$\theta_1(z \mid \tau) = 2q^{1/8}(\sin z)\left(q, qe^{2iz}, qe^{-2iz}; q\right)_\infty = iq^{1/8}e^{-2iz}\left(q, qe^{2iz}, qe^{-2iz}; q\right)_\infty$$

'nin ikinci eşitliğini yukarıdaki eşitlikte kullanarak ve çözüm eşitliğinde $e^{2ix} = x$ ve $e^{2iy} = y$ değişken değiştirmesi yaparak aşağıdaki sonsuz çarpım özdeşliğini elde ederiz.

Teorem 2.8.1:

$$\begin{aligned} &(q,q)_\infty^2 \left(q^{1/3}, x, q^{1/3}/x; q^{1/3}\right)_\infty \left(q^3, y^3, q^3/y^3; q^3\right)_\infty \\ &-yx^{-1}(q,q)_\infty^2 \left(q^{1/3}, y, q^{1/3}/y; q^{1/3}\right)_\infty \left(q^3, x^3, q^3/x^3; q^3\right)_\infty \\ &= (q,x,q/x;q)_\infty (q,y,q/y;q)_\infty (q,y/x,qx/y;q)_\infty (q,xy,q/xy;q)_\infty \end{aligned} \tag{111}$$

Jacobi'nin üçlü çarpım özdeşliğine başvurarak

$$\begin{aligned} &(q,q)_\infty^2 \left(q^{1/3}, x, q^{1/3}/x; q^{1/3}\right)_\infty \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{3n(n-1)/2} y^{3n} \\ &-yx^{-1}(q,q)_\infty^2 \left(q^3, x^3, q^3/x^3; q^3\right)_\infty \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/6} y^n \\ &= (q,x,q/x;q)_\infty \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/2} y^n\right) \\ &\times \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/2} y^n x^{-n}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(n-1)/2} y^n x^n\right) \end{aligned} \tag{112}$$

Yukarıdaki eşitliğin, sağ tarafında y'nin katsayısının

$$-(q,x,q/x;q)_\infty \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2-m-n} x^{n-m} \tag{113}$$

olduğu ve sol tarafında y'nin katsayısının

$$-x^{-1}(q,q)_\infty^2 \left(q^3, x^3, q^3/x^3; q^3\right)_\infty \tag{114}$$

olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki iki sayıyı eşitleyerek;

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2-m-n} x^{n-m} = (q,q)_\infty \left(q^3;q^3\right)_\infty \left(1+x+x^{-1}\right) \frac{(q^3x^3, q^3/x^3; q^3)_\infty}{(qx, q/x; q)_\infty} \tag{115}$$

’ya ulaşırız

İndislerde $m \to -m$ ve $n \to -n$ değişimleri yaparak

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2+m+n} x^{n-m} = (q,q)_\infty \left(q^3;q^3\right)_\infty \left(1+x+x^{-1}\right) \frac{(q^3x^3, q^3/x^3; q^3)_\infty}{(qx, q/x; q)_\infty} \tag{116}$$

’yi elde ederiz.

(112)’de y’den bağımsız terimleri eşitleyerek,

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2} x^{m-n} = q^{1/3} (q,q)_\infty \left(q^3;q^3\right)_\infty \left(1+x+x^{-1}\right) \frac{(q^3x^3, q^3/x^3; q^3)_\infty}{(qx, q/x; q)_\infty}$$

$$+ (q,q)_\infty \left(q^{1/3};q^{1/3}\right)_\infty \frac{\left(q^{1/3}x, q^{1/3}/x^{-1}; q^{1/3}\right)_\infty}{(qx, q/x; q)_\infty} \tag{117}$$

’i buluruz. Yukarıdaki iki eşitliği birleştirerek

$$(q,q)_\infty \left(q^{1/3};q^{1/3}\right)_\infty \frac{\left(q^{1/3}x, q^{1/3}/x^{-1}; q^{1/3}\right)_\infty}{(qx, q/x; q)_\infty} \tag{118}$$

$$= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2} x^{m-n} - q^{1/3} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2+m+n} x^{n-m}$$

’u buluruz.

ω, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$ ile verilen birleşimin basit küpkökü olsun. (118)’un sağ tarafının

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{\left(m^2+mn+n^2\right)/3} x^n \omega^{m-n} \tag{119}$$

’a eşit olduğunu kolayca buluruz. Dolayısıyla

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{\left(m^2+mn+n^2\right)/3} x^n \omega^{m-n} = (q,q)_\infty \left(q^{1/3};q^{1/3}\right)_\infty \frac{\left(q^{1/3}x, q^{1/3}/x^{-1}; q^{1/3}\right)_\infty}{(qx, q/x; q)_\infty} \tag{120}$$

vardır. q yerine q^3 yazarak,

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2} x^n \omega^{m-n} = (q,q)_\infty \left(q^3;q^3\right)_\infty \frac{(q^3x, q^3/x^{-1}; q^3)_\infty}{(q^3x, q^3/x; q^3)_\infty} \tag{121}$$

’yi elde ederiz.

Eğer;

$$a\left(q,x\right)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}x^{m-n} \tag{122}$$

$$b(q,x)=\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}x^{n}\omega^{m-n} \tag{123}$$

$$c(q,x)=q^{1/3}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2+m+n}x^{m-n} \tag{124}$$

ise, Hirschhorn, Garvan ve Borwein'in önemli özdeşliğinden elde edilebilen (117)

$$a\left(q,x\right)=c\left(q,x\right)+b\left(q^{1/3},x\right) \tag{125}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 2.8.2:

$$a^3\left(q,x\right)=c^3\left(q,x\right)+b^2\left(1,x\right)+b\left(q,x^3\right) \tag{126}$$

vardır.

2.9 WİERSTRASS $\wp$ FONKSİYONU İÇİN TOPLAM TEOREMİ

İlk olarak Teorem2.7.1.3'ü ve logaritmik türev tekniğini kullanarak aşağıdaki lemmayı ispatlayacağız.

Lemma 2.9.1:

$$\left\{\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x\mid\tau)+\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(y\mid\tau)-\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x+y\mid\tau)\right\}^2$$

$$=-1+24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(x\mid\tau)-\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(y\mid\tau)-\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(x+y\mid\tau) \tag{127}$$

'dir.

İspat:

$$f_1(z)=\theta_1(z+x\mid\tau)\theta_1(z+y\mid\tau)\theta_1(z-x-y\mid\tau) \tag{128}$$

$$f_2(z) = \theta_1(z - x \mid \tau)\theta_1(z - y \mid \tau)\theta_1(z + x + y \mid \tau) \tag{129}$$

$$f_3(z) = \frac{\theta_1(2z \mid \tau)}{\theta_1(z \mid \tau)} \tag{130}$$

. Teorem6'da (82) özdeşliğini

$$f_1(z) - f_2(z) = -\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x + y \mid \tau)f_3(z) \tag{131}$$

formunda yazarız. (131)'nin z'ye göre iki kez türevini alıp $z = 0$ yazarsak;

$$f''_1(0) - f''_2(0) = -\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x + y \mid \tau)f''_3(0) \tag{132}$$

'yı elde ederiz.

Şimdi $f''_1(0)$,$f''_2(0)$ ve $f''_3(0)$'ı hesaplamaya başlayalım. $f_1(z)$'nin z'ye göre iki kez türevini alıp, logaritmik türev metodunu kullanarak

$$\phi(z) = \frac{\theta'_1}{\theta_1}(z + x \mid \tau) + \frac{\theta'_1}{\theta_1}(z + y \mid \tau) - \frac{\theta'_1}{\theta_1}(z - x - y \mid \tau) \tag{133}$$

olduğu yerde

$$f''_1(z) = f_1(z)\left\{\phi(z)^2 + \phi'(z)\right\} \tag{134}$$

'yi kolayca buluruz.

Bunu

$$f''_1(0) = -\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x + y \mid \tau)\times$$
$$\left\{\frac{\theta'_1}{\theta_1}(x \mid \tau) + \frac{\theta'_1}{\theta_1}(y \mid \tau) - \frac{\theta'_1}{\theta_1}(x + y \mid \tau)^2 + \left(\frac{\theta'_1}{\theta_1}\right)'(x \mid \tau) + \left(\frac{\theta'_1}{\theta_1}\right)'(y \mid \tau) + \left(\frac{\theta'_1}{\theta_1}\right)'(x + y \mid \tau)\right\} \tag{135}$$

takip eder.

Doğrudan hesaplama yöntemi ile

$$f''_2(0) = -f''_1(0) \tag{136}$$

'u buluruz.

(134)'deki gibi ilerleyerek

$$f''_3(z) = \frac{\theta_1(2z \mid \tau)}{\theta_1(z \mid \tau)}\left\{\left(2\frac{\theta'_1}{\theta_1}(2z \mid \tau) - \frac{\theta'_1}{\theta_1}(z \mid \tau)\right)^2 + \left(2\frac{\theta'_1}{\theta_1}(2z \mid \tau) - \frac{\theta'_1}{\theta_1}(z \mid \tau)\right)'\right\} \tag{137}$$

'i elde ederiz.

$$\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(z \mid \tau) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{B_{2k}}{(2k)!} E_{2k}(\tau)\, z^{2k-1}$$

'den

$$2\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(2z \mid \tau) - \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(z \mid \tau) = -E_2(\tau)\, z + O\left(z^3\right) \tag{138}$$

'yi buluruz. Bundan dolayı

$$f\prime\prime_3(0) = -E_2(\tau) \tag{139}$$

'dür.

(127)'i elde etmek için (135), (136) ve (139)'ü (132)'ya yerleştiririz ve $-\theta_1(x \mid \tau)\theta_1(y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau)$'yi sadeleştiririz. Buda Lemma2.9.1'in ispatını tamamlar.

Weierstrass$\wp$ fonksiyonunun π ve $\pi\tau$ periyotlarının gösterimi için $\wp(z \mid \tau)$'yu kullnacağız. Böylelikle $\wp(z \mid \tau)$ için aşağıdaki toplam formülünü buluruz.

Teorem 2.9.1:

$$\wp(x \mid \tau) + \wp(y \mid \tau) + \wp(x+y \mid \tau) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp\prime(x \mid \tau) - \wp\prime(y \mid \tau)}{\wp(x \mid \tau) - \wp(y \mid \tau)}\right) \tag{140}$$

İspat:

$$\begin{aligned}\wp(z \mid \tau) &= \csc^2 - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}\cos 2nz - \frac{1}{3}E_2(\tau) \\ &= -\frac{1}{3}E_2(\tau) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(z \mid \tau)\end{aligned} \tag{141}$$

'dir ve böylece

$$\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(x \mid \tau) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(y \mid \tau) = \theta\prime_1(0 \mid \tau)^2 \frac{\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y \mid \tau)}{\theta_1(x \mid \tau)^2\theta_1(y \mid \tau)^2}$$

,

$$\wp(x \mid \tau) - \wp(y \mid \tau) = -\theta\prime_1(0 \mid \tau)^2 \frac{\theta_1(x+y \mid \tau)\theta_1(x-y \mid \tau)}{\theta_1^2(x \mid \tau)\theta_1^2(y \mid \tau)} \tag{142}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

x yerine $x+z$ ve y yerine $y+z$ yazarak

$$\wp(x+z \mid \tau) - \wp(y+z \mid \tau) = -\theta\prime_1(0 \mid \tau)^2 \frac{\theta_1(x-y \mid \tau)\theta_1(x+y+2z \mid \tau)}{\theta_1^2(x+z \mid \tau)\theta_1^2(y+z \mid \tau)} \tag{143}$$

'yi elde ederiz. z civarında logaritmik türev

$$\frac{\wp\prime(x+z \mid \tau) - \wp\prime(y+z \mid \tau)}{\wp(x+z \mid \tau) - \wp(y+z \mid \tau)} = \tag{144}$$
$$-2\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x+z \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(y+z \mid \tau) - \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x+y+2z \mid \tau)\right)$$

'i verir. $z=0$ yazarsak, eşitlik;

$$\frac{\wp\prime(x \mid \tau) - \wp\prime(y \mid \tau)}{\wp(x \mid \tau) - \wp(y \mid \tau)} = -2\left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(y \mid \tau) - \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x+y \mid \tau)\right) \tag{145}$$

haline gelir.

(141) ışığında, (127)'deki özdeşlik

$$\left\{\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x \mid \tau) + \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(y \mid \tau) - \frac{\theta\prime_1}{\theta_1}(x+y \mid \tau)\right\}^2$$
$$= -E_2(\tau) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(x \mid \tau) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(y \mid \tau) - \left(\frac{\theta\prime_1}{\theta_1}\right)\prime(x+y \mid \tau)$$
$$= \wp(x \mid \tau) + \wp(y \mid \tau) + \wp(x+y \mid \tau) \tag{146}$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki eşitlikleri birleştirerek (140)'e ulaşırız. Buda teoremin ispatını tamamlar.

3 BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 TETA SERİLERİ

$P(n)$ keyfi bir polinom; a, b, c; n'den bağımsız olmak üzere

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(n) \exp\left\{An^2 + Bn + C\right\} \tag{147}$$

serilerini göz önüne alalım. Eğer $\mathrm{Re}(A) < 0$ ise,

$$\left|\frac{T_{n+1}}{T_n}\right| = \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| \exp\left\{(2n+1)\,\mathrm{Re}(A) + \mathrm{Re}(B)\right\} \tag{148}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = 1 \tag{149}$$

olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{T_{n+1}}{T_n}\right| = 0 \tag{150}$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{T_{n-1}}{T_n}\right| = 0 \tag{151}$$

olur. Böylece (147) ile tanımlı seri mutlak yakınsaktır.

$P(n)$'deki katsayılar ve A, B, C farklı değişkenlerin fonksiyonları ise, bu katsayıların sınırlı olduğu ve $S \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathrm{Re}(A) < -\delta$ olduğu değişken uzayın herhangi bir bölgesinde tanımlı seriler mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bizim şimdi çalışacağımız serilerde bağımsız değişkenler τ ve u olup; $A = \pi i \tau$; B ve C; τ ve u değişkenlerine göre yazılmış lineer polinomlardır. Eğer $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ ise $\mathrm{Re}(A) < 0$ olur ki τ ve u değişkenlerinin sınırlı olduğu ve herhangi bir $S \in \mathbb{R}^+$ için $\mathrm{Im}(\tau) > \delta$ olduğu uzayın herhangi bir bölgesinde seri düzgün yakınsaktır. Bu seri u, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin elemanı; τ, H üst yarı düzlemin elemanı olmak üzere analitik bir fonksiyon tanımlar. Bu tip serilere Teta serileri denir.

Herhangi iki ϵ, ϵ' reel sayısı için genelleştirilmiş Teta fonksiyonu

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u, \tau) = \sum_n \exp \left\{ \left(n + \frac{\epsilon}{2}\right)^2 \pi i \tau + 2i \left(n + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(u + \frac{\epsilon'}{2}\pi\right) \right\} \quad (152)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ gösterimine Teta fonksiyonunun karakteristiği ve τ ($\mathrm{Im}(\tau) > 0$) değerine de fonksiyonun periyodu denir. Yukarıdaki eşitlikte $q = e^{\pi i \tau}$ alırsak Teta fonksiyonu

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u, q) = \sum_n q^{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2} e^{2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)} \quad (153)$$

olur.

a ve b sayıları reel sayılar olmak üzere $\tau = a + bi$ alırsak, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ için $q = e^{\pi i \tau} = \left(e^{a+bi}\right)^{\pi i} = e^{a\pi i} e^{-\pi b}$ olacağı için $|q| = \left|e^{-\pi b}\right| < 1$ eşitsizliği elde edilir. Buradan $u \epsilon \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ olmak üzere $\tau \epsilon \mathbb{C}$ ve q, $0 < |q| < 1$ olan birim çemberin yakınsaklık bölgesinde bulunmak üzere (152) ile tanımlı Teta fonksiyonu analitiktir.

3.2 BİRİNCİ DERECEDEN GENELLEŞTİRİLMİŞ TETA FONKSİYONU

u kompleks sayısı, diğer τ kompleks sayısı $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ olacak şekilde üst yarı düzlemde ve elemanları tamsayılardan oluşan $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ 2×1'lik θ-Teta karakteristiği verilsin. Argümenti u olan, θ-Teta periyodu τ, karateristiği $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ olan birinci dereceden θ-Teta fonksiyonu aşağıdaki eşitlikle tanımlı olsun.

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u, \tau) = \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(u + \frac{\epsilon'}{2}\right) \right\} \quad (154)$$

Teta fonksiyonunun işareti; ϵ ve ϵ' değerlerinin rezidü sınıfları ile belirlenir. (Rauch, 1973)

Teorem 3.2.1: Eğer $\epsilon = 2\upsilon' + \breve{E}$ ve $\epsilon' = 2\upsilon' + \breve{E}'$ ise

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau) = (-1)^{\epsilon\upsilon'} \begin{bmatrix} \breve{E} \\ \breve{E}' \end{bmatrix} (u,\tau) \tag{155}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: (154)'den

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \pm 2 \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau) = \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \pm 1 \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \pm 1 \right) \left(u + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\}$$

$$= \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau) \tag{156}$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau) = \begin{bmatrix} \breve{E} \\ \breve{E}' \end{bmatrix} (u,\tau) \tag{157}$$

'ya ulaşılır.

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \pm 2 \end{bmatrix} (u;\tau) &= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(u + \frac{\epsilon'}{2} \pm 1 \right) \right\} \\ &= \sum_n \exp \pi i \left\{ \tau \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + 2 \left(n + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(u + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right\} \exp \left\{ \pi i \left(2n + \epsilon \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{\epsilon} \, \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau) \tag{158}$$

eşitliği bulunur. Böylece (155) eşitliği bulunmuş olur.

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u + \pi\tau;\tau) &= q^{-1} \exp \{-2ui\} \exp \{\epsilon' ui\} \, \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau) \\ &= \exp \{-\pi\tau i + \epsilon' \pi i - 2ui\} \, \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau) \end{aligned}$$

ile tanımlı teta fonksiyonlarının u ve τ'nun analitik fonksiyonları olduğunu ispatlamak için (154) ile verilen serinin yakınsaklığını göstermeliyiz. u düzleminin ve τ üst yarı düzleminin kompakt alt kümelerinde u ve $\mathrm{Im}\,(\tau) > 0$

eşitsizliğini sağlayan τ için (154) ile verilen serinin düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim. O halde aşağıdaki teorem vardır.

Teorem 3.2.2: $u \in \mathbb{C}$ ve $\tau \in H$ olmak üzere, $\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (u;\tau)$ fonksiyonu kompleks analitik bir fonksiyondur.

İspat: Weierstrass M- testi ile $M > 0$, $\lambda > 0$ olmak üzere $|u| \leq M$, $\mathrm{Im}\,(\tau) > \lambda$ olan (154) ile tanımlı serinin terimlerinin, yakınsak pozitif serinin terimlerinden mutlak değerce küçük olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} |\exp iz| &= |\exp\{i\,\mathrm{Re}\,z - \mathrm{Im}\,z\}| = |\exp\{-\mathrm{Im}\,z\}\exp\{i\,\mathrm{Re}\,z\}| \\ &= |\exp\{-\mathrm{Im}\,z\}|\,|\exp\{i\,\mathrm{Re}\,z\}| \\ &= |\exp\{-\mathrm{Im}\,z\}| \end{aligned}$$

$$= \exp\{-\mathrm{Im}\,z\} \tag{159}$$

eşitliğini serideki her bir terime uygularsak

$$\begin{aligned} &\left|\exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right)\right\}\right| \\ = \;& \exp\left\{-\pi\left(\mathrm{Im}\,\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\mathrm{Im}\,u\right)\right\} \end{aligned}$$

$$= \exp\left\{-\pi\,\mathrm{Im}\,\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right\}\exp\left\{(-2\pi)\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\mathrm{Im}\,u\right\} \tag{160}$$

eşitliğini elde ederiz. $\mathrm{Im}\,\tau \geq \lambda$ olduğundan

$$\mathrm{Im}\,\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \geq \lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \tag{161}$$

veya

$$-\mathrm{Im}\,\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \geq -\lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 \tag{162}$$

ve

$$-2\pi\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\mathrm{Im}\,u \leq \left|2\pi\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\mathrm{Im}\,u\right|$$

$$= 2\pi\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}\,|\mathrm{Im}\,u| \leq 2\pi\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}M \tag{163}$$

eşitsizlikleri vardır. M ve λ değerlerine bağlı sonlu sayıda n hariç

$$\left|n+\frac{\epsilon}{2}\right| = \sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2} > \frac{4M}{\lambda} \tag{164}$$

eşitsizliği sağlandığında

$$1-\frac{2M}{\lambda\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}} > \frac{1}{2} \tag{165}$$

olmak üzere üstel fonksiyonunun monotonluk özelliği kullanılırsa, (154) ile tanımlı serinin $n.$ teriminin mutlak büyüklüğü için üst sınıra ulaşırız.

$$\begin{aligned}
&\exp\left\{-\pi\left(\lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 - 2M\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}\right)\right\} \\
=\ &\exp\left\{-\pi\lambda\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\left[1-\frac{2M}{\lambda\sqrt{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}\right]\right\} \\
&\leq \exp\left\{-\pi\frac{\lambda}{2}\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right\}
\end{aligned} \tag{166}$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde (154) ile tanımlı serinin her bir teriminin mutlak değerce büyüklüğü için bir üst sınır bulduğumuzdan ve

$$\sum \exp\left\{-\pi\frac{\lambda}{2}\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right\} \tag{167}$$

serisi Cauchy $n.$ kök testi ile yakınsak olduğundan Weierstrass M testine göre (154) ile tanımlı seri yakınsak olur.

Teorem 3.2.3: Teta fonksiyonu için aşağıdaki fonksiyonel denklemler sağlanır.

a)

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+1;\tau) = (-1)^{\epsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) \tag{168}$$

b)

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\tau;\tau) = (-1)^{\epsilon'}\,e^{\pi i(-2u-\tau)}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) \tag{169}$$

İSPAT: a) (154)'den

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+1;\tau) = \sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+1+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right)\right\}\exp\left\{\pi i\left(2n+\epsilon\right)\right\}$$

$$(-1)^{\epsilon}\sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right)\right\} \tag{170}$$

eşitliğini buluruz. (154) ve (170) eşitliklerinden,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+1;\tau) = (-1)^{\epsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) \tag{171}$$

eşitliğini elde ederiz.

b) (154) ile tanımlı seride n yerine $n+1$ yazarsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) = \sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+1+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\left(n+1+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{\pi i\left(\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)+2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right)\right\} \tag{172}$$

$$\exp\left\{\pi i\left(\tau+2u+\epsilon'\right)\right\}$$

eşitliğini buluruz. (154) ile tanımlı seride u yerine $u+\tau$ yazarsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\tau;\tau) = \sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\tau+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2+2\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)+2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right\} \tag{173}$$

eşitliğini buluruz. (172) ve (173) eşitliklerinden

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\tau;\tau) = \exp\left\{-\pi i\left(\tau+2u+\epsilon'\right)\right\}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau)$$

$$= (-1)^{\epsilon'}\,e^{\pi i(-\tau-2u)}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau)$$

eşitliğini buluruz.

3.3 θ– TETA FONKSİYONLARININ $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ PERİYOT ÇİFTLERİNE GÖRE DÖNÜŞÜMLERİ

Teorem 3.3.1:

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau)$$

fonksiyonu aşağıdaki bağıntıları sağlar.

a)

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi;\tau) = (-1)^{\epsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) \tag{174}$$

b)

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau;\tau) = (-1)^{\epsilon'}\,e^{-(\pi i\tau+2iu)}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix} \tag{175}$$

c)

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi+\pi\tau;\tau) = (-1)^{\epsilon-\epsilon'}\exp\left\{-\left(2ui+\pi\tau i\right)\right\}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) \tag{176}$$

İspat: a) Birinci mertebeden teta fonksiyonu

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) = \sum_n \exp\pi i\left\{\tau\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + 2\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\epsilon'}{2}\right)\right\} \tag{177}$$

veya

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) = \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\} \tag{178}$$

ile tanımlıdır. Bu seride u yerine $u+\pi$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi;\tau) &= \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\pi-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)+2in\pi+i\epsilon\pi\right\}\\
&= (-1)^{\epsilon}\sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}\\
&= (-1)^{\epsilon}\,\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u,\tau)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (174) eşitliğini elde etmiş oluruz.

b) **(**178)'de u yerine $u+\pi\tau$ yazarsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau,\tau) = \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau + 2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\pi\tau-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + n\epsilon\pi i\tau + \frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau + 2uni + u\epsilon i\\ +2n\pi\tau i + \pi\tau\epsilon i - in\epsilon - \frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\} \tag{179}$$

eşitliği bulunur. **(**178)'de n yerine $n+1$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u,\tau) &= \sum_n \exp\left\{\left(n+1+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau + 2i\left(n+1+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + \pi i\tau + \frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau + 2\left(n+\frac{n\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right)\pi i\tau + 2uni + 2ui\\ +u\epsilon i - n\epsilon'\pi i - i\epsilon'\pi - \frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + \pi i\tau + \frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau + 2n\pi i\tau + n\epsilon\pi\tau i + \epsilon\pi\tau i\\ +2uni + 2ui + u\epsilon i - n\epsilon'\pi i - i\epsilon'\pi - \frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{\epsilon'}e^{(2ui+\pi\tau i)}\sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + \frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau + 2n\pi i\tau + n\epsilon\pi\tau i + \epsilon\pi\tau i\\ +2uni + u\epsilon i - n\epsilon' i - n\epsilon'\pi i - \frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\} \tag{180}$$

eşitliğini buluruz. (179) ve (180)'den

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi\tau;\tau) = (-1)^{\epsilon'}e^{-(\pi i\tau+2iu)}\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}$$

elde ederiz.

c) (178)'de u yerine $u+\pi+\pi\tau$ yazarsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi+\pi\tau;\tau) = \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\pi+\pi\tau-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+n\epsilon\pi\tau i+\frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau++2uni+2n\pi i\\ +2n\pi i\tau-n\epsilon'\pi i+u\epsilon i+\pi\epsilon i+\epsilon\pi\tau i-\frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\}$$

$$= (-1)^{\epsilon}\sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+n\epsilon\pi\tau i+\frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau+2uni+2n\pi i\tau\\ -n\epsilon'\pi i+u\epsilon i+\epsilon\pi\tau i-\frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\} \tag{181}$$

eşitliğini buluruz. (178)'de n yerine $n+1$ yazarsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau) = \sum_n \exp\left\{\left(n+1+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+1+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+\pi\tau i+\frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau+2\left(n+\frac{n\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right)\pi i\tau\\ +2uni+2ui+u\epsilon i-n\epsilon'\pi i-i\epsilon'\pi-\frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+\pi\tau i+\frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau+2n\pi i\tau+n\epsilon\pi i\tau+\epsilon\pi\tau i\\ +2uni+2ui+u\epsilon i-n\epsilon'\pi i-i\epsilon'\pi-\frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\}$$

$$= (-1)^{\epsilon'}\exp\{2ui+\pi\tau i\}\sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+\frac{\epsilon^2}{4}\pi i\tau+2n\pi i\tau+n\epsilon\pi i\tau+\epsilon\pi\tau i\\ +2uni+u\epsilon i-n\epsilon' i-\frac{\epsilon\epsilon'}{2}\pi i\end{array}\right\} \tag{182}$$

eşitliğini buluruz. (181) ve (182)'den

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u+\pi+\pi\tau;\tau) = (-1)^{\epsilon-\epsilon'}\exp\{-(2ui+\pi\tau i)\}\,\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau)$$

elde ederiz.

Teorem 3.3.2: $r\in\mathbb{N}^+$ olmak üzere $\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}(u;\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki bağınyıtı sağlar.

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r};\tau\right) = \exp\left(\frac{\pi i\epsilon(1+\tau)}{2^r}\right)\sum_n \exp\left\{\frac{2n\pi i\,(1+\tau)}{2^r}\right\} \tag{183}$$

$$\exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}$$

İspat: (178)'de u yerine $u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r};\tau\right) &= \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau\\ +2i\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\end{array}\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau\\ +2i\left(n+\frac{1}{2^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\\ +\frac{2n\pi i}{2^r}+\frac{2n\pi i\tau}{2^r}+\frac{\epsilon\pi i}{2^r}+\frac{\epsilon\pi\tau i}{2^r}\end{array}\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\\ +\frac{2n\pi i}{2^r}(1+\tau)+\frac{\epsilon\pi i}{2^r}(1+\tau)\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{\pi i\epsilon(1+\tau)}{2^r}\right)\sum_n \exp\left\{\frac{2n\pi i\,(1+\tau)}{2^r}\right\}\\
&\quad \exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\}
\end{aligned}$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikte $\begin{bmatrix}\epsilon\\ \epsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\theta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r};\tau\right) &= \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}-\frac{1}{2}\pi\right)\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\\ +2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\end{array}\right\}\\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c}n^2\pi\tau i+\frac{\pi\tau i}{4}+n\pi\tau i+2uni+\frac{2\pi ni}{2^r}+\frac{2\pi n\tau i}{2^r}\\ -\pi ni+ui+\frac{ni}{2^r}+\frac{2\pi i}{2^r}-\frac{\pi i}{2}\end{array}\right\}\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2}\pi i\right\}\sum_n \exp(-in\pi)\exp\left\{\begin{array}{c}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau\\ +2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$= -i\sum_n(-1)^n\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right\} \quad (184)$$

eşitliiğini elde ederiz. (183)'de $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}; \tau\right) = \sum_n \exp\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi i \tau + 2i\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right\} \tag{185}$$

eşitliğini buluruz. (184) ve (185) eşitliklerinden,

$$\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}; \tau\right) = \begin{cases} -i\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}; \tau\right), \; n = 2k, \; k \in \mathbb{Z} \\ i\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}; \tau\right), \; n = 2k+1, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{186}$$

dönüşümlerini elde ederiz.

(183)'de $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}; \tau\right) &= \sum_n \exp\left\{n^2 \pi i \tau + 2in\left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r} - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \sum_n \exp\{-\pi n i\} \exp\left\{n^2 \pi i \tau + 2uni + \frac{2\pi n i}{2^r} + \frac{2\pi n \tau i}{2^r}\right\} \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \sum_n \exp\left\{n^2 \pi i \tau + 2uni + \frac{2\pi n i}{2^r} + \frac{2\pi n \tau i}{2^r}\right\} \tag{187}$$

eşitliğini elde ederiz. (183)'de $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}; \tau\right) = \sum_n \exp\left\{n^2 \pi i \tau + 2in\left(u + \frac{\pi}{2^r} + \frac{\pi\tau}{2^r}\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{n^2 \pi i \tau + 2uni + \frac{2\pi n i}{2^r} + \frac{2\pi n \tau i}{2^r}\right\} \tag{188}$$

elde ederiz. (187) ve (188) denklemlerinden

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r};\tau\right)=\begin{cases}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r};\tau\right),\ n=2k,\ k\in\mathbb{Z}\\ -\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{2^r}+\frac{\pi\tau}{2^r};\tau\right),\ n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{189}$$

dönüşümleri elde ediilir.

(183)'de $r=3$ yazarsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\\epsilon'\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right)=\sum_n\exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8}-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\} \tag{190}$$

eşitliğini buluruz. (178)'de u yerine $u+\frac{\pi\tau}{8}$ yazarsak,

$$\theta\begin{bmatrix}\epsilon\\\epsilon'\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right)=\sum_n\exp\left\{\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(u+\frac{\pi\tau}{8}-\frac{\epsilon'}{2}\pi\right)\right\} \tag{191}$$

eşitliğini buluruz.

(190)'da $\begin{bmatrix}\epsilon\\\epsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right) &= \sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+2in\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8}\right)\right\}\\ &= \sum_n\exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{\pi ni}{4}+\frac{\pi n\tau i}{4}\right\}\\ &= \sum_n\exp\left\{\frac{\pi ni}{4}\right\}\exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{\pi n\tau i}{4}\right\}\end{aligned}$$

$$=\sum_n\exp\left\{\frac{\pi ni}{4}\right\}\exp\left\{n^2\pi i\tau+2uni+\frac{\pi n\tau i}{4}\right\} \tag{192}$$

eşitliğini buluruz.

(191)'de $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) = \sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2in\left(u + \frac{\pi\tau}{8}\right)\right\}$$

$$= \sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2uni + \frac{\pi n\tau i}{4}\right\} \tag{193}$$

eşitliğini buluruz.

(192) ve (193) eşitliklerinden,

$$\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) = \begin{cases} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k, \; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+1, \; k \in \mathbb{Z} \\ i\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+2, \; k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+3, \; k \in \mathbb{Z} \\ -\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+4, \; k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+5, \; k \in \mathbb{Z} \\ -i\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+6, \; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+7, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{194}$$

dönüşümlerini elde ederiz.

(190) eşitliğinde, $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) &= \sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2in\left(u + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\tau}{8} - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2uni + \frac{\pi ni}{4} + \frac{\pi n\tau i}{4} - \pi ni\right\} \\ &= \sum_n \exp\left\{-\frac{3\pi ni}{4}\right\} \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2uni + \frac{\pi n\tau i}{4}\right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_n \exp\left\{-\frac{3\pi ni}{4}\right\} \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2uni + \frac{\pi ni}{4} + \frac{\pi n\tau i}{4}\right\} \qquad (195)$$

eşitliğini buluruz.

(191) eşitliğinde $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) &= \sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2in\left(u + \frac{\pi\tau}{8} - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \sum_n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2inu + \frac{\pi\tau ni}{4} - \pi ni\right\} \\ &= \sum_n \exp\left\{-\pi ni\right\} \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2uni + \frac{\pi n\tau i}{4}\right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_n (-1)^n \exp\left\{n^2\pi i\tau + 2uni + \frac{\pi n\tau i}{4}\right\} \qquad (196)$$

eşitliği bulunur.

(195) ve (196) eşitliklerinden

$$\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right)=\begin{cases}\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k+1,\ k\in\mathbb{Z}\\ i\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k+2,\ k\in\mathbb{Z}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k+3,\ k\in\mathbb{Z}\\ -\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k+4,\ k\in\mathbb{Z}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k+5,\ k\in\mathbb{Z}\\ -i\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k+6,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,\theta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right),\ n=8k+7,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{197}$$

dönüşümleri elde edilir.

(190) eşitliğinde $\begin{bmatrix}\epsilon\\\epsilon'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}\theta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right) &= \sum_n \exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi i\tau+2i\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8}\right)\right\}\\ &= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+n\pi\tau i+\frac{\pi\tau i}{4}+2inu+\frac{\pi\tau ni}{4}\\ +\frac{\pi ni}{4}+ui+\frac{\pi i}{8}+\frac{\pi\tau i}{8}\end{array}\right\}\\ &= \exp\frac{\pi i}{8}\sum_n \exp\frac{\pi ni}{4}\exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+n\pi\tau i+\frac{3\pi\tau i}{8}\\ +2inu+\frac{\pi\tau ni}{4}+ui\end{array}\right\}\end{aligned}$$

$$\exp\frac{\pi i}{8}\sum_n \exp\frac{\pi ni}{4}\exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau+n\pi\tau i+\frac{3\pi\tau i}{8}\\ +2inu+\frac{\pi\tau ni}{4}+ui\end{array}\right\} \tag{198}$$

eşitliğini buluruz.

(191)'de $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) = \sum_n \exp\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi i \tau + 2i\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{\pi\tau}{8}\right)\right\}$$

$$\sum_n \exp\left\{n^2 \pi i \tau + n\pi\tau i + \frac{3\pi\tau i}{8} + 2inu + ui + \frac{n\pi\tau i}{4}\right\} \qquad (199)$$

eşitliğini elde ederiz. (198) ve (199) eşitliklerinden

$$\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) = \exp\left\{\frac{i\pi}{8}\right\} \begin{cases} \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k, \; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+1, \; k \in \mathbb{Z} \\ i\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+2, \; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\,\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+3, \; k \in \mathbb{Z} \\ -\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+4, \; k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+5, \; k \in \mathbb{Z} \\ -i\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+6, \; k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right), \; n = 8k+7, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad (200)$$

dönüşümleri elde edilir. (190) eşitliğinde $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) &= \sum_n \exp\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2i\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\tau}{8} - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + n\pi\tau i + \frac{\pi\tau i}{4} + 2inu + \frac{\pi\tau n i}{4} \\ + \frac{\pi n i}{4} + ui + \frac{\pi i}{8} + \frac{\pi\tau i}{8} - n\pi i - \frac{\pi i}{2} \end{array}\right\} \\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + \frac{5n\pi\tau i}{4} + \frac{3\pi\tau i}{8} \\ +2inu - \frac{3\pi n i}{4} + ui - \frac{3\pi i}{8} \end{array}\right\} \\
&= \exp - \frac{3\pi i}{8} \sum_n \exp - \frac{3n\pi i}{4} \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + \frac{5n\pi\tau i}{4} + \frac{3\pi\tau i}{8} \\ +2inu + ui \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \exp\left\{-\frac{3\pi i}{8}\right\} \sum_n \exp\left\{-\frac{3n\pi i}{4}\right\} \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + \frac{5n\pi\tau i}{4} + \frac{3\pi\tau i}{8} \\ +2inu + ui \end{array}\right\} \quad (201)$$

eşitliğini elde ederiz. (191) eşitliğinde $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ yazarsak,

$$\begin{aligned}
\theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(u + \frac{\pi\tau}{8}; \tau\right) &= \sum_n \exp\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi i\tau + 2i\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{\pi\tau}{8} - \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + n\pi\tau i + \frac{\pi i\tau}{4} + 2uni \\ + \frac{n\pi i\tau}{4} - n\pi i + ui + \frac{\pi\tau i}{8} - \frac{\pi i}{2} \end{array}\right\} \\
&= \sum_n \exp\left\{\begin{array}{c} n^2\pi i\tau + \frac{5n\pi\tau i}{4} + \frac{3\pi i\tau}{8} + 2uni \\ -n\pi i + ui - \frac{\pi i}{2} \end{array}\right\} \\
&= \left(-\frac{\pi i}{2}\right) \sum_n \exp\{-n\pi i\} \exp\left\{n^2\pi i\tau + \frac{5n\pi\tau i}{4} + \frac{3\pi i\tau}{8} + 2uni + ui\right\}
\end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{\pi i}{2}\right) \sum_n (-1)^n \exp\left\{n^2\pi i\tau + \frac{5n\pi\tau i}{4} + \frac{3\pi i\tau}{8} + 2uni + ui\right\} \quad (202)$$

(201) ve (202) eşitliklerinden

$$\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right)=\exp\left\{-\frac{3\pi i}{8}\right\}\begin{cases} i\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k,\; k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+i\right)\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k+1,\; k\in\mathbb{Z}\\ -\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k+2,\; k\in\mathbb{Z}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k+3,\; k\in\mathbb{Z}\\ -i\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k+4,\; k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i\right)\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k+5,\; k\in\mathbb{Z}\\ \theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k+6,\; k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)\theta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(u+\frac{\pi\tau}{8};\tau\right), \; n=8k+7,\; k\in\mathbb{Z}\end{cases} \tag{203}$$

dönüşümlerini elde ederiz.

4 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

(1) Özdeşliği kullanılarak, önemli θ fonksiyonları özdeşlikleri elde edildi. Genel teta fonksiyonu özdeşliği kullanılarak Hirschhorn-Garvan ve Borwein'in kübik teta fonksiyonları ile ilgili bazı önemli özdeşlikleri yeniden elde edildi.

Eliptik fonksiyonların kompleks değişkenli teorisi kullanılarak üç terimli teta fonksiyonu özdeşlikleri oluşturuldu. Bu şekilde basit özdeşlikler tamamen kullanışlı hale geldi.

θ- Teta fonksiyonlarının katları kullanılarak çeşitli eliptik fonksiyonlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

T.M.Apostol, Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Springer, New York, 1976.

W.N. Bailey, A note on two of Ramanujan's Formula, Quart. J. Math. Oxford Ser.3 (1952)29-31

W.N. Bailey, A Further note on two of Ramanujan's formula, Quart. J.Math Oxford Ser. 3 (1952) 158-160

Z.-G. Liu, Some theta functions identities associated with modular equations of degree 5, Integer 1 (A3)(2001) 1-14 (elektronik)

L.-C.Shen, On the logaritmik derivative of a theta function and a fundamental identity of Ramanujan, J. Math. Anal. Appl. 177 (1993) 299-307

B. Srivastava, a note on an analogous continued fraction of Ramanujan,Kyungpook. Math. J. 45 (2005) 603-607

E.T.Whittaker, G.N.Watson, A Course of Modern Analysis, Fourth edition., Cambridge University Press, Cambridge, 1966

G.E Andrews,"The Theory of Partions" , Addison- Wesly , Reading MA 1976. MR 58:27738

B.C. Berndt , A.J. Yee, A page on Eisenstein series in Ramanujan's Lost Notebook, Glasg. Math. J. 45 (2003) 123-129

H.H.Chan, On the equivalance of Ramanujan's partition identities and a connection with the Rogers Ramanujan continued fraction, J. Math. Anal. Appl. 198 (1996) 111-120.

H.M. Farkas, I. Kra, On the quintuple product identity, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 771-778

R.P. Lewis, Z.-G. Liu, On two identities of Ramanujan, Ramanujan J. 3(1999) 335-338

Z.-G.Liu, An identity of Ramanujan and the represantation of integers as sums of triangular numbers, Ramanujan J. 5(2003) 407-434

Z.-G Liu A theta function identity and its implications, Trans.Amer.Math.Soc.357 (2005) 825-835

S. mcCullough, L.-C. Shen, On the Szegö kernel of annulus, Proc. Amer.Math.Soc121 (4) (1994) 1111-1121

S. Raghavan, On certain identities due to Ramanujan, Quart J.Math Oxford 37 (2) (1986) 221-229

S.Ramanujan, The Lost Notebook of other Unpublished Pepers, Narosa, New Delhi, 1988

S.Ramanujan Notebooks, vols.1 and 2, Tata İnstitute of Fundamental Research, Bombay, 1957

B.C. Berndt , "Ramanujan's Notebooks , part 3" Springer - Verlag , Newyork 1991. MR. 92j:01069

B.C. Berndt , "Ramanujan's Notebooks , part 4" Springer - Verlag , Newyork 1994. MR. 95je11028

B.C. Berndt , On a certain teta-funtion in a letter of Ramanujan from Fitzroy House, Ganita 43(1992) 33-34 MR 94b:11105

B.C Berndt, S.H. .Chan , Z.-G.Liu , and .H. Yeşilyurt, A new identitiy for $(q;q)_{\infty}^{10}$ with an application to Ramanujan's partition congruence modulo 11, Quart. J.Math. 55 (2004),13-30. MR 2043004

K. Chandrasekharan , "Elliptic Funtions " Springer- Verlag , Berlin Heideberg , 1985 . MR 87e:11058

M.D. Hirschhorn; "A simple prof of an identity of Ramanujan", J.Austral. Math. Soc. Ser A,34 (1983) ; 31- 35 . MR 84 h:10067

M. Hirschhorn, F. Garvan, and J.Borwein, Cubic analogues of the Jacobian theta function $\theta(z,q)$. Canad J. math.45 (1993,673-694. MR 2001f:33026

Z.-G Liu, The Borweins' cubic theta function identity and some cubic modular identities of Ramanujan, Ramanujan J. 4 (2000), 43-50. MR 2001f:33026

S.:Kongsiriwong and Z.-G.Liu Uniform proofs of q series - product identities, Results Math 44(2003), 312- 339MR 2028683

Z.-G. Liu, On certain identities of Ramanujan, J. Number Theory 83 (2000), 59-75. MR 2001f:11066

Z.-G. Liu, Some Eisenstein series identities, J. Number Theory 85 (2000), 231-252. MR 2001k:11075

Z.-G. Liu, Some theta function identities associated with the modular equations of degree 5, İntegers: Electronic Journal of Combinatorial Number theory 1 (2001), A-#03, 14pp. MR 2002c:33017

Z.-G. Liu, Residue theorem and theta function identities, Ramanujan J. 5 (2001), 129-151. MR2002g:11056

Z.-G. Liu, Some Eisenstein series identities related to modular equations of the seventh order. Pacific J. Math. 209 (2003), 103-130. MR 2004c:11052

E.T. Whittaker and G.N.Watson, A course of modern analysis, 4th ed, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966. MR97k:01072

YILDIZ,İ.,1989, Weierstrass Eliptik ve Yarı Eliptik Fonksiyonlarının $\frac{1}{2^r}$ Katlarına Göre Değer Değişimleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

YILDIZ,İ.,1998,Kompleks Analiz. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

BURDURLU, Esra, θ Fonksiyonlarının $\left(\frac{\pi}{2^r}, \frac{\pi\tau}{2^r}\right)$ Periyot Çiftlerine Göre Dönüşümleri. Yükseklisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,Adı : ERKOÇ, Nihal Şule

Uyruğu : T.C

Doğum Tarihi ve Yeri : 21.02.1987 / KIRIKKALE

Telefon : 0 505 360 94 47

e-mail : suleerkoc@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. / Matematik B.	2012
Lisans	Ankara Üniversitesi /Matematik B.	2010
Lise	Çorum Fen Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Ülkem Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2011-2012	Bolu Genç Birey Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2012-Halen çalışıyor	Fark Dershanesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS:61.25)