T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATİCE YALDIZ

HAZİRAN 2012

DÜZCE

T.C

DÜZCE ÜNİVERSİTESİ

KABUL VE ONAY BELGESİ

Hatice YALDIZ tarafından hazırlanan, Kesirli İntegraller İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği, isimli Lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 22/06/2012 tarih ve 2012/210 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

(Tez Danışmanı)

Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Düzce Üniversitesi

Üye	Üye
Prof. Dr. İsmet YILDIZ	Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Düzce Üniversitesi	Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin savunulduğu tarih: 29/06/2012

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Hatice YALDIZ'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onaylamıştır.

Doç. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

29.06.2012

Hatice YALDIZ

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca değerli katkılarını esirgemeyen çok değerli hocam Doç. Dr. Nesip AKTAN'a şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve Tülay AKSUNGUR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2012 **Hatice Yaldız**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER

J_a^α	:	α. Dereceden Kesirli İntegral
D_a^α	:	α. Dereceden Kesirli Türev
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
β	:	Beta Fonksiyonu
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	$n-$ boyutlu Öklid Uzayı
I	:	$\mathbb{R}'$de Bir Aralık
I^0	:	I'nın İçi
f'	:	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$AC\left[a,b\right]$	:	Mutlak Sürekli Fonksiyonların Kümesi
$\Re\left(\alpha\right)$	:	Riemann-Liouville Kesirli integral veya türevinin sanal kısmı
$L_p\left(a,b\right)$	:	p. Dereceden $\left(a,b\right)$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
D_{RL}^α	:	α. Dereceden Riemann-Liouville Kesirli Türevi

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ

Hatice YALDIZ
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Haziran 2012, 48 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kesirli integral ve kesirli türev kavramlarının nasıl oluştuğu verildi. İkinci bölümde,çalışmamız için gerekli olan tanım ve temel teoremler verildi. Üçüncü bölümde, kesirli integraller ve kesirli türevlerin elde edilişi ve bu konu hakkındaki çözüm yöntemleri verildi. Dördüncü bölümde, Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğe kesirli integrallerin uygulanması elde edildi.

Anahtar sözcükler: Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Konveks Fonksiyonlar.

ABSTRACT

ON THE HERMITE-HADAMARD INEQUALITY FOR FRACTIONAL INTEGRALS

Hatice YALDIZ
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki SARIKAYA
June 2012, 48 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, of how the concepts of fractional integral and fractional derivative is given. In the second chapter, all the necessary definitions and basic theorems for this study have been given. The third section, the derivation of the fractional integrals and fractional derivatives and methods of solution on this issue are given. In the fourth chapter, the implementation of the Hermite-Hadamard-type inequalities for fractional integrals are obtained.

KEY WORDS : Fractional Integrals and Fractional Derivatives, Hermite-Hadamard's Inequality, Convex Functions.

EXTENDED ABSTRACT

ON THE HERMITE-HADAMARD INEQUALITY FOR FRACTIONAL INTEGRALS

Hatice YALDIZ
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Zeki SARIKAYA
June 2012, 48 pages

1.INTRODUCTION

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, of how the concepts of fractional integral and fractional derivative is given. In the second chapter, all the necessary definitions and basic theorems for this study have been given. The third section, the derivation of the fractional integrals and fractional derivatives and methods of solution on this issue are given. In the fourth chapter, the implementation of the Hermite-Hadamard-type inequalities for fractional integrals are obtained.

Fractional integrals have used which currents consist from snowmelt and rain and problem of estimating the time that Fırat to basin and financial mathematics. Fractional integrals are some of examples that applied fields. In this study, we obtain new Hermite-Hadamard type inequality by using fractional integrals.

1 GİRİŞ

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından duyuruldu. Kesirli türev ve kesirli integral kavramı türev ve integrallerin sadece tamsayılar için varmıdır sorusundan yola çıkılarak ortaya çıktı. Euler kesirli türevi ele aldı. 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferansiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlanmıştır. Keyfi mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

Uygulamalı alanlarda kesirli türev ve kesirli integral kavramları hakkında birçok çalışma olmasına rağmen herhangi bir monografi yayınlanmamıştır. Bunun üzerine S.G. Samko ile A.A. Kilbas ve O.I. Marichev tarafından bu boşluk doldurulmuştur. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ile geniş kapsamlı bir monografi yayınlanmıştır.

Kesirli diferansiyel teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer bir çok alanda kullanılmaktadır.

Dördüncü bölümde ise ele aldığımız konveks fonksiyonların tarihi çok eskiye dayanmakla birlikte başlangıcı 19. yüzyılın sonları olarak gösterilebilir. 1893'te Hadamard'ın çalışmasında açıkça belirtilmese de bu türden fonksiyonların temellerinden bahsedilmektedir. Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V.

Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir. Beckenbach ve Bellman (1961) ve Mitrinovic (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Functions Inequalities) 1987 yılında Pecaric tarafından yazılmıştır. Bu çalışmaların birçoğunu integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

2 KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1 GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

Tanım 2.1. Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.2. Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.3 (Gamma Fonksiyonu). Gamma fonksiyonu, $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Gamma fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralıyabiliriz.

i.$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

ii. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

iii. $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n)$.

Tanım 2.4 (Konveks Fonksiyon) $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu f fonksiyona konveks fonksiyon denir. Eşitsizlikte "$\geq$" olması halinde de f fonksiyona konkav fonksiyon denir. Yukardaki eşitsizlikte $t = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

olur bu tip eşitsizlikleri sağlayan fonksiyonlara da J-konveks fonksiyon denir.

Konveks Fonksiyonların Temel Özellikleri:

i. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(x), a_j > 0; (j = 1, 2, 3, ..., k)$$

fonksiyonuda konvekstir.

ii. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konkav ve $S = \{x : g(x) > 0\}$ olsun. $f : S \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ olmak üzere f, S' de konvekstir.

iii. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Bu takdirde; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

iv. $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks ve h, $h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

vi. f ve g fonksiyonları J-konveks ise $f(x) + g(x)$ de J-konvekstir.

vii. f, $\overline{I'}$ 'de J-konveks ve g, $\overline{I''}$ de J-konveks ise bu takdirde $f(x)g(x)$ de $\overline{I} = \overline{I'} \cap \overline{I''}$ de J-konvekstir.

Tanım 2.5 $f : L_1[a, b]$ olsun. Üst ve alt $J_{a+}^{\alpha} f$ ve $J_{b-}^{\alpha} f$ Riemann-Liouville integralleri sırasıyla $\alpha > 0$ ve $a \geq 0$ için,

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t)dt, \quad x > a$$

ve

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t - x)^{\alpha - 1} f(t)dt, \quad x < b$$

olarak tanımlanır. Burada $\Gamma(\alpha)$ bir Gamma fonksiyonu ve $J_{a+}^{0} f(x) = J_{b-}^{0} f(x) = f(x)$ dır.

Tanım 2.6 (Beta Fonksiyonu): $m, n > 0$ için

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

biçiminde tanımlanan β fonksiyonuna $Beta\ fonksiyonu$ denir.

Tanım 2.7 V boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise, V kümesi K cismi üstünde bir *vektör uzayı*dır, denir.

$(V1)$ V kümesinde $+$ ile gösterilen ve adına *toplam*a denilen bir işlem tanımlanmıştır ve $(V,+)$ değişmeli gruptur.

(1) Her $u, v \in V$ için, $u+v$ tanımlıdır ve $u+v \in V$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

(2) Her $u, v, w \in V$ için, $(u+v)+w = u+(v+w)$ dir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

(3) $[\exists 0 \in V, (\forall u \in V$ için, $u+0 = u$ ve $0+u = u)]$ dır. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin etkisiz (*birim*) elemanı vardır. Bu etkisiz elemanı 0 simgesi ile gösterdik.

(4) Her $u \in V$ için, V kümesinde $-u \in$ ile gösterilen ve

$$u+(-u) = 0 \text{ ve } (-u)+u = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesindeki her bir u elemanının toplamaya göre tersi vardır. u nun tersi $-u$ ile gösterilmiştir.

(5) Her $u, v \in V$ için, $u+v = v+u$ tir. Sözle ifade ettiğimizde, V kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

$(V2)$ $K \times V \to V\ (a,u) \to au$ biçiminde, adına *skalerle* çarpma işlemi denilen bir fonksiyon tanımlanmıştır ve bu fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

(a) Her $a \in K$, her $u.v \in V$ için, $a(u+v) = au+av$.

(b) Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için, $(a+b)u = au+bu$.

(c) Her $a, b \in K$, her $u \in V$ için, $(ab)u = a(bu)$.

(d) K nı çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre, V nin her elemanı için, $1u = u$ dır.

Tanım 2.8 V, reel sayı cismi üstünde vektör uzayı ise, bu vektör uzayına *reel vektör uzayı* denir. V, karmaşık sayı cismi üstünde vektör uzayı ise bu durumda V ye *kompleks vektör uzayı* denir.

Tanım 2.9 $\Omega_1 = [a, b], \Omega_2 = [c, d]$ $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$ ve $f(x, y)$, $\Omega_1 \times \Omega_2$ üzrinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_y^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

şeklindeki eşitliğe *Dirichlet formülü* denir.

Tanım 2.10 (Mutlak Süreklilik) $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve (x_k, y_k) sonlu bir aralık olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyleki,

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \Rightarrow \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

dır. $AC^n[a, b]$ kümesi mutlak sürekli bir kümedir.

Tanım 2.11 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

şeklindeki eşitsizliğe *ü*çgen eşitsizliği denir.

Tanım 2.12 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f, $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_b^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx, \qquad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.13 (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n-lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

a. $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

b. $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.14 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Mitrinović *et al.*1993).

Tanım 2.15 E ölçülebilir bir küme olmak üzere f bu küme üzerinde tanımlı ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi K sayısı için $f(x) > K$ olan $x \in E$ değerlerin kümesi ölçülebilirse f fonksiyonuna *ölçülebilir fonksiyon* denir.

Teorem 2.1 (Lebesque integralinin varlık teoremi) Sonlu ölçümlü E kümesi üzerinde f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir ise *Lebesque* integrali vardır.

Tanım 2.16 $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna *sınırlı fonksiyon* denir.

Tanım 2.17 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = L_p = \left\{ f : \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \ \|f\|_\infty = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir *Banach* uzayıdır.

Teorem 2.2 f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise

a. f, (a,b) aralığında süreklidir ve

b. f, $[a,b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Teorem 2.3 f fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Teorem 2.4 $(Hermite - Hadamard\ Esitsizli\breve{g}i)$ $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a,b \in I$ ve $a < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

dir. (Pečarić et al. 1992).

İspat. *Teorem* 2.2 den dolayı f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani $x = a(1-t) + bt$, $t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_0^1 f(a(1-t)+bt)\,dx \\
&\leq f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 tdt \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

olur ve bu (1) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafın ispatını verelim:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right] \tag{2}$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa son parantez içindeki ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde ve $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa ikinci terim

$$\begin{aligned}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx &= -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt\\ &= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)dt\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

(2) de bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]dt\\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Azpeitia 1994).

Teorem 2.5 $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde konveks olsun. Bu durumda $\forall\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq L(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \qquad (3)$$

dır. Burada

$$l(\lambda) := \lambda f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)+(1-\lambda)f\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right)$$

ve

$$L(\lambda) := \frac{1}{2}\left(f(\lambda b+(1-\lambda)a)+\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\right).$$

dır.

İspat. f, I üzerinde konveks olsun. $\lambda \neq 0$ için $[a, \lambda b + (1-\lambda) a]$ aralığı üzerinde (1) uygulanırsa,

$$f\left(\frac{\lambda b + (2-\lambda) a}{2}\right) \leq \frac{1}{\lambda (b-a)} \int\limits_{a}^{\lambda b + (1-\lambda) a} f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + f(\lambda b + (1-\lambda) a)}{2} \tag{4}$$

tekrar $\lambda \neq 1$ için $[\lambda b + (1-\lambda) a, b]$ aralığı üzerinde (1) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(1+\lambda) b + (1-\lambda) a}{2}\right) &\leq \frac{1}{(1-\lambda)(b-a)} \int\limits_{\lambda b + (1-\lambda) a}^{b} f(x)\, dx \qquad (5) \\ &\leq \frac{f(b) + f(\lambda b + (1-\lambda) a)}{2}. \end{aligned}$$

(4) i λ ile (5) i $(1-\lambda)$ ile çarpıp eşitsizlikleri topladığımızda $l(\lambda)$ ve $L(\lambda)$ tanımlarından,

$$l(\lambda) \leq \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx \leq L(\lambda). \tag{6}$$

elde edilir. f konveks fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\lambda \frac{\lambda b + (2-\lambda) a}{2} + (1-\lambda) \frac{(1+\lambda) b + (1-\lambda) a}{2}\right) \qquad (7) \\ &\leq \lambda f\left(\frac{\lambda b + (1-\lambda) a + a}{2}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{\lambda b + (1-\lambda) a + b}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(f(\lambda b + (1-\lambda) a) + \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Bu durumda teorem ispatlanmış olur.

3 MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde kesirli Riemann-Liouville integral ve kesirli türev operatörlerinin elde edilişini ve bazı özelliklerini vereceğiz.

3.1 KESİRLİ RİEMANN-LİOUVİLLE İNTEGRAL VE TÜREVLERİNİN ELDE EDİLİŞİ

Kesirli Riemann-Liouville integral operatörünü elde etmek için ilk olarak n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{8}$$

integralini ele alalım. Bu integralde integrasyon sırasını ve buna bağlı sınırları değiştirelim. Bunun için;

$$\begin{array}{ll} a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ ,..., & ,..., \\ a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\ a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x \end{array} \tag{9}$$

sınır değişimleri altında (8) ifadesi,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1$$

$$= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x ... \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 ... \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \tag{10}$$

şeklinde yazılır. (10) ifadesinin sag tarafı terim terim hesaplanırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n)(x - \sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{11}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ oluşu kullanılırsa,

$$\int\limits_a^x \int\limits_a^{\sigma_1} \int\limits_a^{\sigma_2} ... \int\limits_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int\limits_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{12}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Gamma fonksiyonu tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n nin tamsayı olmaması durumunda (12) eşitliğinin sağ yanı için aşağıdaki kesirli Riemann-Liouville integral operatörünün tanımı verilebilir.

Tanım 3.1. $f(x) \in L_1(a,b)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (J_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > a \qquad (13) \\ (J_{b-}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x < b \end{aligned}$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α. mertebeden kesirli integral denir. Bu integral Riemann-Liouville kesirli integrali olarak bilinir. Burada $\left(J_{a^+}^{0} f\right)(x) = f(x)$ ve $\left(J_{b^-}^{0} f\right)(x) = f(x)$ dir.

Şimdi $f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integralini gözönüne alalım.

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > a$$

Ele alınan bu integral kabuller altında;

$$(J_{a+}^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int\limits_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}} (x-t))^{-\frac{1}{2}} dt, \qquad x > a$$

olarak yazılır. Şayet burada

$$t = a + (x-a)\tau$$

degişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int\limits_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1} d\tau = B(p,q)$$

şeklindeki Beta fonksiyonu yardımıyla,

$$\begin{aligned}
(J_{a+}^{\frac{1}{2}}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}}(x-t))^{-\frac{1}{2}}dt, \qquad x>a \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (x-a)^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{1}{2}+1}\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)B(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma(\frac{3}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x-a)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

n. mertebeden türevlerin

$$f(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \ \frac{d^2f(x)}{dx^2},\ \ \frac{d^3f(x)}{dx^3},...,\frac{d^nf(x)}{dx^n},...$$

sonsuz dizisini gözönüne alalım. Bu dizi, keyfi mertebeden diferensiyel düşüncesi altında tekrarlanan diferensiyelin bir genelleştirilmesidir. Burada temel amaç $\frac{d^n}{dx^n}$ semboli ile gösterilen operatörün n tamsayı değerli parametresini, tamsayı olmayan bir α parametresiyle yer değiştirmektir.

Genel kesirli türevleri vermeden önce yarım türev de denen bir türev formülü elde ederek bir uygulama yapalım ve daha sonra daha genel kesirli türev formülleri verelim.

Bunun için, $f(x)=x^k$ şeklindeki fonksiyonu ele alalım. Burada k pozitif bir tamsayıdır. Ele aldığımız fonksiyonun a. mertebeden türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^k \\
f'(x) &= kx^{k-1} \\
f''(x) &= k(k-1)x^{k-2} \\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\
&\ \ ... \\
f^{(a)}(x) &= k(k-1)(k-2)...(k-a+1)x^{k-a} \\
&= \frac{k!}{(k-a)!}x^{k-a}
\end{aligned}$$

yazılır. Yine burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a}$$

eşitliğini yazarız. Buradaki a sayısını herhangi bir pozitif sayı olarak seçerek fonksiyonun kesirli türevlerini hesaplayabiliriz.

Bir an için kabul edelimki $a = \frac{1}{2}$ ve $k = 2$ olsun. Bu durumda fonksiyonun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini hesaplayalım.

$$f(x) = x^2 \text{ ve } a = \frac{1}{2} \ \ ise,$$

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a} \text{ eşitliğinden yararlanarak,}$$

$$f^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}, \ \Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(1+\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.$$

elde edilir. Şimdi elde edilen yarım türevin tekrar yarım türevi alınırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 \right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right) = 2x$$

olduğu kolayca görülür.

Yukarıda yaptığımız uygulamaya benzer olarak, $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ alalım ve bu fonksiyonun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğunu gösterelim. $a = 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali

$$(J^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > 0$$

olarak yazılır. Kabuller altında $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin,

$$\begin{aligned}(J^{\frac{1}{2}}f)(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_a^x \tfrac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt, \qquad x>0\\ &= \tfrac{8}{3\pi}\int\limits_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}}(x-ux)^{-\frac{1}{2}}xdu, \quad t=ux\\ &= \tfrac{8}{3\pi}x^2\int\limits_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du\\ &= \tfrac{8}{3\pi}x^2 B(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2})\\ &= \tfrac{8}{3\pi}x^2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} = \tfrac{8}{3\pi}x^2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)}\\ &= x^2\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Şimdi kesirli türev için $0<\alpha<1$ olmak üzere,

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad x>a \tag{14}$$

Abel integral denklemini ele alalım.

(14) ifadasindesinin her iki yanında x yerine t, t yerine s yazarak, denklemini her iki yanını $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarparak a dan x e kadar integralini alırsak;

$$\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\int\limits_a^x \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds = \Gamma(\alpha)\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt$$

olur. Burada Dirichlet formülü olarak bilinen $\big($İntegral sınırlarının yer değişimi$\big)$

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^x f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_y^b f(x,y)dx\right)dy$$

şeklindeki sınır değişimi formülünü uygularsak,

$$\int\limits_a^x \varphi(s)ds\int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{15}$$

olduğunu görürüz. (15) ifadesindesindeki iç integralde $t=s+\tau(x-s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int\limits_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha(t-s)^{1-\alpha}} = \int\limits_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = B(\alpha,1-\alpha)=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (15) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi(s)ds &= \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \\
\int_a^x \varphi(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki son eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt, \quad 0<\alpha<1 \tag{16}$$

elde edilir. Elde edilen (16) ifadesine α. mertebeden kesirli türev denir. Bu türeve Riemann-Liouville kesirli türevi de denmektedir.

Bu türev formülü daha genel olarak şu şekilde ifade edilir.

Tanım 3.1 . f fonksiyonu her sonlu (a,x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in IN$,$m-1 \leq \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D^\alpha_{RL} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1}dt \tag{17}$$

şeklindedir.

3.2 SINIRLI BİR ARALIK ÜZERİNDE RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLER VE KESİRLİ TÜREVLER

İlk olarak, aşağıda toplanabilir ve sürekli fonksiyonlar uzayında reel eksenin sınırlı bir aralığı üzerinde Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integrallerin tanımlarını ve mevcut olan bazı özelliklerini vereceğiz.

$\Omega = [a,b]$ ($-\infty < a < b < \infty$) üzerinde sınırlı bir aralık olsun. Bu durumda, yukarda elde ettiğimiz gibi α ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrallerini;

$$\left(J_{a+}^{\alpha} f\right)(x) := \int_{a}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a;\ \Re(\alpha) > 0) \tag{18}$$

ve

$$\left(J_{b-}^{\alpha} f\right)(x) := \int_{x}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b;\ \Re(\alpha) > 0) \tag{19}$$

şeklinde alalım. Burada $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ dır. $\Gamma(\alpha)$ bir Gamma fonksiyonudur. Bu integrallere kesirli integrallerin sol ve sağ kısım integralleri olarak da tanımlanır. $\alpha = n \in \mathbb{N}$ olduğunda (18) ve (19) tanımları yukardaki kısımda ele aldığımız gibi n-katlı integral olarak aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \left(J_{a+}^{n} f\right)(x) &= \int_{a}^{x} dt_1 \int_{a}^{t_1} dt_2 ... \int_{a}^{t_{n-1}} dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{20}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(J_{b-}^{n} f\right)(x) &= \int_{x}^{b} dt_1 \int_{t_1}^{b} dt_2 ... \int_{t_{n-1}}^{b} dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x}^{b} (t-x)^{n-1} f(t)\,dt \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{21}$$

α. ıncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevleri, $\alpha \in \mathbb{C}\ \ (\Re(\alpha) \geq 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{a+}^{n-\alpha} f\right)(x) \qquad (22) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \ \ (n = [\Re(\alpha)] + 1; x > a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{b-}^{n-\alpha} f\right)(x) \qquad (23) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \ \ (n = [\Re(\alpha)] + 1; x < b) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $[\Re(\alpha)]$, $\Re(\alpha)$ nın tam değeri anlamındadır. Özellikle, $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{0} f\right)(x) &= \left(D_{b-}^{0} f\right)(x) = f(x);\ \ \left(D_{a+}^{n} f\right)(x) = f^{n}(x), \qquad (24) \\ \left(D_{b-}^{n} f\right)(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x) \ \ (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

dır. Burada $f^{(n)}(x)$ adi anlamda türevlerdir. Eğer $0 < \Re(\alpha) < 1$ ise, bu durumda

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} dt, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1;\ x > \alpha) \qquad (25)$$

ve

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} dt, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; x < b) \qquad (26)$$

dır. $\alpha \in \mathbb{R}^+$ iken, (22) ve (23) ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (n \in [\alpha] + 1; x > a) \qquad (27)$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt,\quad (n\in[\alpha]+1;x<b) \tag{28}$$

olduğundan, (25) ve (26) verildiğinden,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt,\quad (0<\alpha<1;x>a) \tag{29}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\quad (0<\alpha<1;x<b) \tag{30}$$

olarak yazılabilir.

$\Re(\alpha)=0\ \ (\alpha\neq0)$ ise, (22) ve (23) ifadelerindeki kesirli türevlerin yalnızca sanal kısmı sağlanılır:

$$\left(D_{a^+}^{i\theta}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}}dt\quad (\theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\};x>a) \tag{31}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{i\theta}f\right)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)}{(t-x)^{i\theta}}dt\quad (\theta\in\mathbb{R}\backslash\{0\};x<b) \tag{32}$$

Benzer şekilde; $(x-a)^{\beta-1}$ ve $(b-x)^{\beta-1}$ kuvvet fonksiyonlarının (18), (22) Riemann-Liouville kesirli integral ve (19), (23) Riemann-Liouville kesirli türev operatörleri kolayca gösterilebilir. Bunun için aşağıdaki özelliği verelim:

Özellik 3.2.1. $\Re(\alpha)\geq0$ **ve** $\beta\in\mathbb{C}\ \ (\Re(\beta)>0)$ ise,

$$\left(J_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1}\ \ (\Re(\alpha)>0), \tag{33}$$

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}\ \ (\Re(\alpha)\geq0), \tag{34}$$

$$\left(J_{b^-}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}\ \ (\Re(\alpha)>0), \tag{35}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}\left(b-x\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha\right)}\left(b-x\right)^{\beta-\alpha-1}\quad\left(\Re\left(\alpha\right)\geq 0\right)\tag{36}$$

dır. (33) ve (34) eşitliklerinin ispatını aşağıda verelim: Bu durumda, $t = a+(x-a)\sigma$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(J_{a^+}^{\alpha}\left(t-a\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_a^x\left(t-a\right)^{\beta-1}\left(x-a\right)^{\alpha-1}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^1\left(x-a\right)^{\beta-1}\sigma^{\beta-1}\left(x-a-\left(x-a\right)\sigma\right)^{\alpha-1}\left(x-a\right)d\sigma\\
&= \frac{\left(x-a\right)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_0^1\sigma^{\beta-1}\left(1-\sigma\right)^{\alpha-1}d\sigma\\
&= \frac{\left(x-a\right)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\beta\left(\beta,\alpha\right)\\
&= \frac{\left(x-a\right)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\\
&= \left(x-a\right)^{\beta+\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(D_{a^+}^{\alpha}\left(t-a\right)^{\beta-1}\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\left(t-a\right)^{\beta-1}\left(x-t\right)^{-\alpha}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^1\left(x-a\right)^{\beta-1}\sigma^{\beta-1}\left(x-a\right)^{-\alpha}\left(1-\sigma\right)^{-\alpha}\left(x-a\right)d\sigma\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dx}\left(\left(x-a\right)^{\beta-\alpha}\int\limits_0^1\sigma^{\beta-1}\left(1-\sigma\right)^{-a}d\sigma\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(\beta-\alpha\right)\left(x-a\right)^{\beta-\alpha-1}\beta\left(\beta,1-\alpha\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\left(\beta-\alpha\right)\left(x-a\right)^{\beta-\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}\\
&= \left(\beta-\alpha\right)\left(x-a\right)^{\beta-\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\left(\beta-\alpha\right)\Gamma\left(\beta-\alpha\right)}\\
&= \left(x-a\right)^{\beta-\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha\right)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Özel olarak, $\beta = 1$ ve $\Re(\alpha) \geq 0$ alınırsa, bu durumda Riemann-Liouville kesirli türevleri sabittir. Genel olarak sıfıra eşit değildir.

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} 1\right)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \left(D_{b^-}^{\alpha} 1\right)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1) \qquad (37)$$

dır. Diğer yandan $j = 1, 2, ..., [\Re(\alpha) + 1]$, için

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = 0, \quad \left(D_{b^-}^{\alpha} (b-t)^{\alpha-j}\right)(x) = 0 \qquad (38)$$

dır. (35) ve (36) eşitliklerinde benzer olarak yapılabilir.

Lemma 3.2.1.

a. $J_{a^+}^{\alpha}$ ve $J_{b^-}^{\alpha}$ kesirli integral operatörleri $\Re(\alpha) > 0$ için $L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ üzerinde sınırlıdır. Yani,

$$\left\| J_{a^+}^{\alpha} f \right\|_p \leq K \left\| f \right\|_p, \quad \left\| J_{b^-}^{\alpha} f \right\|_p \leq K \left\| f \right\|_p \quad \left(K = \frac{(b-a)^{\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha) \left| \Gamma(\alpha) \right|} \right) \qquad (39)$$

dır.

b. $0 < \alpha < 1$ ve $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ ise $q = \frac{p}{(1-\alpha p)}$ olmak üzere $J_{a^+}^{\alpha}$ ve $J_{b^-}^{\alpha}$ operatörleri $L_p(a,b)$ den $L_q(a,b)$ ye sınırlıdır.

İspat.

a. Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\left| J_{a^+}^{\alpha} f(x) \right| &\leq \frac{1}{\left| \Gamma(\alpha) \right|} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left| f(t) \right| dt \\
&\leq \frac{1}{\left| \Gamma(\alpha) \right|} \left(\int_a^x \left| f(x) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{q(\alpha-1)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\left\| f \right\|_p}{\left| \Gamma(\alpha) \right|} \left(\frac{(x-a)^{q(\alpha-1)+1}}{q(\alpha-1)+1} \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{\left\| f \right\|_p}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x-a)^{\alpha-1+\frac{1}{q}}}{(q(\alpha-1)+1)^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradan da,

$$
\begin{aligned}
\left\|J_{a^+}^{\alpha} f(x)\right\|_p &\leq \left(\int_a^b \frac{\|f\|_p^p}{|\Gamma(\alpha)|^p} \frac{(x-a)^{\alpha p - 1}}{(q(\alpha-1)+1)^{\frac{p}{q}}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\|f\|_p}{|\Gamma(\alpha)|} \frac{1}{(q(\alpha-1)+1)^{\frac{1}{q}}} \left(\int_a^b (x-a)^{\alpha p - 1} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= K \|f\|_p
\end{aligned}
$$

elde edilir.

b. $J_{a^+}^{\alpha} f$ kesirli integrali $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ ve $1 \leq r < q = \frac{p}{1-\alpha p}$ için L_p den L_q ya sınırlı olduğunu ispatlamak için, $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ olmak üzere L_r den L_p ye sınırlı olduğunu ele alalım ve $\varepsilon = \frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)}{2}$ seçelim. Bu durumda,

$$
\left|J_{a^+}^{\alpha} f(x)\right| \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^x \left((x-t)^{\varepsilon - \frac{1}{r}} |f(t)|^{\frac{p}{r}} \right) (x-t)^{\varepsilon - \frac{1}{p'}} |f(t)|^{1-\frac{p}{r}} dt
$$

dır. O halde Hölder eşitsizliğini kullandığımızda

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) \left|J_{a^+}^{\alpha} f(x)\right| &\leq \left(\int_a^x \left((x-t)^{r\varepsilon - 1} |f(t)|^p \right) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad \times \left(\int_a^x |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_a^x (x-t)^{\varepsilon p' - 1} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq K \|f\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_a^x \left((x-t)^{r\varepsilon - 1} |f(t)|^p \right) \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}
$$

buradan

$$
\begin{aligned}
\left\|J_{a^+}^{\alpha} f(x)\right\|_{L_r} &\leq K \|f\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_a^b |f(t)|^p \int_a^b |x-t|^{r\varepsilon - 1} dx \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq K \|f\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_{L_p}^{\frac{p}{r}} = K \|f\|_p .
\end{aligned}
$$

ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.2. $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$ olsun. $f(x) \in AC^n[a,b]$ ise $D_{a^+}^{\alpha}$ ve $D_{b^-}^{\alpha}$ kesirli türevleri $[a,b]$ üzerinde hemen-hemen her yerde var

ve

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x\frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{40}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha}+\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b\frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt \tag{41}$$

dır.

İspat. (41) ifadesi ise herhangi bir $g(x)\in AC^n[a,b]$ fonksiyonu için $\phi(t)=g^{(n)}(t)$ ve $d_k=\frac{g^{(k)}(b)}{k!}$ olmak üzere,

$$g(x)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_x^b(t-x)^{n-1}\phi(t)\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}d_k(-1)^k(b-x)^k \tag{42}$$

yazılır.

Sonuç 3.2.1. Eğer $0\leq\Re(\alpha)<1$ $(\alpha\neq0)$ ve $f(x)\in AC[a,b]$ ise

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}+\int_a^x\frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right] \tag{43}$$

ve

$$\left(D_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}}+\int_x^b\frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right] \tag{44}$$

dır.

$J_{a^+}^{\alpha}$ ve $J_{b^-}^{\alpha}$ kesirli integral operatörlerinin yarıgrup özelliğini aşağıdaki Lemma ile verelim.

Lemma 3.2.3. $\Re(\alpha)>0$ ve $\Re(\beta)>0$ ise $f(x)\in L_p(a,b)$ $(1\leq p\leq\infty)$ ve her $x\in(a,b)$ için

$$\left(J_{a^+}^{a}J_{a^+}^{\beta}f\right)(x)=\left(J_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(x)\ \text{ ve }\ \left(J_{b^-}^{\alpha}J_{b^-}^{\beta}f\right)(x)=\left(J_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(x) \tag{45}$$

dır.

İspat.

$$\left(J_{a^+}^{a}J_{a^+}^{\beta}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt\int\limits_a^t (t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)\,d\tau,\quad \alpha+\beta\geq 1$$

yazılır. Burada, yukarıdaki eşitlikte *Dirichlet* sınır değişim şartları uygulanıp $t=\tau+s(x-\tau)$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left(J_{a^+}^{a}J_{a^+}^{\beta}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x d\tau\int\limits_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x f(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1 (x-\tau)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}(x-\tau)^{\beta-1}(x-\tau)\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&= \frac{\beta(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\,d\tau\\
&= \frac{\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}f(\tau)\,d\tau=\left(J_{a^+}^{a+\beta}f\right)(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(J_{b^-}^{a}J_{b^-}^{\beta}f\right)(x)$ ifadeside yukarıdaki şekilde ispat edilir.

Eğer $\alpha+\beta>1$ ise (45) ifadesi $[a,b]$ nin herhangi bir noktasında sağlanır. Aşağıdaki Lemma kesirli türevlerin kesirli integrallerin soldan tersi olarak ifade edilebileceğini gösterir.

Lemma 3.2.4. $\Re(\alpha)>0$ ve $f(x)\in L_p(a,b)$ $(1\leq p\leq\infty)$ ise hemen-hemen her $x\in[a,b]$ için,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}J_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=f(x)\ \text{ ve }\ \left(D_{b^-}^{\alpha}J_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)=f(x)\quad(\Re(\alpha)>0)\qquad(46)$$

dır.

İspat.

$$\left(D_{a^+}^{a}J_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\,dt\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds$$

yazılır. Burada, yukarıdaki eşitlikte *Dirichlet* sınır değişim şartları uygulanıp $t = s + \tau(x-s)$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left(D^{a}_{a^+}J^{\alpha}_{a^+}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\int_a^x f(s)\,ds\right. \\ &\quad \left.\int_s^x (x-s)^{n-\alpha-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1}(x-s)\,d\tau\right] \\ &= \frac{\beta(\alpha,n-\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-s)^{n-1}f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-s)^{n-1}f(s)\,ds\end{aligned}$$

elde edilir. (11) ifadesini yukarıdaki eşitliğe uyguladığımızda ispat tamamlanmış olur. $\left(D^{\alpha}_{b^-}J^{\alpha}_{b^-}f\right)(x)$ ifadesi de benzer şekilde ispatlanır.

Özellik 3.2.2 . $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$ ise, $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \le p \le \infty)$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$\left(D^{\beta}_{a^+}J^{\alpha}_{a^+}f\right)(x) = J^{\alpha-\beta}_{a^+}f(x) \ \text{ ve } \ \left(D^{\beta}_{b^-}J^{\alpha}_{b^-}f\right)(x) = (-1)^k J^{\alpha-k}_{b^-}f(x) \quad (47)$$

dır.

Özel olarak, $\beta = k \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) > k$ aldığımızda,

$$\left(D^{k}J^{\alpha}_{a^+}f\right)(x) = J^{\alpha-k}_{a^+}f(x) \ \text{ ve } \ \left(D^{k}J^{\alpha}_{b^-}f\right)(x) = (-1)^k J^{\alpha-k}_{b^-}f(x) \qquad (48)$$

olur.

İspat.

$$\left(D^{\beta}_{a^+}J^{\alpha}_{a^+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\beta-1}dt\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds$$

yazılır. Burada, yukarıdaki eşitlikte *Dirichlet* sınır değişim şartları uygulanıp $t = s + \tau(x-s)$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left(D_{a^+}^{\beta} J_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\int_a^x f(s)\, ds \right. \\
&\left. \int_s^x (x-s)^{n-\beta-1} (1-\tau)^{n-\beta-1} \tau^{\alpha-1} (x-s)^{\alpha-1} (x-s)\, ds \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-s)^{n+\alpha-\beta-1} f(s)\, ds \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{n-\beta-1}\, d\tau \\
&= \frac{\beta(\alpha, n-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-s)^{n+\alpha-\beta-1} f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-s)^{n+\alpha-\beta-1} f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-\beta-1} f(s)\, ds = \left(J_{a^+}^{\alpha-\beta} f\right)(x)
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Özellik 3.2.3 . $m \in \mathbb{N}$ ve $D = \frac{d}{dx}$ için $\Re(\alpha) \geq 0$ olsun.

a. $\left(D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)$ ve $\left(D_{a^+}^{\alpha+m} f\right)(x)$ kesirli türevleri varsa,

$$\left(D^m D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha+m} f\right)(x) \tag{49}$$

elde edilir.

b. $\left(D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x)$ ve $\left(D_{b^-}^{\alpha+m} f\right)(x)$ kesirli türevleri varsa,

$$\left(D^m D_{b^-}^{\alpha} f\right)(x) = (-1)^m \left(D_{b^-}^{\alpha+m} f\right)(x) \tag{50}$$

elde edilir.

Özellik 3.2.4 . $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$ ve $\alpha + \beta < n$ $(n, m \in \mathbb{N})$ olmak üzere $f \in L_1(a,b)$ ve $f_{m-\alpha} AC^m([a,b])$ vardır. Bu durumda,

$$\left(D_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) - \sum_{j=1}^{m} \left(D_{a^+}^{\beta-j} f\right)(a^+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \tag{51}$$

elde edilir.

İspat. $n > \alpha + \beta$ için (22) ve (45) de yarıgrup özelliği kullanıldığında,

$$\left(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{a+}^{n-\alpha} D_{a+}^{\beta} f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{a+}^{n-\alpha-\beta}\left[J_{a+}^{\beta} D_{a+}^{\beta} f\right]\right)(x) \tag{52}$$

elde ederiz.

$f \in L_1(a,b)$ ve $f_{m-\alpha} \in AC^m([a,b])$ için *Lemma* 3.2.4 de α yerine β yazdığımızda,

$$\left(J_{a+}^{\beta} D_{a+}^{\beta} f\right)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(J_{a+}^{m-\beta} f\right)^{(m-j)}(a+)}{\Gamma(\beta - j + 1)} (x-a)^{\beta - j} \tag{53}$$

elde ederiz. (53) eşitliğinde (22) e göre $\left[\left(J_{a+}^{m-\beta} f\right)^{(m-j)}\right](x) = \left(D_{a+}^{\beta-j} f\right)(x)$ eşitliğini (53) de yerleştirdiğimizde (51) i elde ederiz.

3.3 YARI DÜZLEM ÜZERİNDE RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLER VE KESİRLİ TÜREVLER

Bu bölümde yarı düzlem üzerinde Liouville kesirli integrallerin ve kesirli türevlerin tanımlarını ve bazı özelliklerini vereceğiz. Reel eksenin bir sınırlı aralığı üzerinde (18), (19) Riemann-Liouville kesirli integralleri ve (22) , (23) Riemann-Liouville kesirli türevleri reel eksenin pozitif bölgesindedir. (18) ve (19) kesirli integralleri aşağıdaki formları sağlar:

$$\left(J_{0+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \Re(\alpha) > 0) \tag{54}$$

ve

$$\left(J_{-}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt \quad (x > 0; \Re(\alpha) > 0) \tag{55}$$

$n = [\Re(\alpha)] + 1;\ \Re(\alpha) \geq 0;\ x > 0$ için (22) ve (23) kesirli integrallerinden yararlanılarak,

$$\left(D_{0+}^{\alpha} f\right)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{n-\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \tag{56}$$

ve

$$\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{-}^{n-\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}dt \tag{57}$$

formları verilebilir.

(54) de $J_{0+}^{\alpha}f$, (55) de $J_{-}^{\alpha}f$, (56) de $D_{0+}^{\alpha}f$, ve (57) de $D_{-}^{\alpha}f$, ifadeleri için reel eksen üzerinde sağ ve sol değerli Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevleri vardır. $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ için ve $f(x)$ in n inci mertebeden türevini aldığımızda $f^{(n)}(x)$;

$$\left(D_{+}^{0}f\right)(x) = \left(D_{-}^{0}f\right)(x) = f(x); \quad \left(D_{+}^{n}f\right)(x) = f^{(n)}(x) \tag{58}$$

$$\left(D_{-}^{n}f\right)(x) = (-1)^{n} f^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir.

$0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $x > 0$ ise

$$\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{59}$$

ve

$$\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{60}$$

dır.

$\Re(\alpha) = 0$ $(\alpha \neq 0)$ ise (59) ve (60) de Riemann-Liouville kesirli türevlerinde α yerine sanal kısmı aldığımızda,

$$\left(D_{0+}^{i\theta}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}}dt \quad \left(\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x > 0\right) \tag{61}$$

ve

$$\left(D_{-}^{i\theta}f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{i\theta}}dt \quad \left(\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x > 0\right) \tag{62}$$

formları elde edilir.

J_{0+}^{α} ve D_{0+}^{α} Liouville kesirli operatörleri $\alpha = 0$ için (33) ve (34) eşitlikleri sağlanır. J_{-}^{α} ve D_{-}^{α} Liouville kesirli operatörlerinde a nın yerine $x^{\beta-1}$ kuvvet fonksiyonu ve $e^{-\lambda x}$ üstel fonksiyonu aldığımızda aynı eşitlik sağlanır.

Özellik 3.3. $\Re(\alpha) \geq 0$ olsun.

a. $\Re(\beta) > 0$ ise

$$\left(J_{0+}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0; \Re(\beta) > 0) \tag{63}$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0; \Re(\beta) > 0) \tag{64}$$

b. $\beta \in \mathbb{C}$ ise

$$\left(J_{-}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) > 0; \Re(\alpha+\beta) < 1) \tag{65}$$

$$\left(D_{-}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta-\alpha-1} \quad (\Re(\alpha) \geq 0; \Re(\alpha+\beta-[\Re(\alpha)]) < 1) \tag{66}$$

dır.

c. $\Re(\lambda) > 0$ ise

$0 < \alpha < 1$ ve $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ olduğunda, $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için $J_{0+}^{\alpha} f$ ve $J_{-}^{\alpha} f$ integralleri

$$\left(J_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(x) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x} \quad (\Re(\alpha) > 0) \tag{67}$$

$$\left(D_{-}^{\alpha} e^{-\lambda t}\right)(x) = \lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} \quad (\Re(\alpha) \geq 0) \tag{68}$$

tanımlanır.

İspat. (33) ve (34) da $a = 0$ için (63) ve (64) formülleri sağlanır. (57) ve (65) ifadelerini kullanarak, α yerine $n-\alpha$ aldığımızda $(n = [\Re(\alpha)] + 1)$

$$\begin{aligned} \left(D_{-}^{\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(J_{-}^{n-\alpha} t^{\beta-1}\right)(x) \\ &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+n-\alpha-1}\right] \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \end{aligned} \tag{69}$$

elde edilir.

$$\Gamma(1-n+\alpha-\beta)\,\Gamma(\beta+n-\alpha)=\frac{\pi}{\sin[(\beta-\alpha+n)\,\pi]}=\frac{(-1)^n\,\pi}{\sin[(\beta-\alpha)\,\pi]} \tag{70}$$

ve

$$\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}=\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha-\beta)}=\frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\sin[(\beta-\alpha)\,\pi]}{\pi} \tag{71}$$

eşitlikleri vardır.

Lemma 3.3. (Hardy-Littlewood teoremi). $1\le p\le\infty$, $1\le q\le\infty$ ve $\alpha>0$ olsun. $J_{o^+}^{\alpha}$ ve J_{-}^{α} operatörleri $L_p(\mathbb{R}^+)$ dan $L_q(\mathbb{R}^+)$ ya sınırlıdır. Yani,

$$0<\alpha<1,\ \ 1<p<\frac{1}{\alpha}\ \text{ve}\ q=\frac{p}{1-\alpha p} \tag{72}$$

dır.

İspat. *Lemma* 3.2.1 (b) şıkkında ispat verilmiştir.

3.4 REEL EKSEN ÜZERİNDE RİEMANN-LİOUVİLLE KESİRLİ İNTEGRALLER VE KESİRLİ TÜREVLER

Bu kısımda $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ ekseni üzerinde Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevlerin bazı özelliklerini ve tanımlarını vereceğiz. Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevleri $\mathbb{R}$ üzerinde *bölüm* 3.2 ye benzer şekilde tanımlanır. $x\in\mathbb{R}$ ve $\Re(\alpha)>0$ için

$$\left(J_{+}^{\alpha}f\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt \tag{73}$$

ve

$$\left(J_{-}^{\alpha}f\right)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt \tag{74}$$

dır. $n\in[\Re(\alpha)]+1$, $\Re(\alpha)\ge 0$ ve $x\in\mathbb{R}$ için,

$$\left(D_{+}^{\alpha}f\right)(x):=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(J_{+}^{n-\alpha}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{75}$$

ve

$$\left(D_{+}^{\alpha}f\right)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(J_{+}^{n-\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt \tag{76}$$

dır.

(73), (74) deki $J_{+}^{\alpha}f$ ve $J_{-}^{\alpha}f$ için ve (75) , (76) deki $D_{+}^{\alpha}f$ ve $D_{-}^{\alpha}f$ $\mathbb{R}$ ekseni üzerinde Riemann-Liouville sağ ve sol değerli kesirli integralleri ve kesirli türevleri de $\mathbb{R}$ ekseni üzerindedir. Özellikle, $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ olduğunda $y(x)$ in n. mertebeden türevini aldığımızda, bu durumda,

$$\begin{aligned} \left(D_{+}^{0}f\right)(x) &= \left(D_{-}^{0}f\right)(x) = f(x); \qquad (77) \\ \left(D_{+}^{n}f\right)(x) &= f^{(n)}(x), \ \left(D_{-}^{n}f\right)(x) = (-1)^{n} f^{(n)}(x) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$0 < \Re(\alpha) < 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ ise

$$\left(D_{+}^{\alpha}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{78}$$

ve

$$\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}dt \tag{79}$$

dır.

$\Re(\alpha) = 0$ $(\alpha \neq 0)$ olduğunda (78) ve (79) Riemann-Liouville kesirli türevlerin sanal kısmını aldığımızda,

$$\left(D_{+}^{i\theta}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{i\theta}}dt \ \ (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x \in \mathbb{R}) \tag{80}$$

ve

$$\left(D_{-}^{i\theta}f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^{i\theta}}dt \ \ (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x \in \mathbb{R}) \tag{81}$$

Özellik 3.3. (b) ye benzer olarak, J_{+}^{α} ve D_{+}^{α} Riemann-Liouville kesirli operatörlerinde fonksiyon olarak $e^{\lambda x}$ üstel fonksiyonunu aldığımızda eşitlik sağlanır.

Özellik 3.4.1. $\Re(\lambda) > 0$ olsun.

$0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ için $J_{+}^{\alpha} f$ ve $J_{-}^{\alpha} f$ integralleri $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ fonksiyonu için vardır. Bu durumda,

a. $\Re(\alpha) \geq 0$ ise

$$\left(J_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(x) = \lambda^{-\alpha} e^{\lambda x} \tag{82}$$

b. $\Re(\alpha) \geq 0$ ise

$$\left(D_{+}^{\alpha} e^{\lambda t}\right)(x) = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x} \tag{83}$$

dır.

Lemma 3.4.1. $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ve $\alpha > 0$ olsun. (67) ifadesinin sağlanması için gerek ve yeter şart J_{+}^{α} ve J_{-}^{α} operatörlerinin $L_p(\mathbb{R})$ den $L_q(\mathbb{R}^{+})$ ya sınırlı olmasıdır.

$\mathbb{R}$ ile sonsuz aralığın birleşimi $\mathbb{R}$ olsun. Yani, $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dır. Burada $L_{p,w}$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayında $f(x)$ fonksiyonunun normunun $\mathbb{R}$ üzerinde üstel olarak nasıl ifade edildiğini aşağıda göstereceğiz. $1 \leq p < \infty$ ve $w \in \mathbb{R}$ için,

$$L_{p,w}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \|f\|_{p,w} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-wt} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \tag{84}$$

tanımlanır. $L_{\infty,w} = C_w$ uzayında $e^{-wx} f(x) \in C(\mathbb{R})$ için $f(x)$ fonksiyonunun normunu aldığımızda,

$$L_{\infty,w}(\mathbb{R}) = C_w(\mathbb{R}) := \left\{ f : \|f\|_{w} = \max_{t \in \mathbb{R}} e^{-wt} |f(t)| < \infty \right\} \tag{85}$$

dır.

(84) ve (85) uzayları J_{+}^{α} ve J_{-}^{α} Riemann-Liouville kesirli integrallerine göre değişmeyendir.

Lemma 3.4.2. $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ ve $w > 0$ olsun. Bu durumda,

a. J_{+}^{α} operatörü $L_{p,w}$ uzayında sınırlıdır. Yani,

$$\left\| J_{+}^{\alpha} f \right\|_{p,w} \leqq k \left\| f \right\|_{p,w}, \; k = \left(\frac{p}{w} \right)^{\alpha} \; (1 \leq p < \infty), \, k = w^{\alpha} \; (p = \infty) \tag{86}$$

dır.

b. J_{-}^{α} operatörü $L_{p,-w}$ uzayında sınırlıdır. Yani,

$$\left\| J_{-}^{\alpha} f \right\|_{p,-w} \leqq k \left\| f \right\|_{p,w}, \; k = \left(\frac{p}{|w|} \right)^{\alpha} \; (1 \leq p < \infty), \, k = |w|^{\alpha} \; (p = \infty) \tag{87}$$

dır.

Lemma 3.4.3. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geqq 1$ ve $\alpha + \beta > \frac{1}{p}$ olsun. $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ ise bu durumda,

$$\left(J_{+}^{\alpha} J_{+}^{\beta} f \right)(x) = \left(J_{+}^{\alpha+\beta} f \right)(x) \text{ ve } \left(J_{-}^{\alpha} J_{-}^{\beta} f \right)(x) = \left(J_{-}^{\alpha+\beta} f \right)(x) \tag{88}$$

dır.

$\left(D_{+}^{\alpha} y \right)(x)$ ve $\left(D_{-}^{\alpha} y \right)(x)$ Riemann-Liouville kesirli türevlerindeki $f(x)$ fonksiyonu iyi fonksiyondur. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonu $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ uzayında $\mathbb{R}$ ile karmaşık sayılar üzerinde sonsuz türevlenebilen fonksiyondur.

Lemma 3.4.4. $\alpha > 0$ ise $f(x)$ iyi fonksiyonu için

$$\left(D_{+}^{\alpha} J_{+}^{\beta} f \right)(x) = f(x) \text{ ve } \left(D_{-}^{\alpha} J_{-}^{\beta} f \right)(x) = f(x) \tag{89}$$

doğrudur. Özellikle $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ için bu formüller sağlanır.

Özellik 3.4.2 . $\alpha > \beta > 0$ ise iyi $f(x)$ fonksiyonu için

$$\left(D_{+}^{\beta} J_{+}^{\alpha} f \right)(x) = \left(J_{o^{+}}^{\alpha-\beta} f \right)(x) \text{ ve } \left(D_{-}^{\beta} J_{-}^{\alpha} f \right)(x) = \left(J_{-}^{\alpha-\beta} f \right)(x) \tag{90}$$

formülleri sağlanır. Özellikle $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ için sağlanır. Dahası $\beta = k \in \mathbb{N}$ ve $\Re(\alpha) > k$ olduğunda,

$$\left(D^{k} J_{+}^{\alpha} f \right)(x) = \left(J_{+}^{\alpha-k} f \right)(x) \text{ ve } \left(D^{k} J_{-}^{\alpha} f \right)(x) = (-1)^{k} \left(J_{-}^{\alpha-k} f \right)(x) \tag{91}$$

dır.

4 BULGULAR VE TARTIŞMA

Konveks fonksiyonlar teorisinde büyük bir yere sahip olan Hermite-Hadamard eşitsizliği ilk olarak C. Hermite ve J. Hadamard tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra bir çok matematikçinin de ilgisini çekmiş olan bu eşitsizliği aşağıdaki şekilde verelim.

$a < b$ için $a, b \in I$ ve $I \in \mathbb{R}$ için $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu olsun. O halde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2} \tag{92}$$

dır. Dragomir ve Agarwal (92) de verilen eşitsizliğin sağ kısmını ile ilgili bazı kestirimler elde etmişlerdir bunun için de ilk olarak aşağıdaki Lemmayı ispatlamıştır.

Lemma 4.1. $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $a < b$, $a, b \in I$ olsun. $f' \in L\left[a, b\right]$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{93}$$

Teorem 4.1. $f : I^{\circ} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve $a < b$, $a, b \in I$ olsun. $\left|f'\right|$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \tag{94}$$

4.1 KESİRLİ İNTEGRALLER İÇİN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Kesirli integral eşitsizlikleri ile ilgili son zamanlarda yapılmış olan çalışmalar ile ilgili detaylı bilgiçle yukardaki bölümlerde açıklanmış olup bu konu ile ilgili olarakta daha detaylı bilgi için kaynaklar kısmında ki referanslara bakılabilir. Bu bölümdeki amacımız Riemann-Liouville kesirli integralleri ve diğer integral eşitsizliklerini kullanarak Hermite-Hadamard eşitsizlikleri için uygun kesirli integraller elde etmektir.

İlk olarak Hermite-Hadamard eşitsizliklerini aşağıdaki şekilde kesirli integraller için verelim:

Teorem 4.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positif fonksiyon ve $0 \leq a < b$ için $f \in L_1[a,b]$ olsun. f, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik kesirli integraller için sağlanır:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b) + J_{b-}^{\alpha}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \quad (\alpha > 0). \tag{95}$$

İspat. f, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise $x, y \in [a,b]$ ile $\lambda = \frac{1}{2}$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{96}$$

ve $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$, için

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \tag{97}$$

dır. (97) eşitsizliğinin her iki yanını $t^{\alpha-1}$ ile çarpıp $[0,1]$ aralığında t ye göre integre ettiğimizde,

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\alpha}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
\leq\ & \int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)\,dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)\,dt \\
=\ & \int_b^a \left(\frac{b-u}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(u)\frac{du}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{v-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(v)\frac{dv}{b-a} \\
=\ & \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b) + J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan da

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b) + J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]$$

elde ederiz. (97) eşitsizliğinin ispatından yararlanılarak f konveks fonksiyon ise $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

ve

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b).$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikleri topladığımızda,

$$f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb) \tag{98}$$

$$\leq \ tf(a)+(1-t)f(b)+(1-t)f(a)+tf(b).$$

elde ederiz. (98) eşitsizliğinin her iki yanını $t^{\alpha-1}$ ile çarpıp $[0,1]$ aralığında t ye göre integre ettiğimizde,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)\,dt+\int_0^1 t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)\,dt$$

$$\leq \ [f(a)+f(b)]\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$$

olarak yazılır. Böylece,

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a))\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha}$$

elde ederiz.

Hatırlatma 4.1. *Teorem* 4.2 deki (95) eşitsizliğinde $\alpha=1$ aldığımızda, (92) eşitsizliği olan Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.2. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$ için (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $f' \in L[a,b]$ ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b)+J_{b-}^{\alpha}f(a)\right] \tag{99}$$

$$= \ \frac{b-a}{2}\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)\,dt.$$

İspat . $\int_0^1\left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]f'(ta+(1-t)b)\,dt$ integralini hesaplamamız yeterli olacaktır. Bunun için

$$I = \int_0^1 \left[(1-t)^\alpha - t^\alpha\right] f'(ta+(1-t)b)\,dt \tag{100}$$

$$= \left[\int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)\,dt\right] + \left[-\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)\,dt\right]$$

$$= I_1 + I_2$$

olarak yazalım. I_1 ve I_2 yi ayrı ayrı kısmi integrasyon yöntemiyle integre ettiğimizde,

$$I_1 = \int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)\,dt \tag{101}$$

$$= (1-t)^\alpha \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 + \int_0^1 \alpha(1-t)^\alpha \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_b^a \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx$$

$$= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{b-}^\alpha f(a)$$

ve benzer şekilde,

$$I_2 = -\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)\,dt \tag{102}$$

$$= -\frac{t^\alpha f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 + \alpha\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_b^a \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{a+}^\alpha f(b)$$

elde edilir. (101) ve (102) eşitliklerinden (101) yani,

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)\right].$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını $\frac{b-a}{2}$ ile çarptığımızda teorem ispatlanır.

Hatırlatma 4.2. *Lemma* 4.2 deki (99) eşitliğinde $\alpha = 1$ aldığımızda *Lemma* 4.1 deki (93) eşitliği elde edilir.

Yukarıdaki *Lemma* yı kullanarak aşağıdaki integral eşitsizliğini elde edeceğiz.

Teorem 4.3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$ için (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir olsun. $\left|f'\right|$, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\,(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b) + J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \tag{103}$$

$$\leq \frac{b-a}{2\,(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[f'(a)+f'(b)\right].$$

İspat. *Lemma* 4.2 ve $\left|f'\right|$ konveksliğini kullanarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\,(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha}f(b) + J_{b-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \tag{104}$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left|f'\left(ta+(1-t)b\right)\right| dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right|\left[t\left|f'\left(a\right))\right| + (1-t)\left|f'\left(b\right))\right|\right] dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}\right]\left[t\left|f'\left(a\right))\right| + (1-t)\left|f'\left(b\right))\right|\right] dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left[t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}\right]\left[t\left|f'\left(a\right))\right| + (1-t)\left|f'\left(b\right))\right|\right] dt\right\}$$

$$= \frac{b-a}{2}(K_1+K_2)$$

yazılır. Buradan da K_1 ve K_2 yi hesapladığımızda,

$$\begin{aligned} K_1 &= \left|f'(a)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t\,(1-t)^{\alpha}\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+1}dt\right] \\ &\quad +\left|f'(b)\right|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha+1}dt - \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)t^{\alpha}dt\right] \\ &= \left|f'(a)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \\ &\quad +\left|f'(b)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \end{aligned} \tag{105}$$

ve

$$\begin{aligned} K_2 &= \left|f'(a)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+1}dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\,(1-t)^{\alpha}\,dt\right] \\ &\quad +\left|f'(b)\right|\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)t^{\alpha}dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+1}dt\right] \\ &= \left|f'(a)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \\ &\quad +\left|f'(b)\right|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] \end{aligned} \tag{106}$$

bulunur. (105) ve (106) i toplayıp (103) de yerleştirdiğimizde ispat tamamlanır.

Hatırlatma 4.3. *Teorem* 4.3 deki (103) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ aldığımızda *Teorem* 4.1 deki (94) eşitsizliği elde edilir.

.

5 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Lemma 4.2 de elde etmiş olduğumuz (99) özdeşliğine benzer olarak yeni özdeşlikler elde edilerek ilk olarak tanımlamış olduğumuz Teorem 4.2 deki (95) eşitsizliği olan kesirli integralleri çin Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

A.G. Azpeitia, Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Math., 28 **(1994)**, 7-12.

Agrawal, Om P., Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems, J. Math. Anal. Appl, 272, 368-379, (**2002)**.

Babakhani, A., Daftardar-Gejji, V**.,** On Calculus of Local Fractional Derivatives, J. Math. Anal. Appl., 270, 66-79, (**2002)**.

Bertram, R., Fractional Calculus and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg , (**1975)**.

Butzer, P.L., Westphal, U**.,** An Introduction to Fractional Calculus, in: R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey, (**2000)**.

E. Set, M. E. Özdemir, and S. S. Dragomir, On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 148102, 9 pages, (**2010)**.

E. Set, M. E. Özdemir, and S. S. Dragomir, On Hadamard-Type inequalities involving several kinds of convexity, Journal of Inequalities and Applications, Article ID 286845, 12 pages, (**2010).**

Podlubny, I., Fractional Differential Equations, Academic Press, London, (**1999)**.

Oldham, K.B., Spainer, J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York and London, (**1974)**.

Miller, K.S., Ross, B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, (**1974)**.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I**.,** Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA, (**1993)**.

Özen, S**.,** Kesirsel Türevler İçin Opial Eşitsizlikleri, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, (**2003)**.

Özen, S.,Öztürk, **İ.,** Grünwald-Letnikov,Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerine, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(1-2),66-76 Kayseri, (**2004**).

M. Alomari and M. Darus, On the Hadamard's inequality for log-convex functions on the coordinates, Journal of Inequalities and Applications, vol. 2009, Article ID 283147, 13 pages, (**2009**).

G. Anastassiou, M.R. Hooshmandasl, A. Ghasemi and F. Moftakharzadeh, Montogomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities, J. Ineq. Pure and Appl. Math., 10(4) **(2009)**, Art. 97.

M.K. Bakula, M.E. Özdemir, J. Pečarić, Hadamard tpye inequalities for $m-$convex and (α, m)-convex functions, J. Ineq. Pure and Appl. Math., 9(4) **(2008)**, Art. 96.

M. K. Bakula and J. Pečarić, Note on some Hadamard-type inequalities, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, vol. 5, no. 3, article 74, (**2004**).

S. Belarbi and Z. Dahmani, On some new fractional integral inequalities, J. Ineq. Pure and Appl. Math., 10(3) **(2009)**, Art. 86.

Z. Dahmani, New inequalities in fractional integrals, International Journal of Nonlinear Scinece, 9(4) **(2010)**, 493-497.

Z. Dahmani, On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration, Ann. Funct. Anal. 1(1) **(2010)**, 51-58.

Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf, Some fractional integral inequalities, Nonl. Sci. Lett. A, 1(2) **(2010)**, 155-160.

Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf, New generalizations of Gruss inequality usin Riemann-Liouville fractional integrals, Bull. Math. Anal. Appl., 2(3) **(2010)**, 93-99.

S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce, Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University, (**2000**).

S. S. Dragomir and R.P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula, Appl. Math. lett., 11(5) **(1998)**, 91-95.

S.S. Dragomir, On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for $m-$convex functions, Tamkang J. Math., 3(1) **(2002)**.

P. M. Gill, C. E. M. Pearce, and J. Pečarić, Hadamard's inequality for r-convex functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 215, no. 2, pp. 461–470, (**1997**).

R. Gorenflo, F. Mainardi, Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Springer Verlag, Wien **(1997)**, 223-276.

U.S.Kırmacı,M.K.Bakula,M.E.Özdemir,J.Pečarić, Hadamard-tpye inequalities for s-convex functions, Appl. Math. and Comp., 193 **(2007)**, 26-35.

S. Miller and B. Ross, An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, USA, (**1993**), p.2.

M. E. Özdemir, M. Avci, and E. Set, On some inequalities of Hermite-Hadamard type via m-convexity, Applied Mathematics Letters, vol. 23, no. 9, pp. 1065–1070, **(2010).**

J.E. Pečarić, F. Proschan and Y.L. Tong, Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Boston, 1992.

I. Podlubni, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, (**1999**).

M.Z. Sarikaya and H. Ogunmez, On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration, arXiv:1005.1167v1, submitted.

EKLER

1. Dördüncü bölümde ele alınan Kesirli integraller için Hermite-Hadmard tipi eşitsizlikler "*Mathematical and Computer Modelling* **(SCI)**" dergisinde yayınlanmıştır.

Kesirli integraller için aşağıdaki çalışmalar yapılarak yayına gönderilmiştir.

2. M. Z. SARIKAYA and **H YALDIZ**, *New generalization fractional of Ostrowski-Gruss type.*

3. M. Z. SARIKAYA and **H. YALDIZ**, *On weighted Montgomery identities for Riemann-Liouville fractional integrals.*

4. M. Z. SARIKAYA, **H. YALDIZ** and N. BAŞAK, *New fractional inequalities of Ostrowski-Gruss type.*

5. M. Z. SARIKAYA, **H. YALDIZ** and E. SET, *On fractional inequalities via Montgomery identities integrals.*

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: YALDIZ, Hatice
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve Yeri	: 02.04.1987 / OSMANİYE
Telefon	: (0546) 578 78 00
e-mail	: yaldizhatice@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Ü. /Matematik B.	2012
Lisans	A.Kocatepe Ü. /Matematik B.	2010
Lise	Atatürk Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Karacan Akademi	Matematik Öğrt.

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Mehmet Zeki SARIKAYA, Erhan SET, **Hatice YALDIZ** and Nagihan BAŞAK , Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities.
2. Mehmet Zeki SARIKAYA and **Hatice YALDIZ***,* New generalization fractional of Ostrowski-Gruss type.
3. Mehmet Zeki SARIKAYA and **Hatice YALDIZ** , On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly log-convex functions.

4. Mehmet Zeki SARIKAYA, **Hatice YALDIZ** and Hakan BOZKURT, On the Hadamard type integral inequalities involving several log-convex functions.
5. Mehmet Zeki SARIKAYA and **Hatice YALDIZ**, On weighted Montgomery identities for Riemann-Liouville fractional integrals.
6. Mehmet Zeki SARIKAYA, **Hatice YALDIZ** and Nagihan BAŞAK, New fractional inequalities of Ostrowski-Gruss type.
7. Mehmet Zeki SARIKAYA, **Hatice YALDIZ** and Hakan BOZKURT, On the Hadamard type integral inequalities involving several φ-r-convex functions.
8. Mehmet Zeki SARIKAYA and **Hatice YALDIZ**, On the Hadamard's type inequalities for L-Lipschitzian mapping.
9. Mehmet Zeki SARIKAYA, **Hatice YALDIZ** and Erhan SET, On fractional inequalities via Montgomery identities integrals.