T.C
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HEMEN HEMEN f −KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUSTAFA YILDIRIM

MAYIS 2012

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Mustafa YILDIRIM tarafından hazırlanan Hemen Hemen f-Kosimplektik Manifoldlar isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 21/05/2012 tarih ve 2012/158 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Nesip AKTAN
DüzceÜniversitesi

Üye
Prof. Dr. İsmet YILDIZ
Düzce Üniversitesi

Üye
Yrd. Doç. Dr. M. Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 29/05/2012

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Mustafa YILDIRIM'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans / Doktora derecesini almasını onamıştır.

Doç. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

29.05.2012

Mustafa YILDIRIM

Sevgili Aileme ve Ceren'ime…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanması sürecince gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Nesip Aktan'a en içten dileklerimle teşekkür ederim. Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2012 **Mustafa Yıldırım**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Değme dağılımı	$\mathcal{D}$
Divergens operatörü	div
Hemen hemen kompleks yapı	J
İkinci temel form	B
k sabit eğrilikli uzay form	$M^n(k)$
Levi-Civita konneksiyonu	∇
Lie türev operatörü	$\mathcal{L}$
M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı	$\chi(M)$
M üzerindeki tanjant demeti	TM
M üzerindeki tanjant demetlerinin ortogonal tümleyeni	$TM^\perp$
M üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların bir alt halkası	$\mathcal{R}_n(M)$
Nijenhuis tensör alanı	N
Ortogonal grup	$O(s)$
Riemann eğrilik tensörü	R
Üniter grup	$U(n)$
Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu	$\overline{\nabla}$
Weyl konformal eğrilik tensör alanı	C

ÖZET

HEMEN HEMEN f −KOSİMPLEKTİK YAPILAR

Mustafa YILDIRIM
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Nesip AKTAN
Mayıs 2012, 43 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, hemen hemen f-kosimplektik manifoldlar için eğrilik özellikleri verilerek bu tip manifoldların bazı paralel tensör alanlarıyla olan ilişkileri incelenmiş ve hemen hemen f-kosimplektik manifoldlara iki örnek verilmiştir. Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar sözcükler: Değme manifold, Hemen hemen Kenmotsu manifold, Hemen hemen f −kosimplektik manifold

ABSTRACT

ALMOST f −COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Mustafa YILDIRIM
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Nesip Aktan
May 2012, 43 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, curvature properties of the generalized almost f-cosymplectic manifolds are given and some relationships with some paralel tensor fields are examined and we have given two examples for almost f-coymplectic manifolds. The last chapter is devoted into results and recommondatitons.

Keywords: Contact Manifold, Almost Kenmotsu Manifold, Almost f-Cosymplectic Manifold

EXTENDED ABSTRACT

ALMOST f −COSYMPLECTIC MANIFOLDS

Mustafa YILDIRIM
Düzce University
Graduade School of Natural and Applied Sciences, Department of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Nesip Aktan
May 2012, 43 pages

1. INTRODUCTION

The class of almost contact metric manifolds which are called almost Kenmotsu manifolds M, were firstly introduced by Kenmotsu. These manifolds appear for the first time in (Kenmotsu 1972), where they have been locally classified. Kenmotsu defined a structure closely related to the warped product which was characterized by tensor equations.

Given an almost Kenmotsu metric structure (φ, ξ, η, g), consider the deformed structure

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \xi' = \alpha\xi, \varphi' = \varphi, g' = \frac{1}{\alpha^2} g, \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$$

where α is a non-zero real constant. So we get an almost α-Kenmotsu structure$(\varphi', \xi', \eta', g')$, This deformation is called a homothetic deformation. It is important to note that almost α-Kenmotsu structures are related to some special local conformal deformations of almost cosymplectic structures (Vaisman 1980). Geometrical properties and examples of almost α-Kenmotsu manifolds are studied in (Kim, Pak 2005), (Vaisman 1980), (Kenmotsu, 1972) and (Olszak, 1989).
The notion of an almost cosymplectic manifold was introduced by Goldberg and Yano in 1969, (Goldberg, Yano 1969). The simplest examples of such manifolds are those being the products (possibly local) of almost Kaehlerian manifolds and the real line $\mathbb{R}$ or the circle S^1.

In (Kim, Pak 2005) Kim and Pak combined almost α-Kenmotsu and almost cosymplectic manifolds into a new class which is called almost α-cosymplectic manifolds, where α is a scalar. They studied canonical foliations of an almost α-cosymplectic manifold and proved that the canonical foliation $\mathcal{F}$ defined by the contact distribution is Riemannian and tangentially almost Kaehler of codimension 1 and that $\mathcal{F}$ is tangentially Kaehlerian if the manifold M is normal.

In (Boecks 2006), the authors showed that a locally symmetric contact metric space is either Sasakian with the constant curvature 1 or locally isometric to the unit tangent sphere bundle of an Euclidean space. Following these works, Cho et all investigated the η-parallelity of the torsion tensor τ of a contact metric manifold M. The tensor field τ was firstly introduced by Hamilton and Chern. They defined by the torsion tensor field τ for any vector fields X and Y on Mas follows:

$$g(\tau X, Y) = \left(\mathcal{L}_{\xi} g\right)(X, Y)$$

Cho showed that a non-Sasakian contact metric manifold with the η-parallel torsion tensor is a (k, μ)-contact manifold.

In this paper, we consider a wide subclass of almost contact metric manifolds which is called almost f-cosymplectic manifold. Firstly, we give the concept of almost f-cosymplectic manifolds and state general curvature properties. We derive several important formulas on almost f-cosymplectic manifolds. These formulas enable us to find the geometrical properties of almost f-cosymplectic manifolds with η-parallel tensors h and φh. We also examine the tensor field τ on M. Then we give some propositions and theorems on η-parallelity, cyclic parallelity, Codazzi condition and η-cyclic parallelity. Finally, we give two extensive examples on almost f-cosymplectic manifolds.

Keywords: Contact Manifold, Almost Kenmotsu Manifold, Almost f-Cosymplectic Manifold

1 GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yer kaplamaktadır. $(2n+1)$-boyutlu bir (C^∞) sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir 1-form

olan η ile oluşturulan (φ,ξ,η)-üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$
$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $(J^2 = -I)$ integrallenebilmesi olduğununu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak, (Goldberg ve Yano 1969) kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır. Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde bir çok çalışmaya imza atmıştır (Olszak 1981-89). 1972 yılında Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu sınıflama Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır (Kenmotsu 1972). 1981 yılında Vanhecke hemen hemen değme yapılarını ele aldığı çalışmasında hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını genişleterek hemen hemen f-Kenmotsu manifoldları tanımlamıştır (Vanhecke 1981).

(Kim ve Pak 2005) hemen hemen α-Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılarını birleştirerek hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir altsınıfı olan hemen

hemen α-kosimplektik manifold kavramını tanımlamışlardır.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik yapısı

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartlarını sağlar. Burada α, keyfi bir reel sayı ve Φ, temel 2-formdur. Özel olarak, $\alpha = 0$ durumunda hemen hemen kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α-Kenmotsu manifoldları elde edilir. Normallik şartı altında ise f-kosimplektik manifold ya kosimplektik yada α-Kenmotsu manifoldudur.

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında; Kim ve Pak'ın hemen hemen α-kosimplektik manifold tanımında yer alan keyfi α reel sayısı yerine, M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların bir alt halkasına ait $f \in \mathcal{R}_\eta(M)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu alınarak mevcut yapı hemen hemen f-kosimplektik manifoldlara genişletilmiştir. Yüksek lisans tez çalışmamızda hemen hemen f-kosimplektik manifoldlar üzerindeki eğrilik özelliklerini kullanarak daha genel sonuçlar elde edilmiştir.

İkinci bölümde, manifoldlar ve altmanifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldları ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısımda, altmanifoldlar teorisi hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen f-kosimplektik manifoldlar ile ilgili genel sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle, paralel tensör alanlarını gözönüne alarak bu tür manifoldları ayrıntılı bir şekilde araştırılmıştır. Bu bölümün ilk kısmında; hemen hemen f-kosimplektik yapılar tanıtılmıştır. İkinci kısımda, bazı özel tensör alanlarının temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü kısımda, Riemann eğrilik tensörü özellikleri verilmiş ve (Pastore ve Dileo 2007) de değinilen hemen hemen Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel özellikler genelleştirilmiştir. Bulduğumuz sonuçlar özel olarak $f = 1$ durumunda (Pastore ve Dileo 2007) ile çakışmaktadır. Son kısımda, bazı paralel tensör alanları ve $h, \varphi h$ tensörleri yardımıyla yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Özellikle, bu kısımda h tensör alanının η-paralellik koşulu önemli yer kaplamaktadır.

2 MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1 RİEMANN MANİFOLDLAR

Bu kısımda, Riemann manifoldların temel kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1.. M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir (O'neill 1983).

M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa M^n ye bağlantılı manifold adı verilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\overset{\text{2-lineer}}{\longrightarrow} \chi(M^n) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall\ f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$, $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
(2) $\nabla_{fX+gY} Z = f\ \nabla_X Z + g\ \nabla_Y Z$,
(3) $\nabla_X(f\ Y) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

(2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \chi(M^n) \\ R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &- \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $(1,3)$-tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall\ X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,
(2) $g(R(X,Y)V, W) = -g(R(X,Y)W, V)$,
(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,
(4) $g(R(X,Y)V, W) = g(R(V,W)X, Y)$,

özelliklerini sağlar (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve E, (1.1)-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E\left(\nabla_X Y\right)$$

dır (O'neill 1983).

Önerme 2.1.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'neill 1983).

Önerme 2.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X G)Z)$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

eşitliğine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.6. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longrightarrow S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrıca, $(0,2)$-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skalar eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.8. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n nin eğrilik tensörü paralel ($\nabla R = 0$) ise o zaman, M^n ye lokal simetrik uzay denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ

fonksiyonu özdeş olarak 1 'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.10. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin $(1,3)$-tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı C, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(X,Z)Y - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY \\ &\quad -g(Y,Z)QX] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere ($c = \operatorname{div} C$),

$$c(X,Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \frac{1}{2(n-2)}\left[(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X\right]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $c = 0$ olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2. (M^n, g) bir sabit k eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$R(X,Y)Z = k\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.11. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n-boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.1.1. (M^n, g) bir sabit k eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ için,

$$M^n(k) = \begin{cases} k = 0 & \text{ise} \quad M^n(k) = E^n \text{ Öklid uzayı,} \\ k = \dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = S^n(r) \text{ küresi,} \\ k = -\dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay,} \end{cases}$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.12. M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M^n &\longrightarrow M^n \\ (t,p) &\longrightarrow \varphi_t(P) \end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\forall\ t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t : P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall\ t,s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M^n$ için, $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa φ ye M^n nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.13. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup φ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M^n$ için,

$$(\mathcal{L}_X K)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[K_p - (\varphi_t K)_p\right]$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_X K$ dönüşümüne X yönünde K nın Lie türevi denir ve $\mathcal{L}_X K$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

(1) $\mathcal{L}_X(Y \otimes Z) = (\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)$, ($Y, Z$ herhangi tensör alanları)

(2) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, (f, K cismi üzerinde bir fonksiyon)

(3) $\mathcal{L}_X V = [X, V]\,,\ V \in \chi(M^n)$

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.14. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $\mathcal{L}_X g = 0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon 1984).

2.2 HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, φ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer φ, ξ, η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\eta(\xi) = 1 \\ &\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.4}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (φ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. M^{2n+1}, (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi), \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.5}$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (φ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{2.6}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olmak üzere,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4. (M^n, g) bir Riemann manifold ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $w = \sqrt{|g|}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise w ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i, M^n üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.1.2.5. gereğince $(M^n, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.6. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer w 1-form ise, keyfi X, Y vektör alanları için,

$$2dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X,Y]$$

dır. Eğer w 2-form ise,

$$\begin{aligned} 3dw(X,Y,Z) &= X(w(Y,Z)) + Y(w(Z,Y)) + Z(w(X,Y)) \\ &\quad -w([X,Y],Z) - w([Y,Z],X) - w([Z,X],Y) \end{aligned}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = g(Y, (\nabla_X \varphi)Z)$

(ii) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_X \Phi)(\varphi Y, \varphi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\varphi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\varphi Z$

(iii) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \varphi Y)$

(iv) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$

(v) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X \Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \varphi X_i, \xi\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, M^{2n+1} nin açık bir altcümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\varphi X_i}\eta)\varphi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. M^n bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X,\ f\frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = \left(\varphi X - f.\xi,\ \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X,Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned}$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_{φ}, φ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerinde her X, Y vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlamasıdır (Blair 2002).

Tanım 2.2.13. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \ (\Phi, \text{kapalıdır}), \ d\eta = 0 \ (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır (Olszak 1981).

Yardımcı Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer Φ 2-formu kapalı ise,

$$\begin{aligned}&(\nabla_{\varphi X}\Phi)(\varphi Y, Z) + (\nabla_X\Phi)(Y, Z) - \eta(X)\left[d\eta(\varphi Y, Z) + d\eta(Y, \varphi Z)\right]\\&+\eta(Y)\left[d\eta(\varphi Z, X) - \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(Z, \varphi X)\right] + \eta(Z)\left[d\eta(X, \varphi Y) - d\eta(\varphi X, Y)\right] = 0\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Olszak 1981).

Yardımcı Teorem 2.2.2. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\varphi X}\varphi)(\varphi Y) + (\nabla_X\varphi)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi = 0$$

eşitliği geçerlidir (Olszak 1981).

Örnek 2.2.1. (M, J, G) bir hemen hemen Kaehler manifoldu olsun. O zaman, M, $(2n)$-boyutlu bir manifold, J bir hemen hemen kompleks yapı ve M^{2n} üzerindeki Riemann metriği G olmak üzere,

$$J^2 = -I, \quad G(X, Y) = G(JX, JY)$$

eşitlikleri geçerlidir. M^{2n} üzerindeki temel 2-form

$$\Omega(X, Y) = G(X, JY)$$

şeklinde tanımlı olup, $d\Omega = 0$ dır.

$\mathbb{R}$ reel doğru ve g_0 bir Riemann metriği olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde ξ_0 sıfırdan farklı bir vektör alanı ve η_0

$$g_0(X, \xi_0) = \eta_0(X)$$

olacak şekilde bir 1-form olsun. Böylece $M' = M^{2n} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu tanımlıdır. (X_1, X_2), V üzerinde tanımlı vektör alanları olsunlar. Burada X_1, V çarpım manifolduna dik olan vektör ve X_2 ise $\mathbb{R}$ doğrusuna dik olan vektördür. φ $(1,1)$-tipli bir tensör alanı ξ bir vektör alanı ($\xi \neq 0$) ve η 1-formunu

$$\varphi(X_1, X_2) = (JX_1, 0), \quad \xi = (0, \xi_0), \quad \eta(X_1, X_2) = \eta_0(X_2)$$

şeklinde seçelim. Ayrıca, $M^{'}$ üzerinde tanımlı g metriği

$$g = G + g_0$$

şeklindedir. Böylece $(M^{'}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kosimplektik manifoldu elde edilir (Olszak 1981).

Tanım 2.2.14. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartları geçerli ise M manifolduna bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu denir. $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Önerme 2.2.3. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \ \xi' = \alpha\xi, \ \varphi^{'} = \varphi, \ g' = \frac{1}{\alpha^2}g, \ \alpha \neq 0, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlı homotetik deformasyon yardımıyla M^{2n+1} üzerinde bir $(\varphi', \xi', \eta', g')$

hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim ve Pak 2005).

Teorem 2.2.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X, \ \nabla_X\xi = -\varphi^2 X \ ; \ \forall \ X, Y \in \chi(M^{2n+1})$$

dır (Kenmotsu 1972).

2.3 ALTMANİFOLDLAR

Bu kısımda, altmanifoldlar teorisi hakkında bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altcümlesi M olsun. $\tilde{M}$ üzerindeki metrik $\tilde{g}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} j : M &\longrightarrow \tilde{M} \\ p &\longrightarrow j(p) = p \end{aligned}$$

dahil etme dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki

$$T_pM \xrightarrow{j_*|p} T_p\tilde{M}$$
$$T_pM^* \xrightarrow{j^*|p} T_p\tilde{M}^*$$

türev ve ek dönüşümleri için,

$$(j_p^*(\tilde{g}_p))(v_p, w_p) = \tilde{g}_p(j_*(v_p), j_*(w_p)); \; \forall\; v_p, w_p \in T_pM$$

eşitliği ile tanımlanan $j^*\tilde{g}_p = g_p$ dönüşümü M üzerinde bir metrik ise M ye $\tilde{M}$ nın bir Riemann altmanifoldu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.3.2. $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir Riemann altmanifoldu (M^n, g) olsun. ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla, M^n ve $\tilde{M}^{n+d}$ manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olsun. O halde, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{2.9}$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_\gamma X + \nabla_X^\perp N \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada B ye M^n nin ikinci temel formu denir ve N, M^n üzerinde bir normal vektör alanıdır. Eğer $\forall\; X, Y \in \chi(M^n)$ için, $B(X, Y) = 0$ ise M manifolduna total geodeziktir denir (Chen 1973).

İkinci temel form B ve A_γ şekil operatörü arasında baza göre yazılım

$$B(X, Y) = \sum_{\gamma=1}^{d} g(A_\gamma X, Y) N_\gamma$$

eşitliği elde edilir. Burada N_γ, $(\gamma = 1, ..., d)$ M^n altmanifolduna dik olan vektör alanları, $\nabla^\perp$ de M^n altmanifoldunun normal konneksiyonudur. Kolayca

$$g(A_\gamma X, Y) = g(B(X, Y), N_\gamma)$$

eşitliği elde edilir (Chen 1973).

Tanım 2.3.3. (M^n, g), $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M^n nin ortalama eğrilik vektör alanı denir. Eğer $H = 0$ ise M^n altmanifolduna minimaldir denir. H ortalama eğrilik vektörünün normuna M^n nin ortalama eğriliği denir. Burada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ M^n üzerinde bir lokal ortonormal bazdır (O'neill 1983).

Tanım 2.3.4. $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M^n, g) olsun. $\forall$ $X, Y \in \chi(M^n)$ olmak üzere,

$$B(X, Y) = g(X, Y)H$$

eşitliği sağlanıyorsa M^nye total umbilik altmanifold denir (Chen 1973).

Tanım 2.3.5. (M^n, g), $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun.B ikinci temel formu her $X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için, B nin X yönündeki kovaryant türevi

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_X(B(Y, Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

şeklinde tanımlıdır. $\overline{\nabla} B$ $(0, 3)$-tipli bir tensör alanıdır ve M^n altmanifoldunun üçüncü temel formu olarak adlandırılır. Ayrıca, $\overline{\nabla}$ ya Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu adı verilir. Eğer $\overline{\nabla} B = 0$ ise M^n altmanifoldu paralel ikinci temel formludur denir (Chen 1973).

B ikinci temel formunun $\overline{\nabla}^2 B$ ikinci kovaryant türevi

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}^2 B)(Z, W, X, Y) &= (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z, W) \\ &= \nabla^{\perp}_X((\overline{\nabla}_Y B)(Z, W)) - (\overline{\nabla}_Y B)(\nabla_X Z, W) \\ &\quad -(\overline{\nabla}_X B)(Z, \nabla_Y W) - (\overline{\nabla}_{\nabla_X Y} B)(Z, W)\end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlıdır (Chen 1973).

Tanım 2.3.6.(M^n, g), $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$R^{\perp}(X, Y) = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlı $R^\perp$ dönüşümüne M^n nin normal yöndeki eğrilik tensörü denir (O'neill 1983).

(2.11) ve (2.12) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y B)(Z,W)-(\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X B)(Z,W) &= (\bar{R}(X,Y)\cdot B)(Z,W)\\ &= R^\perp(X,Y)B(Z,W)-B(R(X,Y)Z,W)\\ &\quad -B(Z,R(X,Y)W)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\bar{R}$, $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre eğrilik tensörüdür (Chen 1973).

3 BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir altsınıfı olan hemen hemen f-kosimplektik manifoldlar incelenmiştir. Bu ve bundan sonraki bölümlerde elde edilen sonuçlar orijinaldir.

3.1 HEMEN HEMEN f-KOSİMPLEKTİK YAPILAR

Bu kısımda öncelikle hemen hemen f-kosimplektik yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 3.1.1. (M,φ,ξ,η,g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanları ve $f \in \mathcal{R}_\eta(M)$ için, M^{2n+1} üzerinde

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2f\eta \wedge \Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen f-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $f = 0$ için hemen hemen kosimplektik, $f \neq 0$ durumunda ise hemen hemen f-Kenmotsu manifoldu elde edilir

Yardımcı Teorem 3.1.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) \\ &\quad + g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) \\ &\quad + 2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dir. Burada $N^{(1)}, N^{(2)}$ tensör alanları, sırasıyla,

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{3.2}$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)X \tag{3.3}$$

dir (Blair 2002).

Önerme 3.1.1. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$hX = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\varphi)X, \quad h(\xi) = 0 \tag{3.4}$$

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad \nabla_\xi \varphi = 0 \tag{3.5}$$

$$(\varphi \circ h)X + (h \circ \varphi)X = 0 \tag{3.6}$$

$$\dot{I}z(h) = 0 \tag{3.7}$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = -f\varphi^2$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

Önerme 3.1.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$\nabla_X \xi = -f\varphi^2 X - \varphi h X \tag{3.8}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = f\left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right] + g(\varphi Y, hX) \tag{3.9}$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = -f\varphi^2 \tag{3.10}$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

İspat: (Pastore ve Dileo 2007) ve (Kim ve Pak 2005) deki işlem adımları takip edilerek sonuçlar kolaylıkla bulunabilir.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, her X vektör alanı için,

$$(\nabla_\xi h) \circ \varphi + \varphi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

eşitliği geçerlidir (Blair 2002).

Önerme 3.1.3. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_{\varphi X}\varphi)\varphi Y = -f\left[\eta(Y)\varphi X + 2g(X, \varphi Y)\xi\right] - \eta(Y)hX \tag{3.11}$$

eşitliğini sağlar.

İspat: Nijenhuis tensör alanı kullanılarak direkt hesaplamalarla,

$$\varphi N(X,Y) + N(\varphi X, Y) = 2\eta(X)hY, \tag{3.12}$$

ve

$$\eta(N(\varphi X,Y))=0. \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.1) den

$$2g\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Y,Z\right)=2fg(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X,Z)+g(N(Y,Z),\varphi X)$$

şeklinde olup (3.12) ve (3.13) kullanılarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p\in M^n$ noktası için T_pM^n nin r-boyutlu altuzayı ($r\leq n$) $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}_p$ nin bir kolleksiyonu $\mathcal{D}=\{\mathcal{D}_p\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{X_1,\ldots,X_r\}$ vektör alanları U nun her $q\in M^n$ noktasında hala $\mathcal{D}_p$ nin bir bazı oluyorsa $\mathcal{D}$ ye M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılım ve $\{X_1,\ldots,X_r\}$ cümlesine U üzerinde $\mathcal{D}$ için bir lokal baz denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.3. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. M^n nin bir haritası $x=(x_1,x_2\ldots,x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi $\mathcal{D}$ dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına $\mathcal{D}$ dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan $\mathcal{D}$ dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa $\mathcal{D}$ dağılımına integrallenebilirdir denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold, M^n nin r-boyutlu bağlantılı altmanifoldu N ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. Her $p\in N$ için, $\mathcal{D}_p=T_pN$ ise N ye M^n nin r-boyutlu integral altmanifoldu denir (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve w M^n üzerinde C^∞ bir 1-form olsun. M^n nin her $p\in M^n$ noktası için $n=boy(\ker w_p)=r$ sabit ise $\ker w_p$ M^n üzerinde bir r-boyutlu dağılımdır (Sharpe 1997).

Teorem 3.1.1. (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. $\mathcal{D}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X,Y\in\mathcal{D}$ için $[X,Y]\in\mathcal{D}$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.5. M^n bir C^∞ manifold, w M^n üzerinde C^∞ bir 1-form ve her $p\in M^n$ noktası için $n=boy(\ker w_p)=r$ sabit olsun. Böylece $\mathcal{D}=\{\ker w_p:\ p\in M^n\}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X,Y\in\ker w$ için $dw(X,Y)=0$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Uyarı 3.1.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Her $p \in M^{2n+1}$ için,

$$\mathcal{D}_p = \ker \eta_p = \{X \in T_pM : \eta(X_p) = 0\}$$

ve $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ olmak üzere, $boy(\mathcal{D}_p) = 2n$ olduğundan Önerme 3.1.4. gereğince $\mathcal{D}$ M^{2n+1} nin bir $2n$-boyutlu dağılımı olur. Diğer yandan, M^{2n+1} bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olduğundan $d\eta = 0$ olup, Önerme 3.1.5 yardımıyla $\mathcal{D}$ dağılımı integrallenebilirdir. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımına $2n$-boyutlu integral altmanifoldları karşılık gelir.

Önerme 3.1.6. Bir hemen hemen kosimplektik manifold bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2007).

Teorem 3.1.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu ve $h = 0$ olsun. O zaman, M manifoldu $M' \times_{f^2} N^{2n}$ olacak şekilde lokal bir katlı çarpımla ifade edilir. Burada N^{2n} bir hemen hemen Kaehler manifold, t koordinatı ile verilen açık aralık M' ve bazı c pozitif sabitleri için $f^2 = ce^{2t}$ dır (Pastore ve Dileo 2007).

Önerme 3.1.7. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

(1) $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu hemen hemen Kaehler yapıdadır,

(2) $f = 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu total geodezik veya $f \neq 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter koşul $h = 0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2005).

İspat: $\widetilde{M}$, $\mathcal{D}$ dağılımının integral alt manifoldu olsun. $\left(\mathcal{D}, J = \varphi_{|\mathcal{D}}, J^2 = -I\right)$ yapısının hemen hemen kompleks dağılım ve indirgenmiş $\widetilde{g}$ metriğinin $\widetilde{M}$ üzerinde Hermitian metrik olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, $\forall X, Y \in \Gamma(\widetilde{M})$ için, $\widetilde{M}$ üzerinde indirgenmiş 2-form $\widetilde{\Omega} = \widetilde{g}(X, JY) = g(X, \varphi Y) = \Omega(X, Y)$ ve $d\widetilde{\Omega} = 0$ dir. Dolayısı ile, $\widetilde{M}$ hemen hemen Keahler manifoldtur. Temel iki form B ve ξ yönündeki Weingarten opratörü A olmak üzere Proposition **??** and (2.3) kullanılarak,

$$B(X, Y) = g(AX, Y)\xi = -fg(X, Y)\xi + g(\varphi hX, Y)\xi \tag{3.14}$$

elde edilir. $T\widetilde{M}$ de $l=1,2,...,n$ için $e_{l+n}=\varphi e_l$ olacak şekildeki ortonormal çatıyı $\{e_1,e_2,...,e_{2n}\}$ olarak alalım. (3.14) ifadesinde $X=Y=e_p$ alır ve $p=1,2,...,2n$ için toplama geçilir ise

$$H=\frac{1}{2n}(trA)\xi=-f\xi.$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 3.1.8. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin f-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h=0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2005).

İspat: Eğer yapı normal ise, her X vektör alanı için,

$$\begin{aligned} N(X,\xi) =&\ N_\varphi(X,\xi)+2d\eta(X,\xi)\xi \\ =&\ -\varphi\left[\varphi X,\xi\right]+\varphi^2\left[X,\xi\right]+2d\eta(X,\xi)\xi \\ =&\ 2\varphi hX=0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Bu nedenle, $h=0$. Diğer bir yandan, her bir X,Y vektör alanları için

$$N_\varphi(X,Y)=\left[\varphi X,\varphi Y\right]-\varphi\left[\varphi X,Y\right]-\varphi\left[X,\varphi Y\right]-\left[X,Y\right]=N_{\varphi\backslash\mathcal{D}}(X,Y) \tag{3.16}$$

elde ederiz. Açıkça görülür ki $N_J=0$ olması için ancak ve ancak J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir olmalıdır.Bu nedenle (3.15) ve (3.16) ile ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.9. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$, $\mathcal{D}$ değme dağılımının integral altmanifoldları Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin f-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\xi=-f\varphi^2$ olmasıdır.

İspat Herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, $N_\varphi(X,\xi)=2\varphi hX$ eşitliği yazılır. Bu nedenle, yapının normal olduğunu kabul edersek $Y\in\mathcal{D}$ için, $h(Y)=0$ elde edilir. $h(\xi)=0$ olduğundan $h=0$ bulunur ve (3.10) ifadesi $\nabla\xi=-f\varphi^2$ eşitliğini gerektirir. (3.10) ifadesi yardımıyla eğer $\nabla\xi=-f\varphi^2$ ise $h=0$ dır. O halde, keyfi X vektör alanları için $N_\varphi(X,\xi)=0$ dır. $J_\mathcal{D}$ hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda her $X,Y\in\mathcal{D}$ için $N_\varphi(X,Y)=N_{J_\mathcal{D}}(X,Y)=0$ dır. Böylece $\mathcal{D}$ dağılımının integral manifoldları Kaehler yapıdadır.

Sonuç 3.1.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir hemen hemen f-kosimplektik manifoldu $\nabla\xi = -f\varphi^2$ şartını sağlıyorsa bir f-kosimplektik manifolddur.

İspat Boyutun 3 olması durumunda, $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldları boyutu 2 olan hemen hemen Kaehler yapıdadırlar. Böylece Önerme 3.1.8 den dolayı ispat tamamlanır.

Uyarı 3.1.2. Yukarıda verilen sonuçlar (Pastore ve Dileo 2007) de $f = 1$ durumu için elde edilmiştir.

3.2 TENSÖR ALANLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda belli tensör koşullarını sağlayan A ve h tensör alanları incelenmiştir. Şimdi, bundan sonraki bölümlerde kullanacağımız temel eşitlikleri verelim.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde $(1,1)$-tipli A ve h tensör alanları, sırasıyla, $A = -\nabla\xi$ ve $h = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi\varphi$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her X, Y vektör alanları için,

(i) A ve h simetriktir,

(ii) $A\varphi + \varphi A = -2f\varphi$,

(iii) $\eta \circ A = 0$, $\eta \circ h = 0$,

(iv) $h = A \circ \varphi + f\varphi$,

(v) $hA + Ah = -2fh$,

(vi) $\dot{I}z(A) = -2fn$

(vii) $\dot{I}z(\varphi A) = 0$

eşitlikleri sağlanır.

İspat (i) M^{2n+1} üzerinde herhangi X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned} g(AX, Y) &= g(f\varphi^2 X + \varphi hX, Y) \\ &= -fg(\varphi X, \varphi Y) - g(X, h\varphi Y)) \\ &= g(f\varphi^2 X, Y) + g(\varphi hY, X) \\ &= g(AY, X) \end{aligned}$$

dır. Böylece A simetriktir. Özel olarak, $X = \xi$ için $A\xi = f\varphi^2\xi + \varphi h\xi = 0$ elde edilir. Benzer olarak, h tensör alanının simetrik olduğu kolayca elde edilir.

(ii) A tensör alanının özellikleri gözönüne alındığında $A\varphi = (f\varphi^2 + \varphi h)\varphi$ ve $\varphi A = \varphi(f\varphi^2 + \varphi h)$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $A\varphi + \varphi A = -2f\varphi$ eşitliği bulunur.

(iii) A tensör alanının tanımından

$$\begin{aligned} (\eta \circ A)X &= \eta(AX) \\ &= g(-\nabla_X\xi, \xi) \\ 0 &= g(X, \nabla_\xi\xi) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\eta \circ h = 0$ eşitliği $\mathcal{L}$ Lie türev operatörünün tanımı kullanılarak elde edilir.

(iv) (3.8) eşitliğinden $A\varphi = -f\varphi + h$ dır. Burada h tensör alanı çekilerek $h = A\varphi + f\varphi$ elde edilir.

(v) hA ve Ah bileşke tensör alanları

$$hA = fh\varphi^2 + h\varphi h, \;\; Ah = f\varphi^2 h + \varphi h^2$$

şeklinde bulunur. Böylece yukarıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanarak $hA + Ah = 2f\varphi^2 h$ elde edilir.

(vi)-(vii) A ve φA tensör alanlarının izleri alınır ve (3.7) eşitliği kullanılırsa (vi) ve (vii) şıkları elde edilir.

Önerme 3.2.1. Bir hemen hemen kosimplektik manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul her X, Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X\varphi)Y = -g(\varphi AX, Y)\xi + \eta(Y)\varphi AX$$

dır. Burada $AX = \varphi hX$ olarak alınmıştır (Olszak ve Dacko 1998).

Önerme 3.2.2. Bir hemen hemen f-kosimplektik manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul her X, Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X\varphi)Y = -g(\varphi AX, Y)\xi + \eta(Y)\varphi AX \tag{3.17}$$

dır. Burada her X vektör alanı için, $AX = f\varphi^2 X + \varphi h X$ dır.

İspat (Pastore ve Falcitelli 2007) de Önerme 2.2 $s = 1$ için ele alındığında ispat benzer olarak verilebilir.

3.3 EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü yardımıyla bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir.

Önerme 3.3.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} üzerinde herhangi vektör alanları X, Y için,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \left[\xi(f) + f^2\right][\eta(X)Y - \eta(Y)X] - f\,[\eta(X)\varphi hY - \eta(Y)\varphi hX] \\ &\quad +(\nabla_Y \varphi h)X - (\nabla_X \varphi h)Y \\ &= (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitliği sağlanır.

İspat R Riemann eğrilik tensörü tanımı ve (3.8) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= \nabla_X(-f\varphi^2 Y - \varphi hY) - \nabla_Y(-f\varphi^2 X - \varphi hX) \\ &\quad -(-f\varphi^2\,[X,Y] - \varphi h\,[X,Y]) \\ &= -f\nabla_X \varphi^2 Y - \nabla_X \varphi hY + f\nabla_Y \varphi^2 X + \nabla_Y \varphi hX \\ &\quad +f\varphi^2\,[X,Y] + \varphi h\,[X,Y] \\ &= [\xi(f) + f^2]\,[\eta(X)Y - \eta(Y)X] - f\,[\eta(X)\varphi hY - \eta(Y)\varphi hX] \\ &\quad +(\nabla_Y \varphi h)X - (\nabla_X \varphi h)Y \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.3.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

$$R(X,\xi)\xi = \left[\xi(f) + f^2\right]\varphi^2 X + 2f\varphi hX - h^2 X + \varphi(\nabla_\xi h)X \tag{3.19}$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\varphi R(X,\xi)\xi - \left[\xi(f) + f^2\right]\varphi X - 2fhX - \varphi h^2 X \tag{3.20}$$

$$R(X,\xi)\xi - \varphi R(\varphi X,\xi)\xi = 2\left[(\xi(f) + f^2)\varphi^2 X - h^2 X\right] \tag{3.21}$$

$$S(X,\xi) = -2n\left[\xi(f) + f^2\right]\eta(X) - \operatorname{div}(\varphi h) \tag{3.22}$$

$$S(\xi,\xi) = -\left(2n\left[\xi(f) + f^2\right] + trace(h^2)\right) \tag{3.23}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat $\nabla_\xi \varphi = 0$ ve (3.17) yi kullanarak direkt hesaplamalarla (3.19) bulunur. (3.19) e φ yi uygulayarak ve $g\left((\nabla_\xi h)X, \xi\right) = 0$ olduğunu göstererek (3.20) i elde ederiz. Son olarak (3.19)den (3.21) elde edilir.

Özdeğerleri $\{\mu_0 = 0,\ \mu_i,\ -\mu_i\}$ olan h ın özvektörlerinden oluşan $\{E_0 = \xi,\ E_i,\ E_{n+i} = \varphi E_i\}$ yerel ortonormal bir φ bazı alabiliriz.(3.18) eşitliğinde her iki tarafına herhangi bir W vektör alanıyla iç çarpım uygulayalım. Sonra $X = W = E_i$ ilişkisiyle eşitiğin $1 \le i \le 2n+1$ için toplamı,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g\left(R(E_i,Y)\xi, E_i\right) = -2\eta\left[\xi(f) + f^2\right]\eta(Y) - \sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_{E_i}\varphi h)Y, E_i) \tag{3.24}$$

elde edilir.(3.24) kullanılarak, (3.22) elde edilir. (3.22) eşitliğinde $Y = \xi$ alınarak, (3.23) elde edilir.

3.4 PARALEL TENSÖR ALANLARI

Bu kısımda, hemen hemen f-kosimplektik manifoldlar üzerinde η-paralellik, Kodazzi, devirli paralellik ve devirli η-paralellik tensör şartlarını incelenmiştir.

Tanım 3.4.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \ker\eta$ olmak üzere,

$$g((\nabla_X \eta)\, Y, Z) = 0 \tag{3.25}$$

şartını sağlanıyorsa M^{2n+1} ye η-paraleldir denir (Boeckx 2005).

Tanım 3.4.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X \tag{3.26}$$

ise T ye Kodazzi tensör alanı denir (Blair 2002).

Tanım 3.4.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli tensör alanı T olmak üzere, herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X T)\,Y, Z) + g((\nabla_Y T)\,Z, X) + g((\nabla_Z T)\,X, Y) = 0 \tag{3.27}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli paralel tensör alanı denir (Cho 2008).

Tanım 3.4.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \ker\eta$ olmak üzere M^{2n+1} üzerinde herhangi simetrik $(1,1)$-tipli T tensör alanı

$$g((\nabla_X T)\,Y, Z) + g((\nabla_Y T)Z, X) + g((\nabla_Z T)X, Y) = 0 \tag{3.28}$$

eşitliği sağlanıyorsa T ye devirli η-paralel tensör alanı denir (Cho 2008).

Tanım 3.4.5. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir değme metrik manifold olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$g(\tau X, Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X, Y)$$

eşitliği ile verilen τ tensör alanına torsiyon tensör alanı denir (Cho 2008).

Bu tanımlamaya göre aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.4.1. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} manifoldu için τ torsiyon tensör alanı

$$\tau X = 2\nabla_X \xi \tag{3.29}$$

dır.

İspat τ tensör alanının tanımından M^{2n+1} üzerindeki tüm vektör alanları için,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) &= \mathcal{L}_\xi g(X, Y) + g(\mathcal{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathcal{L}_\xi Y) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) \\ &= 2g(-f\varphi^2 X - \varphi h X, Y)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.8) denklemi kullanılarak istenen sonuca ulaşılır.

Önerme 3.4.2. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)Y &= -\eta(X)\left[\varphi l Y + \left[\xi(f) + f^2\right]\varphi Y + 2fhY + \varphi h^2 Y\right] \\ &\quad -\eta(Y)\left[fhX + \varphi h^2 X\right] - g(Y, fhX + \varphi h^2 X)\xi\end{aligned} \tag{3.30}$$

eşitliği sağlanır. Burada $l = R(.,\xi)\xi$, ξ dır.

İspat h tensör alanı η-paralel olsun. Her X vektör alanı için $X^T = X - \eta(X)\xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g((\nabla_{X^T} h)\, Y^T, Z^T) \\ &= g(\left(\nabla_{X-\eta(X)\xi} h\right)(Y - \eta(Y)\xi), Z - \eta(Z)\xi) \\ &= g((\nabla_X h)\, Y, Z) - \eta(X) g((\nabla_\xi h)\, Y, Z) - \eta(Y) g((\nabla_X h)\, \xi, Z) \\ &\quad - \eta(Z) g((\nabla_X h)\, Y, \xi) + \eta(X)\eta(Y) g((\nabla_\xi h)\, \xi, Z) + \eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_X h)\, \xi, \xi) \\ &\quad + \eta(Z)\eta(X) g((\nabla_\xi h)\, Y, \xi) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_\xi h)\, \xi, \xi) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlik sadeleştirilirse

$$0 = g((\nabla_X h)\, Y, -\varphi^2 Z) - \eta(X) g((\nabla_\xi h)\, Y, Z) - \eta(Y) g((\nabla_X h)\, \xi, Z)$$

denklemi elde edilir. (3.8), (3.6) ve (3.20) denklemleri yardımıyla (3.30) eşitliği bulunur.

Önerme 3.4.3. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi h) Y &= \eta(X) \left[lY - \left[\xi(f) + f^2\right] \varphi^2 Y - 2f\varphi h Y + h^2 Y \right] \\ &\quad - \eta(Y) \left[f\varphi h X - h^2 X \right] - g(Y, f\varphi h X - h^2 X)\xi \end{aligned} \tag{3.31}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat φh tensör alanının η-paralel olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\begin{aligned} 0 &= g((\nabla_{X^T} \varphi h)\, Y^T, Z^T) \\ &= g(\left(\nabla_{X-\eta(X)\xi} \varphi h\right)(Y - \eta(Y)\xi), Z - \eta(Z)\xi) \\ &= g((\nabla_X \varphi h)\, Y, Z) - \eta(X) g((\nabla_\xi \varphi h)\, Y, Z) - \eta(Y) g((\nabla_X \varphi h)\, \xi, Z) \\ &\quad - \eta(Z) g((\nabla_X \varphi h)\, Y, \xi) + \eta(X)\eta(Y) g((\nabla_\xi \varphi h)\, \xi, Z) + \eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_X \varphi h)\, \xi, \xi) \\ &\quad + \eta(Z)\eta(X) g((\nabla_\xi \varphi h)\, Y, \xi) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z) g((\nabla_\xi \varphi h)\, \xi, \xi) \end{aligned}$$

denklemi yazılır. Bu denklem düzenlenirse

$$g((\nabla_X \varphi h)\, Y, \varphi^2 Z) = -\eta(X) g((\nabla_\xi \varphi h)\, Y, Z) - \eta(Y) g((\nabla_X \varphi h)\, \xi, Z)$$

elde edilir. (3.8) ve (3.6) denklemleri kullanılarak

$$(\nabla_X \varphi h) Y = \eta(X) (\nabla_\xi \varphi h) Y - \eta(Y) \left[f\varphi h X - h^2 X \right] - g(Y, f\varphi h X - h^2 X)\xi$$

eşitliği bulunur. Burada $(\nabla_\xi \varphi h)Y = -\varphi(\nabla_\xi h)Y$ olduğundan (3.31) denklemine ulaşılır.

Önerme 3.4.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)lX - \eta(X)lY \tag{3.32}$$

dir.

İspat: (3.18) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \left[\xi(f) + f^2\right]\eta(X)Y - \left[\xi(f) + f^2\right]\eta(Y)X - f\eta(X)\varphi hY + f\eta(Y)\varphi hX \\ &\quad -\eta(X)\left(\nabla_\xi \varphi h\right)Y + \eta(Y)\left[f\varphi hX - h^2X\right] + g(Y, f\varphi hX - h^2X)\xi \\ &\quad +\eta(Y)\left(\nabla_\xi \varphi h\right)X - \eta(X)\left[f\varphi hY - h^2Y\right] - g(X, f\varphi hY - h^2Y)\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik sadeleştirilirse

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= -\eta(X)lY + \eta(Y)lX + \eta(X)f^2\varphi^2Y \\ &\quad -\eta(Y)f^2\varphi^2X + \eta(X)f^2Y - \eta(Y)f^2X \end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlikte $\varphi^2X = -X + \eta(X)\xi$ eşitliği kullanıldığında (3.32) eşitliği bulunur.

Böylece Ricci operatörü ile ilgili aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.4.3. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer φh tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün özvektörüdür.

İspat $\{E_1, \ldots, E_{2n}, \xi\}$, tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki bir ortonormal baz olsun. Öncelikle, (3.32) eşitliğinin her iki tarafını keyfi W vektör alanı ile iç çarpalım. Bu takdirde, $X = W = E_i, 1 \leq i \leq 2n+1$ için, (3.32) eşitliğine kontraksiyon yapılırsa

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(E_i,Y)\xi, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} \left[\eta(Y)g(lE_i, E_i) - \eta(E_i)g(lY, E_i)\right]$$

eşitliği geçerli olur. Bu eşitlikte $Y = \xi$ alınarak

$$S(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{2n+1} g(lE_i, E_i)$$

denklemi yazılır. Bu denklemden

$$Q\xi = \dot{I}z(l)\xi \tag{3.33}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer φh veya h tensör alanları Kodazzi şartlarını sağlıyorsa bu durumda, her X, Y, Z vektör alanları için,

(1) $f = 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımın integral altmanifoldu total geodezik ve M^{2n+1} bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımıdır,

(2) $f \neq 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımın integral altmanifoldu total umbiliktir.

İspat φh tensör alanı Kodazzi şartını sağlasın. O halde, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$0 = g((\nabla_Y \varphi h)\, X, Z) - g((\nabla_X \varphi h)\, Y, Z) \tag{3.34}$$

eşitliği sağlanır. (3.34) eşitliğinden

$$(\nabla_Y \varphi h)\, X - (\nabla_X \varphi h) Y = 0$$

yazılır. Burada $X = \xi$ seçilerek

$$lY = f\left[f\varphi^2 Y + \varphi h Y\right] \tag{3.35}$$

denklemine ulaşılır. (3.35) eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanıp, (3.21) eşitliği kullanıldığında

$$-2h^2 Y = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $h = 0$ dır. Bu nedenle, Önerme 3.1.6 ve Önerme 3.1.7 den ispat tamamlanacaktır.

Teorem 3.4.5. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı paralel ise o zaman, M^{2n+1} bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımıdır.

İspat τ tensör alanının paralel olması her X, Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X \tau) Y = 0$$

eşitliğinin sağlaması anlamına gelir. Yukarıdaki eşitlikte $Y = \xi$ alınarak

$$f^2\varphi^2 X + 2f\varphi h X - h^2 X = 0 \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.36) denkleminin izini alır ve $\dot{I}z(\varphi h) = 0$ özelliğini kullanırsak

$$-2f^2 n - \dot{I}z(h^2) = 0$$

bulunur. Buradan $f = 0$ ve $h = 0$ elde edilir. Önerme 3.1.6 dan ispata ulaşılır.

Önerme 3.4.6. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$(\nabla_X \varphi h) Y = \eta(X) (\nabla_\xi \varphi h) Y - \eta(Y)\varphi h \nabla_X \xi + g((\nabla_X \varphi h) \xi, Y) \xi \tag{3.37}$$

denklemi geçerlidir.

İspat Hipotez gereğince tüm X^T tanjant vektörleri için,

$$g((\nabla_{X^T} \tau) Y^T, Z^T) = 0$$

eşitliği sağlanır. τ tensör alanının tanımı kullanılır ve $X^T = X - \eta(X)\xi$ olarak seçilirse

$$(\nabla_X \tau)Y = \eta(X)(\nabla_\xi \tau)Y + \eta(Y)(\nabla_X \tau)\xi + g((\nabla_X \tau) Y, \xi) \xi \tag{3.38}$$

$$(\nabla_X \tau)Y = -2X(f) \varphi^2 Y - 2f\eta(Y)\nabla_X \xi - 2f\eta(Y) g(\nabla_X \xi, Y)\xi - 2(\nabla_X \varphi h) Y \tag{3.39}$$

$$(\nabla_X \tau)\xi = -2f\nabla_X \xi + 2\varphi h \nabla_X \xi \tag{3.40}$$

$$(\nabla_\xi \tau)Y = -2\xi(f) \varphi^2 Y - 2(\nabla_\xi \varphi h) Y \tag{3.41}$$

denklemleri elde edilir. (3.40), (3.41) denklemleri (3.38) ve (3.39) eşitliklerinde yerine yazılarak, bu iki denklem birbirine eşitlenirse (3.37) denklemi bulunur.

Teorem 3.4.6. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer τ tensör alanı η-paralel ise o zaman, ξ vektör alanı M^{2n+1} üzerinde Ricci operatörünün özvektörüdür.

İspat (3.37) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_Y \varphi h)X - (\nabla_X \varphi h)Y &= \eta(Y) (\nabla_\xi \varphi h) X - \eta(X)\varphi h \nabla_Y \xi \\ &\quad - \eta(X) (\nabla_\xi \varphi h) Y + \eta(Y)\varphi h \nabla_X \xi \end{aligned} \tag{3.42}$$

yazılır. (3.18), (3.20) ve (3.42) eşitlikleri gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= (\nabla_Y\varphi h)X-(\nabla_X\varphi h)Y+f^2\left[\eta(X)Y-\eta(Y)X\right] \\
&\quad -f\left[\eta(X)\varphi hY-\eta(Y)\varphi hX\right] \\
&= \eta(Y)\varphi(\nabla_\xi h)X-\eta(X)\varphi h\nabla_Y\xi-\eta(X)\varphi(\nabla_\xi h)Y \\
&\quad +\eta(Y)\varphi h\nabla_X\xi+f^2\eta(X)Y-f^2\eta(Y)X-f\eta(X)\varphi hY \\
&\quad +f\eta(Y)\varphi hX \\
&= \eta(Y)\left[-\varphi^2 lX-f^2\varphi^2X-2f\varphi hX-\varphi^2h^2X\right] \\
&\quad -\eta(X)\left[-\varphi^2 lY-f^2\varphi^2Y-2f\varphi hY-\varphi^2h^2Y\right] \\
&\quad -\eta(X)\varphi h(-f\varphi^2Y-\varphi hY)+\eta(Y)\varphi h(-f\varphi^2X-\varphi hX) \\
&\quad +f^2\eta(X)Y-f^2\eta(Y)X-f\eta(X)\varphi hY+f\eta(Y)\varphi hX
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem sadeleştirilirse

$$R(X,Y)\xi=\eta(Y)lX-\eta(X)lY$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğe X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon uygulandığında istenen sonuca Teorem 3.4.3 de olduğu gibi ulaşılır.

Teorem 3.4.7. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen f-kosimplektik manifold olsun. Eğer φh tensör alanı devirli paralel ise o zaman,

(1) $f=0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımın integral altmanifoldu total geodezik ve M^{2n+1} bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımıdır,

(2) $f\neq 0$ durumunda $\mathcal{D}$ dağılımın integral altmanifoldu total umbiliktir.

İspat Hipotez kullanıldığında her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X\varphi h)\,Y,Z)+g((\nabla_Y\varphi h)\,Z,X)+g((\nabla_Z\varphi h)\,X,Y)=0$$

eşitliği geçerlidir. $Z=\xi$ alınır ve (3.8) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= g(Y,(\nabla_X\varphi h)\,\xi)+g((\nabla_Y\varphi h)\,\xi,X)+g((\nabla_\xi\varphi h)\,X,Y) \\
&= g(Y,-\varphi h(\nabla_X\xi))+g(X,-\varphi h(\nabla_Y\xi))+g((\nabla_\xi\varphi h)\,X,Y) \\
&= g(Y,-f\varphi hX+h^2X)+g(X,-f\varphi hY+h^2Y)+g((\nabla_\xi\varphi h)\,X,Y) \\
&= -fg(Y,\varphi hX)+fg(hY,\varphi X)+g(Y,h^2X)+g(hY,hX)+g((\nabla_\xi\varphi h)\,X,Y) \\
&= g(Y,2\left[f\varphi hX-h^2X\right])+g((\nabla_\xi\varphi h)\,X,Y)
\end{aligned}$$

yazılır. O halde, bu son denklemden

$$(\nabla_\xi h)\,X = -2\left[fhX + \varphi h^2 X\right]$$

elde edilir. (3.20) ve (3.21) eşitlikleri yardımıyla

$$lX = f^2\varphi^2 X + h^2 X \tag{3.43}$$

bulunur. (3.43) denkleminin her iki tarafına φ tensör alanı uygulanıp, X vektör alanı yerine φX yazılır ve (3.21) eşitliği kullanılırsa

$$-2h^2 X = 0$$

ve buradan $\dot{I}z(h^2) = 0$ elde edilir. Bu son denklemden $h = 0$ dır.

3.5 HERHANGİ BOYUTTA ÖRNEK

$\mathbb{R}^{2n+1}$ in standart koordinatlarını $(x_1, ..., x_n, y_{1,...,}y_n, z)$.ve $M = \{(x_1, ..., x_n, y_{1,...,}y_n, z)|\ z \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$ tarafından tanımlanan $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ $(2n+1)$-boyutlu manifoldunu alalım. M nin bir bazı

$$X_i = z\frac{\partial}{\partial y_i},\ Y_i = -\frac{1}{z^3}\frac{\partial}{\partial y_i},\ \xi = \frac{\partial}{\partial z},\ i = 1, 2, ..., n,$$

şeklinde olsun. Bu vektör alanlarının Lie parantezleri $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ için

$$[\xi, X_i] = \frac{1}{z}X_i,\ [\xi, Y_i] = \frac{3}{z}Y_i$$

$$[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = [X_i, Y_j] = 0$$

şeklindedir. Eğer

$$\eta = dz,\ g = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{z^2}dx_i^2 + z^6 dy_i^2\right) + dz^2$$

$$\varphi(\xi) = 0,\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{z^4}\frac{\partial}{\partial y_i},\ \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = z^4\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak alınırsa, M üzerinde (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının sağ-

landığı görülür. Üstelik, $d\eta = 0$ koşulunun sağlandığı aşikardır. Öte yandan, $\Phi_{ii} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \varphi\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = z^2$ dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdır, bu nedenle $\Phi = z^2 dx_i \wedge dy_i$ olup, $d\Phi$ dış türevi

$$d\Phi = 2zdz \wedge dy \wedge dz = 2\left(-\frac{1}{z}\right)\eta \wedge \Phi$$

dir. Sonuç olarak, φ nin Nijenhuis torsion tensörünün sıfır olmaması nedeniyle, manifold bir hemen hemen $f-$kosimplektik manifold olup $f = -\dfrac{1}{z}$ dir.

3.6 ÜÇ BOYUTTA ÖRNEK

$\mathbb{R}^3$ ün standart koordinatları (x, y, z) olmak üzere, $M^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ 3-boyutlu manifoldunu göz önüne alalım. M nin bir bazı

$$e_1 = e^{z^2}\frac{\partial}{\partial x},$$

$$e_2 = e^{z^2}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

şeklinde olsun. M üzerindeki g Riemann metriği

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1$$

$$g(e_1, e_2) = g(e_1, e_3) = g(e_2, e_3) = 0$$

$$g = \frac{1}{e^{2z^2}}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz$$

ile verilsin. M^3 üzerinde herhangi X vektör alanı için, η 1-formu, $\eta(X) = g(X, e_3)$

şeklinde ϕ endomorfizmi $\phi(e_1) = e_2,\ \phi(e_2) = -e_1,\ \phi(e_3) = 0$ ile ve $(1,1)$-tipindeki h tensör alanı $h(e_1) = -\lambda e_1,\ h(e_2) = \lambda e_2$, ve $h(e_3) = 0$ olarak tanımlansın. g ve ϕ nin lineerliği kullanılarak M^3 üzerinde her vektör alanı için

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)e_3, \quad \eta(e_3) = 1, \quad g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{1}{e^{2z^2}},$$

ve buradan

$$\Phi = -\frac{1}{e^{2z^2}} dx \wedge dy \tag{3.44}$$

olur. Sonuç olarak $d\Phi$ dış türevi

$$d\Phi = -2z dx \wedge dy \wedge dz \tag{3.45}$$

olarak bulunur.

(3.44) ve (3.45) kullanılarak, $\eta = dz$ olduğu için,

$$d\Phi = 2z\eta \wedge \Phi$$

dir. Öte yandan

$$[e_1, e_2] = 0, \ [e_1, e_3] = -2ze_1, \ [e_2, e_3] = -2ze_2$$

olacağından Nijenhuis torsion tensörü sıfırdır. Böylece, manifold normal olup f- kosimplektiktir.

4 SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada değme manifoldların yeni bir sınıfı olan hemen hemen f-kosimplektik manifoldlar tanımlanarak bu manifoldarın bazı temel özellikleri elde edilmiştir. Bu yapılan çalışmalar sonunda hemen hemen f-kosimplektik (κ, μ, ν)-uzayları için genel bir sınıflandırma problemi açıktır. Ayrıca, Ricci simetrik, Ricci yarı-simetrik, Pseudo simetrik ve Pseudo yarı-simetrik gibi özel tensör şartları altında hem hemen hemen f-kosimplektik hem de (κ, μ, ν)-uzayları için ilginç sonuçlar bulunabilir. Bundan başka $\operatorname{div} R = 0$ ve $\operatorname{div} C = 0$ eşitlikleri bu tür uzaylar için açık uçlu problemlerdir.

KAYNAKLAR

Arslan K., Ezentaş R., Mıhai I., Murathan C., Özgür C., Ricci curvature of submanifolds in Kenmotsu space forms, *Hindawi Pub. Corp.*, 29(12) (**2002**) 719 -726.

Bang-Yen C., *Geometry of submanifolds*, New York, M. Dekker, (**1973**).

Blair D. E., *Geometry of manifolds with structural group* $U(n)\times O(s)$,J. Diff. Geom., 4 (**1970**) 155-167.

Blair D. E., *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York.,(**1970).**

Blair D. E., *Two remarks on contact metric structures*, Tohoku Math. J., 29 **(1977)** 319-324.

Blair D. E., Koufogiorgos T. and Papantoniou B. J., *Contact metric manifolds satisfying a nullity condition*, Israel J. Math., 91(1-3) (**1995)**189–214.

Blair D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, 203. Birkhâuser Boston.,(**2002)**

Boeckx E., *A full classification of contact metric* (κ,μ)*-spaces*, Illinois J. Math., 44(1) (**2000**) 212–219.

Boeckx E., Cho J. T., η*-parallel contact metric spaces*, Differential geometry and its applications, 22 (**2005)** 275–285.

Boeckx E., Cho J. T., *Locally symmetric contact metric manifolds*, Monatsh. Math., 148(4) (**2006**) 269-281.

Chinea D., Gonzalez C., *A classification of almost contact metric manifolds,* Annali di Matematica pura ed applicata, 156(4) (**1990)** 15-36.

Dacko P. and Olszak Z., *On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 56(1) (**1998)** 89-103.

Dacko P., Olszak Z.**,** *On almost cosymplectic* (κ,μ,ν)*-spaces*, Banach Center Publ., 69 (**2005)** 211-220.

Dacko P., Olszak Z.**,** *On almost cosymplectic* $(-1,\mu,0)$*-spaces*, Central European Journal of Mathematics, 3(2) (**2005)** 318-330.

Dileo G., Pastore A. M., *Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 14 (**2007)** 343–354.

Dileo G., Pastore M., *Almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions*,

J. Geom., s00022-099-1974-2, Birkhauser Verlag Basel., (**2009**)

Dileo G., Pastore M. 2009. *Almost Kenmotsu manifolds with a condition of η-parallelism*, Differential Geo. and its applications, 27, 671-679., (**2009**)

Endo H., *Non-existence of almost cosymplectic manifolds satisfying a certain condition*, Tensor N. S., 63 (**2002**) 272–284.

Falcitelli M. and Pastore M., *f-structure of Kenmotsu type*, Mediterr. J. Math., 3 (**2006**) 549–564.

Falcitelli M. and Pastore M., *Almost Kenmotsu f-manifolds*, Balkan journal of geometry and its applications, 12(1) (**2007**) 32-43.

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann Geometry*, 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (**2004).**

Ghosh A. and Sharma R., *On contact strongly pseudo-convex integrable CR manifolds*, J. Geom., 66, (**1999**) 116-122.

Ghosh A., Sharma R. and Cho J. T., *Contact metric manifolds with η-parallel torsion tensor*, Ann. Glob. Anal. Geom., DOI 10 (**2008**) 1007/s10455-008-9112 -1.

Goldberg S. I., Yano K., *Integrability of almost cosymplectic structure*, Pacific J. Math., 31 (**1969**) 373–382.

Goldberg S. I., *Integrability of almost Kaehler manifolds*, Proceedings of the American Math. Soc., 21(1) (**1969**) 96-100.

Goldberg S. I. and Yano K., *Globally framed f-manifolds*, Illinois J. Math., 15 (**1963**) 456-474.

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(1993).**

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2000)**.

Hacısalihoğlu H. H., Ekmekçi N., *Tensör Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2003).**

Janssens D., Vanhecke L., *Almost contact structures and curvature tensors*, Kodai Math J., 4 **(1981)** 1-27.

Kenmotsu K., *A class of contact Riemannian manifold*, Tohoku Math. Journal, 24 **(1972)** 93–103.

Kim, T. W., Pak H. K., *Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures*, Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug., 21(4) **(2005)** 841–846.

Kim, T. W., Pak H. K., *Criticality of characteristic vector fields on almost cosymplectic manifolds*, J. Korean Math. Soc., 44(3) **(2007)** 605-613.

Koufogiorgos T. and Tsichlias C., *On the existence of a new class of contact metric manifolds*, Canad. Math. Bull., 43(4) **(2000)** 440-447.

Koufogiorgos T., Markellos M. and Papantoniou J., *The harmonicity of the reeb vector field on contact metric* 3*-manifolds*, Pasific Journal of Math., 234(2) (**2008**).

O'neill B., *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London, **(1983).**

Olszak Z., *On almost cosymplectic manifolds*, Kodai Math, 4(2) **(1981)** 239-250.

Olszak Z., *Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves*, Tensor N.S., 46 **(1987)** 117–124.

Olszak Z., *Locally conformal almost cosymplectic manifolds*, Coll. Math., 57 **(1989)** 73–87.

Sharpe R.W., *Differential Geometry*, Graduate Texts in Math., Springer, **(1997).**

Spivak M., *Calculus on Manifolds*, Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193, **(1965).**

Vaisman I., *Conformal changes of almost contact metric manifolds*, Lecture Notes in Math., Berlin-Heidelberg-New York, 792 **(1980)** 435–443.

Yano K., Kon M., *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp., Singapore, **(1984)**.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: YILDIRIM, Mustafa
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve Yeri	: 17.01.1988 / İSTANBUL
Telefon	: (0555) 604 01 20
e-mail	: mustafay@duzce.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Düzce Ü. /Matematik B.	2012
Lisans	Trakya Ü. /Matematik B.	2010
Lise	Merkez Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-2011	Kaynaşlı MYO	Öğretim Elemanı
2011-2012	Birey Dersanesi	Matematik Öğrt.

Yabancı Dil

İngilizce (ÜDS: 50, KPDS:50)

Yayınlar

1. Nesip Aktan, Satılmış Balkan and **Mustafa Yıldırım**, *Weakly and weakly Ricci symmetric almost Kenmotsu (k,m,v)-spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, submitted.
2. Nesip Aktan and **Mustafa Yıldırım**, *Almost f-Cosymplectic manifolds*, Journal of Geometry and Physics, submitted.