T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNTEGRAL ALT MANİFOLDLARI KAEHLER OLAN HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK UZAY FORMLARI

YÜKSEK LİSANS

GÜLHAN AYAR

KASIM 2012

DÜZCE

KABUL VE ONAY BELGESİ

Gülhan AYAR tarafından hazırlanan İntegral Alt Manifoldları Kaehler Olan Hemen Hemen Kosimplektik Uzay Formları isimli lisansüstü tez çalışması, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26.11.2012 tarih ve 2012-433 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Üye
(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Nesip AKTAN
Düzce Üniversitesi

Üye
Prof. Dr. Murat TOSUN
Sakarya Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Tezin Savunulduğu Tarih : 30.11.2012

ONAY

Bu tez ile Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Gülhan AYAR'ın Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans derecesini almasını onamıştır.

Doç. Dr. Haldun MÜDERRİSOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

30 Kasım 2012

Gülhan AYAR

Sevgili Aileme

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve bu tezin hazırlanmasında süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Nesip AKTAN'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

30 Kasım 2012 **Gülhan Ayar**

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

D	Değme dağılımı
div	Divergens operatörü
J	Hemen hemen kompleks yapı
B	İkinci temel form
$M^n(c)$	c sabit eğrilikli uzay form
∇	Levi-Civita konneksiyonu
L	Lie türev operatörü
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^\perp$	M üzerindeki tanjant demetlerinin ortogonal tümleyeni
N	Nijenhuis tensör alanı
$O(s)$	Ortogonal grup
R	Riemann eğrilik tensörü
$U(n)$	Üniter grup

ÖZET

İNTEGRAL ALT MANİFOLDLARI KAEHLER OLAN HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK UZAY FORMLARI

Gülhan AYAR
Düzce Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman:Doç. Dr. Nesip AKTAN
Kasım 2012, 57 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, hemen hemen kosimplektik manifoldlar için eğrilik özellikleri verilerek hemen hemen kosimplektik uzay formlar tanıtılmıştır. Son bölüm olan dördüncü bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılarak, konu ile ilgili açık problemlere yer verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Değme manifold, Hemen hemen kosimplektik manifold, Uzay form

ABSTRACT

ALMOST COSYMPLECTIC SPACE FORMS WITH KAEHLERIAN INTEGRAL SUBMANIFOLDS

Gülhan AYAR
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Nesip Aktan
November 2012, 57 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed. In the third chapter, giving curvature and some tensor properties of the almost cosymplectic manifolds, almost cosymplectic space forms are introduced. The last chapter is devoted into results and recommondations.

Keywords: Contact manifold, Almost cosymplectic manifold, Space form

EXTENDED ABSTRACT

ALMOST COSYMPLECTIC SPACE FORMS WITH KAEHLERIAN INTEGRAL SUBMANIFOLDS

Gülhan AYAR
Duzce University
Graduate School of Natural and Applied Sciences, Departmant of Mathematics
Master of Science Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Nesip Aktan
Noveber 2012, 57 pages

1. INTRODUCTION:

Let M be a Riemannian manifold with curvature tensor R. The sectional curvature of a $2-$plane α in a tangent space $T_P(M)$ is defined by $K(\alpha,P)=R(X,Y,X,Y)$, where $\{X,Y\}$ is an orthonormal basis of $T_P(M)$. The notion of an almost cosymplectic manifold was introduced by Goldberg and Yano in 1969. The simplest examples of such manifolds are those being the products (possibly local) of almost Kaehlerian manifolds and the real line $\Re$ or the circle S^1. Curvature properties of almost cosymplectic manifolds were studied mainly by Goldberg and Yano, Olszak, , Kirichenko and Endo. We relate some of them in a historical order. A cosymplectic manifold of constant curvature is necessarily locally flat. The existence of locally flat cosymplectic manifolds is obvious. In fact, they are locally products of locally flat Kaehlerian manifolds and the real line (for instance, $C^n\times\Re$). If the curvature operator R of an almost cosymplectic manifold M commutes with the fundamental singular collineation φ, then M is normal, that is, it is a cosymplectic manifold. In particular, an almost cosymplectic manifold of constant curvature is cosymplectic if and if it is locally flat. Generalizing this, it is proved that almost cosymplectic manifolds of non-zero constant curvature do not exist. For a conformally flat almost cosymplectic manifold of dimension ≥ 5, the scalar curvature r is non-positive and the manifold is cosymplectic if and only if it is locally flat. If M is an almost cosymplectic manifold of constant φ sectional curvature then the scalar curvature r and the φ sectional curvature H satisfy the inequality

$n(n+1)H \geq r$. This equality holds if and only if the manifold is cosymplectic. We concentrate on almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves and considering Schur's lemma on spaces of constant curvature, we get a new version for almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves.

2. MATERIAL AND METHODS:

The classical theorem of F. Schur says that if M is a connected manifold of dimension $n \geq 3$ and in any point $P \in M$, the curvature $K(\alpha, P)$ does not depend on $\alpha \in T_P(M)$ then it does not depend on the point P too, i.e. it is a global constant. Such a manifold is called a manifold of constant sectional curvature. The Shur's theorem has been studied by many authors for different structures. In 1989, Nobuhiro improves the Shur's theorem and gets a new version for locally symmetric spaces. In 2001, Kassabov considers connected $2n-$dimensional almost Hermitian manifold M to be of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature $v(P)$, $P \in M$ and proves that v is a global constant. In 2006, Cho defines a contact strongly pseudo-convex CR space-form using the Tanaka-Webster connection in a way similar to the Sasakian space form and then he studies the geometry of such spaces. He presents a Schur type theorem for such structures.

In this study, almost cosymplectic space forms are dealt with on the basis of studies mentioned above.

3. RESULTS AND DISCUSSIONS:

We concentrate on almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves and considering Schur's lemma on spaces of constant curvature, we get a new version for almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves.

4. CONCLUSION AND OUTLOOK:

In this study, we have a new version on space of constant curvature for almost cosymplectic manifolds. Submanifolds of this type space of constant curvature are open problems, also under some symmetry conditions, one can obtain very important results.

1. GİRİŞ

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldları çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$-boyutlu bir C sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında J.Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir $1-$form olan η ile oluşturulan $(\varphi,\xi,\eta)-$üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$
$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak, (Goldberg ve Yano 1969) kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır. Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde bir çok çalışmaya imza atmıştır (Olszak 1981-89).

İkinci bölümde, manifoldlar ve alt manifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldlar ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İkinci kısımda, alt manifoldlar teorisi hakkında temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen kosimplektik uzay formlar elde edilmiştir. Bu bölümün ilk kısmında; hemen hemen kosimplektik yapılar tanıtılmıştır. İkinci kısımda, bazı özel tensör alanlarının temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü kısımda, Riemann eğrilik tensörü özellikleri verilerek integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik uzay formlar tanıtılmıştır.

M , R eğrilik tensörüne sahip bir Riemann manifoldu olsun. α , T_PM tanjant uzayında 2 boyutlu bir düzlem olmak üzere, kesit eğriliği $K(\alpha,P)=R(X,Y,Y,X)$ şeklinde tanımlanır. Schur'un klasik teoremi der ki; M boyutu 3 ve 3 ten büyük olan bağlantılı bir manifold ise, M nin her noktasındaki kesit eğriliği, seçilen noktadan ve düzlemden bağımsızdır, yani yerel sabittir (Schur 1886). Schur'un bu teoreminin değişik versiyonları, daha sonraları birçok matematikçi tarafından farklı yapılarda da çalışılmıştır.

Bir kosimplektik manifoldun sabit eğrilikli olması için lokal düz olması gerekir. Lokal düz kosimplektik manifolların varlığı açıktır. Dahası bu manifoldlar lokal düz Kaehler manifoldlar ve reel sayıların lokal çarpımından elde edilir (örneğin, $C^n\times\Re$). Özellikle sabit eğrilikli bir hemen hemen kosimplektik manifoldun kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul lokal düz olması gerekir (Olszak 1981).Bunu genelleştirirsek, sabit eğriliği sıfır olmayan kosimplektirk manifold yoktur. Boyutu 5 ve 5 ten büyük olan konformal düz hemen hemen kosimplektik bir manifold için, skalar eğrilik r pozitif değildir ve manifold ancak ve ancak lokal düz olması durumunda kosimplektiktir (Olszak 1981-1987). Eğer hemen hemen kosimplektik manifold sabit φ kesit eğriliğine ve r skalar eğriliğine sahipse, H için $n(n+1)H\geq r$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu manifoldun ancak ve ancak kosimplektik olması durumunda geçerlidir (Olszak 1987).

Bu tez çalışmasında, Schur'un sabit eğrilikli uzaylar üzerindeki teoremi göz önünde bulundurularak, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifoldlar için Shur'un teoreminin yeni bir versiyonunu elde edilmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, diğer bölümlerde çalışmamız için gerekli olan manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1. RİEMANN MANİFOLDLAR

Bu kısımda, Riemann manifoldların temel kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1. M $n-$boyutlu bir C^{∞} manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi\left(M\right)$ ve reel değerli C^{∞} fonksiyonlarının halkası $C^{\infty}(M^n,\Re)$ olmak üzere,

$$g\ :\ \chi(M^n)\times\chi(M^n)\to C^{\infty}(M^n,\Re)$$

simetrik, $2-$lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve $\left(M^n,g\right)$ ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir (O'neill 1983). M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktalar birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M^n ye bağlantılı manifold adı verilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.2. M^n bir C^{∞} manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi\left(M\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla:\ \chi(M^n)\times\chi(M^n) &\overset{\text{2-lineer}}{\to} \chi(M^n)\\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall\ f,g\in C^{\infty}(M^n,\Re)$, $\forall\ \ X,Y,Z\in\chi(M^n)$ için,

$(1)\ \nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z,$

$(2)\ \nabla_{fX+gY}Z=f\ \nabla_X Z+g\ \nabla_Y Z,$

$(3)\ \nabla_X(f\ Y)=f\ \nabla_X Y+X(f)Y,$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.3. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall\ X,Y,Z\in\chi(M^n)$ için,

$(1)\ \nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

$(2)\ Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sfr torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.4. $\left(M^n,g\right)$ bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R\ :\ & \chi(M^n)\times\chi(M^n)\times\chi(M^n)\to\chi(M^n) \\ & R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $(1,3)-$tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall\ X,Y,Z,V,W\in\chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

$(1)\ R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z,$

$(2)\ \ g(R(X,Y)V,W)=-g(R(X,Y)W,V),$

$(3)\ \ R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0,$

$(4)\ \ g(R(X,Y)V,W)=g(R(V,W)X,Y),$

özelliklerini sağlar (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1. $\left(M^{n},g\right)$ bir Riemann manifoldu, ∇ da M^{n} üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve E, $(1,1)-$tipli bir tensör alanI olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y=\nabla_X EY-E\left(\nabla_X Y\right)$$

dır (O'neill 1983).

Önerme 2.1.2. $\left(M^{n},g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alan olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y,Z)=g(Y,(\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'neill 1983).

Önerme 2.1.3. $\left(M^{n},g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y,Z)=-g(Y,(\nabla_X G)Z)$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5. $\left(M^n, g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. $T_P M$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzay $\prod$ ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarını alan

$$g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

eşitliğine $\prod$ nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.6. $\left(M^n, g\right)$ bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S \,:\, & \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to \Re \\ & (X,Y) \to S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)-$tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir. Ayrca, $(0,2)-$tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.7. $\left(M^n, g\right)$ bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skalar eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.9. $\left(M^n, g\right)$ bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasndaki aç değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1. $\left(M^n, g\right)$ bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $C = 0$ olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2. $\left(M^n, g\right)$ bir sabit k eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanlar için,

$$R(X,Y)Z = k\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right]$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.11. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. $n-$ boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.1.1. $\left(M^n, g\right)$ bir sabit k eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ için,

$$M^n(k) = \begin{cases} k = 0 & \text{ise} \quad M^n(k) = E^n \text{ Öklid uzayı,} \\ k = \dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = S^n(r) \text{ küresi,} \\ k = -\dfrac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay,} \end{cases}$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.12. M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \Re \times M^n &\to M^n \\ (t, p) &\to \phi_t(P) \end{aligned}$$

Dönüşümü

(1) $\forall \ t \in \Re$ için, $\phi_t \ : \ P \to \phi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall \ t, s \in \Re$ ve $P \in M^n$ için, $\phi_{t+s}(P) = \phi_t(\phi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa φ ye M^n nin diferensiyellenebilir bir $1-$parametreli grubu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.13. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir $1-$parametreli grup ϕ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M^n$ için,

$$(\mathbf{L}_X K)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[K_p - (\phi_t K)_p \right]$$

şeklinde tanımlanan $\mathbf{L}_X K$ dönüşümüne X yönünde K nın Lie türevi denir ve $\mathbf{L}_X K$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

$(1)\quad \mathbf{L}_X(Y\otimes Z)=(\mathbf{L}_X Y)\otimes Z+Y\otimes(\mathbf{L}_X Z),\quad (Y,Z$ herhangi tensör alanlar)

$(2)\quad \mathbf{L}_X f=X(f),\ (f,\ K$ cismi üzerinde bir fonksiyon)

$(3)\ \mathbf{L}_X V=[X,V],\quad V\in\chi(M^n)$

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.14. (M^n,g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $\mathbf{L}_X g=0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Yano ve Kon 1984).

2.2. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLAR

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.2.1. M, $(2n+1)-$boyutlu bir manifold, ϕ,ξ,η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)-$tipinde bir tensör alanı, bir vektör alan ve 1 -form olsunlar. Eğer ϕ,ξ,η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\eta(\xi)=1\\&\phi^2X=-X+\eta(X)\xi\end{aligned}\tag{2.3}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (ϕ,ξ,η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yap ve bu yap ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.2. M^{2n+1} , (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapsı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği,

$$\begin{aligned} &\eta(X)=g(X,\xi), \\ &g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ,ξ,η,g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Sonuç 2.2.1. M^{2n+1}, (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapsı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X,Y)=-g(X,\phi Y) \tag{2.5}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) olmak üzere,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\phi Y) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel $2-$formu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4. (M^n,g) bir Riemann manifold ve $x_1,x_2,\ldots,x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $w=\sqrt{|g|}dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n$ ve $g(x)>0$ ise w ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i, M^n üzerindeki kotanjant uzayda $1-$formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.5. (M^n,g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot, Hulin, Lafontaine 2004).

Sonuç 2.2.2. Φ temel $2-$formu ters simetrik ve Tanım 2.2.3. yardımıyla $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.1.2.5. gereğince (M^n,ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.6. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer w $1-$form ise, keyfi X,Y vektör alanları için,

$$2dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X,Y]$$

dır. Eğer w, 2 -form ise,

$$\begin{aligned} 3dw(X,Y,Z) &= X(w(Y,Z)) + Y(w(Z,Y)) + Z(w(X,Y)) \\ &\quad - w([X,Y],Z) - w([Y,Z],X) - w([Z,X],Y) \end{aligned}$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X,Y,Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X\phi)Z)$

(ii) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) + (\nabla_X\Phi)(\phi Y,\phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X\eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X\eta)\phi Z$

(iii) $(\nabla_X\eta)Y = g(Y,\nabla_X\xi) = (\nabla_X\Phi)(\xi,\phi Y)$

(iv) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X\eta)Y - (\nabla_Y\eta)X$

(v) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X\Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X,Y,Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplam göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, M^{2n+1} nin açık bir alt cümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n}\left\{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i}\eta)\phi X_i\right\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. M^n bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapsı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \Re$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alan; t, $\Re$ nin bir koordinat ve f, $M \times \Re$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur.

M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \Re$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = \left(\phi X - f.\xi,\ \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)-$tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall\ X,Y\in\chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y)=F^2[X,Y]+[FX,FY]-F[FX,Y]-F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alana F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yap olsun. Tanım 2.2.8 yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \\ &= -[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \end{aligned}$$

şeklindedir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J=0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10. Eğer $M^{2n}\times\Re$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. M^{2n+1} üzerinde (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi+2d\eta\otimes\xi=0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerinde her

X, Y vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.2.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω $2-$formuna hemen hemen Hermit yapsnn temel $2-$formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlamasıdır (Blair 2002).

Tanım 2.2.13. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \ (\Phi, \text{kapalıdır}), \ d\eta = 0 \ (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır (Olszak 1981).

Yardmcı Teorem 2.2.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer Φ $2-$formu kapalı ise,

$$(\nabla_{\phi X}\Phi)(\phi Y,Z)+(\nabla_X\Phi)(Y,Z)-\eta(X)\left[d\eta(\phi Y,Z)+d\eta(Y,\phi Z)\right]$$
$$+\eta(Y)\left[d\eta(\phi Z,X)-\tfrac{1}{2}(\mathrm{L}_\xi g)(Z,\phi X)\right]+\eta(Z)\left[d\eta(X,\phi Y)-d\eta(\phi X,Y)\right]=0$$

eşitliği sağlanır (Olszak 1981).

Yardımcı Teorem 2.2.2. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\phi X}\phi)(\phi Y)+(\nabla_X\phi)(Y)-\eta(Y)\nabla_{\phi X}\xi=0$$

eşitliği geçerlidir (Olszak 1981).

Örnek 2.2.1. (M,J,G) bir hemen hemen Kaehler manifoldu olsun. O zaman, M, $(2n)-$boyutlu bir manifold, J bir hemen hemen kompleks yapı ve M^{2n} üzerindeki Riemann metriği G olmak üzere,

$$J^2=-I,\quad G(X,Y)=G(JX,JY)$$

eşitlikleri geçerlidir. M^{2n} üzerindeki temel $2-$form

$$\Omega(X,Y)=G(X,JY)$$

şeklinde tanımlı olup, $d\Omega=0$ dır.

$\Re$ reel doğru ve g_0 bir Riemann metriği olsun. $\Re$ üzerinde ξ_0 sıfırdan farklı bir vektör alanı ve η_0

$$g_0(X,\xi_0)=\eta_0(X)$$

olacak şekilde bir $1-$form olsun. Böylece $M^{2n+1} = M^{2n} \times \Re$ çarpımı manifoldu tanımlıdır. $(X_1, X_2),\ V$ üzerinde tanımlı vektör alanları olsunlar. Burada X_1, V çarpım manifolduna dik olan vektör ve X_2 ise $\Re$ doğrusuna dik olan vektördür. ϕ $(1,1)-$tipli bir tensör alanı ξ bir vektör alanı $(\xi \neq 0)$ ve η $1-$formunu

$$\phi(X_1, X_2) = (JX_1, 0), \quad \xi = (0, \xi_0), \quad \eta(X_1, X_2) = \eta_0(X_2)$$

şeklinde seçelim. Ayrıca, M^{2n} üzerinde tanımlı g metriği

$$g = G + g_0$$

şeklindedir. Böylece $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kosimplektik manifoldu elde edilir (Olszak 1981).

Örnek 2.2.2. E^4 Kaehler manifoldunun $3-$boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J

$$J \ : \ E^4 \rightarrow E^4$$
$$JC = -\xi$$

biçiminde tanımlansın. Ozaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur.Yani $\xi \in \chi\left(S^3\right)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X) = g(X, \xi)$ olmak üzere η $1-$formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi) = 1$ dir. Diğer yandan,

$$JX = \phi X + \eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için;

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4\ ) = (-p_3, -p_{4,}\ p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir. Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi $g(X,\xi)\xi$ için;

$$g(X,\xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X,\xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X,\xi) = \lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}) - g(JX - \eta(X)C, \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_1 \\ -\lambda p_4 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_2 \\ -\lambda p_1 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_3 \\ -\lambda p_2 - \left[(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2\right] p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bunun la birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\eta(\phi X) = g(\phi X, \xi)$$

$$= g(JX - \eta(X)C, \xi) = 0$$

olduğu da açıkça görülür.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur (Blair 2002).

2.3. ALT MANİFOLDLAR

Bu kısımda, alt manifoldlar teorisi hakkında bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.3.1. $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir alt cümlesi M olsun. $\tilde{M}$ üzerindeki metrik $\tilde{g}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} j \,:\, & M \to \tilde{M} \\ & p \to j(p) = p \end{aligned}$$

dahil etme dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki

$$T_pM \xrightarrow{j_*|p} T_p\tilde{M}$$
$$T_pM^* \xrightarrow{j^*|p} T_p\tilde{M}^*$$

türev ve ek dönüşümleri için,

$$(j_p^*(\tilde{g}_p))(v_p, w_p) = \tilde{g}_p(j_*(v_p), j_*(w_p)); \ \forall\, v_p, w_p \in T_pM$$

eşitliği ile tanımlanan $j^*\tilde{g}_p = g_p$ dönüşümü M üzerinde bir metrik ise M ye $\tilde{M}$ nın bir Riemann alt manifoldu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.3.2. $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir Riemann alt manifoldu (M^n, g) olsun. ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla, M^n ve $\tilde{M}^{n+d}$ manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olsun. O halde, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{2.7}$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_\gamma X + \nabla_X^\perp N \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada B ye M^n nin ikinci temel formu denir ve N, M^n

üzerinde bir normal vektör alanıdır. Eğer $\forall\ X,Y \in \chi(M^n)$ için, $B(X,Y)=0$ ise M manifolduna total geodeziktir denir (Chen 1973).

İkinci temel form B ve A_γ şekil operatörü arasında baza göre yazılım

$$B(X,Y)=\sum_{\gamma=1}^{d} g(A_\gamma X,Y)N_\gamma$$

eşitliği elde edilir. Burada N_γ, $(\gamma=1,...,d)$ M^n alt manifolduna dik olan vektör alanları, $\nabla^\perp$ de M^n alt manifoldunun normal konneksiyonudur. Kolayca

$$g(A_\gamma X,Y)=g(B(X,Y),N_\gamma)$$

eşitliği elde edilir (Chen 1973).

Tanım 2.3.3. (M^n,g), $(\tilde{M}^{n+d},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(e_i,e_i)$$

şeklinde tanımlanan H vektör alanına M^n nin ortalama eğrilik vektör alan denir. Eğer $H=0$ ise M^n alt manifolduna minimaldir denir. H ortalama eğrilik vektörünün normuna M^n nin ortalama eğriliği denir. Burada $\{e_1,\ldots,e_n\}$ M^n üzerinde bir lokal ortonormal bazdır (O'neill 1983).

Tanım 2.3.4. $(\tilde{M}^{n+d},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu (M^n,g) olsun. $\forall$ $X,Y \in \chi(M^n)$ olmak üzere,

$$B(X,Y)=g(X,Y)H$$

eşitliği sağlanıyorsa M^n ye total umbilik alt manifold denir (Chen 1973).

Tanım 2.3.5. (M^n, g), $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. B ikinci temel formu her $X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için, B nin X yönündeki kovaryant türevi

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) = \nabla^{?}_X (B(Y,Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$$

şeklinde tanımlıdır. $\overline{\nabla} B$ $(0,3)-$tipli bir tensör alanıdır ve M^n alt manifoldunun üçüncü temel formu olarak adlandırılır. Ayrıca, $\overline{\nabla}$ ya Van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu adı verilir. Eğer $\overline{\nabla} B = 0$ ise M^n alt manifoldu paralel ikinci temel formludur denir (Chen 1973).

B ikinci temel formunun $\overline{\nabla}^2 B$ ikinci kovaryant türevi

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}^2 B)(Z,W,X,Y) &= (\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z,W) \\ &= \nabla^{\perp}_X ((\overline{\nabla}_Y B)(Z,W)) - (\overline{\nabla}_Y B)(\nabla_X Z, W) \\ &\quad -(\overline{\nabla}_X B)(Z, \nabla_Y W) - (\overline{\nabla}_{\nabla_X Y} B)(Z,W)\end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlıdır (Chen 1973).

Tanım 2.3.6. (M^n, g), $(\tilde{M}^{n+d}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. O zaman,

$$R^{\perp}(X,Y) = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlı $R^{\perp}$ dönüşümüne M^n nin normal yöndeki eğrilik tensörü denir (O'neill 1983).

(2.9) ve (2.10) eşitlikleri yardımıyla

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y B)(Z,W) - (\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X B)(Z,W) &= (\bar{R}(X,Y)\cdot B)(Z,W) \\
&= R^{\perp}(X,Y)B(Z,W) - B(R(X,Y)Z,W) \\
&\quad -B(Z,R(X,Y)W)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Burada R, $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre eğrilik tensörüdür (Chen 1973).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, hemen hemen değme metrik manifoldlarının bir alt sınıfı olan hemen hemen kosimplektik manifoldlar ele alınarak integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik uzay formları tanıtılmıştır.

3.1. HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu kısımda öncelikle hemen hemen kosimplektik yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 3.1.1. (M,ϕ,ξ,η,g), $(2n+1)-$boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanlar için, M^{2n+1} üzerinde

$$d\eta = 0, \ \ d\Phi = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen kosimplektik manifold denir.(Blair 1970).

Yardımcı Teorem 3.1.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\phi)Y,Z) &= 3d\Phi(X,\phi Y,\phi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) \\ &+ g(N^{(1)}(Y,Z),\phi X) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) \\ &+ 2d\eta(\phi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z,X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dir. Burada $N^{(1)}, N^{(2)}$ tensör alanları, sırasıyla,

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{3.2}$$

$$N^{(2)}(X,Y)=(\mathbf{L}_{\phi X}\eta)Y-(\mathbf{L}_{\phi Y}\eta)X \tag{3.3}$$

dir (Blair 2002).

Önerme 3.1.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X,Y vektör alanları için,

$$hX=\tfrac{1}{2}(\mathbf{L}_{\xi}\phi)X, \quad h(\xi)=0 \tag{3.4}$$

$$\nabla_{\xi}\xi=0, \quad \nabla_{\xi}\phi=0 \tag{3.5}$$

$$(\phi\circ h)X+(h\circ\phi)X=0 \tag{3.6}$$

$$\dot{I}z(h)=0 \tag{3.7}$$

$$h=0\Leftrightarrow\nabla\xi=0$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

Önerme 3.1.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X,Y vektör alanları için,

$$\nabla_{X}\xi=-\phi hX \tag{3.8}$$

$$(\nabla_{X}\eta)Y=g(\phi Y,hX) \tag{3.9}$$

$$h=0\Leftrightarrow\nabla\xi=0 \tag{3.10}$$

eşitlikleri sağlanır (Pastore ve Dileo 2007) (Kim ve Pak 2005).

İspat: (Pastore ve Dileo 2007) ve (Kim ve Pak 2005) deki işlem adımları takip edilerek sonuçlar kolaylıkla bulunabilir.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, her X vektör alanı için,

$$(\nabla_{\xi}h)\circ\phi+\phi\circ(\nabla_{\xi}h)=0$$

eşitliği geçerlidir (Blair 2002).

Önerme 3.1.3. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall \quad X,Y\in\chi(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_{X}\phi)Y+(\nabla_{\phi X}\phi)\phi Y=-\eta(Y)hX \tag{3.11}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Nijenhuis tensör alanı kullanılarak direkt hesaplamalarla,

$$\phi N(X,Y)+N(\phi X,Y)=2\eta(X)hY, \tag{3.12}$$

ve

$$\eta(N(\phi X,Y))=0. \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.1) den

$$2g\big((\nabla_{X}\phi)Y,Z\big)=g(N(Y,Z),\phi X)$$

şeklinde olup (3.12) ve (3.13) kullanılarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p \in M^n$ noktası için T_pM^n nin $r-$boyutlu altuzayı $(r \leq n)$ D ve D_p nin bir koleksiyonu $\mathsf{D} = \{\mathsf{D}_p\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{X_1, \ldots, X_r\}$ vektör alanları U nun her $q \in M^n$ noktasında hala D_p nin bir bazı oluyorsa D ye M^n üzerinde bir $r-$boyutlu dağılım ve $\{X_1, \ldots, X_r\}$ cümlesine U üzerinde D için bir lokal baz denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.3. M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir $r-$boyutlu dağılmı D olsun. M^n nin bir haritası $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi D dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x haritasına D dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan D dağılmı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa D dağılımına integrallenebilirdir denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold, M^n nin $r-$boyutlu bağlantılı alt manifoldu N ve M^n nin bir $r-$ boyutlu dağlımı D olsun. Her $p \in N$ için, $\mathsf{D}_p = T_pN$ ise N ye M^n nin $r-$boyutlu integral alt manifoldu denir (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve w M^n üzerinde C^∞ bir $1-$form olsun. M^n nin her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit ise $\ker w_p$ M^n üzerinde bir $r-$boyutlu dağlımdır (Sharpe 1997).

Teorem 3.1.1. (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir $r-$boyutlu dağılımı D olsun. D dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \mathsf{D}$ için $[X, Y] \in \mathsf{D}$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Önerme 3.1.5. M^n bir C^∞ manifold, w M^n üzerinde C^∞ bir $1-$form ve her $p \in M^n$ noktası için $n = boy(\ker w_p) = r$ sabit olsun. Böylece $\mathsf{D} = \{\ker w_p \ : \ p \in M^n\}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \ker w$ için $dw(X, Y) = 0$ olmasıdır (Sharpe 1997).

Uyarı 3.1.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Her $p\in M^{2n+1}$ için, $D_p=\ker\eta_p=\{X\in T_pM\ :\ \eta(X_p)=0\}$ ve $D=\{D_p\}$ olmak üzere, $boy(D_p)=2n$ olduğundan Önerme 3.1.4. gereğince D M^{2n+1} nin bir $2n-$boyutlu dağılımı olur. Diğer yandan, M^{2n+1} bir hemen hemen kosimplektik manifold olduğundan $d\eta=0$ olup, Önerme 3.1.5 yardımıyla D dağılımı integrallenebilirdir. Böylece D dağılımına $2n-$boyutlu integral alt manifoldlar karşılık gelir.

Önerme 3.1.6. Bir hemen hemen kosimplektik manifold, bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\Re$ veya S^1 nin bir lokal aşikar çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $h=0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2007).

Önerme 3.1.8. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul D dağılımının integral alt manifoldlarının Kaehler ve $h=0$ olmasıdır (Kim ve Pak 2005).

İspat. Eğer yapı normal ise, her X vektör alanı için,

$$\begin{aligned} N(X,\xi)= &\ N_\phi(X,\xi)+2d\eta(X,\xi)\xi \\ = &\ -\phi[\phi X,\xi]+\phi^2[X,\xi]+2d\eta(X,\xi)\xi \\ = &\ 2\phi hX=0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Bu nedenle, $h=0$ dır. Diğer bir yandan, her bir X,Y vektör alanları için

$$N_\phi(X,Y)=[\phi X,\phi Y]-\phi[\phi X,Y]-\phi[X,\phi Y]-[X,Y]=N_{\phi ?D}(X,Y) \tag{3.15}$$

elde ederiz. Açıkça görülür ki $N_J=0$ olması için ancak ve ancak J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir olmalıdır. Bu nedenle (3.8) ve (3.9) ile ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.9. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, D değme dağılımının integral alt manifoldları

Kaehler olacak şekilde bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\xi = 0$ olmasıdır.

İspat. Herhangi bir vektör alanı X olmak üzere, $N_{\phi}(X,\xi) = 2\phi hX$ eşitliği yazılır. Bu nedenle, yapının normal olduğunu kabul edersek $Y \in \mathbf{D}$ için, $h(Y) = 0$ elde edilir. $h(\xi) = 0$ olduğundan $h = 0$ bulunur ve (3.7) ifadesi $\nabla\xi = 0$ eşitliğini gerektirir. (3.7) ifadesi yardımıyla eğer $\nabla\xi = 0$ ise $h = 0$ dır. O halde, keyfi X vektör alanları için $N_{\phi}(X,\xi) = 0$ dır. $J_{\mathbf{D}}$ hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu durumda her $X, Y \in \mathbf{D}$ için $N_{\phi}(X,Y) = N_{J_{\mathbf{D}}}(X,Y) = 0$ dır. Böylece $\mathbf{D}$ dağılımının integral alt manifoldları Kaehler yapıdadır.

Sonuç 3.1.1. (M,ϕ,ξ,η,g), $3-$boyutlu bir hemen hemen kosimplektik manifoldu $\nabla\xi = 0$ şartını sağlıyorsa bir kosimplektik manifolddur.

İspat. Boyutun 3 olması durumunda, $\mathbf{D}$ dağılımının integral alt manifoldları boyutu 2 olan hemen hemen Kaehler yapdadırlar. Böylece Önerme 3.1.8 den dolayı ispat tamamlanır.

3.2. TENSÖR ALANI ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda belli tensör koşullarını sağlayan A ve h tensör alanları incelenmiştir. Şimdi, bundan sonraki bölümlerde kullanacağımız temel eşitlikleri verelim.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde $(1,1)-$tipli A ve h tensör alanları, sırasıyla, $A = -\nabla\xi$ ve $h = \frac{1}{2}\mathbf{L}_{\xi}\phi$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her X, Y vektör alanları için,

(i) A ve h simetriktir,

(ii) $A\phi + \phi A = 0,$

(iii) $\eta \circ A = 0,\ \eta \circ h = 0,$

(iv) $h = A \circ \phi,$

(v) $hA + Ah = 0,$

(vi) $\dot{I}z(A) = 0$

(vii) $\dot{I}z(\phi A) = 0$

eşitlikleri sağlanır (Olzsak ve Dacko 1998).

İspat. (i) M^{2n+1} üzerinde herhangi X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned} g(AX, Y) &= g(\phi hX, Y) \\ &= -g(X, h\phi Y)) \\ &= g(\phi hY, X) \\ &= g(AY, X) \end{aligned}$$

dır. Böylece A simetriktir. Özel olarak, $X = \xi$ için $A\xi = \phi h\xi = 0$ elde edilir. Benzer olarak, tensör alanının simetrik olduğu kolayca elde edilir.

(ii) A tensör alanının özellikleri gözönüne alındığında $A\phi = (\phi h)\phi$ ve $\phi A = \phi(\phi h)$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $A\phi + \phi A = 0$ eşitliği bulunur.

(ii) A tensör alanının tanımından

$$\begin{aligned} (\eta \circ A)X &= \eta(AX) \\ &= g(-\nabla_X \xi, \xi) \\ &= g(X, \nabla_\xi \xi) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\eta \circ h = 0$ eşitliği $\mathbf{L}$ Lie türev operatörünün tanımı kullanılarak elde edilir.

(iv) (3.3) eşitliğinden $A\phi = h$ dır.

(v) hA ve Ah bileşke tensör alanları

$$hA = h\phi h, \; Ah = \phi h^2$$

şeklinde bulunur. Böylece yukarıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanarak $hA + Ah = 0$ elde edilir.

(vi)- (vii) A ve ϕA tensör alanlarının izleri alınır ve (3.7) eşitliği kullanılırsa (vi) ve (vii) şıkları elde edilir.

Önerme 3.2.1. Bir hemen hemen kosimplektik manifoldun $\mathcal{D}$ dağılımının integral alt manifoldlarının Kaehler yapıda olması için gerek ve yeter koşul her X, Y vektör alanları için,

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi + \eta(Y)\phi AX \tag{3.16}$$

dır. Burada $AX = \phi hX$ olarak alınmıştır (Olszak ve Dacko 1998).

3.3. EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü yardımıyla bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir.

Önerme 3.3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} üzerinde herhangi vektör alanları X, Y için,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \\ &= (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \end{aligned} \tag{3.17}$$

eşitliği sağlanır (Olzsak ve Dacko 1998).

İspat. R Riemann eğrilik tensörü tanımı ve (3.8) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_Y\nabla_X\xi-\nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= \nabla_X(-\phi hY)-\nabla_Y(-\phi hX) \\ &\quad +(\phi h[X,Y]) \\ &= -\nabla_X\phi hY+\nabla_Y\phi hX+\phi h[X,Y] \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.3.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

$$R(X,\xi)\xi=\phi(\nabla_\xi h)X-h^2X \tag{3.18}$$

$$(\nabla_\xi h)X=-\phi R(X,\xi)\xi-\phi h^2X \tag{3.19}$$

$$R(X,\xi)\xi-\phi R(\phi X,\xi)\xi=-2h^2X \tag{3.20}$$

$$S(X,\xi)=-\mathrm{div}(\phi h)X \tag{3.21}$$

$$S(\xi,\xi)=-trace(h^2) \tag{3.22}$$

eşitlikleri geçerlidir (Öztürk, Aktan ve Murathan 2010).

İspat. $\nabla_\xi\phi=0$ ve (3.16) ifadeleri kullanılarak **(**3.18) bulunur. **(**3.18) eşitliğine ϕ uygulanır ve $g\left((\nabla_\xi h)X,\xi\right)=0$ olduğu gözönüne alınarak **(**3.19) elde edilir. **(**3.20) ifadesi (3.18) den kolayca bulunur.

Özdeğerleri $\{\mu_0=0,\ \mu_i,\ -\mu_i\}$ olan h nın özvektörlerinden oluşan $\{E_0=\xi,\ E_i,\ E_{n+i}=\phi E_i\}$ yerel ortonormal bir $\phi-$ bazı alınabilir. **(**3.17) eşitliğinden,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g\left(R(E_i,Y)\xi, E_i\right) = -\sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_{E_i}\phi h)Y, E_i) \tag{3.23}$$

yazılabilir. Bu sonuç (3.21) ifadesini verir. Son olarak, (3.21) eşitliğinde $Y=\xi$ alınarak, (3.22) elde edilir.

Tanım 3.3.1. M, R eğrilik tensörüne sahip bir değme manifold olsun. α, T_PM tanjant uzayında $2-$boyutlu bir düzlem olmak üzere, $\phi-$holomorfik kesit eğriliği $K(\alpha,P)=R(X,\phi X,\phi X,X)$ seklinde tanımlanır.

3.4. İNTEGRAL ALT MANİFOLDLARI KAEHLER OLAN HEMEN HEMEN KOSİMPLEKTİK UZAY FORMLARI

Bu kısımda, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifoldun uzay form olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar orjinaldir.

Yardımcı Teorem 3.4.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &R(\phi X,\phi Y)Z - R(X,Y)Z = \eta(Y)R(\xi,X,Z) + g(AZ,\phi X)A\phi Y - g(AZ,\phi Y)A\phi X \\ &-g(AZ,X)AY + g(AZ,Y)AX - \eta(X)R(\xi,Y,Z) + \eta(X)\eta(Y)R(\xi,\xi) \end{aligned} \tag{3.24}$$

dır (Olzsak ve Dacko 1998).

Yardımcı Teorem 3.4.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &R(X,Y)\phi Z - \phi R(X,Y)Z = g(AX,\phi Z)AY - g(AY,\phi Z)AX - g(AX,Z)\phi AY \\ &+g(AY,Z)\phi AX + \eta(Z)\phi((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X) + g(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X,\phi Z)\xi \\ &= g(AX,\phi Z)AY - g(AY,\phi Z)AX - g(AX,Z)\phi AY + g(AY,Z)\phi AX \\ &-\eta(Z)\phi(R(X,Y)\xi) - g(R(X,Y)\xi,\phi Z)\xi \end{aligned} \tag{3.25}$$

dır (Olzsak ve Dacko 1998).

Yardımcı Teorem 3.4.3. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Eğer,

$$P_{\phi}\left(X,Y\right)=(\nabla_{Y}\phi h)X-(\nabla_{X}\phi h)Y \tag{3.26}$$

$$P\left(X,Y\right)=(\nabla_{Y}h)X-(\nabla_{X}h)Y \tag{3.27}$$

olarak tanımlanırsa,

$$P_{\phi}\left(X,Y\right)=\phi P\left(X,Y\right)$$

$$\phi P_{\phi}\left(X,Y\right)=-P\left(X,Y\right)+2g\left(hX,\phi hY\right)\xi$$

$$P_{\phi}\left(X,Y\right)=-P_{\phi}\left(Y,X\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (3.25) ve (3.26) eşitlikleri kullanılarak ispat kolayca elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.4.4. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold ve M^{2n+1} in sabit $\phi-$holomorfik kesit eğriliği H olsun. M^{2n+1} in sabit $\phi-$holomorfik kesit eğriliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$
\begin{aligned}
&48R(X,Y,Z,W)=12H\left[g(X,W)g(Z,Y)-g(X,Z)g(W,Y)\right]\\
&-12H\left[\eta(X)\eta(W)g(Z,Y)+\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\right.\\
&\left.+2g(X,\phi Y)g(Z,\phi W)-\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)g(W,Y\right]\\
&+12H\left[g(X,\phi Z)g(W,\phi Y)-g(X,\phi W)g(Z,\phi Y\right]\\
&-12g(AX,\phi Z)g(AY,\phi W)+12g(AW,\phi X)g(AZ,\phi Y)\\
&-12g(AZ,\phi X)g(AW,\phi Y)+12g(AX,\phi W)g(AY,\phi Z)\\
&+24g(AX,Z)g(AW,Y)-24g(AX,W)g(AZ,Y)\\
&-24g(AX,Z)g(W,Y)+24\eta(Y)\eta(W)g(AX,Z)\\
&+24g(AX,W)g(Z,Y)-24\eta(Y)\eta(Z)g(AX,W)\\
&+24g(AZ,Y)g(X,W)-24\eta(X)\eta(W)g(AZ,Y)\\
&-24g(X,Z)g(AW,Y)+24\eta(X)\eta(Z)g(AW,Y)\\
&+48\eta(X)P_\phi(Z,W,Y)+48\eta(Z)P_\phi(X,Y,W)\\
&-48\eta(W)P_\phi(X,Y,Z)-48\eta(X)\eta(W)P_\phi(Z,\xi,Y)\\
&-48\eta(X)\eta(Z)P_\phi(\xi,W,Y)-48\eta(X)\eta(Y)P_\phi(Z,W,\xi)\\
&-48\eta(Y)P_\phi(Z,W,X)+48\eta(Y)\eta(W)P_\phi(Z,\xi,X)\\
&+48\eta(Y)\eta(Z)P_\phi(\xi,W,X)+48\eta(X)\eta(Z)P_\phi(\xi,Y,W)\\
&-48\eta(X)\eta(W)P_\phi(\xi,Y,Z)
\end{aligned}
$$

olmasıdır.

İspat. Her $X,Y,Z\in D$ olmak üzere, $\phi-$ holomorfik kesit eğriliği tanımı kullanılarak,

$$g\left(R(X,\phi X)X,\phi X\right)=-Hg\left(X,X\right)^2 \tag{3.28}$$

yazılabilir. (3.24) den

$$
\begin{aligned}
&R(X,\phi Y,X,\phi Y)=R(X,\phi Y,Y,\phi X)+g(AX,\phi X)g(AY,\phi Y)\\
&-g(A\phi Y,\phi X)g(AX,Y)+g(A\phi Y,\phi Y)g(AX,X)\\
&-g(A\phi Y,X)g(AX,\phi Y)
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

ve

$$R(X,\phi X,Y,\phi X)=R(X,\phi X,X,\phi Y), \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.28) eşitliğinde X yerine $X+Y$ alınırsa,

$$-H\left[2g\left(X,Y\right)^2+2g(X,X)g(X,Y)+2g(X,Y)g(Y,Y)+g(X,X)g(Y,Y)\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(gR(X+Y,\phi X+\phi Y)\left(X+Y\right),\phi X+\phi Y\right)+\tfrac{1}{2}H\left(g(X,X)^2+g(Y,Y)^2\right)$$

olduğu görülür. (3.24) eşitliğinden,

$$-H\left[2g\left(X,Y\right)^2+2g(X,X)g(X,Y)+2g(X,Y)g(Y,Y)+g(X,X)g(Y,Y)\right]$$
$$=R(X,\phi X,Y,\phi X)+R(X,\phi X,X,\phi Y)+R(X,\phi X,Y,\phi Y)$$
$$+R(X,\phi Y,Y,\phi X)+R(Y,\phi X,Y,\phi Y)+R(X,\phi Y,Y,\phi Y)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[R(Y,\phi X,Y,\phi X)+R(X,\phi Y,X,\phi Y)\right]$$

olup, (3.30) eşitliği ve Bianchi özdeşliği kullanılarak

$$-H\left[2g\left(X,Y\right)^2+2g(X,X)g(X,Y)+2g(X,Y)g(Y,Y)+g(X,X)g(Y,Y)\right]$$
$$=R(X,\phi X,Y,\phi X)+R(X,\phi X,X,\phi Y)+R(X,\phi X,Y,\phi Y)+R(X,\phi Y,Y,\phi X)$$
$$+R(Y,\phi X,Y,\phi Y)+R(X,\phi Y,Y,\phi Y)+\tfrac{1}{2}\left[g(A\phi X,\phi X)g(AY,Y)-g(AY,\phi X)^2\right.$$
$$\left.g(A\phi Y,\phi Y)g(AX,X)+g(AX,\phi Y)^2\right]$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılarak eşitlik,

$$-H\left[2g\left(X,Y\right)^2+2g(X,X)g(X,Y)+2g(X,Y)g(Y,Y)+g(X,X)g(Y,Y)\right]$$
$$=2R(X,\phi X,X,\phi Y)+2R(X,\phi Y,Y,\phi X)+R(X,Y,\phi X,\phi Y)$$
$$+2R(Y,\phi Y,Y,\phi X)+R(X,\phi Y,X,\phi Y)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[g(AY,Y)g(A\phi X,\phi X)-g(AY,\phi X)^2-g(AX,X)g(A\phi Y,\phi Y)\right.$$
$$\left.+g(AX,\phi Y)^2\right]$$

şekline dönüşür. (3.25) ve (3.29) ifadelerinden,

$$
\begin{aligned}
&2R(X,\phi X,X,\phi Y)+2R(Y,\phi X,Y,\phi Y)+3R(X,\phi Y,Y,\phi X)\\
&+R(X,Y,X,Y)+\tfrac{1}{2}\left[2g\left(AX,\phi X\right)g\left(AY,\phi Y\right)-2g\left(AX,\phi Y\right)g\left(AY,\phi X\right)\right.\\
&\left.-2g\left(AX,X\right)g\left(AY,Y\right)\right]+4g\left(AX,Y\right)^2-g\left(AX,\phi Y\right)^2\\
&+2g\left(AX,\phi X\right)g\left(AY,\phi Y\right)+g\left(AY,Y\right)g\left(A\phi X,\phi X\right)\\
&-g\left(AY,\phi X\right)^2-g\left(AX,X\right)g\left(A\phi Y,\phi Y\right)\\
&=-H\left[2g\left(X,Y\right)^2+2g(X,X)g(X,Y)+2g(X,Y)g(Y,Y)+g(X,X)g(Y,Y)\right].
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

elde edilir. (3.31) de Y yerine $-Y$ yazılır ve bulunan eşitlik. (3.31) ile toplan

$$
\begin{aligned}
&3R\left(X,\phi Y,Y,\phi X\right)+R\left(X,Y,X,Y\right)=-H\left[2g\left(X,Y\right)^2+g\left(X,X\right)g\left(Y,Y\right)\right]\\
&-2g\left(AX,\phi X\right)g\left(AY,\phi Y\right)+g\left(AX,\phi Y\right)g\left(AY,\phi X\right)+2g\left(AX,X\right)g\left(AY,Y\right)\\
&+2g\left(AX,\phi Y\right)^2-4g\left(AX,Y\right)^2-\tfrac{1}{2}\left[g\left(AY,Y\right)g\left(A\phi X,\phi X\right)\right.\\
&\left.-g\left(AY,\phi X\right)^2-g\left(AX,X\right)g\left(A\phi Y,\phi Y\right)\right].
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

elde edilir. (3.32) eşitliğinde Y yerine ϕY alınarak

$$
\begin{aligned}
&-H\left[2g\left(X,\phi Y\right)^2+g\left(X,X\right)g\left(\phi Y,\phi Y\right)\right]\\
&=-3R\left(X,Y,\phi Y,\phi X\right)+R\left(X,\phi Y,X,\phi Y\right)\\
&-g\left(AX,\phi X\right)g\left(A\phi Y,Y\right)+g\left(AX,Y\right)g\left(A\phi Y,\phi X\right)\\
&-2g\left(AX,X\right)g\left(A\phi Y,\phi Y\right)+2g\left(AX,\phi Y\right)^2-g\left(AX,Y\right)^2\\
&+g\left(AX,\phi X\right)g\left(A\phi Y,Y\right)+\tfrac{1}{2}\left[g\left(A\phi Y,\phi Y\right)g\left(A\phi X,\phi X\right)\right.\\
&\left.-g\left(A\phi Y,\phi X\right)^2-g\left(AX,X\right)g\left(AY,Y\right)+g\left(AX,Y\right)^2\right]\\
&=3R\left(\phi X,\phi Y,X,Y\right)+R\left(X,\phi Y,X,\phi Y\right)\\
&-2g\left(AX,\phi X\right)g\left(AY,\phi Y\right)-g\left(AX,X\right)g\left(A\phi Y,\phi Y\right)\\
&+g\left(AX,Y\right)g\left(A\phi Y,\phi X\right)+2g\left(AX,\phi Y\right)^2\\
&+\tfrac{1}{2}\left[g\left(A\phi Y,\phi Y\right)g\left(A\phi X,\phi X\right)-g\left(A\phi Y,\phi X\right)^2\right.\\
&\left.-g\left(AX,X\right)g\left(AY,Y\right)-g\left(AX,Y\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

yazılabilir. (3.25) ve (3.29) eşitlikleri (3.33) ifadesinde kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&= 3R(X,Y,X,Y) + R(X,\phi Y,Y,\phi X) \\
&+2g(AX,\phi X)g(AY,\phi Y) - 3g(AX,\phi Y)g(AY,\phi X) \\
&-\tfrac{7}{2}g(AX,X)g(AY,Y) + \tfrac{5}{2}g(AX,Y)^2 \\
&-g(AX,X)g(A\phi Y,\phi Y) + g(AX,\phi Y)^2 \\
&+\tfrac{1}{2}\left[g(A\phi Y,\phi Y)g(A\phi X,\phi X) - g(A\phi Y,\phi X)^2\right]
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

bulunur. Bu son ifadede (3.32) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&= 3R(X,Y,X,Y) - \tfrac{1}{3}R(X,Y,X,Y) - \tfrac{H}{3}\left[2g(X,Y)^2 + g(X,X)g(Y,Y)\right] \\
&+\tfrac{4}{3}g(AX,\phi X)g(AY,\phi Y) - \tfrac{8}{3}g(AX,\phi Y)g(AY,\phi X) - \tfrac{17}{6}g(AX,X)g(AY,Y) \\
&+\tfrac{11}{6}g(AX,Y)^2 + \tfrac{7}{6}g(AX,\phi Y)^2 - \tfrac{1}{6}g(AY,Y)g(A\phi X,\phi X) + \tfrac{1}{6}g(AY,\phi X)^2 \\
&-\tfrac{5}{6}g(AX,X)g(A\phi Y,\phi Y) + \tfrac{1}{2}\left[g(A\phi Y,\phi Y)g(A\phi X,\phi X) - g(A\phi Y,\phi X)^2\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler ile birlikte

$$
\begin{aligned}
8R(X,Y,X,Y) &= H\left[2g(X,\phi Y)^2 + g(X,X)g(\phi Y,\phi Y) + 2g(X,Y)^2 + g(X,X)g(Y,Y)\right] \\
&-4g(AX,\phi X)g(AY,\phi Y) + 8g(AX,\phi Y)g(AY,\phi X) \\
&+\tfrac{17}{2}g(AX,X)g(AY,Y) - \tfrac{11}{2}g(AX,Y)^2 - \tfrac{7}{2}g(AX,\phi Y)^2 \\
&+\tfrac{1}{2}g(AY,Y)g(A\phi X,\phi X) - \tfrac{1}{2}g(AY,\phi X)^2 + \tfrac{5}{2}g(AX,X)g(A\phi Y,\phi Y) \\
&-\tfrac{3}{2}\left[g(A\phi Y,\phi Y)g(A\phi X,\phi X) - g(AY,\phi X)^2\right]
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

eşitliğine ulaşılır. (3.35) ifadesi, gerekli düzenlemeler ile

$$
\begin{aligned}
&8R(X,Y,X,Y) = -3H\left[2g(X,\phi Y)^2 + g(X,X)g(\phi Y,\phi Y)\right] \\
&+H\left[2g(X,Y)^2 + g(X,X)g(Y,Y)\right] - 4g(AX,\phi X)g(AY,\phi Y) \\
&+8g(AX,\phi Y)g(AY,\phi X) + \tfrac{17}{2}g(AX,X)g(AY,Y) \\
&-\tfrac{11}{2}g(AX,Y)^2 - \tfrac{7}{2}g(AX,\phi Y)^2 + \tfrac{1}{2}g(AY,Y)g(A\phi X,\phi X) \\
&-\tfrac{1}{2}g(AY,\phi X)^2 + \tfrac{5}{2}g(AX,X)g(A\phi Y,\phi Y) \\
&-\tfrac{3}{2}\left[g(A\phi Y,\phi Y)g(A\phi X,\phi X) - g(A\phi Y,\phi X)^2\right]
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Şeklinde yeniden ifade edilebilir. (3.36) da X yerine $X+Z$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&16R(X,Y,X,Y)+32R(Z,Y,X,Y)+16R(Z,Y,Z,Y)\\
&=2H[2g(X,Y)^2+4g(X,Y)g(Z,Y)+2g(Z,Y)^2\\
&+g(X,X)g(Y,Y)+2g(X,Z)g(Y,Y)+g(Z,Z)g(Y,Y)]\\
&-6H[2g(X,\phi Y)^2+4g(X,\phi Y)g(Z,\phi Y)+2g(Z,\phi Y)^2\\
&+g(X,X)g(Y,Y)+2g(X,Z)g(Y,Y)+g(Z,Z)g(Y,Y)]\\
&-8g(AX,\phi X)g(AY,\phi Y)-8g(AX,\phi Z)g(AY,\phi Y)\\
&-8g(AZ,\phi X)g(AY,\phi Y)-8g(AZ,\phi Z)g(AY,\phi Y)\\
&+16g(AX,\phi Y)g(AY,\phi X)+16g(AX,\phi Y)g(AY,\phi Z)\\
&+16g(AY,\phi X)g(AZ,\phi Y)+16g(AZ,\phi Y)g(AY,\phi Z)\\
&+17g(AX,X)g(AY,Y)+34g(AZ,X)g(AY,Y)+17g(AZ,Z)g(AY,Y) \qquad (3.37)\\
&-11g(AX,Y)^2-22g(AX,Y)g(AZ,Y)-11g(AZ,Y)^2\\
&-7g(AX,\phi Y)^2-14g(AX,\phi Y)g(AZ,\phi Y)-7g(AZ,\phi Y)^2\\
&+g(AY,Y)g(A\phi X,\phi X)+2g(AY,Y)g(A\phi X,\phi Z)+g(AY,Y)g(A\phi Z,\phi Z)\\
&-g(AY,\phi X)^2-2g(AY,\phi Z)g(AY,\phi X)-g(AY,\phi Z)^2\\
&+5g(AX,X)g(A\phi Y\phi,Y)+10g(AZ,X)g(A\phi Y,\phi Y)+5g(AZ,Z)g(A\phi Y,\phi Y)\\
&-3g(A\phi Y,\phi Y)g(A\phi X,\phi X)-6g(A\phi Y,\phi Y)g(A\phi X,\phi Z)-3g(A\phi Y,\phi Y)g(A\phi Z,\phi Z)\\
&+3g(A\phi Y,\phi X)^2+6g(A\phi Y,\phi X)g(A\phi Y,\phi Z)+3g(A\phi Y,\phi Z)^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Daha sonra (3.37) eşitliğinde Y yerine $Y+W$ yazılarak ve (2.3) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&16R(X,Y,Z,W)+32R(X,W,Z,Y)\\
&+16R(X,Z,Y,W)=H\big[12g(X,Y)g(Z,W)\\
&-12g(X,\phi Y)g(Z,\phi W)-24g(X,\phi W)g(Z,\phi Y)\\
&-12g(X,Z)g(Z,W)+12g(X,\phi Z)g(Z,\phi W)\big]\\
&+3g(AX,\phi Z)g(AY,\phi W)-3g(AX,\phi Y)g(AZ,\phi W)\\
&-12g(AX,\phi Z)g(AW,\phi Y)+12g(AX,\phi Y)g(AW,\phi Z)\\
&-12g(AZ,\phi X)g(AY,\phi W)+12g(AY,\phi X)g(AZ,\phi W)\\
&-3g(AZ,\phi X)g(AW,\phi Y)+3g(AY,\phi X)g(AW,\phi Z)\\
&+15g(AX,\phi W)g(AY,\phi Z)-15g(AX,\phi W)g(AZ,\phi Y)\\
&+9g(AZ,\phi Y)g(AW,\phi X)-9g(AY,\phi Z)g(AW,\phi X)\\
&+45g(AX,Z)g(AY,W)-45g(AX,Y)g(AZ,W)\\
&+2g(A\phi X,\phi Z)g(AY,W)-2g(A\phi X,\phi Y)g(AZ,W)\\
&+10g(AX,Z)g(A\phi W,\phi Y)-10g(AX,Y)g(A\phi W,\phi Z)\\
&-9g(A\phi X,\phi Z)g(A\phi Y,\phi W)+9g(A\phi X,\phi Y)g(A\phi Z,\phi W)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bianchi özdeşliği kullanılarak, (2.3) den

$$
\begin{aligned}
&48R(X,W,Z,Y)=H\big[12g(X,Y)g(Z,W)\\
&-12g(X,\phi Y)g(Z,\phi W)-24g(X,\phi W)g(Z,\phi Y)\\
&-12g(X,Z)g(Y,W)+12g(X,\phi Z)g(Y,\phi W)\big]\\
&+3g(AX,\phi Z)g(AY,\phi W)-3g(AX,\phi Y)g(AZ,\phi W)\\
&-12g(AX,\phi Z)g(AW,\phi Y)+12g(AX,\phi Y)g(AW,\phi Z)\\
&-12g(AZ,\phi X)g(AY,\phi W)+12g(AY,\phi X)g(AZ,\phi W)\\
&-3g(AZ,\phi X)g(AW,\phi Y)+3g(AY,\phi X)g(AW,\phi Z)\\
&+15g(AX,\phi W)g(AY,\phi Z)-15g(AX,\phi W)g(AZ,\phi Y)\\
&+9g(AZ,\phi Y)g(AW,\phi X)-9g(AY,\phi Z)g(AW,\phi X)\\
&+24g(AX,Z)g(AY,W)-24g(AX,Y)g(AZ,W)
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

elde edilir. X , M^{2n+1} üzerinde keyfi bir vektör alanı olmak üzere,

$$X = X^T + \eta(X)\xi$$

yazılabilir. Burada $X^T \in D$ dir. $\forall \ X,Y,Z,W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W)=R(X^T,Y^T,Z^T,W^T)\\
&+\eta(X)R(\xi,Y^T,Z^T,W^T)+\eta(Y)R(X^T,\xi,Z^T,W^T)\\
&+\eta(Z)R(X^T,Y^T,\xi,W^T)+\eta(W)R(X^T,Y^T,Z^T,\xi)\\
&+\eta(X)\eta(Z)R(\xi,Y^T,\xi,W^T)+\eta(X)\eta(W)R(\xi,Y^T,Z^T,\xi)\\
&+\eta(Y)\eta(Z)R(X^T,\xi,\xi,W^T)+\eta(Y)\eta(W)R(X^T,\xi,Z^T,\xi)
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

dır. Üstelik (3.38) eşitliği yardımıyla, (3.39) ifadesi

$$
\begin{aligned}
&4R(X,Y,Z,W)=H\big[g(X,W)g(Z,Y)-\eta(X)\eta(W)g(Z,Y)\\
&-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)-g(X,\phi W)g(Z,\phi Y)\\
&-2g(X,\phi Y)g(Z,\phi W)-g(X,Z)g(W,Y)\\
&+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)+\eta(X)\eta(Z)g(W,Y)
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

$$+g(X,\phi Z)g(W,\phi Y)\big]-g(Z,\phi X)g(W,\phi Y)$$
$$+2g(\phi X,Y)g(\phi W,Z)+g(X,\phi W)g(Y,\phi Z)$$
$$+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)+\eta(X)\eta(Z)g(W,Y)$$
$$-\eta(X)\eta(W)g(Z,Y)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)$$
$$+3g(X,Z)g(W,Y)-3g(X,W)g(Z,Y)$$

şekline yeniden yazılabilir. Son olarak (3.39) ifadesinde (3.17), (3.26), (3.27) ve (3.40) eşitlikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
48R(X,Y,Z,W) &= 12H\big[g(X,W)g(Z,Y)-g(X,Z)g(W,Y)\big] \\
&-12H\big[\eta(X)\eta(W)g(Z,Y)+\eta(Y)\eta(Z)g(X,W) \\
&+2g(X,\phi Y)g(Z,\phi W)-\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)g(W,Y\big] \\
&+12H\big[g(X,\phi Z)g(W,\phi Y)-g(X,\phi W)g(Z,\phi Y\big] \\
&-12g(AX,\phi Z)g(AY,\phi W)+12g(AW,\phi X)g(AZ,\phi Y) \\
&-12g(AZ,\phi X)g(AW,\phi Y)+12g(AX,\phi W)g(AY,\phi Z) \\
&+24g(AX,Z)g(AW,Y)-24g(AX,W)g(AZ,Y) \\
&-24g(AX,Z)g(W,Y)+24\eta(Y)\eta(W)g(AX,Z) \\
&+24g(AX,W)g(Z,Y)-24\eta(Y)\eta(Z)g(AX,W) \\
&+24g(AZ,Y)g(X,W)-24\eta(X)\eta(W)g(AZ,Y) \\
&-24g(X,Z)g(AW,Y)+24\eta(X)\eta(Z)g(AW,Y) \\
&+48\eta(X)P_\phi(Z,W,Y)+48\eta(Z)P_\phi(X,Y,W) \\
&-48\eta(W)P_\phi(X,Y,Z)-48\eta(X)\eta(W)P_\phi(Z,\xi,Y) \\
&-48\eta(X)\eta(Z)P_\phi(\xi,W,Y)-48\eta(X)\eta(Y)P_\phi(Z,W,\xi) \\
&-48\eta(Y)P_\phi(Z,W,X)+48\eta(Y)\eta(W)P_\phi(Z,\xi,X) \\
&+48\eta(Y)\eta(Z)P_\phi(\xi,W,X)+48\eta(X)\eta(Z)P_\phi(\xi,Y,W) \qquad (3.41) \\
&-48\eta(X)\eta(W)P_\phi(\xi,Y,Z)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Teorem 3.4.5. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold ve M^{2n+1} in sabit $\phi-$holomorfik kesit eğriliği H olsun. Bu durumda M^{2n+1} in Ricci ve skalar eğrilikleri,

$$S(Y,Z)=\tfrac{1}{2}\left[(n+1)H\right]\left\{g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z)\right\}$$
$$+\eta(Z)\sum P_{\phi}(E_i,Y,E_i)-\eta(Y)\sum P_{\phi}(Z,E_i,E_i) \tag{3.42}$$
$$+\eta(Y)\eta(Z)\sum P_{\phi}(\xi,E_i,E_i)-2P_{\phi}(\xi,Y,Z)$$

ve

$$\tau=n(n+1)H-2Tr(h^2) \tag{3.43}$$

şeklindedir.

İspat. $\{E_i\}$, $(i=1,2,...,2n+1)$, M^{2n+1} üzerinde keyfi ortonormal baz vektörleri olmak üzere, (3.41) ifadesinden (3.42) ve (3.42) ifadesinden de $Tr(h)=0$ olduğundan, skalar eğrilik (3.43) elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.4.6. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı,

$$g\left((\nabla_{X^T}h)Y^T,Z^T\right)=0$$

koşulunu sağlyorsa, h tensör alanına $\eta-$paraleldir denir.

Yardımcı Teorem 3.4.6. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$, integral alt manifoldları Kaehler olan hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Eğer h tensör alanı, $\eta-$paralel ise,

$$(\nabla_X h)Y=\eta(X)\left[-\phi lY-\phi h^2Y\right]-\eta(Y)\left(\phi h^2X\right)-g\left(\phi h^2X,Y\right)\xi \tag{3.44}$$

sağlanır.

İspat.

$$
\begin{aligned}
0 &= g\left((\nabla_{X^T} h)Y^T, Z^T\right) = g\left((\nabla_{X-\eta(X)\xi} h)(Y-\eta(Y)\xi, Z-\eta(Z)\xi\right) \\
&= g\left((\nabla_X h)Y, Z\right) - \eta(X)\, g\left((\nabla_\xi h)Y, Z\right) - \eta(Y)\, g\left((\nabla_X h)\xi, Z\right) \\
&- \eta(Z)\, g\left((\nabla_X h)Y, \xi\right) + \eta(X)\eta(Y)\, g\left((\nabla_\xi h)\xi, Z\right) + \eta(Y)\eta(Z)\, g\left((\nabla_X h)\xi, \xi\right) \\
&+ \eta(Z)\eta(X)\, g\left((\nabla_\xi h)Y, \xi\right) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\, g\left((\nabla_\xi h)\xi, \xi\right)
\end{aligned}
$$

Sonuç 3.4.1. (3.43) ifadesinden, $\forall \ X, Y \in \chi(M)$ için,

$$P(X,Y) = \eta(X)[\phi l Y] - \eta(Y)[\phi l X] - 2g\left(\phi h^2 X, Y\right)\xi \tag{3.45}$$

$$P_\phi(X,Y) = -\eta(X)[lY] + \eta(Y)[lX] \tag{3.46}$$

$(1,2)$ tipinde tensör alanı, $Q_1(X,Y)$

$$
\begin{aligned}
Q_1(X,Y) &= (\nabla_X h)Y - \eta(X)\left[-\phi l Y - \phi h^2 Y\right] \\
&+ \eta(Y)\left[\phi h^2 X\right] + g\left(\phi h^2 X, Y\right)\xi.
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

olmak üzere, $Q_1 = 0$ koşulunu sağlayan Kaehler integral alt manifoldlara sahip hemen hemen kosimplektik manifoldların uzayı,

$$\wp = \{(M, \varphi, \xi, \eta, g) : \ Q_1 = 0\}$$

şeklinde tanımlansın.

Yardımcı Teorem 3.4.7. M^{2n+1} $\wp$ sınıfına ait bir manifold olsun. Ohalde h tensör alanının özdeğerleri sabittir.

Yardımcı Teorem 3.4.8. M^{2n+1} $\wp$ sınıfına ait bir manifold olsun. Eğer $\phi-$ holomorfik kesit eğriliği, M nin her noktasında, $\phi-$ holomorfik kesitin seçiminden bağımsız ise,

$\phi-$ holomorfik kesit eğriliği ve eğrilik tensörü $\forall\ X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
&4R(X,Y,Z,W) = c\left[g(X,W)g(Z,Y) - g(X,Z)g(W,Y)\right] \\
&-c\left[\eta(X)\eta(W)g(Z,Y) + \eta(Y)\eta(Z)g(X,W))\right. \\
&+2g(X,\phi Y)g(Z,\phi W - \eta(Y)\eta(W)g(X,Z) \\
&\left.-\eta(X)\eta(Z)g(W,Y\right] \\
&+c\left[g(X,\phi Z)g(W,\phi Y) - g(X,\phi W)g(Z,\phi Y\right] \\
&-g(AX,\phi Z)g(AY,\phi W) + g(AW,\phi X)g(AZ,\phi Y) \\
&-g(AZ,\phi X)g(AW,\phi Y) + g(AX,\phi W)g(AY,\phi Z) \\
&+2g(AX,Z)g(AW,Y) - 2g(AX,W)g(AZ,Y)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

şeklinde verilir.

İspat. Kabul edelim ki M^{2n+1} manifoldu sabit $\phi-$ holomorfik $\phi-$ kesit eğriliği H ya sahip ve H $\phi-$ holomorfik kesitin seçiminden bağımsız olsun. (3.44), (3.45) ve (3.46) eşitliklerini gözönünde bulundurursak, (3.42) ifadesinden,

$$\begin{aligned}
&S(Y,Z) = \tfrac{1}{2}\left[(n+1)H\right]\left\{g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right\} \\
&+Tr(l)\eta(Y)\eta(Z) + 2g(lY,Z)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\tau = n(n+1)H + 3Tr(l) \tag{3.50}$$

elde edilir.

İspat. (3.44) den ve (3.16) kullanılarak ve Yardımcı Teorem 3.4.7. den,

$$\begin{aligned}
&2(\nabla_X S)(Y,Z) = \left[(n+1)X(H)\right]\left\{g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right\} \\
&+\left[2Tr(l) - (n+1)H\right]\left\{\eta(Z)g(Y,\nabla_X\xi) - \eta(Y)g(Z,\nabla_X\xi)\right\} \\
&+4g((\nabla_X l)Y,Z)
\end{aligned}$$

elde edilir, ki buradan

$$
\begin{aligned}
&\sum 2\left(\nabla_{E_i} S\right)\left(Y,E_i\right)=\sum\left[(n+1)E_i(H)\right]\left\{g\left(Y,E_i\right)-\eta(Y)\eta\left(E_i\right)\right\}\\
&+\sum\left[2Tr(l)-(n+1)H\right]\left\{\eta(Y)g\left(E_i,\nabla_{E_i}\xi\right)-\eta\left(E_i\right)g\left(Y,\nabla_{E_i}\xi\right)\right\}\\
&+\sum 4g\left(\left(\nabla_{E_i} l\right)Y,E_i\right)\\
&=(n+1)\sum E_i(H)g\left(Y,E_i\right)-(n+1)\xi(H)\eta(Y)+\sum 4g\left(\left(\nabla_{E_i} l\right)Y,E_i\right)
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

bilinen formül yoluyla,

$$\left(\nabla_X \tau\right)=2\sum\left(\nabla_{E_i} S\right)\left(X,E_i\right)$$

olduğundan, her lokal ortonormal çatı alanı $\{E_i\}\left(i=1,2,...,2n+1\right)$ için, (3.50), (3.51), Yardımcı Teorem 3.4.7. kullanılarak,

$$(n+1)\left\{XH-(\xi H)\eta(X)\right\}=2n(n+1)XH$$

elde edilir. Bu demektir ki $\xi H=0$ ve $(n-1)XH=0$ dır. Yani $n>1$ için H sabittir. $H=c$ diyelim. Yardımcı Teorem 3.4.4 ifadesine (3.44), (3.45) ve (3.46) uygulanılarak, (3.48) i elde ederiz.

Tanım 3.4.1. Sabit $\phi-$holomorfik kesit eğrilikli, $\wp$ sınıfına ait bir tam ve basit bağlantılı hemen hemen kosimplektik manifoldda, bir hemen hemen kosimplektik uzay form denir.

Teorem 3.4.2. M^{2n+1}, $\wp$ sınıfına ait bir tam ve basit bağlantılı bir manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun hemen hemen kosimplektik uzay form olması için gerek ve yeter koşul eğrilik tensörü R nin (3.48) ile verilmesidir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, sabit eğrilikli uzaylar üzerinde hemen hemen kosimplektik manifoldlar için yeni bir teorem verilmiştir. Hemen hemen kosimplektik uzay formlarının alt manifoldlar açık problemlerdir. Ayrıca bazı simetri koşulları altında, çok önemli sonuçlara ulaşılabilir.

5. KAYNAKLAR

Arslan K., Ezentaş R., Mhai I., Murathan C., Özgür C., Ricci curvature of sub-manifolds in Kenmotsu space forms, *Hindawi Pub. Corp*., 29 (12) (**2002**) 719-726.

Bang-Yen C., *Geometry of submanifolds*, New York, M. Dekker, (**1973**).

Blair, D. E., *The theory of quasi-Sasakian structures*, J. Diff. Geometry, **(**1**)** (**1967**) 331-345.

Blair D. E., *Geometry of manifolds with structural group* $U(n)\times O(s)$, J. Diff. Geom., 4 (**1970)** 155-167.

Blair D. E., *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, NewYork (**1970)**.

Blair D. E., *Two remarks on contact metric structures*, Tohoku Math. J., 29 (**1977**) 319-324.

Blair D. E., Koufogiorgos T. and Papantoniou B. J., *Contact metric manifolds satisfying a nullity condition*, Israel J. Math., 91 (1-3) (**1995**) 189-214.

Blair D. E., *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, 203. Birkhâuser Boston, (**2002).**

Boeckx E., *A full classification of contact metric* (κ,μ)*-spaces*, Illinois J. Math., 44(1) (**2000)** 212-219.

Boeckx E., Cho J. T., $\eta-$*parallel contact metric spaces*, Differential geometry and its applications, 22 **(2005)** 275-285.

Boeckx E., Cho J. T., *Locally symmetric contact metric manifolds*, Monatsh. Math., 148 (4) (**2006)** 269-281.

Chinea D., Gonzalez C., *A classification of almost contact metric manifolds,* Annali di Matematica pura ed applicata, 156 (4) (**1990)** 15-36.

Cho J. T., *Geometry of contact strongly pseudo-convex CR-manifolds, J. Korean Math.,* (43) 5 **(2006)** 1019-1045.

Dacko P. and Olszak Z., *On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kahler leaves*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 56 (1) (**1998)** 89-103.

Dacko P., Olszak Z., *On almost cosymplectic* $(\kappa,\mu,\nu)-$*spaces*, Banach Center Publ., 69 (**2005)** 211-220.

Dacko P., Olszak Z., *On almost cosymplectic* $(-1,\mu,0)-$*spaces*, Central European Journal of Mathematics, 3 (2) (**2005)** 318-330.

Dileo G., Pastore A. M., *Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 14 (**2007)** 343-354.

Dileo G., Pastore M., *Almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions*, J. Geom., Birkhauser Verlag Basel., (**2009).**

Dileo G., Pastore M. 2009. *Almost Kenmotsu manifolds with a condition of* $\eta-$*parallelism*, Differential Geo. and its applications, (27) (**2009)** 671-679.

Endo H., *Non-existence of almost cosymplectic manifolds satisfying a certain condition*, Tensor N. S., 63 (**2002)** 272-284.

Endo H., *On Ricci curvatures of almost cosymplectic manifolds,* An. Stiin|. Univ. "Al. I. Cuza" Ia§i, Mat., (40) **(1994)** 75-83.

Gabriel E. V., *A Schur-type Theorem On Indefinite Quaternionic Kaehler Manifolds*, Int. J. Contemp. Math., 11 (2) **(2007)** 529-536.

Gallot S., Hulin D., Lafontaine J., *Riemann Geometry,* 3rd ed., XVI, 322 p., Springer Universitext, ISBN: 9783540204930, (**2004).**

Ghosh A. and Sharma R., *On contact strongly pseudo-convex integrable CR manifolds*, J. Geom., 66, (**1999)** 116-122.

Ghosh A., Sharma R. and Cho J. T., *Contact metric manifolds with* $\eta-$*paralel torsion tensor*, Ann. Glob. Anal. Geom., DOI 10 (**2008)** 1007/s10455-008 9112-1.

Goldberg S. I., Yano K., *Integrability of almost cosymplectic structure*, Pacific J. Math., 31 (**1969)** 373-382.

Goldberg S. I., *Integrability of almost Kaehler manifolds*, Proceedings of the American Math. Soc., 21(1) (**1969)** 96-100.

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(1993).**

Hacısalihoğlu H. H., *Diferensiyel Geometri*, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2000)**.

Hacısalihoğlu H. H., Ekmekçi N., *Tensör Geometri*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, **(2003).**

Janssens D., Vanhecke L., *Almost contact structures and curvature tensors*, Kodai Math J., 4 **(1981)** 1-27.

Kassabov O. T., *Schur's theorem for almost Hermitian manifolds*, C.R. Acad. Bulg. Sci., (54) 3 **(2001)** 15-18.

Kenmotsu K., *A class of contact Riemannian manifold*, Tohoku Math. Journal, 24 **(1972)** 93-103.

Kim T. W., Pak H. K., *Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures*, Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug., 21(4) **(2005)** 841-846.

Kim T. W., Pak H. K., *Criticality of characteristic vector fields on almost cosymplectic manifolds*, J. Korean Math. Soc., 44(3) **(2007)** 605-613.

Kirichenko V. F., *Almost cosymplectic manifolds satisfying the axiom of Pholomorphic planes* (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR (273) **(1983)** 280-28.

Koufogiorgos T. and Tsichlias C., *On the existence of a new class of contact metric manifolds*, Canad. Math. Bull., 43(4) **(2000)** 440-447.

Koufogiorgos T., Markellos M. and Papantoniou J., *The harmonicity of the reeb vector field on contact metric* $3-$ *manifolds*, Pasific Journal of Math., 234 (2) (**2008**).

Kulkarni R. S., *On a theorem of F. Shur*, Journal Diff. Geom., (**4**) (**1970**) 453-456.

Nobuhiro I., *A theorem of Schur type for locally symmetric spaces*, Sci. Rep. Niigata Univ., Ser. A (25) (**1989**) 1-4

O'neill B., *Semi Riemannian Geometry*, A. Press, London, (**1983**)**.**

Olszak Z., *On almost cosymplectic manifolds*, Kodai Math, 4(2) (**1981**) 239-250.

Olszak Z., *Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves*, Tensor N.S., 46 (**1987**) 117-124.

Olszak Z., *Locally conformal almost cosymplectic manifolds*, Coll. Math., 57 (**1989**) 73-87.

Olszak Z., Dacko P., *On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Keahlerian leaves*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, (56) 1 (**1998**) 89-103.

Öztürk H , Aktan N , Murathan C., *Almost α-Cosymplectic* $(\kappa,\mu,\nu)-$*Spaces,* arXiv:1007.0527.(**2010**).

Sharpe R.W., *Differential Geometry*, Graduate Texts in Math., Springer, (**1997**).

Schur F., *Ueber den Zusammenhang der Raume constanten Riemann'schen Kriimmungsmasses mit den projectiven, Raumen*. Math., (27) (**1886**) 537-567.

Spivak M., *Calculus on Manifolds*, Reading, Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., ISBN: 0805902193, (**1965**).

Tanno S., *The standard CR structure on the unit tangent bundle*, Tohoku Math., J. 44 (2) (**1992**) 535-543.

Vaisman I., *Conformal changes of almost contact metric manifolds*, Lecture Notes in Math., Berlin-Heidelberg-New York, 792 (**1980**) 435-443.

Yano K., Kon M., *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp. Singapore, (**1984**).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Gülhan AYAR
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 07.12.1985 / DÜZCE
Telefon	: (0535) 350 79 60
E-posta	: gulhanayar@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Düzce Üniversitesi	2012
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2010
Lise	Düzce Arsal Anadolu Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011-2011	Düzce Ünv. Kaynaşlı M. Y. O	Öğretim Elemanı

Yabancı Dil

İngilizce (KPDS : 63.75)

Yayınlar

Aktan, N. , Bektaş, İ. , Ayar, G. , Almost cosymplectic (k,m)-spaces satisfying some curvature conditions, Internatioanl Congress in Honour of Professor Hari M. Srivastava, Auditorium Campus of Uludag University, Bursa-Turkey, (**2012**).

Aktan, N. , Ayar, G. , Bektaş İ. , A Shur type theorem for almost cosymplectic manifolds, 7.Ankara matematik günleri, Bilkent Üniversitesi, Ankara-Türkiye, **(2012).**

Aktan, N. , Ayar, G. , Bektaş İ. , Almost cosymplectic manifolds of constant sectional

curvature, X. Geometri sempozyumu, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir-Türkiye, **(2012).**

Aktan, N. , Bektaş İ. , Ayar, G. , Almost cosymplectic (k,m,v)-spaces satisfying some curvature conditions, X. Geometri sempozyumu, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir Türkiye, **(2012).**

Aktan, N. , Ayar, G. , Bektaş İ. , A Shur type theorem for almost cosymplectic manifolds, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,* (incelemede).